



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.04

УДК 539.374

АНАЛИЗ ЦИКЛИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И МАЛО-МНОГОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ В УСЛОВИЯХ ОДНООСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

В.С. Бондарь, В.В. Даншин, Д.А. Алхимов

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 20 июля 2016 г.
Принята: 28 ноября 2016 г.
Опубликована: 30 декабря 2016 г.

Ключевые слова:

циклическое нагружение, пластичность, микронапряжения, повреждение, мало-многоцикловая усталость.

АННОТАЦИЯ

На основе анализа петли пластического гистерезиса сформулированы эволюционные уравнения для трех типов микронапряжений, отвечающих за смещение центра поверхности нагружения, а на их основе уравнения теории пластического течения при комбинированном упрочнении.

Интегрированием эволюционного уравнения для микронапряжений второго типа при жестком симметричном циклическом нагружении с постоянным размахом пластической деформации в условиях одноосного напряженного состояния получены выражения для микронапряжений на l -м полцикле, а также стабилизированные максимальные и минимальные значения микронапряжений. Далее рассмотрена работа микронапряжений второго типа на поле пластических деформаций и на основе экспериментальных данных показано, что величина этой работы является постоянной характеристикой разрушения в условиях мало-многоциклового усталости (от 10^1 до 10^6 циклов). На основе этих результатов сформулирован критерий мало-многоциклового усталости. Получены его асимптоты при малом и большом числе циклов до разрушения. Приведено сопоставление расчетных и экспериментальных результатов по усталости. Проанализировано расчетное и экспериментальное поведение накопленной пластической деформации при мало-многоциклового усталости.

На основе анализа экспериментальных данных по накоплению повреждений при циклических нагружениях сформулировано кинетическое уравнение накопления повреждений, описывающее нелинейные процессы накопления повреждений. Проведено сопоставление расчетных и экспериментальных результатов при многооблочных циклических нагружениях.

Анализируются процессы вышагивания (ratcheting) и посадки петли пластического гистерезиса при несимметричных циклических нагружениях и определяется параметр и его функциональная зависимость, позволяющая описать эти процессы. Проводится сопоставление расчетных и экспериментальных результатов исследования процессов несимметричных мягких и жестких циклических нагружений.

© ПНИПУ

© **Бондарь Валентин Степанович** – заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: bondar@mami.ru

Даншин Владимир Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: tm@mami.ru

Алхимов Дмитрий Александрович – аспирант, e-mail: tm@mami.ru

Valentin S. Bondar – Honored Worker of Science of the Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: bondar@mami.ru

Vladimir V. Danshin – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: tm@mami.ru

Dmitriy A. Alkhimov – Postgraduate Student, e-mail: tm@mami.ru

ANALYSIS ON CYCLIC DEFORMATION AND LOW-HIGH-CYCLE FATIGUE IN UNIAXIAL STRESS STATE

V.S. Bondar, V.V. Danshin, D.A. Alkhimov

Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 July 2016
Accepted: 28 November 2016
Published: 30 December 2016

Keywords:

cyclic loading, plasticity, backstresses, damage, low-high cycle fatigue.

ABSTRACT

Having analyzed the hysteresis loop of plastic, the authors have formulated the evolution equations for three types of backstresses which are responsible for the shift of yield surface; and based on them the equations of the theory of plastic flow under combined hardening have been formulated.

By integrating the evolution equation for the backstresses of the second type under rigid symmetric cyclic loading with a constant magnitude of plastic deformation in uniaxial stress state, we have obtained the expressions for the backstresses on the first half cycle and a stable maximum and minimum values of backstresses. After it, we have examined the work of backstresses of the second type on the field of plastic deformations; and based on the experimental data it is shown that the value of this work is a constant feature of fracture in the conditions of low-high-cycle fatigue (from 10^1 to 10^6 cycles). Based on these results we formulated the low-high cycle fatigue criterion. Its asymptotes at a small and large number of cycles before failure have been obtained. The computational and experimental results for fatigue have been compared. The computational and experimental behavior of the accumulated plastic strain under low-high-cycle fatigue has been analyzed.

Kinetic equation of damage accumulation describing the nonlinear process of damage accumulation has been formulated based on the analysis of experimental data with regard to damage accumulation under cyclic loadings. A comparison of the calculated and experimental results in multi-block cyclic loading is considered.

The ratcheting and landing processes with respect to plastic hysteresis loops under asymmetric cyclic loading have been analyzed as well as a parameter and its functional relationship to describe these processes have been determined. The computational and experimental research results of processes in soft and hard asymmetrical cyclic loadings have been compared.

© PNRPU

Введение

Математическое моделирование процессов деформирования при циклических нагружениях в основном строится на вариантах теории пластического течения при комбинированном упрочнении, обзор и анализ которых содержится в работах [1–18]. Основной проблемой построения этих вариантов является формулировка достаточно адекватных эволюционных уравнений для смещения центра поверхности нагружения (тензора микронапряжений [1]). В настоящее время в практических расчетах наибольшее применение нашли три варианта-модели пластичности: модель Коротких [6–8], модель Бондаря [2–5] и модель Шабоши [9, 13, 18]. Все эти модели прошли достаточную верификацию [2, 4–18] на широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований. Далее в работе будет рассматриваться только модель Бондаря [19], в которой на основе анализа петли пластического гистерезиса выделены три типа микронапряжений, отвечающие за смещение центра поверхности нагружения. Для каждого типа микронапряжений сформулировано свое эволюционное уравнение. Это позволило построить вариант теории пластического течения при комбинированном упрочнении. Развитие этого варианта на процессы термопластического деформирования содержится в работе [20], а термовязкопластического – в работе [21].

Для описания процесса накопления повреждений формулируется [2–5, 19] кинетическое уравнение накопления повреждений, где в качестве энергии, расходуемой на созда-

ние повреждений в материале, принимается работа микронапряжений на поле пластических деформаций. Впервые кинетическое уравнение на основе работы микронапряжений было рассмотрено в работе [22] при исследовании малоциклового прочностии конических оболочек при теплосменах в условиях сложного неизотермического нагружения. В работе [19] на основе анализа экспериментальных данных от малоциклового до многоциклового усталости (от 10^1 до 10^6 циклов) получено, что работа микронапряжений второго типа на поле пластических деформаций постоянна и, следовательно, может считаться характеристикой разрушения материала. На основе этих результатов формулируется кинетическое уравнение для описания нелинейных процессов накопления повреждений [19], которое в работе [20] обобщено на неизотермические процессы, а в работе [21] – на процессы, развивающиеся во времени с учетом охрупчивания и залечивания материала.

В настоящей работе на основе общих уравнений теории пластичности [19] рассматривается упругопластическое циклическое деформирование и мало-многоцикловая усталость в условиях одноосного напряженного состояния. Рассматривается работа микронапряжений второго типа на поле пластических деформаций и формулируется критерий мало-многоциклового усталости. Определяются его асимптоты при малоцикловом и многоцикловомнагружениях. Проводится сопоставление расчетных и экспериментальных результатов по усталости при одноблочном и многоблочных циклических нагружениях. Анализируются процессы вышагивания (ratcheting) и посадки петли пластического гистерезиса при несимметричных циклических нагружениях, а также эффект малого цикла в большом. Выявляются механические аспекты каждого типа микронапряжений.

1. Основные положения и уравнения теории

Материал однороден и начально изотропен. Рассматриваются малые деформации поликристаллических конструкционных сталей и сплавов. В процессе упругопластического деформирования в материале может возникать только пластическая деформационная анизотропия. Ниже приводятся основные уравнения теории [19].

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (1)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} \left[\dot{\sigma}_{ij} - \nu (3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}) \right] \quad (\sigma_0 = \sigma_{ii} / 3), \quad (2)$$

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} (s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - [C_p (\varepsilon_{u*}^p)]^2 = 0 \quad (3)$$

$$\left(s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}, \quad \sigma_u^* = \left(\frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^* \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon_{u*}^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^M a_{ij}^{(m)}, \quad (4)$$

$$\dot{a}_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} g^{(1)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (5)$$

$$\dot{a}_{ij}^{(2)} = \frac{2}{3} g^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(2)} a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{u*}^p, \quad (6)$$

$$\dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (m = 3, \dots, M), \quad (7)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \lambda = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad (8)$$

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \left\langle \frac{1}{E_*} \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^*} \right\rangle \left(\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = 0, \text{ если } \sigma_u^* < C_p \right), \quad (9)$$

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \left\langle \frac{3G}{E_* + 3G} \frac{s_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}}{\sigma_u^*} \right\rangle \left(\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = 0, \text{ если } \sigma_u^* < C_p \right), \quad (10)$$

$$E_* = q_\varepsilon + g + g_a^{(2)} a_u^{(2)*},$$

$$q_\varepsilon = \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u^*}^p}, \quad g = \sum_{m=1}^M g^{(m)}, \quad a_u^{(2)*} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* a_{ij}^{(2)}}{\sigma_u^*}.$$

Здесь $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}^e, \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – тензоры скоростей полной, упругой и пластической деформаций; $\sigma_{ij}, s_{ij}, s_{ij}^*, a_{ij}$ – тензор напряжений, девиаторы напряжений, активных напряжений и микронапряжений [1]; $\varepsilon_{u^*}^p$ – накопленная пластическая деформация; E, ν, G – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль сдвига; $a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, a_{ij}^{(m)} (m = 3, \dots, M)$ – микронапряжения первого, второго и третьего типов; $g^{(1)}, g^{(2)}, g_a^{(2)}, g^{(m)} (m = 3, \dots, M)$ – определяющие функции, выражающиеся через материальные. Тензор a_{ij} характеризует смещение центра поверхности нагружения (анизотропное упрочнение), а скаляр $C_p (\varepsilon_{u^*}^p)$ – отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения и характеризует изотропное упрочнение. Определяющие функции выражаются через материальные следующим образом:

$$g^{(1)} = E_a, \quad g^{(2)} = \beta \sigma_a, \quad g_a^{(2)} = -\beta, \quad (11)$$

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)} \sigma_a^{(m)} \\ 0, \text{ если } a_u^{(m)} \geq \sigma_a^{(m)} \cap a_{ij}^{(m)} s_{ij}^* > 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\left(a_u^{(m)} = \left(\frac{3}{2} a_{ij}^{(m)} a_{ij}^{(m)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m = 3, \dots, M \right),$$

$$E_a = E_{ao} / \left[1 + K_E (\varepsilon_{u^*}^p)^{n_E+1} \right]. \quad (13)$$

Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводится [19] следующее кинетическое уравнение накопления повреждений:

$$\dot{\omega} = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{W_a}, \quad (14)$$

$$\alpha = \left(\sigma_a / a_u^{(2)} \right)^{n_\alpha}. \quad (15)$$

Здесь ω – мера повреждения материала ($\omega \in [0, 1]$); α и n_α – функция и параметр нелинейности процесса накопления повреждений (при $n_\alpha = 0$ процесс накопления повреждений является линейным).

Таким образом, данный вариант теории замыкают следующие материальные функции и параметры, подлежащие экспериментальному определению:

E, ν – упругие параметры;

$E_{a0}, \sigma_a, \beta, \sigma_a^{(m)}, \beta^{(m)}$ ($m = 3, \dots, M$) – модули анизотропного упрочнения;

K_E, n_E – модули вышагивания;

$C_p(\varepsilon_{u*}^p)$ – функция изотропного упрочнения;

W_a – энергия разрушения;

n_α – параметр нелинейности процесса накопления повреждений.

Базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций и параметров изложен в работе [19].

2. Мало-многоцикловая усталость при одноосном напряженном состоянии

При одноосном растяжении-сжатии микронапряжения второго типа и пластические деформации:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)} = \frac{2}{3} a, \quad a_{22}^{(2)} = a_{33}^{(2)} = -\frac{1}{3} a, \quad a_{12}^{(2)} = a_{23}^{(2)} = a_{31}^{(2)} = 0, \\ \varepsilon_{11}^p = \varepsilon^p, \quad \varepsilon_{22}^p = \varepsilon_{33}^p = -\frac{1}{2} \varepsilon^p, \quad \varepsilon_{12}^p = \varepsilon_{23}^p = \varepsilon_{31}^p = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где a и ε^p – микронапряжения второго типа и пластическая деформация вдоль оси растяжения-сжатия.

В этом случае уравнение (6) примет вид

$$\begin{aligned} da = \beta \sigma_a d\varepsilon^p - \beta a \operatorname{sign}(d\varepsilon^p) d\varepsilon^p \\ (d\varepsilon_{u*}^p = |d\varepsilon^p| = \operatorname{sign}(d\varepsilon^p) d\varepsilon^p). \end{aligned} \quad (17)$$

Рассматривается циклическое одноосное нагружение, когда пластическая деформация на n -м полуцикле ε_n^p меняется от ε_{on}^p до ε_{kn}^p , а микронапряжение второго типа a_n меняется от a_{on} до a_{kn} (рис. 1).

Интегрирование уравнения (17) при начальных условиях

$$a_n = a_{on} \quad \text{при} \quad \varepsilon_n^p = \varepsilon_{on}^p,$$

дает формулу для определения микронапряжений на n -м полуцикле

$$\begin{aligned} a_n = a_{on} \exp \left[-\beta \operatorname{sign}(d\varepsilon^p) (\varepsilon_n^p - \varepsilon_{on}^p) \right] + \\ + \sigma_a \operatorname{sign}(d\varepsilon^p) \left\{ 1 - \exp \left[-\beta \operatorname{sign}(d\varepsilon^p) (\varepsilon_n^p - \varepsilon_{on}^p) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

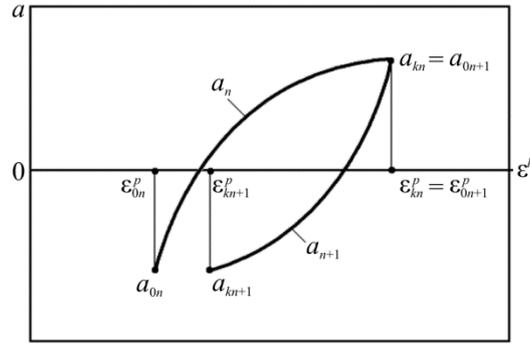


Рис. 1. Изменение микронапряжения при циклическом одноосном нагружении
 Fig. 1. Changes in back stresses under cyclic uniaxial loading

В случае циклического деформирования с размахом пластической деформации $\Delta\varepsilon^p$ формула (18) примет вид

$$a_n = a_{on} \exp(-\beta\Delta\varepsilon^p) + \sigma_a \operatorname{sign}(d\varepsilon^p) [1 - \exp(-\beta\Delta\varepsilon^p)], \quad (19)$$

$$(\Delta\varepsilon^p = \operatorname{sign}(d\varepsilon^p)(\varepsilon_n^p - \varepsilon_{on}^p) = \operatorname{sign}(d\varepsilon^p)(\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_{on+1}^p)).$$

Из формулы (19) можно получить связь между микронапряжениями в конце n -го и $(n-1)$ -го полуциклов:

$$a_{kn} = a_{kn-1} \exp(-\beta\Delta\varepsilon^p) + \sigma_a \operatorname{sign}(d\varepsilon^p) [1 - \exp(-\beta\Delta\varepsilon^p)]. \quad (20)$$

Или вместо (20) можно записать эту связь в виде смешанной прогрессии

$$|a_{kn}| = q|a_{kn-1}| + d, \quad (21)$$

$$q = -\exp(-\beta\Delta\varepsilon^p),$$

$$d = \sigma_a [1 - \exp(-\beta\Delta\varepsilon^p)].$$

Из формулы (21) следует, что

$$|a_{kn}| = q^{n-1}|a_{k1}| + d + qd + q^2d + \dots + q^{n-2}d = |a_{k1}|q^{n-1} + \frac{d(1-q^{n-1})}{1-q}. \quad (22)$$

Но так как $|q| < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{kn}| = \frac{d}{1-q}. \quad (23)$$

Таким образом, через несколько циклов деформирования процесс образования и сжатия микронапряжений практически стабилизируется, и стабилизированные значения микронапряжений в конце полуциклов растяжения и сжатия, соответственно, будут выглядеть как

$$a^+ = \sigma_a \frac{1 - \exp(-\beta\Delta\varepsilon^p)}{1 + \exp(-\beta\Delta\varepsilon^p)}, \quad (24)$$

$$a^- = -\sigma_a \frac{1 - \exp(-\beta \Delta \varepsilon^p)}{1 + \exp(-\beta \Delta \varepsilon^p)}. \quad (25)$$

Далее, рассматривая работу микронапряжений второго типа на полуциклах растяжения и сжатия и учитывая состояние стабилизации, можно получить

$$\Delta W = \int_{\varepsilon_{on}^p}^{\varepsilon_{kn}^p} a_n d\varepsilon_n^p + \int_{\varepsilon_{on+1}^p}^{\varepsilon_{kn+1}^p} a_{n+1} d\varepsilon_{n+1}^p = \frac{2\sigma_a}{\beta} \left[\beta \Delta \varepsilon^p - 2 \frac{1 - \exp(-\beta \Delta \varepsilon^p)}{1 + \exp(-\beta \Delta \varepsilon^p)} \right]. \quad (26)$$

Тогда, основываясь на (26), критерий мало-многоциклового усталости будет иметь вид

$$N_f = \frac{W_a \beta}{2\sigma_a} \left[\beta \Delta \varepsilon^p - 2 \frac{1 - \exp(-\beta \Delta \varepsilon^p)}{1 + \exp(-\beta \Delta \varepsilon^p)} \right]^{-1}. \quad (27)$$

Здесь N_f – число циклов до разрушения.

При размахе пластической деформации $\Delta \varepsilon^p \ll 1/\beta$, т.е. примногоциклового усталости ($N_f > 5 \cdot 10^3$ циклов), уравнение (27) приводится к виду

$$\Delta \varepsilon^p (N_f)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{W_a}{2\sigma_a} \frac{12}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (28)$$

А при размахе $\Delta \varepsilon^p \gg 1/\beta$, т.е. при малом числе циклов до разрушения ($N_f < 2 \cdot 10^2$), уравнение (27) приводится к виду

$$\Delta \varepsilon^p N_f = \frac{W_a}{2\sigma_a}. \quad (29)$$

Ответственность за накопление повреждений микронапряжений второго типа иллюстрируется результатами, приведенными на рис. 2, где показаны изменения работы микронапряжений второго (кривые 1 и 2) и третьего (кривая 3) типов, соответствующие экспериментальным [23, 24] значениям числа циклов до разрушения для нержавеющей стали SS304, материальные функции для которой приведены в работе [19]. Результаты, приведенные на рис.2, показывают, что энергия разрушения, равная работе микронапряжений второго типа, на поле пластических деформаций является постоянной величиной на диапазоне числа циклов до разрушения от 10^2 до 10^6 и может быть принята в качестве характеристики разрушения материала.

Кривая мало-многоциклового усталости, полученная на основе критерия (27), показана на рис. 3 сплошной линией, а экспериментальные результаты [23] для нержавеющей стали SS304 – светлыми кружками. Расчетные и экспериментальные результаты показывают выход на асимптоту (29) при $N_f < 2 \cdot 10^2$ и на асимптоту (28) при $N_f > 5 \cdot 10^3$. Экспериментальные результаты, приведенные в работе [25], также показывают выход кривых усталости на эти асимптоты для ряда материалов. Таким образом, можно говорить о том, что конструкционные стали и сплавы при малом числе циклов до разрушения ($N_f < 2 \cdot 10^2$ циклов) имеют показатель степени в критерии усталости, равный 1, а при

большом числе циклов до разрушения ($N_f > 5 \cdot 10^3$ циклов) показатель степени в критерии усталости равен $\frac{1}{3}$. Во всем диапазоне числа циклов до разрушения (от 10^1 до 10^7 циклов, эксперименты [23–25]) критерий усталости имеет вид (27). На рис. 3 пунктирной кривой показаны результаты, полученные на основании критерия Коффина-Мэнсона [26] при показателе степени, равном $\frac{1}{2}$. Из этих результатов следует, что в данном случае критерий Коффина-Мэнсона удовлетворительно соответствует эксперименту в диапазоне числа циклов до разрушения от $2 \cdot 10^2$ до $5 \cdot 10^3$ циклов.

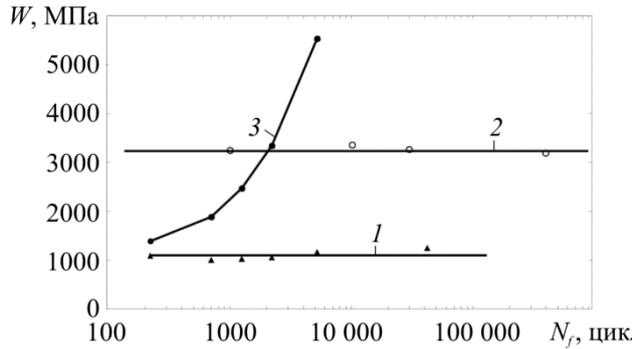


Рис. 2. Изменения работы микронапряжений второго (кривые 1 и 2) и третьего (кривая 3) типов
 Fig. 2. Changes in work of back stresses of second (curve 1 and 2) and third (curve 3) types

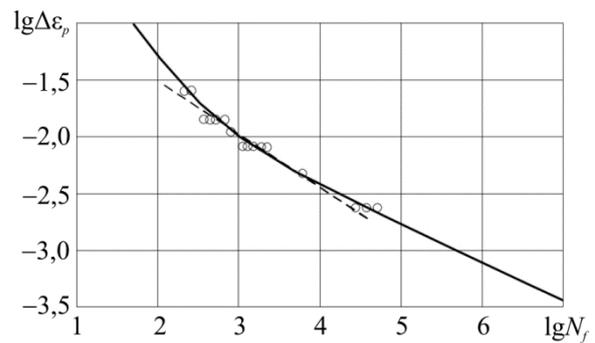


Рис. 3. Кривая мало-многоциклового усталости нержавеющей стали SS304
 Fig. 3. Curve of low-high fatigue for stainless steel SS304

Результаты экспериментальных исследований [25] многоциклового усталости при $N_f > 10^7$ показывают, что может иметь место значительное снижение долговечности особенно при повышенных температурах испытаний. В этом случае длительность испытаний приближается к 10^3 часам, и снижение долговечности может быть объяснено охрупчиванием материала и, соответственно, снижением энергии разрушения. Это явление может быть описано в рамках варианта теории, что и сделано в работах [2, 27].

Изменение накопленной пластической деформации ε_{u*}^p от числа циклов до разрушения для нержавеющей стали SS 304 приведено на рис. 4, где сплошная кривая – расчет, а светлые кружки – эксперимент [23]. Из этих результатов следует, что накопленная пластическая деформация не зависит от числа циклов до разрушения и является постоянной величиной при $N_f < 2 \cdot 10^2$. На постоянстве предельной накопленной пластической деформации построен критерий Колмогорова [28], применяемый в процессах обработки металлов давлением. При $N_f > 5 \cdot 10^3$ накопленная пластическая деформация связана с числом циклов до разрушения степенной зависимостью. На основе такой степенной зависимости и построен критерий усталости в работах Темиса [29].

Далее рассматривается несимметричное циклическое нагружение, имеющее квазистатическую составляющую ε_{st}^p , в условиях одноосного напряженного состояния. В этом случае кинетическое уравнение (14) примет вид

$$d\omega_{st} = \frac{\sigma_a d\varepsilon_{st}^p}{W_a}, \quad (30)$$

так как $a = \sigma_a$ и $\alpha = 1$.

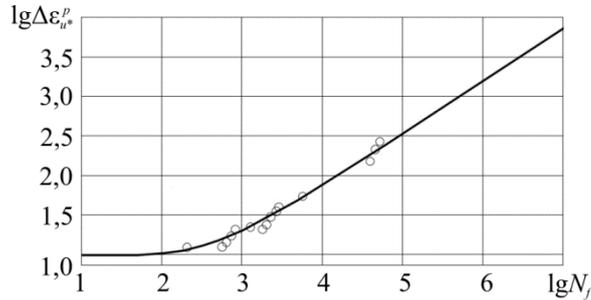


Рис. 4. Изменение накопленной пластической деформации ε_{u*}^p от числа циклов до разрушения для нержавеющей стали SS304

Fig. 4. Relation between accumulated plastic deformation ε_{u*}^p and number of cycles before fracture for stainless steel SS304

Но при статическом разрушении

$$W_a = \sigma_a \cdot \varepsilon_b^p,$$

где ε_b^p – истинная деформация разрушения, и тогда

$$d\omega_{st} = \frac{d\varepsilon_{st}^p}{\varepsilon_b^p}, \quad (31)$$

что соответствует деформационно-кинетическому критерию Гусенкова–Шнейдеровича [30]. Таким образом, кинетическое уравнение (14) при произвольном процессе циклического нагружения автоматически учитывает квазистатические и усталостные повреждения.

В работе [31] приводятся результаты экспериментальных исследований нелинейных процессов накопления повреждений, где за меру повреждения принимается относительная объемная доля дефектов, определяемых на основе ультразвуковых и металлографических исследований. Результаты этих испытаний представлены в виде зависимостей повреждения ω от относительного числа циклов нагружения N/N_f для различных режимов одноосного нагружения. Эти зависимости хорошо аппроксимируются степенной функцией со степенями, соответствующими режимам нагружения, т.е.

$$\omega = \left(N/N_f\right)^\alpha. \quad (32)$$

Так как $W = \Delta W N$, а $W_a = \Delta W N_f$, где ΔW – работа микронапряжений второго типа на пластических деформациях цикла, то вместо (32) следует выражение

$$\omega = \left(\frac{W}{W_a}\right)^\alpha. \quad (33)$$

Дифференцируя левую и правую части (33) по времени и используя (33), можно получить следующее кинетическое уравнение, совпадающее с (14),

$$\dot{\omega} = \alpha \omega^{\alpha-1} \frac{a_{ij}^{(2)} \dot{\epsilon}_{ij}^p}{W_a} \quad \left(\dot{W} = a_{ij}^{(2)} \dot{\epsilon}_{ij}^p \right). \quad (34)$$

Показатель степени α , характеризующий нелинейность процесса накопления повреждений, по экспериментальным данным [31], меняется в интервале от 0 до 1 с увеличением размаха деформации на цикле и при достаточно большом размахе деформации α приближается к единице, а процесс накопления повреждений становится практически линейным. Поэтому в качестве меры, которая может характеризовать интенсивность циклического деформирования, принимается относительная величина микронапряжений второго типа, т.е. функция нелинейности процесса накопления повреждений α может быть представлена в следующем виде:

$$\alpha = \left(\sigma_a / a_u^{(2)} \right)^{n_\alpha}, \quad (35)$$

где n_α – параметр нелинейности процесса накопления повреждений (практически для всех конструкционных сталей и сплавов $n_\alpha = 1,5$). Тем более при больших размахах деформаций, а также при квазистатической деформации, когда интенсивность $a_u^{(2)}$ практически равна σ_a , согласно (34) и (35), процесс накопления повреждений близок к линейному.

Нелинейный процесс накопления повреждений при различных размахах деформации одноблочного циклического нагружения, полученный на основании расчета по уравнениям (1)–(13) варианта теории и кинетическому уравнению (14) для нержавеющей стали SS 304 приведен на рис. 5. Результаты на рис. 5 показывают, что с увеличением размаха

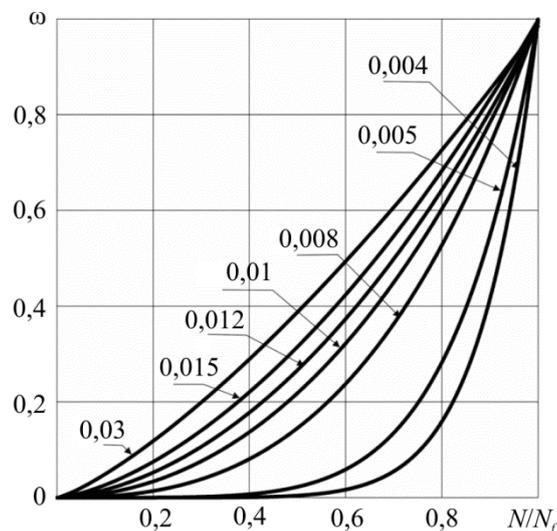


Рис. 5. Нелинейный процесс накопления повреждений при различных размахах деформации одноблочного циклического нагружения для нержавеющей стали SS304

Fig. 5. Nonlinear damage accumulation at different scales of deformation with regard to single-block cyclic loading for stainless steel SS304

деформации процесс накопления повреждений приближается к линейному и накопление повреждений происходит с начальной фазы процесса циклического нагружения, т.е. в данном случае отсутствует первая стадия накопления повреждений. Далее по мере

уменьшения размаха деформации на начальном этапе появляется первая стадия накопления повреждений, на которой повреждение мало, т.е. практически отсутствует. Продолжительность первой стадии накопления повреждений увеличивается с уменьшением размаха деформации. Все эти выводы согласуются с результатами экспериментальных исследований [6, 31].

Нарушение правила линейного суммирования повреждений при многоблочном изменении размаха деформации и различных уровнях предварительного циклирования приведены в работе [19], где теоретические исследования на основании данного варианта теории сопоставляются с результатами экспериментальных исследований [23]. На рис. 6

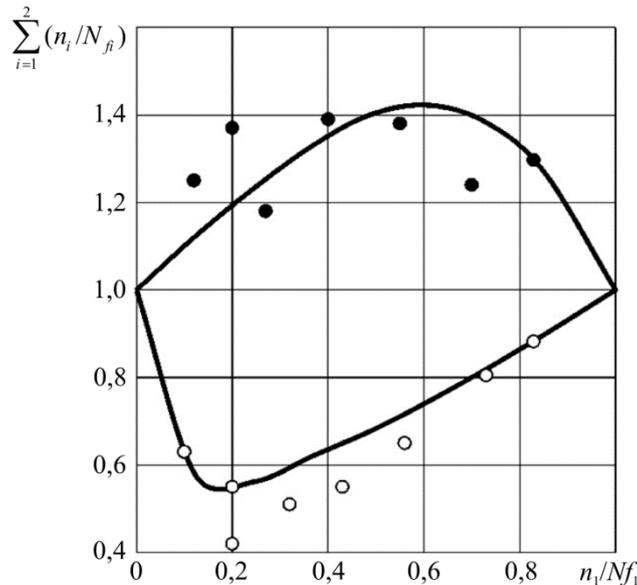


Рис. 6. Суммирование повреждений при двухблочном изменении размаха деформации
Fig. 6. Damage summation at double-block alteration of deformation scale

приведены результаты расчетов и экспериментов [23] при двухблочном изменении размаха деформации, где результаты расчетов изображены сплошными линиями, а результаты экспериментов [23] темными кружками при возрастании размаха деформации (0,005 → 0,015) и светлыми кружками при убывании размаха деформации (0,015 → 0,005). Наблюдается существенное отклонение от правила линейного суммирования повреждений при удовлетворительном соответствии результатов расчетов и экспериментов [23].

3. Вышагивание (ratcheting) и посадка петли пластического гистерезиса

В настоящее время значительное количество работ в области пластичности посвящено теоретическим и экспериментальным исследованиям [10–19] процесса вышагивания (ratcheting) петли пластического гистерезиса при несимметричных мягких (контролируемые напряжения) режимах нагружения. В основном построение вариантов теории происходит в рамках модели Шабоши, увеличивая количество параметров и эволюционных уравнений. В данной работе рассматриваются возможные вклады в процесс вышагивания каждого типа микронапряжений, т.е. определяется механический смысл каждого типа

в процессе циклического нагружения. При несимметричном мягком циклическом нагружении в условиях одноосного напряженного состояния (растяжение-сжатие) напряжение на цикле меняется от σ^- до σ^+ ($|\sigma^-| < |\sigma^+|$). Так как $\sigma^+ = C_p + a^+$, а $\sigma^- = -C_p + a^-$, то несимметричность нагружения характеризуется микронапряжениями a^+ и a^- или $\sigma^{(1)+}$, $\sigma^{(2)+}$, $a^{(m)+}$ и $a^{(1)-}$, $a^{(2)-}$, $a^{(m)-}$ ($m = 3, \dots, M$). Далее рассматривается поочередно характер изменения микронапряжений каждого типа.

Изменение микронапряжений третьего типа имеет место только при циклических нагружениях с размахом деформации $\Delta\varepsilon^p$ меньше ε_M^p [19], что сравнимо с величиной технического допуска ($\varepsilon_M^p \approx 0,002$). Особенностью изменения микронапряжений третьего типа является возврат циклической петли в свое начало, и если $\Delta\varepsilon < \varepsilon_M^p$, то петля остается несимметричной, а если $\Delta\varepsilon \geq \varepsilon_M^p$ – петля будет симметричной. Поэтому механический смысл микронапряжений третьего типа заключается в том, что они позволяют описать известный экспериментальный эффект [32] малого цикла в большом.

Таким образом, микронапряжения третьего типа при несимметричном циклическом нагружении сразу стабилизируются и сохраняют свою симметричность или несимметричность, т.е. не могут обеспечить процесс вышагивания (ratcheting).

Микронапряжения второго типа при несимметричном мягком циклическом нагружении за несколько первых циклов стабилизируются, и процесс вышагивания замедляется. Длительность процесса вышагивания может быть увеличена при значительном уменьшении параметра β – на два порядка меньше значений β для конструкционных сталей и сплавов. Поэтому механический смысл микронапряжений второго типа заключается в обеспечении процесса вышагивания на первых циклах несимметричного мягкого нагружения. Хотя основное предназначение микронапряжений второго типа заключается в их ответственности за процесс накопления повреждений.

Процесс вышагивания (ratcheting) при несимметричном мягком циклическом нагружении имеет значительную длительность и может быть затухающим, постоянным или прогрессирующим [10–19]. Выше показано, что микронапряжения второго и третьего типов не обеспечивают достаточную длительность процесса вышагивания.

Микронапряжение первого типа согласно (5) и (11) вычисляются по следующим формулам:

$$a^{(1)+} = E_a \varepsilon^{p+}, \quad a^{(1)-} = E_a \varepsilon^{p-}, \quad a_m^{(1)} = E_a \varepsilon_m^p, \\ \left(a_m^{(1)} = (a^{(1)+} + a^{(1)-}) / 2, \quad \varepsilon_m^p = (\varepsilon^{p+} + \varepsilon^{p-}) / 2 \right).$$

Тогда для N -го и $(N + 1)$ -го циклов имеют место соотношения

$$a_{mN}^{(1)} = a_{mN+1}^{(1)} = K, \\ E_{aN} \varepsilon_{mN}^p = (\varepsilon_{mN}^p + \Delta\varepsilon^p)(E_{aN} + \Delta E_a), \\ \Delta\varepsilon^p = -\frac{K}{E_a^2} \Delta E_a.$$

Переходя от приращений к дифференциалам и деля левую и правую часть на дифференциал возрастающего от цикла к циклу параметра, например накопленную пластическую деформацию, можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon_{u^*}^p} = K \frac{d}{d\varepsilon_{u^*}^p} \left(\frac{1}{E_a} \right). \quad (36)$$

Как было указано ранее, процесс вышагивания может быть затухающим, постоянным или прогрессирующим. Тогда для изменения пластической деформации в процессе вышагивания может быть введена следующая степенная зависимость:

$$\frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon_{u^*}^p} = \left(\frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon_{u^*}^p} \right)_0 (\varepsilon_{u^*}^p)^n, \quad (37)$$

где при $n < 0$ – затухающее вышагивание; $n = 0$ – постоянное вышагивание; $n > 0$ – прогрессирующее вышагивание.

Объединяя (36) и (37), можно получить следующее уравнение:

$$K \frac{d}{d\varepsilon_{u^*}^p} \left(\frac{1}{E_a} \right) = \left(\frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon_{u^*}^p} \right)_0 (\varepsilon_{u^*}^p)^n. \quad (38)$$

Интегрируя левую и правую часть уравнения (38), используя начальные условия

$$E_a = E_{ao} \quad \text{при} \quad \varepsilon_{u^*}^p = 0$$

и разрешая относительно E_a , можно получить

$$E_a = E_{ao} / \left[1 + \frac{E_{ao}}{K} \left(\frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon_{u^*}^p} \right)_0 (\varepsilon_{u^*}^p)^{n+1} \right] \quad (39)$$

или окончательно

$$E_a = \frac{E_{ao}}{1 + K_E (\varepsilon_{u^*}^p)^{n_E+1}}. \quad (40)$$

Процесс вышагивания (ratcheting) петли пластического гистерезиса иллюстрируется на рис. 7, где приводится изменение средней деформации цикла и циклические диаграммы при блочном изменении среднего напряжения цикла в условиях постоянной величины амплитуды напряжения цикла. Сплошные кривые соответствуют расчету на основе варианта теории пластичности, а светлые кружки – эксперименту [33, 34].

Далее рассматривается посадка петли пластического гистерезиса при несимметричном жестком (контролируемые деформации) циклическом нагружении в условиях одноосного напряженного состояния (растяжение-сжатие) при размахе пластической деформации $\Delta\varepsilon^p$ и средней деформации цикла ε_m^p . При размахе $\Delta\varepsilon^p \geq \varepsilon_M^p$ микронапряжения третьего типа имеют симметричную структуру ($|a^{(m)+}| = |a^{(m)-}|$), а при $\Delta\varepsilon^p < \varepsilon_M^p$ – фиксированную несимметричную структуру, не изменяющуюся в процессе циклического нагружения, т.е. $|a^{(m)+}| \neq |a^{(m)-}|$ ($m = 3, \dots, M$). Микронапряжения второго типа за несколько циклов стабилизируются, и структура их становится симметричной, т.е. ($|a^{(2)+}| = |a^{(2)-}|$).

Что касается микронапряжений первого типа, то они обеспечивают длительную посадку петли пластического гистерезиса (в течение порядка 1000 циклов) либо к симметричной структуре при $\Delta\varepsilon^p \geq \varepsilon_M^p$, либо несимметричной при $\Delta\varepsilon^p < \varepsilon_M^p$, обусловленной несимметричностью петли микронапряжений третьего типа. При посадке петли напряжения растяжения σ^+ и сжатия σ^- связаны с микронапряжениями следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} \sigma^+ &= C_p + a^{(m)+} + a^{(2)+} + E_a (\varepsilon_m^p + \Delta\varepsilon^p / 2), \\ \sigma^- &= -C_p + a^{(m)-} + a^{(2)-} + E_a (\varepsilon_m^p - \Delta\varepsilon^p / 2), \\ \sigma^+ + \sigma^- &= 2E_a \varepsilon_m^p + a^{(m)+} + a^{(m)-}, \\ \sigma_m &= E_a \varepsilon_m^p + \sigma_{m\infty}, \\ (\sigma_{m\infty} &= (a^{(m)+} + a^{(m)-}) / 2). \end{aligned} \quad (41)$$

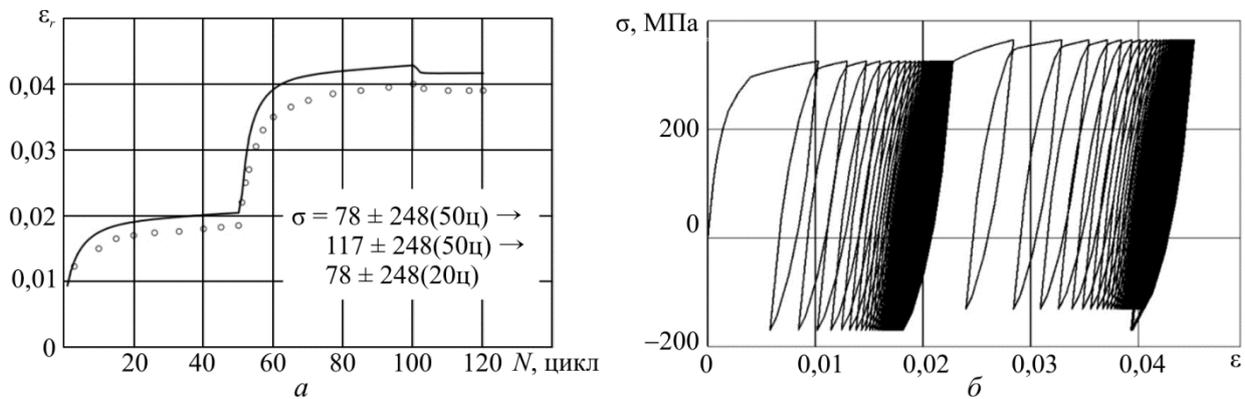


Рис. 7. Поведение средней деформации цикла (а) и циклические диаграммы (б) при блочном изменении среднего напряжения цикла

Fig. 7. Behavior of average cycle deformation (a) and cyclic diagrams (b) under block alteration of average cycle stress

Из формулы (40) можно получить

$$K_E (\varepsilon_{u*}^p)^{n_E+1} = \frac{E_{a0}}{E_a} - 1. \quad (42)$$

Накопленная пластическая деформация определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{u*}^p = \varepsilon_m^p + 2\Delta\varepsilon^p N. \quad (43)$$

Используя выражения (41)–(43), можно получить следующую зависимость:

$$K_E (\varepsilon_m^p + 2\Delta\varepsilon^p N)^{n_E+1} = E_{a0} \varepsilon_m^p / (\sigma_m - \sigma_{m\infty}) - 1. \quad (44)$$

Логарифмируя левую и правую части зависимости (44), можно получить линейную зависимость в логарифмических координатах

$$\begin{aligned} y &= \lg \left[E_{a0} \varepsilon_m^p / (\sigma_m - \sigma_{m\infty}) - 1 \right], \\ x &= \lg (\varepsilon_m^p + 2\Delta\varepsilon^p N), \end{aligned} \quad (45)$$

которая по углу наклона прямой и точки пересечения с осью ординат позволяет определить модули вышагивания n_E и K_E .

Посадка петли пластического гистерезиса определяется зависимостью (41), где при постоянной средней деформации цикла ε_m^p и уменьшающемся модуле E_a среднее напряжение цикла σ_m уменьшается так же, как E_a .

Процесс посадки петли пластического гистерезиса можно описать также на основе уравнения, аналогичного уравнению (6) или (17) для микронапряжений второго типа при достаточно малом β . Тогда среднее значение микронапряжений первого типа на основании зависимости (22) примет следующий вид:

$$a_{mn}^{(1)} = A \left[\exp(-\beta \Delta \varepsilon^p) \right]^n, \quad (46)$$

где A – некоторая константа, а n – номер полуцикла. Используя (46), для среднего напряжения цикла можно получить следующую зависимость:

$$\sigma_{mN} = \sigma_{m\infty} + E_{ao} \varepsilon_m^p \left[\exp(-\beta \Delta \varepsilon^p) \right]^{2N} \quad (E_{ao} = \sigma_a^{(1)} \beta^{(1)}), \quad (47)$$

где $\sigma_{m\infty}$ – асимптотическое значение среднего напряжения цикла, обусловленное микронапряжением третьего типа; $E_{ao} \varepsilon_m^p$ – начальное среднее значение микронапряжения первого типа; N – номер цикла. Далее вместо (47) имеет место следующее выражение:

$$\frac{\sigma_{mN} - \sigma_{m\infty}}{E_{ao} \varepsilon_m^p} = \left[\exp(-\beta \Delta \varepsilon^p) \right]^{2N}. \quad (48)$$

Логарифмируя левую и правую части зависимости (48), можно получить линейную зависимость в логарифмических координатах

$$y = \ln \frac{\sigma_{mN} - \sigma_{m\infty}}{E_{ao} \varepsilon_m^p}, \quad x = \varepsilon_{u*}^p \quad (\varepsilon_{u*}^p = 2N \Delta \varepsilon^p), \quad (49)$$

которая по углу наклона прямой позволяет определить значение модуля β .

Процесс посадки петли пластического гистерезиса в условиях жесткого несимметричного циклического нагружения нержавеющей стали 12X18H9 иллюстрируется на рис. 8, где приведены циклические диаграммы для 1-го и 300-го циклов нагружения, а также изменения максимальных σ^+ , минимальных σ^- и средних σ_m напряжений на цикле. Сплошными кривыми на рис. 8, а и б показаны результаты расчетов на основе варианта теории пластичности, а светлыми кружками – результаты экспериментов, проведенных в НИИ Механики ННГУ. Результаты расчетов без учета изменения модуля E_a показаны на рис. 8, б также сплошными кривыми.

Микронапряжения первого типа вносят также свой существенный вклад в адекватное описание процессов нестационарного жесткого циклического нагружения при блочном изменении размаха деформации. В моделях Коротких [6–8] и Шабоши [9, 13, 18] для описания этих процессов вводится поверхность памяти, и процессы деформирования разделяются на монотонные и циклические, что существенно усложняет уравнения теории и значительно увеличивает числа материальных параметров. В рассматриваемом варианте теории пластичности все три типа микронапряжений вносят свой вклад при переходе

от одного размаха к другому как при увеличении, так и при уменьшении размаха, при преобладающем вкладе микронапряжений первого типа. На рис. 9 приведены изменения амплитуды напряжения и циклические диаграммы в условиях блочного изменения амплитуды деформации при симметричном жестком циклическом нагружении нержавеющей стали SS 304. На рисунке сплошные кривые соответствуют расчету, а светлые кружки – эксперименту [33, 34].

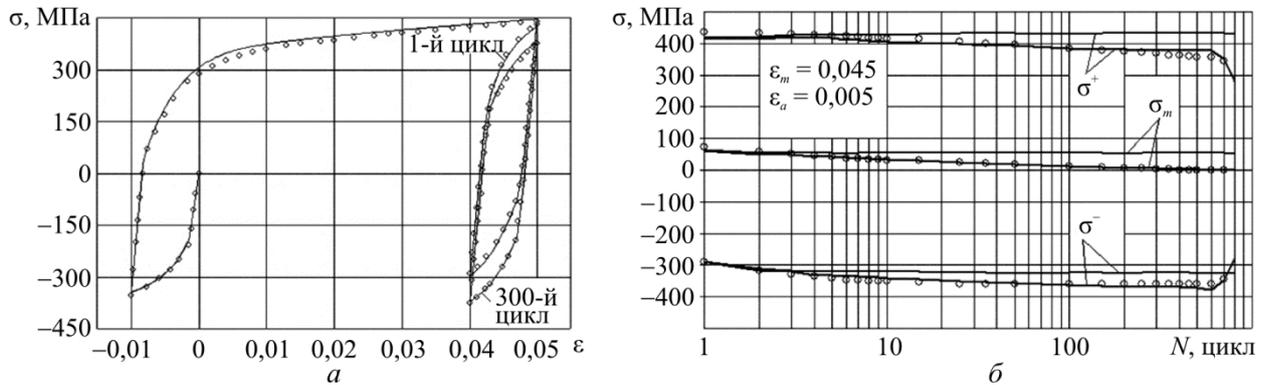


Рис. 8. Циклические диаграммы (а) для 1-го и 300-го циклов жесткого нагружения и изменения максимальных σ^+ , минимальных σ^- и средних σ_m напряжений (б) на цикле для нержавеющей стали 12X18H9

Fig. 8. Cyclic diagrams (a) for the first and 300th cycles of loading and alterations of maximal σ^+ , minimal σ^- and average σ_m stresses (b) at the cycle for stainless steel 12X18H9

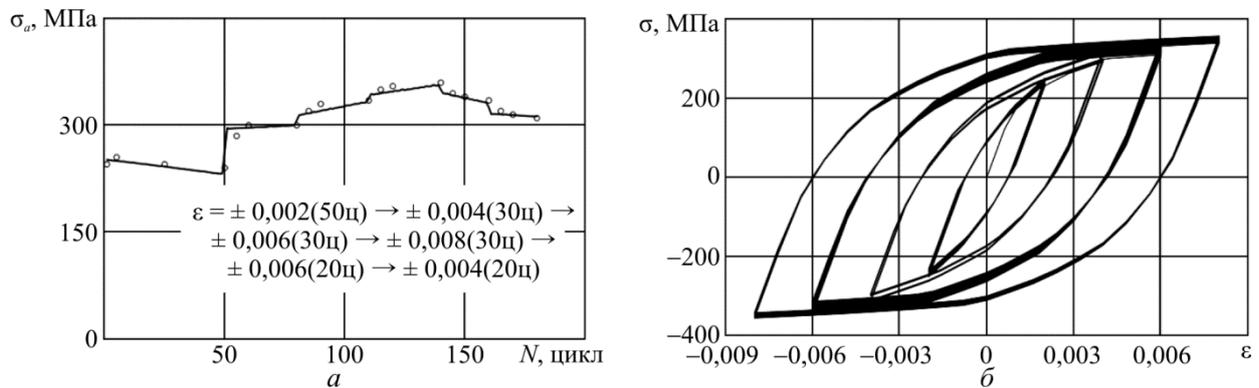


Рис. 9. Поведение амплитуды напряжения (а) и циклические диаграммы (б) при блочном изменении амплитуды деформации цикла

Fig. 9. Behavior of stresses amplitude (a) and cyclic diagrams (b) at the block alteration of cycle deformation amplitude

Таким образом, механический смысл микронапряжений первого типа заключается в обеспечении описания явлений вышагивания (ratcheting) и посадки при несимметричных циклических нагружениях, а также описания переходных процессов при нестационарных циклических нагружениях.

Заключение

Приведены основные уравнения теории пластического течения при комбинированном упрочнении, в которой кинематическое упрочнение определяется на основе эволюционных уравнений для микронапряжений трех типов.

Выявлены механические аспекты каждого типа микронапряжений:

– микронапряжения первого типа обеспечивают описание явлений вышагивания (ratcheting) и посадки петли пластического гистерезиса при несимметричных мягких и жестких циклических нагружениях, а также переходных процессов при нестационарных циклических нагружениях;

– микронапряжения второго типа обеспечивают процесс вышагивания (ratcheting) и посадки петли пластического гистерезиса на начальных циклах нагружения, но основное предназначение микронапряжений второго типа заключается в их ответственности за процесс накопления повреждений;

– микронапряжения третьего типа обеспечивают возврат циклической петли в свое начало, что позволяет описать эффект малого цикла в большом; при малом размахе деформации при несимметричном жестком циклическом нагружении посадка петли будет осуществляться на некоторую несимметричную петлю.

На основе интегрирования эволюционного уравнения для микронапряжений второго типа и вычисления работы микронапряжений второго типа на поле пластических деформаций при циклическом нагружении с постоянным размахом пластической деформации в условиях одноосного растяжения-сжатия получен критерий мало-многоциклового усталости (от 10^1 до 10^6 циклов нагружения). Работоспособность критерия подтверждена результатами экспериментов. Следует отметить, что кривая мало-многоциклового усталости может быть получена на основе предложенного критерия, используя экспериментальную стабилизированную петлю пластического гистерезиса и число циклов до разрушения только при одном размахе деформации порядка 0,015–0,02.

Проанализировано расчетное и экспериментальное поведение накопленной пластической деформации при мало-многоциклового усталости. Показано, что при малом числе циклов до разрушения предельная накопленная пластическая деформация не зависит от числа циклов до разрушения и имеет постоянное значение, а при многоциклового усталости предельная пластическая деформация связана с числом циклов до разрушения степенной зависимостью.

Приведен анализ процессов вышагивания (ratcheting) и посадки петли пластического гистерезиса при несимметричных циклических нагружениях, а также анализ нелинейных процессов накопления повреждений и деформирования при нестационарных циклических нагружениях.

Сопоставления результатов расчетов и экспериментов говорят об адекватности анализируемого в настоящей работе математического моделирования процессов циклического деформирования и усталости.

Библиографический список

1. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 224 с.
2. Бондарь В.С. Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкций при сложном неизотермическом нагружении: дис. ... д-ра физ.-мат.наук. – М.: Изд-во МАМИ, 1990. – 314 с.
3. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.
4. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: Физматлит, 2008. – 176 с.
5. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.
6. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.

7. Прикладная теория пластичности / Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А., Каплиенко А.В., Коротких Ю.Г., Панов В.А. – М.: Физматлит, 2015. – 284 с.
8. Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. Прикладная теория вязкопластичности: монография. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2015. – 318 с.
9. Нелинейная механика материалов / Ж. Бессон, Ж. Каето, Ж.-Л. Шабоши, Т.С. Форест. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397 с.
10. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation // International Journal of Plasticity. – 2002. – Vol. 18. – P. 873–894.
11. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model / G. Kang, Y. Liu, J. Ding, Q. Gao // Int. J. of Plasticity. – 2009. – Vol. 25. – P. 838–860.
12. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature // Int. J. of Plasticity. – 2009. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.08.005
13. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J. Of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.
14. Rahman S.M., Hassan T., Corona E. Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure // Int. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1756–1791.
15. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting // Int. J. Of Plasticity. – 2009. – Vol. 25. – P. 1560–1587.
16. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting // Int. J. of Plasticity. – 2010. – Vol. 26. – P. 711–730.
17. Dafalias Y.F., Feigenbaum H.P. Biaxial ratchetting with novel variations of kinematic hardening // Int. J. of Plasticity. – 2011. – Vol. 27. – P. 479–491.
18. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // Int. J. of Plasticity. – 2012. – Vol. 35. – P. 44–66.
19. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 125–152.
20. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 2. – С. 21–35.
21. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термовязкопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 1. – С. 39–56.
22. Бондарь В.С., Горохов В.Б., Санников В.М. Исследование малоциклового прочностного состояния оболочек вращения при сложном теплосиловом нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Механика деформируемых систем: всесоюз. межвуз. сб. – Горький: Изд-во Горьк. ун-та. – 1979. – Вып. 12. – С. 120–126.
23. Бернард-Конноли, Бью Куок, Бирон. Усталость коррозионно-стойкой стали 304 при испытаниях в условиях многоступенчатой контролируемой деформации // Теор. основы инж. расчетов. – 1983. – № 3. – С. 47–53.
24. Socie D. Multiaxial fatigue damage models // ASME. – 1988. – Vol. 3. – P. 9–21.
25. Трощенко В.Т., Лебедев А.А., Стрижало В.А. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения. – К.: Логос, 2000. – 571 с.
26. Мэнсон С. Температурные напряжения и малоцикловая усталость. – М.: Машиностроение, 1974. – 344 с.
27. Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов неизотермического неупругого деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: Изд-во МАМИ, 2005. – 108 с.

28. Колмогоров В.Л. Напряжение, деформация, разрушение. – М.: Металлургия, 1970. – 230 с.
29. Development of a Finite Element Based Strain Accumulation Model for the Prediction of Fatigue Lives in Highly Stressed Ti Components / I.V. Putchkov, Y.M. Temis, A.L. Dowson, D. Damri // *International Journal of Fatigue*. – 1995. – Vol. 17. – No. 6. – P. 385–398.
30. Гусенков А.П. Прочность при изотермическом и неизотермическом малоцикловом нагружении. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
31. Savalle S., Caenatd G. Vicroanureage, Micropropagation et Endommage-mant // *La Resherche Aerospatiale*. – 1982. – Vol. 6. – P. 395–411.
32. Jiang Y., Sehitoglu H. Multiaxial cyclic ratcheting under multiple step loading. *International journal of Plasticity*. – 1994. – Vol. 8. – P. 849–870.
33. Experimental study jn uniaxial and nonproportionally multiaxial ratcheting of SS304 stainless steel at room and high temperatures / Guozheng Kang, Qing Gao, Lixun Cai, Yafang Sun. // *Nuclear Engineering and Design*. – 2002. – Vol. 216. – P. 13–26.
34. Guozheng Kang, Qing Gao, Xianjie Yang. Uniaxial cyclic ratcheting and plastic flow properties of SS304 stainless steel at room and elevated temperatures // *Mechanics of Materials*. – 2002. – Vol. 34. – P. 145–159.

References

1. Novozhilov V.V., Kadashevich Iu. I. Mikronapriazheniia v konstruktsionnykh materialakh [Backstresses in structural materials]. Leningrad: Mashinostroenie, 1990, 224 p.
2. Bondar' V.S. Neuprugoe povedenie i razrushenie materialov i konstruktсии pri slozhnom neizotermicheskom nagruzhении [Inelastic behavior and fracture of materials and structures with complex non-isothermal loading]. Doctor's degree. Moskovskii gosudarstvennyi mashinostroitel'nyi universitet (institut) (Universitet mashinostroeniia), 1990, 314 p.
3. Bondar' V.S. Neuprugost'. Varianty teorii [Inelasticity. Variants of the theory]. Moscow: FIZMATLIT, 2004, 144 p.
4. Bondar' V.S., Danshin V.V. Plastichnost'. Proportional'nye i neproportional'nye nagruzheniia [Plasticity. Proportional and disproportionate loading]. Moscow: FIZMATLIT, 2008, 176 p.
5. Bondar' V.S. Inelasticity. Variants of the theory. New York, Begell House, 2013, 194 p.
6. Volkov I.A., Korotkih Ju.G. Uravneniia sostojaniia vjaskouprugoplasticheskikh sred s povrezhdenijami [The equation of state viscous elastoplastic media with injuries]. Moscow: FIZMATLIT, 2008, 424 p.
7. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A., Kaplienکو A.V., Korotkih Iu.G., Panov V.A. Prikladnaia teoriia plastichnosti. [Applied theory of plasticity]. Moscow: FIZMATLIT, 2015, 284 p.
8. Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkih Iu.G. Prikladnaia teoriia vjaskoplastichnosti. Nizhegorodskii universitet. 2015, 318 p.
9. Besson Zh., Kaeto Zh., J.-L. Chaboche, Forest T.S. Nelineinaia mekhanika materialov [Nonlinear mechanics of materials]. Sankt-Peterburgskii politehnicheskii universitet, 2010, 397 p.
10. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation. *International Journal of Plasticity*, 2002, vol. 18, pp. 873-894.
11. Kang G., Liu Y., Ding J., Gao Q. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model. *International Journal of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 838-860.
12. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. *International Journal of Plasticity*, 2009, DOI:10.1016/j.ijplas.2009.08.005.
13. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1642-1692.
14. Rahman S.M., Hassan T., Corona E. Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure. *International Journal of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1756-1791.

15. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *International Journal of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 1560-1587.
16. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting. *International Journal of Plasticity*, 2010, vol. 26, pp. 711-730.
17. Dafalias Y.F., Feigenbaum H.P. Biaxial ratchetting with novel variations of kinematic hardening. *International Journal of Plasticity*, 2011, vol. 27, pp. 479-491.
18. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions. *International Journal of Plasticity*, 2012, vol. 35, pp. 44-66.
19. Bondar' V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessov deformirovaniia i nakopleniia povrezhdenii pri tsiklicheskikh nagruzheniiah [Mathematical modelling of deformation and damage accumulation under cyclic loading]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 2, pp. 125-152.
20. Bondar V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. Variant teorii termoplastichnosti [Version of the theory of thermoplasticity]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 2, pp. 21-35. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.02
21. Bondar' V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. Variant teorii termovjzokoplastichnosti [Variant of thermoviscoplasticity theory]. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016, no. 1, pp. 39-56. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.03
22. Bondar' V.S., Gorokhov V.B., Sannikov V.M. Issledovanie malotsiklovoi prochnosti obolochek vrashcheniia pri slozhnom teplosilovom nagruzhenii. *Vsesoiuznyi mezhvuzovskii sbornik «Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Mekhanika deformiruemyykh system»*. Gor'kovskii universitet, 1979, iss. 12, pp. 120-126.
23. Bernard-Konnoli, B'iu Kuok, Biron. Uсталost' korrozionno-stoikoistali 304 priispytaniiah v usloviiah mnogostupenchatoi kontroliruemoi deformatsii. [Fatigue of corrosion-resistant steel 304 in the test multistage controlled deformation]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschjotov*, 1983, no. 3, pp. 47-53.
24. Socie, D. Multiaxial fatigue damage models. *ASME*, 1988, vol. 3, pp. 9-21.
25. Troshchenko V.T., Lebedev A.A., Strizhalo V.A.. Mekhanicheskoe povedenie materialov pri razlichnykh vidakh nagruzheniia [Mechanical behavior of materials under different types of loading]. Kiev: Logos, 2000, 571 p.
26. Menson S. Temperaturnye napriazheniia i malotsiklovaia ustalost' [Thermal stress and low cycle fatigue]. Moscow: Mashinostroenie, 1974, 344 p.
27. Makarov D.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessov neizotermicheskogo neuprugogo deformirovaniia i nakopleniia povrezhdenii v konstruktsionnykh materialakh [Mathematical modeling of non-isothermal processes of inelastic deformation and damage accumulation in structural materials]: Ph.D. thesis. Moskovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet «MAMI», 2005, 108 p.
28. Kolmogorov V.L. Napriazhenie, deformatsiia, razrushenie. [Stress, strain, destruction]. Moscow: Metallurgii, 1970. 230 p.
29. Putchkov I.V., Temis Y.M., Dowson A.L., Damri D. Development of a finite element based strain accumulation model for the prediction of fatigue lives in highly stressed ti components. *International Journal of Fatigue*, 1995, vol. 17, no. 6, pp. 385-398.
30. Gusenkov A.P. Prochnost' pri izotermicheskom i neizotermicheskom malotsiklovom nagruzhenii. [Strength under isothermal and nonisothermal low-cycle loading] Moscow: Nauka, 1979, 295 p.
31. Savalle S., Caienatd G. Vicroanureage, Micropropagation et Endommage-mant. *La Resherche Aerospatiale*, 1982, vol. 6, pp. 395-411.
32. Jiang Y., Sehitoglu H. Multiaxial cyclic ratcheting under multiple step loading. *International journal of Plasticity*, 1994, vol. 8, pp. 849-870.
33. Guozheng Kang, Qing Gao, LixunCai, Yafang Sun. Experimental study jn uniaxial and nonproportionally multiaxial ratcheting of SS304 stainless steel at room and high temperatures. *Nuclear Engineering and Design*, 2002, vol. 216, pp. 13-26.
34. Guozheng Kang, Qing Gao, Xianjie Yang. Uniaxial cyclic ratcheting and plastic flow properties of SS304 stainless steel at room and elevated temperatures. *Mechanics of Materials*, 2002, vol. 34, pp. 145-159.