



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.03

УДК 519.6

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ ФЛЮИДОНАПОЛНЕННОЙ ТРЕЩИНЫ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

В.Е. Борисов, А.В. Иванов, Б.В. Критский, Е.Б. Савенков

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 2 ноября 2020 г.  
Принята: 28 мая 2021 г.  
Опубликована: 12 июля 2021 г.

#### Ключевые слова:

пороупругая среда,  
флюидонаполненная трещина,  
X-FEM, метод проекции  
ближайшей точки.

### АННОТАЦИЯ

В работе представлен комплекс вычислительных алгоритмов для математического моделирования процесса развития трехмерной флюидонаполненной трещины в пороупругой среде. Модель содержит несколько групп уравнений, включая пороупругую модель Био для описания поведения вмещающей трещину среды, двумерные уравнения гидродинамики в приближении смазочного слоя, описывающие течение в трещине, соответствующие условия согласования на границе «трещина – среда». Геометрическая модель трещины предполагает, что она является произвольной гладкой поверхностью с краем.

Рассматривается комплекс алгоритмов для решения частных задач – уравнений пороупругости, течения в трещине, эволюции срединной поверхности трещины, а также алгоритм решения полной задачи в связанной постановке. Центральным моментом предложенного комплекса алгоритмов является неявный способ представления поверхности, основанный на использовании оператора проекции ближайшей точки. Это представление поверхности используется при решении уравнений в объеме, на срединной поверхности трещины и для моделирования эволюции трещины. Для построения конечномерной задачи для решения уравнений Био предложен оригинальный вариант метода X-FEM. Для решения уравнений на поверхности используется предложенный авторами конечно-элементный вариант метода проекции ближайшей точки. В результате построенный алгоритм является полностью эйлеровым и использует для решения как частных, так и полной задачи единую заданную в пространстве расчетную сетку.

В заключении приводятся результаты численных расчетов, демонстрирующих возможности разработанного комплекса алгоритмов. В частности, рассматривается задача о развитии трещины в среде с неоднородными фильтрационными, упругими и прочностными свойствами.

© ПНИПУ

© Борисов Виталий Евгеньевич – к.ф.-м.н., н.с., e-mail: [narelen@gmail.com](mailto:narelen@gmail.com), [ID: 0000-0003-4448-7474](https://orcid.org/0000-0003-4448-7474).

Иванов Антон Валерьевич – к.ф.-м.н., н.с., e-mail: [aiv.racs@gmail.com](mailto:aiv.racs@gmail.com), [ID: 0000-0001-5132-3748](https://orcid.org/0000-0001-5132-3748).

Критский Борис Викторович – м.н.с., e-mail: [boris.v.kritskiy@gmail.com](mailto:boris.v.kritskiy@gmail.com), [ID: 0000-0001-5924-2467](https://orcid.org/0000-0001-5924-2467).

Савенков Евгений Борисович – к.ф.-м.н., в.н.с., [ID: 0000-0003-3363-7043](https://orcid.org/0000-0003-3363-7043).

Vitaly E. Borisov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: [narelen@gmail.com](mailto:narelen@gmail.com), [ID: 0000-0003-4448-7474](https://orcid.org/0000-0003-4448-7474).

Anton V. Ivanov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: [aiv.racs@gmail.com](mailto:aiv.racs@gmail.com), [ID: 0000-0001-5132-3748](https://orcid.org/0000-0001-5132-3748).

Boris V. Kritskiy – Junior Researcher, e-mail: [boris.v.kritskiy@gmail.com](mailto:boris.v.kritskiy@gmail.com), [ID: 0000-0001-5924-2467](https://orcid.org/0000-0001-5924-2467).

Evgeny B. Savenkov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, e-mail: [e.savenkov@googlemail.com](mailto:e.savenkov@googlemail.com), [ID: 0000-0003-3363-7043](https://orcid.org/0000-0003-3363-7043).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## NUMERICAL ALGORITHMS FOR SIMULATION OF A FLUID-FILED FRACTURE EVOLUTION IN A POROELASTIC MEDIUM

V.E. Borisov, A.V. Ivanov, B.V. Kritsky, E.B. Savenkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 2 November 2020

Accepted: 28 May 2021

Published: 12 July 2021

#### Keywords:

poroelastic medium, fluid-filled fracture, closest point projection, X-FEM.

### ABSTRACT

The paper deals with the computational framework for the numerical simulation of the three dimensional fluid-filled fracture evolution in a poroelastic medium. The model consists of several groups of equations including the Biot poroelastic model to describe a bulk medium behavior, Reynold's lubrication equations to describe a flow inside fracture and corresponding *bulk/fracture* interface conditions. The geometric model of the fracture assumes that it is described as an arbitrary sufficiently smooth surface with a boundary.

Main attention is paid to describing numerical algorithms for particular problems (poroelasticity, fracture fluid flow, fracture evolution) as well as an algorithm for the coupled problem solution. An implicit fracture mid-surface representation approach based on the closest point projection operator is a particular feature of the proposed algorithms. Such a representation is used to describe the fracture mid-surface in the poroelastic solver, Reynold's lubrication equation solver and for simulation of fracture evolutions. The poroelastic solver is based on a special variant of X-FEM algorithms, which uses the closest point representation of the fracture. To solve Reynold's lubrication equations, which model the fluid flow in fracture, a finite element version of the closet point projection method for PDEs surface is used. As a result, the algorithm for the coupled problem is purely Eulerian and uses the same finite element mesh to solve equations defined in the bulk and on the fracture mid-surface.

Finally, we present results of the numerical simulations which demonstrate possibilities of the proposed numerical techniques, in particular, a problem in a media with a heterogeneous distribution of transport, elastic and toughness properties.

© PNRPU

### Введение

В настоящей работе представлено описание математической модели и комплекса вычислительных алгоритмов для анализа динамики развития крупномасштабной флюидонаполненной трещины в пороупругой среде. Настоящая работа является продолжением работы авторов [1], которая посвящена детальному описанию математической модели.

Вопросы описания флюидонаполненных трещин возникают в целом ряде приложений, см., например, [2, 3]. В частности, важной прикладной задачей является прогноз динамики трещины гидравлического разрыва пласта. Технология гидроразрыва пласта (ГРП) является одним из самых распространенных в настоящее время методов увеличения нефтеотдачи [4, 5]. Создание трещины гидроразрыва является экономически дорогим и технически сложным процессом. По этой причине важно обоснование применимости технологии в случае каждой отдельной скважины. Для этого необходимо оценить возможность создания трещины с заданными параметрами с учетом влияния свойств напряженно-деформированной среды на процесс развития трещины, ее конечные геометрические и фильтрационные характеристики, в том числе траекторию. Полноценное решение этих задач в настоящее время доступно только средствами математического моделирования. По этой причине анализу и математическому моделированию процесса развития флюидонаполненных трещин уделя-

ется большое внимание, см., например, работы [6–14] и ссылки в них.

Отметим, что используемые на практике модели развития трещин ГРП являются существенно упрощенными. Чаще всего они основаны на применении двумерных и псевдотрехмерных постановок, используются априорные допущения об ориентации и форме трещины, см. [4, 5]. В большинстве случаев они не учитывают сопровождающие развитие трещины фильтрационные процессы, для учета утечки флюида в трещине в пласт используются эмпирические модели.

С алгоритмической точки зрения методы решения задач развития трещины в пороупругой среде (см., например, [6–10,12]) в подавляющем большинстве случаев либо используют достаточно сложные математические модели (однако соответствующие вычислительные алгоритмы не позволяют исследовать полный спектр актуальных постановок, поэтому часто рассматриваются упругие постановки с однородным или кусочно-однородным распределением свойств вмещающей трещину среды), либо основаны на применении нескольких независимых алгоритмов или пакетов программ, отвечающих за решение частных задач.

В отличие от указанных подходов, используемая в настоящей работе математическая модель является трехмерной, полностью связанной и включает в себя группы уравнений пороупругости и течения в трещине, дополненные физически обоснованными критериями ее развития. В качестве модели вмещающей среды исполь-

зуется связанная модель Био для описания возмущений начального поля напряжений регионального масштаба, вызванных присутствием и развитием трещины и эффектами фильтрации. Для описания течения флюида в трещине использованы уравнения гидродинамики в приближении смазочного слоя. Срединная поверхность трещины является произвольной гладкой поверхностью с краем. Для описания процесса развития трещины использованы физически обоснованные критерии разрушения. Детальное описание модели можно найти в работе авторов [1], кратко она будет представлена в соответствующем разделе ниже.

Вычислительный алгоритм основан на методе конечных элементов. Уравнения пороупругости в среде решаются с помощью оригинального варианта метода X-FEM [151–8], позволяющего учитывать наличие в расчетной области трещин, геометрия которых не согласована с геометрией расчетной сетки. Для представления срединной поверхности трещины при этом используется метод проекции ближайшей точки, с помощью которого также осуществляется расчет эволюции трещины [19] и интегрирование уравнений гидродинамики на ее поверхности [20–22]. Алгоритм решения полной задачи основывается на итерационном связывании групп уравнений, описывающих частные модели. Предложенный алгоритм является полностью эйлеровым и использует для решения задачи единую пространственную расчетную сетку.

Описываемый подход был реализован в виде программного комплекса HFrac3D++ [23], разработанного в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН и предназначенного для решения задач пороупругости, в том числе при наличии флюидонаполненных трещин. В заключительной части работы приводятся результаты демонстрационных расчетов для нескольких реалистичных постановок, показывающих применимость разработанной методики для рассматриваемого класса задач.

## 1. Математическая модель

Описание динамики флюидонаполненной трещины в пороупругой среде сводится к решению сложной связанной задачи, включающей в себя:

- систему уравнений пороупругости, описывающую эволюцию напряженно-деформированного состояния среды и полей давления флюида в ней в ходе развития трещины;
- геометрическую модель представления и описания эволюции срединной поверхности трещины;
- уравнение течения жидкости в трещине;
- условия согласования между полями давления в трещине и в среде, потоками массы, импульса (и, в общем случае, энергии), а также кинематические условия, связывающие раскрытие трещины и перемещение точек пласта;
- механические условия развития трещины, определяющие направление ее развития в каждой точке ее фронта.

Далее кратко приведем уравнения модели для изотермического случая.

Система уравнений пороупругости в трехмерной постановке [24–27], которая описывает состояние вмещающей трещину  $\mathcal{F}$  среды  $\Omega$ , имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad \frac{\partial m_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{w}_m) = q, \quad (1)$$

где  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  – плотность насыщенной флюидом вмещающей среды;  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения;  $\mathbf{T}$  – тензор напряжений, который в общем случае определяется как  $\Delta \mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{E} - \mathbf{B} \Delta p$ ;  $p$  – давление флюида,  $\mathbf{E} = [\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T] / 2$  – тензор деформаций;  $\mathbf{u}$  – поле перемещений точек вмещающей среды;  $\mathbf{C}$  – симметричный тензор упругих коэффициентов;  $\mathbf{B} = [B_{ij}]$  – тензор Био,  $m_f = \rho_f \phi$  – масса флюида в единице объема насыщенной среды (флюидосодержание);  $\rho_f$  – плотность флюида;  $\phi$  – пористость;  $q$  – массовая плотность источников;  $\Delta f = f - f_0$  для какой-либо величины  $f$ , где индексом «0» обозначены опорные значения величины. Плотность потока массы определяется законом Дарси  $\mathbf{w}_m = \rho_f \mathbf{K} \cdot (-\nabla p + \rho_f \mathbf{g}) / \mu_f$ ,  $\mathbf{K}$  – симметричный тензор коэффициентов проницаемости,  $\mu_f$  – динамическая вязкость флюида.

Геометрическая модель трещины предполагает, что срединная поверхность трещины является гладкой, односвязной поверхностью  $\mathcal{F}$  с краем («фронтом трещины»). Толщина (раскрытие) трещины является функцией точки  $\mathcal{F}$ ,  $w = w(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ . Поверхность  $\mathcal{F}$  является срединной поверхностью трещины в том смысле, что боковые поверхности  $\mathcal{F}^\pm$  реальной, «физической» трещины находятся на расстоянии  $w$  от срединной поверхности  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}^\pm = \mathbf{x} \mp (1/2)\mathbf{n}(\mathbf{x})w(\mathbf{x})$ . Здесь  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  – нормаль к поверхности  $\mathcal{F}$  в точке  $\mathbf{x}$ , направленная в сторону  $\mathcal{F}^-$ . Естественными ограничениями на вид функции  $w$  является ее неотрицательность и равенство нулю на крае  $\partial \mathcal{F}$ . Второе допущение отражает тот факт, что в ходе развития трещины ее уже образованная поверхность не меняется, т.е. при  $t_1 \geq t_2$  имеем  $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ , где  $t > 0$  – время,  $\mathcal{F}_t$  – поверхность в момент времени  $t$ . Помимо этого считается, что эволюция поверхности  $\mathcal{F}$  является гладкой.

В этом случае семейство поверхностей  $\mathcal{F}_t$  может быть представлено как объединение начальной поверхности  $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$  и следа «движения» ее края  $\gamma(t)$ ,  $\mathcal{F}_t = \bigcup \gamma_t$ ,  $t \geq 0$ . Считается, что в каждый момент времени на линии  $\gamma(t)$  задано векторное поле скорости  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \gamma(t)$ , описывающее ее эволюцию. Таким образом, движение точки границы описывается уравне-

нием  $dx/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Направление развития поверхности известно только в точках ее границы (фронта трещины) и определяется с помощью соответствующих критериев разрушения.

Модель течения в трещине основана на приближении Рейнольдса и связывает раскрытие  $w$  и давление  $p_f$  в трещине при наличии источников массы [28]:

$$\frac{\partial \rho_f w}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (\rho_f w \mathbf{v}_{\mathcal{F}}) = Q_f, \quad \mathbf{v}_{\mathcal{F}} = -D(\nabla_{\mathcal{F}} p_f - \rho_f \mathbf{g}_{\mathcal{F}}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}_{\mathcal{F}}$  – скорость течения флюида в трещине;  $D$  – эффективная проницаемость трещины;  $\nabla_{\mathcal{F}}$  обозначает двумерный поверхностный оператор градиента. В простейшем случае ньютоновской жидкости  $D = w^2 / (12\mu_f)$ . В общем случае неньютоновской жидкости  $D = D(w, \nabla_{\mathcal{F}} p_f)$ . Величина  $Q_f$  представляет собой мощность источников, описывающих поток флюида через скважину и утечку в пласт.

Условия согласования, заданные на срединной поверхности трещины, состоят из двух групп соотношений. К первой группе относятся кинематические условия, связывающие перемещения боковых поверхностей трещины и ее раскрытие  $w(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = [u_n]$ , где  $u_n^{\pm} = \mathbf{u}^{\pm} \cdot \mathbf{n}$ ,  $[u_n] = u_n^+ - u_n^-$ . Ко второй группе уравнений относятся условия, выражающие непрерывность консервативных величин. Динамические условия согласования имеют вид условий непрерывности нормальной компоненты тензора напряжений на боковых поверхностях трещины:  $\mathbf{T}^+ \cdot \mathbf{n} = -p^+ \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{T}^- \cdot \mathbf{n} = -p^- \mathbf{n}$ .

Для «гидродинамической» части задачи, включающей в себя уравнения фильтрации и уравнение течения в трещине, условия согласования связывают давление во вмещающей трещину среде и соответствующие потоки массы. Они будут иметь различный вид в зависимости от допущений, которым удовлетворяют условия течения. В простейшем случае идеального гидродинамического контакта между трещиной и вмещающей ее средой они имеют вид  $p^+ = p^- = p_f$ . Условия непрерывности потока массы имеют вид  $Q_f = Q^+ + Q^-$ ,  $Q^{\pm} = \mathbf{w}_m \cdot \mathbf{n}^{\pm} |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{\pm}}$ . Таким образом, величина потока из среды в трещину определяет правую часть (источник) закона сохранения массы флюида в трещине, а давление в трещине играет роль граничного условия для давления на боковых поверхностях трещины.

Критерий разрушения, который определяет направление развития фронта трещины в его точках, формулируется с помощью векторного  $J$ -интеграла Черепанова – Райса [29, 30] для пороупругой среды. В частном случае плоской (двумерной) трещины выражение для векторного  $J$ -интеграла имеет вид

$$\mathbf{J} = \int_{\partial\Omega_0} [\psi_s \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla \otimes \mathbf{u}] ds - \int_{\Omega} p \nabla \phi dw,$$

где  $\Omega_0$  – двумерная область, окружающая кончик трещины;  $\mathbf{n}$  – вектор единичной нормали к  $\partial\Omega_0$ ;  $\phi$  – пористость;  $\psi_s$  – свободная энергия скелета, определенная как  $\Delta\psi_s = \mathbf{T}_0 : \mathbf{E} + p_0 \Delta\phi + (\Delta\mathbf{T} : \Delta\mathbf{E} + \Delta p \Delta\phi) / 2$ . В том случае, когда трещина развивается в направлении  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ , традиционный (скалярный)  $J$ -интеграл определяется выражением  $J = \mathbf{J} \cdot \mathbf{k}$ .

Векторное выражение  $J$ -интеграла позволяет сформулировать следующий эмпирический критерий развития трещины: трещина развивается в направлении  $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{R}^2$ , таком, что  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}_0 = G(\mathbf{k}_0)$ , при этом  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{k} \leq G(\mathbf{k})$  для произвольного единичного вектора  $\mathbf{k}$ , где  $G_0$  – критическое значение энергии, которое, в общем случае, может зависеть от направления. Для однородной изотропной среды  $G_0 = \text{const}$  и направление развития трещины совпадает с направлением вектора  $\mathbf{J}$ . Аналогично записываются соответствующие выражения для трехмерного случая.

## 2. Вычислительный алгоритм

Предлагаемый в работе численный алгоритм решения задачи о динамике развития флюидонаполненной трещины в пороупругой среде основывается на итерационном связывании решений отдельных групп уравнений математической модели. Ниже сначала рассматриваются алгоритмы для решения частных задач, далее – алгоритм решения полной связанной задачи.

В качестве базового алгоритма решения задачи во вмещающей трещину среде используется оригинальный вариант «расширенного» метода конечных элементов X-FEM/CP, позволяющий учитывать наличие в расчетной области трещин, геометрия которых не согласована с геометрией расчетной сетки. Для чисто упругой среды с трещиной детали алгоритма представлены в работе [15], в пороупругом случае аппроксимации строятся аналогичным образом. На первом этапе метода решения для системы (1)–(2) записывается слабая (вариационная) постановка задачи, условия на трещине в которой задаются с использованием метода штрафа в терминах множителей Лагранжа:

$$\mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \mathbb{A}_p(p, \delta p) - \langle p_f, [\delta\mathbf{u}_n] \rangle = (\rho\mathbf{g}, \delta\mathbf{u}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{M}_u(\mathbf{u}, \delta p) + \mathbb{M}_p(p, \delta p)) + \mathbb{B}(p, \delta p) + \frac{1}{\epsilon} \langle \{p\} - p_f, \{\delta p\} \rangle = 0, \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f w), \delta p_f \right) + \mathbb{C}(w; p_f, \delta p_f) - \langle q_A, \delta p_f \rangle = (Q, \delta p_f). \quad (5)$$

Здесь  $\mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C}(\mathbf{u}) : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}) d\Omega$ ,  $\mathbb{A}_p(p, \delta p) = \int_{\Omega} (-bp\mathbf{I}) : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}) d\Omega$ ,  $\mathbb{B}(p, \delta p) = \int_{\Omega} (\rho_f \mathbf{K} \cdot (-\nabla p + \rho_f \mathbf{g}) / \mu_f) \times \nabla p d\Omega$ ,  $\mathbb{M}_u(u, \delta p) = \int_{\Omega} (-\rho_f b \delta p \mathbf{I}) : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}) d\Omega$ ,  $\mathbb{M}_p(p, \delta p) = \int_{\Omega} \frac{\rho_f}{M} p \delta p d\Omega$ ,  $\mathbb{C}(w; p_f, \delta p_f) = \int_{\mathcal{F}} \frac{\rho_f}{12} w^3 (\nabla_{\mathcal{F}} p_f - \mathbf{g}) \times \nabla_{\mathcal{F}} \delta p_f d\Gamma$ ,  $\mathbf{u} \in V_u$ ,  $\delta\mathbf{u} \in V_u$ ,  $p \in V_p$ ,  $\delta p \in V_p$ ,  $p_f \in V_{p_f}$ ,  $\delta p_f \in V_{p_f}$ , где  $V_{(\cdot)}$  – соответствующие пространства функций, которые могут быть охарактеризованы в терминах пространств Соболева нужной гладкости;  $[\delta\mathbf{u}_n]$  – раскрытие трещины,  $q_A$  определяет поток из вмещающей среды в трещину,  $(a, b)$  и  $\langle c, d \rangle$  – скалярные произведения в  $\Omega$  и  $\mathcal{F}$  соответственно;  $b$  и  $M$  – параметры Био;  $\epsilon$  – объемная деформация среды. Уравнения (3)–(4), описывающие напряженно-деформированное состояние вмещающей трещину среды, далее используются непосредственно. Уравнение для описания течения в трещине (5) применяются в несколько ином виде, основанном на применении метода проекции ближайшей точки для построения продолжения соответствующего уравнения из трещины во вмещающее ее пространство (однако общая структура задачи при этом сохраняется).

На втором этапе метода X-FEM производится выбор дискретных пространств и аппроксимации задачи по пространству и времени, после чего соответствующая система уравнений для (3)–(4) в матричном виде может быть представлена как

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{A}_p \\ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_u & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_p + \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_h \\ \hat{\mathbf{p}}_h \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_u & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_p + \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{p}_h \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{A}_u$ ,  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M}_u$ ,  $\mathbf{M}_p$  и  $\mathbf{F}$  – конечномерные аппроксимации соответствующих билинейных форм и правой части;  $\mathbf{u}_h$  и  $\mathbf{p}_h$  – зависящие от времени векторы узловых значений конечно-элементных аппроксимаций поля перемещений и давления;  $\Delta t$  – шаг по времени,  $\wedge$  обозначает величины на новом временном слое. Далее данная система решается подходящим методом, основанным на итерациях между группами уравнений теории упругости и фильтрации [31, 32]. Для решения возникающих на каждой итерации больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений используется метод BiCGStab с предобуславливателем на основе неполного LU разложения [33].

Отметим, что, вообще говоря, исходная формулировка метода X-FEM не зависит от способа представле-

ния поверхности трещины, однако удобство представления является основой его эффективного применения. По этой причине единым способом представления срединной поверхности трещины был выбран метод проекции ближайшей точки. В рамках этого метода поверхность описывается неявно, путем задания проектора точки пространства на срединную поверхность трещины.

Рассмотрим гладкую поверхность  $\mathcal{F}$  с краем, вложенную в трехмерную область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Пусть для произвольной точки  $\mathbf{x} \in \Omega$ , точка  $\mathbf{x}_{cp}$  является ближайшей к ней точкой на поверхности  $\mathcal{F}$ . Точку  $\mathbf{x}_{cp}$  будем называть проекцией точки  $\mathbf{x}$  на поверхность  $\mathcal{F}$  в смысле наименьшего расстояния, а соответствующий оператор проектирования будем обозначать  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{x}_{cp} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ . В случае если поверхность и ее край являются гладкими, а область  $\Omega$  – «достаточно маленькая», то оператор  $\mathbf{P}$  однозначно определен [34]. Иными словами, каждая точка области  $\Omega$  однозначно проецируется в единственную точку на поверхности  $\mathcal{F}$ . Проектор  $\mathbf{P}$  однозначно описывает поверхность  $\mathcal{F}$  как множество своих неподвижных точек:  $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}\}$ . Проектор  $\mathbf{P}$  может быть использован как в континуальной, так и в дискретной постановке. В последнем случае он задается своими значениями в узлах расчетной сетки. Подробный алгоритм расчета эволюции зависящего от времени проектора  $\mathbf{P}$  в рамках геометрической модели трещины из раздела 1 можно найти в работе [20].

Метод на основе проекции ближайшей точки используется также при решении уравнения течения в трещине (5), см. [30]. Для этого уравнение, заданное на поверхности с краем, продолжается во вмещающее пространство.

Для построения продолжения уравнения на поверхности в пространство используется оператор  $\mathcal{E}$ , который для произвольной заданной на поверхности  $\mathcal{F}$  функции  $u$  определяется как  $\mathcal{E}[u]\mathbf{x} = u(\mathbf{P}\mathbf{x})$ . Тогда для определенного на поверхности  $\mathcal{F}$  уравнения [21, 22]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (-\nabla_{\mathcal{F}} u) = f, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \quad u|_{\partial\mathcal{F}} = g, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{F},$$

имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\nabla \mathcal{E}[u]) = \mathcal{E}[f], \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}},$$

где  $\Omega_{\mathcal{F}}$  – некоторый «цилиндр» вокруг  $\mathcal{F}$ . След решения этого уравнения на  $\mathcal{F}$  является решением исходного уравнения на поверхности, см. [34–37]. Отметим, что, в отличие от этих исследований, в настоящей работе используется предложенный в [20–22] конечно-элементный вариант метода проекции ближайшей точки. Таким образом, для решения как задач в объеме, так и на поверхности используются единая пространственная расчетная сетка, а также единое представление по-

верхности в рамках частных алгоритмов решения подзадач.

Алгоритм решения полной связанной задачи в сокращенном виде может быть представлен следующим образом. Задача решается в области  $\Omega$ , в которой введена расчетная сетка  $\mathcal{T}_h$ , используемая для решения задачи пороупругости и течения в трещине. В каждый момент времени  $t_n$  решение задачи описывается следующим набором переменных  $\Xi(t) = \{\mathbf{u}_n(t), p_n(t), w_n(t), p_{f,n}(t), \mathbf{P}(t), \mathbf{V}(t)\}$ , где  $\mathbf{u}$  – поле перемещений,  $p$  – давление в области,  $w$  – раскрытие трещины,  $p_f$  – давление в трещине,  $\mathbf{P}$  – оператор проекции ближайшей точки, однозначно определяющий геометрию срединной поверхности трещины,  $\mathbf{V}$  – скорость движения фронта трещины.

Рассмотрим задачу на одном слое по времени  $[t_n, t_{n+1}]$ . Будем использовать обозначения  $\Xi \equiv \Xi(t_n)$ ,  $\hat{\Xi} \equiv \Xi(t_{n+1})$ . Расчет одного временного слоя соответствует переходу от набора переменных  $\Xi$  к набору переменных  $\hat{\Xi}$  и состоит из следующих шагов:

1. Производится расчет дискретного оператора проекции ближайшей точки  $\hat{\mathbf{P}}$  для новой геометрии трещины  $\hat{\mathcal{F}}$ . Далее осуществляется определение типов узлов конечных элементов для алгоритма метода X-FEM, расчет параметров, необходимых для определения разрывных и сингулярных базисных функций метода.

2. Строится продолжение поля  $p_{f,\text{ext}} = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}[p_f]$  давления в трещине  $\mathcal{F}$ , полей  $p_{\text{ext}} = \mathcal{E}_{\Omega}[p]$  и  $\mathbf{u}_{\text{ext}} = \mathcal{E}_{\Omega}[\mathbf{u}]$  давления и перемещений в объеме  $\Omega$  с учетом новой геометрии трещины  $\hat{\mathcal{F}}$ .

3. Производится инициализация внутренних итераций:  $p_* = p_{\text{ext}}$ ,  $p_{f,*} = p_{f,\text{ext}}$ .

4. Рассчитывается решение уравнения для поля перемещений  $\mathbf{u}_*$  при заданных полях давления в области  $p_*$  и трещине  $p_{f,*}$ .

5. Рассчитывается раскрытие  $w_*$  трещины по определенному полю перемещений  $\mathbf{u}_*$ . Далее производится решение уравнения для определения поля  $p_{f,*}$  давления в трещине.

6. Производится решение уравнения для давления при заданном поле перемещений  $\mathbf{u}_*$  для определения поля давления  $p_*$ .

7. Выполняется проверка критерия остановки итераций. В случае его невыполнения – переход на шаг 4, в противном случае – на шаг 8.

8. Определяются направления развития и скорости  $\mathbf{V}$  трещины в точках ее фронта на основе заданного критерия и скорости развития фронта трещины.

9. Окончание расчета временного слоя.

При минимальных изменениях описанный выше алгоритм позволяет проводить расчеты для нескольких трещин в случае выполнения единственного условия: трещины расположены достаточно далеко друг от друга. С алгоритмической точки зрения это означает, что содержащие трещины сеточные области, в которых решается уравнение смазочного слоя и определены дополнительные степени свободы метода X-FEM, не пересекаются (т.е. отделены по крайней мере одним слоем конечных элементов). Формально это позволяет использовать описанные выше алгоритмы и структуры данных для случая одной трещины в каждой из таких сеточных областей.

### 3. Примеры расчетов

В разделе приводятся результаты расчетов, которые демонстрируют возможности разработанных алгоритмов и программной реализации для решения связанных задач с учетом пороупругого поведения среды, течения в трещине и ее эволюции. Рассматриваются примеры со стационарной трещиной и эволюционирующей трещиной в среде с неоднородным распределением упругих и фильтрационно-емкостных свойств в естественном поле напряжений.

*Стационарная трещина.* В этом расчете геометрия трещины (форма ее срединной поверхности) считается заданной и не меняется с течением времени. Вместе с тем задача решается в полностью связанной постановке – с учетом течения в трещине и эволюции полей давлений и напряжений в среде. Расчетная область представляет собой куб  $\Omega$  со стороной  $L = 100$  м. Для расчетов использовалась равномерная сетка из тетраэдров. Узлы сетки образуют кубическую решетку с  $N = 40$ . Таким образом, шаг сетки узлов  $h = 2,5$  м. Всего в сетке  $N_n = 64\,000$  узлов и  $N_e = 296\,595$  конечных элементов. Шаг по времени составлял  $\Delta t = 900$  с (15 мин), полное время расчета  $T = 18\,000$  с (5 ч).

Расчетная область  $\Omega$  разделена на две части вертикальной плоскостью, проходящей через ее центр перпендикулярно оси  $Ox$ . Свойства среды в каждой из подобластей приведены в табл. 1, где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $b$  и  $M$  – параметры Био,  $K$  – коэффициент проницаемости. Вязкость и сжимаемость флюида задавались как  $\mu_f = 4,0 \times 10^{-2}$  Па·с и  $c_f = 1,0 \times 10^{-6}$  Па<sup>-1</sup>.

Стационарная трещина имеет форму плоского диска радиусом  $R = 22$  м, расположенного горизонтально в центре расчетной области. Распределение давления в трещине определяется решением полной системы уравнений, с учетом группы уравнений пороупругости и течения в трещине. В начальный момент времени давление внутри трещины принималось равным  $p_0 = 3,0 \times 10^7$  Па. В центральной части трещины давление

считалось заданным в виде граничного условия  $p_{fr} = 3.3 \times 10^7$  Па. На границе области давление жидкости ставилось равным  $p_0$ , нормальные компоненты поля перемещений на гранях задавались равными нулю. В начальный момент времени давление жидкости в области также равнялось  $p_0$ .

Таблица 1

Свойства модельной среды в расчете со стационарной трещиной

Table 1

Properties of the model medium in the simulation with a stationary fracture

	$E$ , Па	$\nu$	$b$	$M$ , Н/м <sup>3</sup>	$K$ , м <sup>2</sup>
$x < L/2$	$1.5 \times 10^{10}$	0.2	0.79	$1.3 \times 10^{10}$	$1.87 \times 10^{-15}$
$x \geq L/2$	$1.5 \times 10^9$	0.2	0.75	$1.3 \times 10^9$	$1.87 \times 10^{-15}$

На рис. 1 показано изменение давления в трещине и вмещающей ее среде с течением времени. Видно вы-

полнение условий непрерывности давлений в среде и на срединной поверхности трещины. Распределение давления (равно как и раскрытие) в трещине непостоянно и несимметрично – это связано с отличием упругих и фильтрационных модулей среды в различных подобластях. На рис. 2 показано распределение компонент тензора напряжений на последнем шаге по времени, также хорошо заметно качественно отличающееся поведение полей напряжений, связанное с существенным отличием упругих свойств. Характер деформации боковых поверхностей трещины более подробно демонстрируют рис. 3 и 4. На этих рисунках трещина показана не как плоская срединная поверхность, а как трехмерный объект. Его толщина в различных точках срединной поверхности определяется раскрытием трещины в соответствующих точках (показано в измененном масштабе). На рис. 3 в различных ракурсах показано поле перемещений  $u_z$  и раскрытие трещины  $w$ . Наконец, на рис. 4 представлена деформированная поверхность трещины в различных ракурсах с распределением давления в трещине.

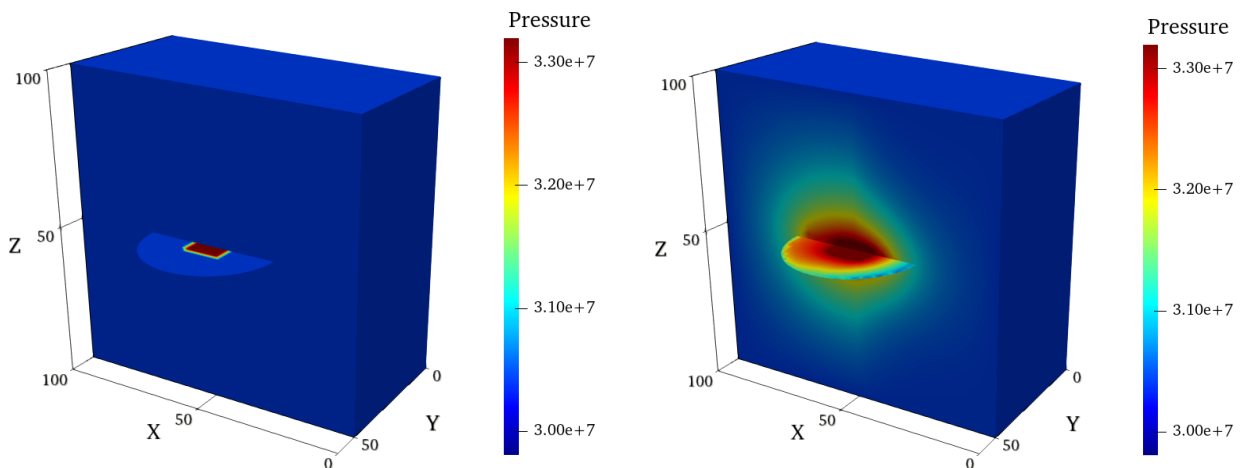


Рис. 1. Распределение давления в среде и трещине для  $t = (0, 20)\Delta t$

Fig. 1. Pressure distribution in the medium and fracture at  $t = (0, 20)\Delta t$

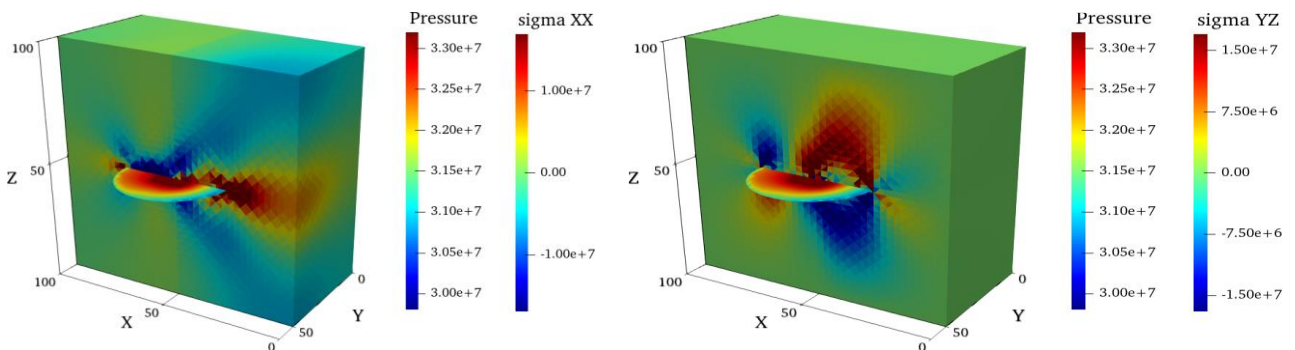


Рис. 2. Распределение давления в трещине и компонент тензора упругих напряжений при  $t = 20\Delta t$

Fig. 2. Pressure distribution in fracture and elastic stress tensor components at  $t = 20\Delta t$



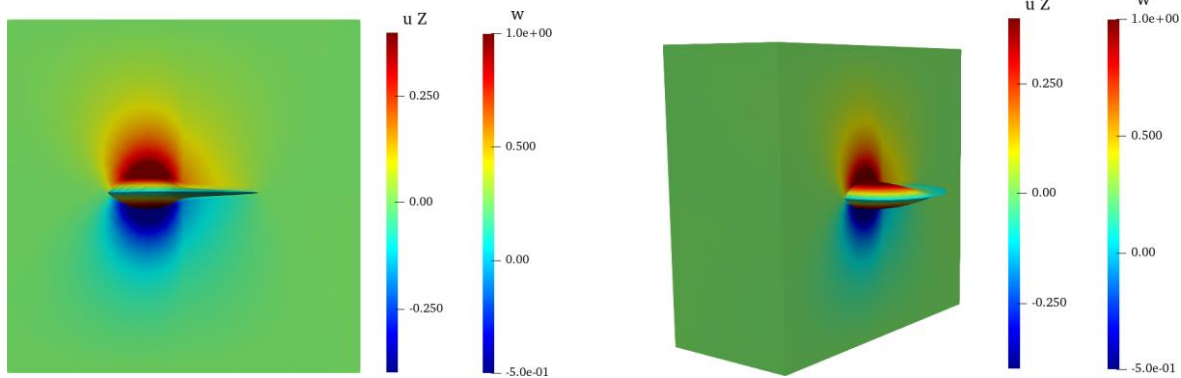


Рис. 3. Деформированная геометрия трещины, поле перемещений  $u_z$  и раскрытие трещины  $w$  при  $t = 20\Delta t$

Fig. 3. Deformed fracture geometry, displacement field  $u_z$  and crack opening at  $t = 20\Delta t$

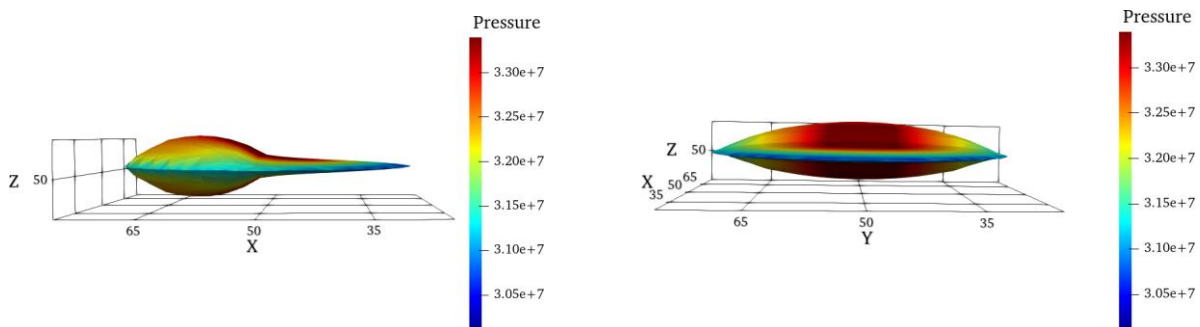


Рис. 4. Деформированная геометрия трещины и распределение поля давления в ней при  $t = 20\Delta t$

Fig. 4. Deformed fracture geometry and pressure field at  $t = 20\Delta t$

*Эволюционирующая трещина в естественном поле напряжений.* Рассматривается задача об эволюции изначально плоской трещины в естественном поле напряжений с учетом неоднородности прочностных свойств среды. Это означает, что в различных подобластях вмещающей трещину среды коэффициенты трещиностойкости имеют разное значение, что приводит к тому, что скорость распространения фронта трещины в них также отличается. Развитие срединной поверхности трещины определяется как распределением поля напряжений, так и значением коэффициента трещиностойкости.

Расчетная область представляет собой параллелепипед  $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ , где  $L_x = L_y = 100$  м,  $L_z = 50$  м. Для расчетов использовалась равномерная сетка из тетраэдров. Узлы сетки образуют кубическую решетку  $N_x \times N_y \times N_z$  с  $N_x = N_y = 40$  и  $N_z = 50$ . Таким образом, шаг сетки узлов  $h_x = h_y = h_z = 2,5$  м. Всего в сетке  $N_n = 80\,000$  узлов и  $N_e = 372\,645$  конечных элементов. Шаг по времени составлял  $\Delta t = 900$  с (15 мин), полное время расчета  $T = 23\,400$  с (6,5 ч).

Расчетная область  $\Omega$  делилась на две части вертикальной плоскостью, проходящей через ее центр перпендикулярно оси  $Oy$ . Свойства среды в каждой из подобластей приведены в табл. 2, где  $E$  – модуль Юнга,

$\nu$  – коэффициент Пуассона,  $b$  и  $M$  – параметры Био,  $K$  – коэффициент проницаемости. Вязкость и сжимаемость флюида задавались как  $\mu_f = 1.0 \times 10^{-3}$  Па·с и  $c_f = 1.0 \times 10^{-6}$  Па<sup>-1</sup>. Коэффициенты трещиностойкости, определяющие скорость развития трещины, принимают различные значения в подобластях, симметричных плоскости  $y = L_y/2$ .

Таблица 2

Свойства модельной среды в расчете с эволюционирующей трещиной

Table 2

Properties of the model medium in the simulation with an evolving fracture

	$E$ , Па	$\nu$	$b$	$M$ , Н/м <sup>3</sup>	$K$ , м <sup>2</sup>
$y < L_y/2$	$1.5 \times 10^{10}$	0.2	0.79	$1.3 \times 10^{10}$	$9.35 \times 10^{-13}$
$y \geq L_y/2$	$1.5 \times 10^{11}$	0.2	0.75	$1.3 \times 10^9$	$1.87 \times 10^{-13}$

В начальный момент времени зародыш трещины имеет форму плоского диска радиусом  $R = 22$  м, расположенного горизонтально в центре расчетной области. Распределение давления в трещине определяется решением полной системы уравнений, с учетом группы



уравнений пороупругости и течения в трещине. В начальный момент времени давление внутри трещины принималось  $p_0 = 3.0 \times 10^7$  Па. В центральной части трещины давление считалось заданным в виде граничного условия  $p_{fr} = 3.3 \times 10^7$  Па. На границе области давление жидкости ставилось равным  $p_0$ , нормальные компоненты поля перемещений на гранях задавались равными нулю. В начальный момент времени давление жидкости в области также равнялось  $p_0$ . На верхней и нижней границах области прикладывались сдвиговые напряжения, имитирующие естественное поле напряжений в пластовых условиях.

На рис. 5 показано изменение давления в трещине и вмещающей ее среде с течением времени. Результаты приведены для моментов времени  $t = (0, 9, 18, 26)\Delta t$ . Видно выполнение условий непрерывности давлений в среде и на срединной поверхности трещины. Распределение давления (равно как и раскрытие) в трещине непостоянно и несимметрично – это связано с отличием упругих и фильтрационных модулей среды в различных подобластях. Более того, явно заметен несимметричный характер развития трещины – в одном из направлений она развивается быстрее, чем в другом. Более детально динамика развития срединной поверхности в трещине и распределения давления в ней показана на рис. 6. Хорошо заметны небольшие изломы на фронте трещины, которые образуются в местах разрыва прочностных свойств среды.

## Заключение

Работа посвящена описанию методов математического моделирования динамики развития флюидона-

полненной трещины в пороупругой среде в рамках полной связанной трехмерной постановки.

Модель включает в себя группу уравнений пороупругости, описывающих связанные механические и фильтрационные процессы во вмещающей трещину среде, уравнение смазочного слоя, описывающее течение в трещине, группу условий согласования на границе «трещина – пласт» и граничные условия на фронте трещины и флюида в ней. С геометрической точки зрения моделью трещины является произвольная гладкая поверхность с краем.

Вычислительный алгоритм основывается на итеративном связывании решения отдельных групп уравнений математической модели, каждая из которых представлена в работе. Уравнения пороупругости в среде решаются с помощью оригинального варианта расширенного метода конечных элементов X-FEM, позволяющего учитывать наличие в расчетной области трещин, геометрия которых не согласована с геометрией расчетной сетки. Для представления срединной поверхности трещины при этом используется метод проекции ближайшей точки, с помощью которого также осуществляется расчет эволюции трещины и интегрирование уравнений гидродинамики на ее поверхности. Предложенный алгоритм является полностью эйлеровым и использует для решения задачи единую пространственную расчетную сетку.

Опыт программной реализации предложенного алгоритма показал его эффективность и надежность, прежде всего для решения задач с заранее неизвестной геометрией срединной поверхности трещины. Обобщение алгоритма на случай нескольких трещин может быть выполнено формально и не представляет существенных сложностей.

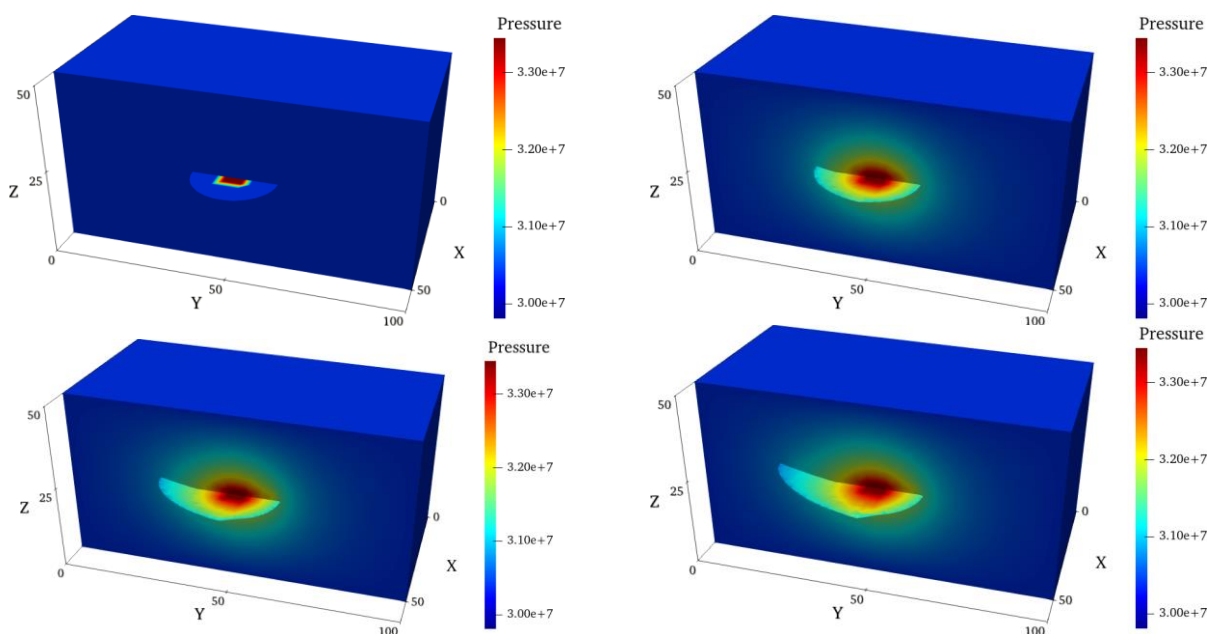


Рис. 5. Распределение давления в среде и трещине для  $t = (0, 9, 18, 26)\Delta t$

Fig. 5. Pressure distribution in the medium and fracture at  $t = (0,9,18,26)\Delta t$

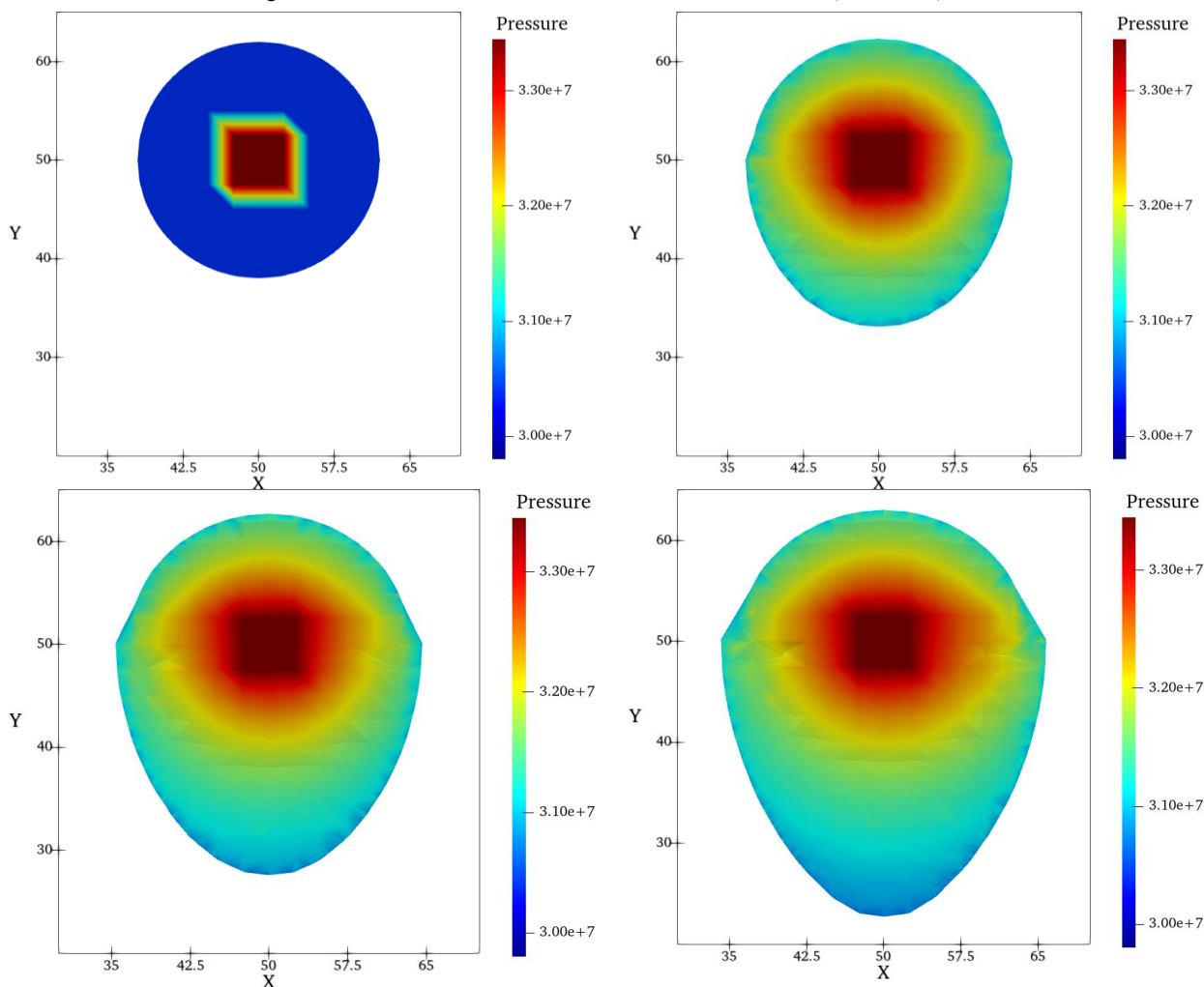


Рис. 6. Эволюция срединной поверхности трещины и давления в ней для  $t = (0,9,18,26)\Delta t$

Fig. 6. Evolution of the fracture mid-surface and its pressure at  $t = (0,9,18,26)\Delta t$

Дальнейшее развитие алгоритма и его программной реализации будет связано с усложнением физической модели. В частности, для решения содержательных прикладных задач анализа развития трещин гидрораз-

рыва пласта необходим учет неньютоновской реологии флюида внутри трещины. Помимо этого, существенный интерес представляют задачи развития трещине в среде с анизотропным распределением прочностных свойств.

## Библиографический список

1. Савенков Е.Б., Борисов В.Е. Математическая модель развития трещины гидроразрыва пласта в трехмерной порупругой среде // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 1. – С. 5–17.
2. Rubin A.M. Propagation of magma-filled cracks // Annual Review of Earth and Planetary Sciences. – 1995. – Vol. 23 – P. 287–336.
3. Bouklas N., Landis C.M., Huang R. Effect of solvent diffusion on crack-tip fields and driving force for fracture of hydrogels // Journal of Applied Mechanics. – 2015. – Vol. 82, 081007.
4. Гидравлический разрыв карбонатных пластов / В.Г. Салимов [и др.]. – М.: Нефтяное хозяйство, 2013. – 471 с.
5. Economides M.J., Oligney R.E., Valko P. Unified Fracture Design: Bridging the Gap Between Theory and Practice. – Alvin, Texas: Orsa Press, 2001. – 200 p.
6. Simulating Fully 3D Hydraulic Fracturing. Modeling in Geomechanics / B.J. Carter [et al.]; Ed. Zaman, Booker and Gioda. – Wiley Publishers, 2000.
7. Computer simulation of hydraulic fractures / J. Adachi [et al.] // Int. J. Rock Mech. – 2007. – Vol. 44 – P. 739-757.
8. Gordeliy E., Peirce A. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the X-FEM // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2013. – Vol. 253 – P. 305–322.
9. Weber N. The X-FEM for Hydraulic Fracture Mechanics. PhD Thesis. – Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule, Aachen, 2016. – 149 p.
10. Gordeliy E., Peirce A. Implicit level set schemes for modeling hydraulic fractures using the X-FEM // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2013. – Vol. 266 – P. 125–143.
11. Peirce A.P., Detournay E. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures // Computer Methods

in Applied Mechanics and Engineering. – 2008. – Vol. 197 – P. 2858–2885.

12. Peirce A.P. Modeling multi-scale processes in hydraulic fracture propagation using the implicit level set algorithm // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2015. – Vol. 283 – P. 881–908.

13. Garagash D.I., Detournay E., The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium // ASME J. Appl. Mech. – 2000. – Vol. 67 – P. 183–192.

14. Garagash D.I. Propagation of a plane-strain fluid-driven fracture with a fluid lag: early-time solution // Int. J. Solids Struct. – 2006. – Vol. 43 – P. 5811–5835.

15. Savenkov E.B., Borisov V.E., Kritskiy B.V. Surface Representation with Closest Point Projection in the X-FEM // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2020. – Vol. 12, no. 1. – P. 36–52.

16. Moes N., Gravouil A., Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part I: Mechanical model // Int. J. Num. Meth. Eng. – 2002. – Vol. 53 – P. 2549–2568.

17. Gravouil A., Moes N., Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part II: Level set update // Int. J. Num. Meth. Eng. – 2002. – Vol. 53 – P. 2569–2586.

18. Belytschko T., Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing // Internat. J. Numer. Methods Engrg. – 1999. – Vol. 45 – P. 601–620.

19. Иванов А.В., Савенков Е.Б. Моделирование и визуальное представление динамики поверхности с подвижным краем на стационарной неструктурированной сетке // Научная визуализация. – 2017. – Т. 9. – С. 64–81.

20. Зипунова Е.В., Савенков Е.Б. Применение метода проекции ближайшей точки для решения уравнений гидродинамики в приближении смазочного слоя // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2020. – № 10. – 32 с.

21. Савенков Е.Б. Конечноэлементный вариант метода проекции ближайшей точки для решения уравнений на поверхностях с краем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2020. – № 8. – 36 с.

22. Zipunova E., Ivanov A., Savenkov E. Application of the closest point projection method to solution of Reynold's lubrication equations on evolving surfaces // Mathematica Montisnigri. – 2020. – № 47. – P. 100–118.

23. Программный комплекс HFrac3D++ для решения задач геомеханики с учетом крупномасштабных флюидонаполненных трещин / В.Е. Борисов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2020. – № 46. – 20 с.

24. Wang H.F. Theory of Linear Poroelasticity. – Princeton University Press, 2000.

25. Coussy O. Poromechanics, 2nd edition. – John Wiley & Sons, 2004.

26. Lewis R.W., Schrefler, B.A. The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation in Porous Media, 2nd ed. – J. Wiley, 1998.

27. Rice J.R., Cleary M.P. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents // Reviews of Geophysics and Space Physics. – 1976. – Vol. 14 – P. 227–241.

28. Chipot M., Luskin M. The compressible Reynolds lubrication equations // IMA Preprint Series. – 1986. – No. 232.

29. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

30. Anderson T.L. Fracture mechanics: fundamentals and applications. – CRC Press, 2002.

31. Kim J., Tchelepi H.A., Juanes R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Drained and undrained splits // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2011. – Vol. 200, no. 23–24. – P. 2094–2116.

32. Prévost J.H. Partitioned solution procedure for simultaneous integration of coupled-field problems // Commun. Numer. Methods. Eng. – 1997. – Vol. 13 – P. 239–247.

33. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. – SIAM, 2003.

34. Marz T., Macdonald C.B. Calculus on surfaces with general closest point functions // SIAM J. Numer. Anal. – 2012. – Vol. 50, no. 6 – P. 3303–3328.

35. Macdonald C.B., Ruuth S.J. The implicit Closest Point Method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces // SIAM J. Sci. Comput. – 2009. – Vol. 31. – P. 4330–4350.

36. Macdonald C.B., Brandman J., Ruuth S.J. Solving eigenvalue problems on curved surfaces using the Closest Point Method // J. Comput. Phys. – 2011. – Vol. 230 – P. 7944–7956.

37. Macdonald C.B., Ruuth S.J. Level set equations on surfaces via the Closest Point Method // J. Sci. Comput. – 2008. – Vol. 35. – P. 219–240.

## References

1. Savenkov E.B., Borisov V.E. A mathematical model for hydraulic fracture propagation in three dimensional poroelastic medium. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 1, pp. 5-17.

2. Rubin A.M. Propagation of magma-filled cracks. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 1995, vol. 23, pp. 287-336.

3. Bouklas N., Landis C.M., Huang R. Effect of solvent diffusion on crack-tip fields and driving force for fracture of hydrogels. *Journal of Applied Mechanics*, 2015, vol. 82, 081007.

4. Salimov V.G., et al. Gidravlicheskiy razryv karbonatnykh plastov [Hydraulic fracturing of carbonate formations]. *Moscow, Neftyanoe khozyaistvo*, 2013, 471 p.

5. Economides M.J., Oligney R.E., Valko P. Unified Fracture Design: Bridging the Gap Between Theory and Practice. *Alvin, Texas. Orsa Press*, 2001, 200 p.

6. Carter B.J., et al. Simulating Fully 3D Hydraulic Fracturing. Modeling in Geomechanics. Ed. Zaman, Booker, and Gioda, Wiley Publishers, 2000.

7. Adachi J., et al. Computer simulation of hydraulic fractures. *Int. J. Rock Mech.*, 2007, vol. 44, pp. 739-757.

8. Gordeliy E., Peirce A. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the X-FEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2013, vol. 253, pp.305-322.

9. Weber N. The X-FEM for Hydraulic Fracture Mechanics. *PhD Thesis, Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule, Aachen*, 2016, 149 p.

10. Gordeliy E., Peirce A. Implicit level set schemes for modeling hydraulic fractures using the X-FEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2013, vol. 266, pp. 125-143.

11. Peirce A.P., Detournay E. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, vol. 197, pp. 2858-2885.

12. Peirce A.P. Modeling multi-scale processes in hydraulic fracture propagation using the implicit level set algorithm. *Com-*

*puter Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, vol. 283, pp. 881-908.

13. Garagash D.I., Detournay, E., The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium. *ASME J. Appl. Mech.*, 2000, vol. 67, pp. 183-192.

14. Garagash D.I. Propagation of a plane-strain fluid-driven fracture with a fluid lag: early-time solution. *Int. J. Solids Struct.*, 2006, vol. 43, pp. 5811-5835

15. Savenkov E.B., Borisov V.E., Kritskiy B.V. Surface Representation with Closest Point Projection in the X-FEM. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 36-52.

16. Moes N., Gravouil A., Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part I: Mechanical model. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2002, vol. 53, pp. 2549-2568.

17. Gravouil A., Moes N., Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part II: Level set update. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2002, vol. 53, pp. 2569-2586.

18. Belytschko T., Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Internat. J. Numer. Methods Eng.*, 1999, vol. 45, pp. 601-620.

19. Ivanov A.V. and Savenkov E.B. Modelirovanie i vizual'noe predstavlenie dinamiki poverkhnosti s podvizhnym kraem na stacionarnoi nestruturirovannoi setke [Simulation and visualization of the dynamics of a surface with a movable boundary on a stationary unstructured mesh]. *Scientific Visualization*, 2017, vol. 9, pp. 64-81.

20. Zipunova E.V., Savenkov E.B. Primenenie metoda proektsii blizhaishei tochki dlia resheniia uravnenii gidrodinamiki v priblizhenii smazochnogo sloia [Solving Reynolds lubrication equations using closest point projection method]. *KIAM preprints*, 2020, no. 10, 32 p.

21. Savenkov E.B. Konechnoelementnyi variant metoda proektsii blizhaishei tochki dlia resheniia uravnenii na poverkhnostiakh s kraem [Finite element framework for closest point projection method for surface PDEs]. *KIAM preprints*, 2020, no. 8, 36 p.

22. Zipunova E., Ivanov A., Savenkov E. Application of the closest point projection method to solution of Reynold's lubrication equations on evolving surfaces. *Mathematica Montisnigri*, 2020, vol. 47, pp.100-118.

23. Borisov V.E., et al. Programmnyi kompleks HFrac3D++ dlia resheniia zadach geomekhaniki s uchetom krupnomasshtabnykh fluidonapolnennykh treshchin [HFrac3D++ code for geomechanics problems with large scale fluid-filled fractures]. *KIAM preprints*, 2020, no. 46, 20 p.

24. Wang H.F. Theory of Linear Poroelasticity, Princeton University Press, 2000.

25. Coussy O. Poromechanics, 2nd edition. John Wiley & Sons, 2004.

26. Lewis R.W., Schrefler, B.A. The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation in Porous Media, 2nd ed. J. Wiley, Chichester, 1998.

27. Rice J.R., Cleary M.P. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 1976, vol. 14, pp. 227-241.

28. Chipot M., Luskin M. The compressible Reynolds lubrication equations. *IMA Preprint Series*, 1986, no. 232.

29. Cherepanov G.P. Mehanika hrupkogo razrusheniia. [Mechanics of brittle fracture]. *Moscow, Nauka*, 1974, 600 p.

30. Anderson T.L. Fracture mechanics: fundamentals and applications. CRC Press, 2002.

31. Kim J., Tchelepi H.A., Juanesc R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Drained and undrained splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, vol. 200, no. 23-24, pp. 2094-2116.

32. Prévost J.H. Partitioned solution procedure for simultaneous integration of coupled-field problems. *Commun. Numer. Methods. Eng.*, 1997, vol. 13, pp. 239-247.

33. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. SIAM, 2003.

34. Marz T., Macdonald C.B. Calculus on surfaces with general closest point functions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2012, vol. 50, no. 6, pp. 3303-3328.

35. Macdonald C.B., Ruuth S.J. The implicit Closest Point Method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2009, vol. 31, pp. 4330-4350.

36. Macdonald C.B., Brandman J., Ruuth S.J. Solving eigenvalue problems on curved surfaces using the Closest Point Method. *J. Comput. Phys.*, 2011, vol. 230, pp. 7944-7956.

37. Macdonald C.B., Ruuth S.J. Level set equations on surfaces via the Closest Point Method. *J. Sci. Comput.*, 2008, vol. 35, pp. 219-240.