



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.06

УДК 539.375

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДКБ-ОБРАЗЦА С УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

В.В. Глаголев, А.А. Маркин

Тульский государственный университет, Тула, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 20 октября 2020 г.

Принята: 12 мая 2021 г.

Опубликована: 12 июля 2021 г.

Ключевые слова:

энергетическое произведение,
линейный размер,
упругопластическое
деформирование, трещина моды I.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается нагружение полосы с трещиноподобным дефектом по моде I. В отличие от классического представления трещины в виде математического разреза предлагаемая модель определяет трещину как физический разрез с характерным линейным размером. Мысленное продолжение физического разреза в твердом теле формирует слой взаимодействия (СВ). Существенно, что напряженно-деформируемое состояние слоя при конечном значении линейного параметра не вносит в модель трещины сингулярность. Рассматривается процесс упругопластического деформирования при неизменной длине слоя. Получено упрощенное аналитическое решение задачи деформирования двух упругих тел, связанных тонким слоем с упругопластическими свойствами. Установлена зависимость полей перемещений и напряжений от длины и толщины слоя взаимодействия. Показано, что при классическом условии пластичности диапазон изменения внешней нагрузки, приводящий к чисто упругому поведению, возможен только при конечной толщине слоя. При стремлении толщины слоя к нулю, как и в модели Дагдейла, область пластичности образуется при сколь угодно малой внешней нагрузке. Для малых толщин слоя предложен локальный критерий пластичности, при использовании которого возможно выделение интервалов изменения внешней нагрузки, связанных с упругим и пластическим деформированием. Локальное условие пластичности, определяемое критическим значением энергетического произведения, позволяет отразить стадию упругого деформирования при сколь угодно малой конечной толщине слоя взаимодействия. Получена асимптотическая зависимость внешней нагрузки от толщины СВ и приведенной длины пластической зоны. При этом сохраняется разделение внешней нагрузки на упругую и пластическую составляющие. Из анализа экспериментальных данных получена оценка предела упругости энергетического произведения для адгезива AV138.

© ПНИПУ

© Глаголев Вадим Вадимович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: vadim@tsu.tula.ru, ID: [0000-0003-0371-7704](https://orcid.org/0000-0003-0371-7704).

Маркин Алексей Александрович – д.ф.-м.н., проф., e-mail: markin-nikram@yandex.ru, ID: [0000-0003-1456-8281](https://orcid.org/0000-0003-1456-8281).

Vadim V. Glagolev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department,

e-mail: vadim@tsu.tula.ru, ID: [0000-0003-0371-7704](https://orcid.org/0000-0003-0371-7704).

Alexey A. Markin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,

e-mail: markin-nikram@yandex.ru, ID: [0000-0003-1456-8281](https://orcid.org/0000-0003-1456-8281).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



THE DEFORMATION MODEL OF THE DCB-SAMPLE WITH ELASTOPLASTIC PROPERTIES

V.V. Glagolev, A.A. Markin

Tula State University, Tula, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 October 2020

Accepted: 12 May 2021

Published: 12 July 2021

Keywords:

energy product, linear size, elastoplastic deformation, crack mode I, double-cantilever beam (DCB).

ABSTRACT

The loading of a strip with a crack-like defect according to mode I is considered. In contrast to the classical representation of a crack in the form of a mathematical section, the proposed model defines a crack as a physical cut with a characteristic linear size. The mental continuation of a physical cut in a solid forms an interaction layer (IL). It is important that the stress-strain state of the layer at a finite value of the linear parameter does not introduce a singularity into the crack model. The process of elastoplastic deformation with a constant layer length is considered. We obtained a simplified analytical solution to the problem of deformation of two elastic bodies connected by a thin layer with elastoplastic properties. The dependence of the displacement and stress fields on the length and thickness of the interaction layer has been found. It is shown that, under the classical plasticity condition, the range of variation of the external load leading to a purely elastic behavior is possible only for a finite layer thickness. As the layer thickness tends to zero, as in the Dugdale model, the plasticity region is formed at an arbitrarily small external load. For small layer thicknesses, a local plasticity criterion is proposed, by using which it is possible to distinguish the intervals of the external load variations associated with elastic and plastic deformations. The local plasticity condition, determined by the critical value of the energy product, makes it possible to reflect the stage of elastic deformation at an arbitrarily small finite thickness of the interaction layer. An asymptotic dependence of the external load on the IL thickness and the reduced length of the plastic zone is obtained. At the same time, the separation of the external load into elastic and plastic components is preserved. From the analysis of the experimental data, an estimate of the elastic limit of the energy product for the AV138 adhesive was obtained.

© PNRPU

Введение

Экспериментальное исследование трещиностойкости материалов использует в качестве образца для изучения трещины нормального отрыва двухконсольную балку (ДКБ-образец). На образцы и порядок проведения испытаний действует соответствующий регламент, определяемый по ГОСТу. В процессе испытаний определяется критическое значение коэффициента интенсивности напряжений (КИН) – вязкость разрушения K_{IC} [1–3]. При этом используется определение КИН в рамках классической модели трещины, рассматриваемой в виде математического разреза в линейно-упругой среде. Непосредственно измеряемой характеристикой данного эксперимента является зависимость расклинивающего усилия от перемещения, в которой выделяются линейный и нелинейный участки. Для выяснения причины нелинейности необходимо проводить промежуточные разгрузки с целью выявления наличия пластических деформаций либо их отсутствия. Учет возможной физической нелинейности, обусловленной пластичностью, находит отражение в моделях трещины нулевой толщины путем введения поправки Ирвина – Орована [4, 5], сил сцепления [6–12], тонкой пластической зоны [13, 14], пластического коэффициента интенсивности напряжений [15], поперечника пластической области [16, 17]. Как правило, образование пластической зоны в этих моделях происходит с начала нагру-

жения, а стадия чисто упругого деформирования не отражается.

Классическая постановка упругопластической задачи [18–21] подразумевает наличие условия перехода материальной области из упругого состояния в пластическое. Если область не содержит источников сингулярности напряжений, то из решения упругой задачи определяется внешняя нагрузка, при которой достигается предел упругости. В этом случае в рассмотрение вводится модель трещины в виде физического разреза [22]. Модель упругого деформирования трещины в виде физического разреза может быть рассмотрена на основе связей Прандтля [23–26], однако вопрос о выборе характерного размера и жесткости связей открыт. В работах [27–31] рассмотрена модель, основанная на концепции слоя взаимодействия, для которой материальные свойства слоя соответствуют поврежденному телу, а характерный размер определяется из решения обратной задачи [30].

В данной работе на основе общей вариационной постановки [30] получено упрощенное аналитическое решение задачи деформирования двух упругих тел, связанных тонким слоем с упругопластическими свойствами. Рассматривается процесс упругопластического деформирования при неизменной длине слоя. Полученное решение в упругой области не содержит осцилляций, в отличие от решения в балочном приближении [28]. Показано, что при классическом условии текучести диапазон внешней нагрузки, приводящей к чисто упру-

тому поведению, возможен только при конечной толщине слоя. При стремлении толщины слоя к нулю, как и в задаче Дагдейла, область пластичности образуется при сколь угодно малой внешней нагрузке. Для малых толщин слоя, вплоть до нулевых, предложен локальный критерий пластичности, при использовании которого возможно выделение внешних нагрузок, связанных с упругим и пластическим деформированием. Из анализа экспериментальных данных [32] приведена оценка зоны пластического деформирования при использовании локального критерия.

Постановка задачи нормального отрыва

На рисунке показана двухконсольная балка (ДКБ-образец) $\ell + a$, состоящая из трех тел. Пластины 1 и 2 с одинаковыми толщинами h по длине ℓ связаны слоем взаимодействия 3 толщиной δ_0 . Материал пластин принимаем линейно-упругим, а материал слоя взаимодействия – идеально упругопластическим. Пластические деформации слоя ограничены длиной ℓ_p . Правый торец образца жестко закреплен от горизонтальных и вертикальных перемещений, на левых торцах консолей действует вертикальная симметричная нагрузка интенсивностью P . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки.

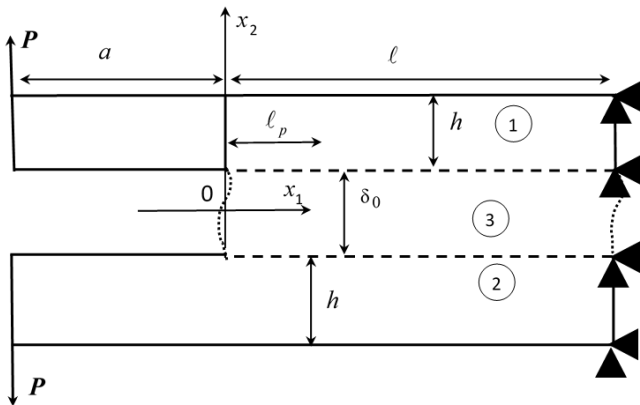


Рис. Модель ДКБ-образца

Fig. Model of the DCB-sample

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия», развитую в работах [24–29]. В этом случае условия равновесия тел 1 и 2 запишем в вариационной форме:

– для тела 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl \quad (1)$$

– тела 2:

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathbf{P}^2 \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (2)$$

где S_1, S_2 – площади тел 1 и 2; $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензоры средних напряжений и деформаций слоя с компонентами: $\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \bar{\sigma}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2$, $\bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2$,

$$\bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \quad (3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right),$$

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) =$$

$$= 0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right), \quad (4)$$

где u_k^{\pm} – компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя соответственно; $k=1,2$; L_1, L_2 – граница приложения внешней нагрузки для тела 1 и 2. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1, 2:

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}(x_1, \delta_0/2); \mathbf{u}^- = \mathbf{u}(x_1, -\delta_0/2) \quad x_1 \in [0; \ell].$$

Для материала пластин примем определяющие соотношения в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \delta_{ij} \right), \quad (5)$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона тела; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объемная деформация; δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Предполагаем, что напряженное состояние слоя для данного вида нагружения определятся одной компонентой тензора средних напряжений. Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения на стадии обратимого деформирования принимаем в виде

$$\bar{\sigma}_{22} = E_3 \bar{\varepsilon}_{22}; \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = 0; \bar{\sigma}_{22} \leq \sigma_0, \quad (6)$$

а на стадии пластического течения –

$$\bar{\sigma}_{22} = \sigma_0; \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = 0, \quad (7)$$

где σ_0 – предел текучести материала слоя; E_3 – модуль упругости материала слоя.

Соотношения (6) соответствуют представлению типа упругих связей Прандтля [23], а (7) – модели Дагдейла [14]. В силу симметрии задачи проекции поля перемещений удовлетворяют условиям $u_1^+(x_1, x_2) = u_1^-(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2)$, $u_2^+(x_1, x_2) = -u_2^-(x_1, x_2) = u_2(x_1, x_2)$, а вектор распределенной внешней нагрузки – $\mathbf{P}^1 = -\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением тела 1. С учетом того, что в слое взаимодействия для данного нагружения имеет место (6) и (7), система уравнений (1)–(2) преобразуется в вариационное уравнение:

$$\int_{S_I} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_I = \int_{L_I} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl. \quad (8)$$

Решение системы (5)–(8) сводится к определению поля перемещений $\mathbf{u}(x_I, x_2)$ в теле 1 (см. рисунок) с учетом граничных условий на его торцах:

$$u_1(x_I, x_2) \Big|_{x_I=\ell} = 0, \quad (9)$$

$$u_2(x_I, x_2) \Big|_{x_I=\ell} = 0, \quad (10)$$

$$\sigma_{11} \Big|_{x_I=-a} = 0, \quad (11)$$

$$\sigma_{12} \Big|_{x_I=-a} = -P. \quad (12)$$

Для упрощения задачи принимаем, что поле перемещений в теле 1 определено следующим образом:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (13)$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1). \quad (14)$$

Входящий в представление (13), (14) параметр φ имеет геометрический смысл малого угла поворота материальной нормали к плоскости $x_2 = \delta_0/2$ в теле 1. Согласно распределению (13)–(14) деформации в консоли будут определяться в виде

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (15)$$

$$\varepsilon_{12}(x_1, x_2) = \varepsilon_{12}(x_1) = 0.5 \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (16)$$

$$\varepsilon_{22}(x_1, x_2) = 0. \quad (17)$$

Выражения (15), (16), как теория Тимошенко [33] и работы [34–36], учитывают сдвиговые деформации и повороты нормалей в теле.

Рассмотрим работу внутренних напряжений для тела 1 с учетом заданных полей деформаций (15), (16):

$$\begin{aligned} \int_{S_I} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds = & \int_{-a}^0 \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(\sigma_{11} \left(\frac{d\delta u_1^+}{dx_1} - (x_2 - \delta_0/2) \frac{d\delta\varphi}{dx_1} \right) + \right. \\ & \left. + \sigma_{12} \left(\frac{d\delta u_2^+}{dx_1} - \delta\varphi \right) \right) dx_1 dx_2 + \int_{+0}^{\ell} \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \times \\ & \times \left(\sigma_{11} \left(\frac{d\delta u_1^+}{dx_1} - (x_2 - \delta_0/2) \frac{d\delta\varphi}{dx_1} \right) + \sigma_{12} \left(\frac{d\delta u_2^+}{dx_1} - \delta\varphi \right) \right) dx_1 dx_2 + \\ & + \int_{\ell}^{\ell} \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(\sigma_{11} \left(\frac{d\delta u_1^+}{dx_1} - (x_2 - \delta_0/2) \frac{d\delta\varphi}{dx_1} \right) + \sigma_{12} \left(\frac{d\delta u_2^+}{dx_1} - \delta\varphi \right) \right) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем в рассмотрение обобщенные силы:

$$Q_{11}(x_I) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2, \quad (19)$$

$$Q_{12}(x_I) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2, \quad (20)$$

и обобщенный момент:

$$M_{11}(x_I) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2. \quad (21)$$

Интегрируем по частям ряд слагаемых в правой части (18) с учетом (19)–(21):

$$\int_m^n Q_{1k} \frac{d\delta u_k^+}{dx_1} dx_1 = Q_{1k} \delta u_k^+ \Big|_{x_1=m}^{x_1=n} - \int_m^n \frac{dQ_{1k}}{dx_1} \delta u_k^+ dx_1, \quad (22)$$

$$\int_m^n M_{11} \frac{d\delta\varphi}{dx_1} dx_1 = M_{11} \delta\varphi \Big|_{x_1=m}^{x_1=n} - \int_m^n \frac{dM_{11}}{dx_1} \delta\varphi dx_1, \quad (23)$$

где m, n – соответствующие пределы интегрирования по координате x_1 .

Рассмотрим правую часть (8). Найдем вектор напряжений на левом торце консоли $\mathbf{P} = -\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} = P\mathbf{e}_2$. Работа напряжений составит:

$$\int_{L_I} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl = \int_{h+\delta_0/2}^{\delta_0/2} P \delta u_2^+(-dx_2) \Big|_{x_1=-a} = Ph \delta u_2^+ \Big|_{x_1=-a} = Q_2 \delta u_2^+ \Big|_{x_1=-a}. \quad (24)$$

Подставив (18), (22)–(24) в (8) и приравняв слагаемые при равных вариациях, приходим к двум системам дифференциальных уравнений:

– для участка $x_1 \in [-a; 0]$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0, \quad (25)$$

– для участков $x_1 \in (0; \ell_p) \cup (\ell_p; \ell]$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}, \quad (26)$$

с условиями сопряжения:

$$u_1^+ \Big|_{x_1=-0; \ell_p-0} = u_1^+ \Big|_{x_1=+0; \ell_p+0}, \quad (27)$$

$$\varphi|_{x_1=0;\ell_p-0} = \varphi|_{x_1=0;\ell_p+0}, \quad (28)$$

$$u_2^+|_{x_1=0;\ell_p-0} = u_2^+|_{x_1=0;\ell_p+0}, \quad (29)$$

$$M_{11}|_{x_1=0;\ell_p-0} = M_{11}|_{x_1=0;\ell_p+0}, \quad (30)$$

$$Q_{12}|_{x_1=0;\ell_p-0} = Q_{12}|_{x_1=0;\ell_p+0}, \quad (31)$$

$$Q_{11}|_{x_1=0;\ell_p-0} = Q_{11}|_{x_1=0;\ell_p+0}, \quad (32)$$

и естественным граничным условиям на левом торце:

$$Q_{12}|_{x_1=-a} = -Q_2, \quad (33)$$

$$Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad (34)$$

$$M_{11}|_{x_1=-a} = 0. \quad (35)$$

На правом торце из (9), (10) с учетом (13), (14) рассматриваем граничные условия:

$$u_1^+|_{x_1=\ell} = 0, \quad (36)$$

$$\varphi|_{x_1=\ell} = 0, \quad (37)$$

$$u_2^+|_{x_1=\ell} = 0. \quad (38)$$

С учетом (15)–(17) и условия плоской деформации ($\epsilon_{33} = 0$) определяющие соотношения (5) запишем в виде

$$\sigma_{11} = D \left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right), \quad (39)$$

$$\sigma_{12} = L \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (40)$$

$$\text{где } D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; L = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Запишем выражения обобщенных сил (19), (20) с учетом (39), (40):

$$Q_{11}(x_1) = D \left(h \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^2}{2} \varphi' \right), \quad (41)$$

$$Q_{12}(x_1) = Lh \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right), \quad (42)$$

а также момента (21):

$$M_{11}(x_1) = D \left(\frac{h^2}{2} \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^3}{3} \varphi' \right). \quad (43)$$

В результате задача (25)–(38), (6), (7) с учетом (41)–(43) становится замкнутой относительно трех неизвестных функций: $u_1^+(x_1)$, $u_2^+(x_1)$, $\varphi(x_1)$.

Решение задачи. Рассмотрим частное решение задачи при $\nu = 0$; $E = E_3$. Запишем решение (25) при удовлетворении граничных условий (33)–(35):

$$u_1^+ = \frac{h}{2} \varphi + k3; u_2^+ = \frac{Q_2(x_1+a)^3}{6S} + k1x_1 + k2; \quad (44)$$

$$\varphi = \frac{Q_2}{Lh} + \frac{Q_2(x_1+a)^2}{2S} + k1,$$

где $k1, k2, k3$ – постоянные интегрирования, $S = \frac{Dh^3}{12}$.

Общее решение (26) для участка $x_1 \in (0; \ell_p)$ запишем в виде

$$u_1^+ = \frac{h}{2} \varphi + k4x + k5; u_2^+ = -\frac{\sigma_0 x_1^4}{2Dh^3} - \frac{2k6}{Dh^3} x_1^3 +$$

$$+ \left(\frac{\sigma_0}{Lh} + \frac{6k4}{h} - k7 \right) \frac{x_1^2}{2} + \left(k8 + \frac{k6}{Lh} \right) x_1 + k9; \quad (45)$$

$$\varphi = -\frac{2\sigma_0 x_1^3}{Dh^3} - \frac{6k6}{Dh^3} x_1^2 + \left(\frac{6k4}{h} - k7 \right) x_1 + k8,$$

а для участка $x_1 \in (\ell_p; \ell]$:

$$u_1^+ = \frac{h}{2} \varphi + k10x + k11;$$

$$u_2^+ = k12e^{\lambda_1 x_1} + k13e^{\lambda_2 x_1} + k14e^{\lambda_3 x_1} + k15e^{\lambda_4 x_1};$$

$$\varphi = k12 \left(\lambda_1 - \frac{K1}{\lambda_1} \right) e^{\lambda_1 x_1} + k13 \left(\lambda_2 - \frac{K1}{\lambda_2} \right) e^{\lambda_2 x_1} + \quad (46)$$

$$+ k14 \left(\lambda_3 - \frac{K1}{\lambda_3} \right) e^{\lambda_3 x_1} + k15 \left(\lambda_4 - \frac{K1}{\lambda_4} \right) e^{\lambda_4 x_1},$$

где $k1-k15$ – постоянные интегрирования; $K1 = \frac{4}{h\delta_0}$;

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{2}{h\delta_0} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{6\delta_0}{h}} \right)}; \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{2}{h\delta_0} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{6\delta_0}{h}} \right)};$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{2}{h\delta_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{6\delta_0}{h}} \right)}; \quad \lambda_4 = -\sqrt{\frac{2}{h\delta_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{6\delta_0}{h}} \right)}.$$

Удовлетворение решений (44)–(46) двенадцати условиями сопряжения (27)–(32) и трем граничным условиям (36)–(38) дает решение поставленной задачи, из которого, при $\ell_p = 0$, приходим к следующему значению напряжения в слое:

$$\bar{\sigma}_{22}|_{x_1=0} = \frac{2\sqrt{2}Q_2}{\sqrt{\delta_0 h}} \left(\sqrt{3} \frac{a}{h} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (47)$$

При $\frac{\delta_0}{h}, \frac{h}{a} \ll 1; \ell \rightarrow \infty$ из решения задачи приходим

к асимптотическому выражению вертикального перемещения на границе упругой и пластической зон:

$$u_2^+|_{x_1=\ell_p} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{\delta_0}{h}} \left(\frac{\sqrt{6}}{h} \left(Q_2(\ell_p + a) - \frac{\sigma_0 \ell_p^2}{2} \right) - \sigma_0 \ell_p + Q_2 \right)$$

из последнего выражения, с учетом (3), (6) и (7), – к связи:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{22}|_{x_1=\ell_p} &= \sigma_0 = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\delta_0 h}} \left(\frac{\sqrt{6}}{h} \left(Q_2(\ell_p + a) - \frac{\sigma_0 \ell_p^2}{2} \right) - \sigma_0 \ell_p + Q_2 \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Из выражения (48) находим представление внешней нагрузки с условием конечности напряжения σ_0 в виде

$$Q_2 = \frac{\sigma_0 h}{2} \left(\frac{\sqrt{\hat{\delta}_0} + 2\hat{\ell}_p + \sqrt{6}\hat{\ell}_p^2}{1 + \sqrt{6}(\hat{\ell}_p + \hat{a})} \right), \quad (49)$$

где $\hat{\delta}_0 = \frac{\delta_0}{h}; \hat{\ell}_p = \frac{\ell_p}{h}; \hat{a} = \frac{a}{h}$.

Если $\hat{\delta}_0 \rightarrow 0+0$, то из (49) приходим к выражению

$$Q_2 = \frac{\sigma_0 h}{2} \left(\frac{2\hat{\ell}_p + \sqrt{6}\hat{\ell}_p^2}{1 + \sqrt{6}(\hat{\ell}_p + \hat{a})} \right).$$

Из последнего выражения следует, что при переходе к математическому разрезу стадия упругого деформирования отсутствует и при сколь угодно малой величине внешней нагрузки возникает пластическая деформация. Такая же ситуация имеет место в модели Дагдейла [14] и в моделях с использованием когезионных сил сцепления [6–12].

Введение поправки Ирвина приводит к увеличению длины трещины за счет зоны пластичности на величину $\ell_p = \frac{K_{IC}^2}{2\pi\sigma_0^2}$. Поскольку коэффициент интенсивности напряжений K_I пропорционален внешней нагрузке, то и в модели квазихрупкого разрушения пластическая область возникает в начале нагружения. Таким образом, в случае математического разреза классические условия пластичности приводят к невозможности описания стадии чисто упругого деформирования.

Локальное условие пластичности. Сформулируем условие пластичности, позволяющее отразить стадию упругого деформирования при вырождении физического разреза в математический. Предполагаем, что в диапазоне толщины слоя $0 < \delta_0 \leq \delta_0^*$ условие пластичности имеет вид

$$2\gamma = 2\gamma_0, \quad (50)$$

где $2\gamma = \frac{\bar{\sigma}_{22}^2}{2E} \delta_0$ – энергетическое произведение [30].

В условии (50) используется сингулярное представление напряжения $\bar{\sigma}_{22}$ в виде (47). Из (49) выразим положительное значение длины пластической области:

$$\hat{\ell}_p = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sqrt{1 + 6 \left(\frac{Q_2}{\sigma_0 h} \right)^2 + \frac{12Q_2 \hat{a}}{\sigma_0 h} - \sqrt{6} \sqrt{\frac{\delta_0}{h}} - 1 + \frac{\sqrt{6}Q_2}{\sigma_0 h}} \right). \quad (51)$$

Преобразуем выражение (51) с учетом (50) при $\hat{\delta}_0 \rightarrow 0+0$:

$$Q_2 = \frac{\sqrt{2\gamma_0 E h}}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{6\hat{a}})} (1 + 2\ell_{p\delta}), \quad (52)$$

где $\ell_{p\delta} = \frac{\hat{\ell}_p}{\sqrt{\hat{\delta}_0}}$ – приведенная безразмерная длина пластической зоны.

В отличие от предыдущих зависимостей внешней нагрузки от длины пластической зоны, выражение (52) учитывает стадию упругого деформирования и при переходе к математическому разрезу, когда $0 \leq Q_2 \leq Q_e$.

Здесь $Q_e = \frac{\sqrt{2\gamma_0 E h}}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{6\hat{a}})}$ – упругая составляющая внеш-

ней нагрузки. Определяя в эксперименте значение упругой составляющей, находим предел упругости энергетического произведения в виде

$$2\gamma_0 = \frac{2(1 + \sqrt{6\hat{a}})^2 Q_e^2}{E h}. \quad (53)$$

В статье [32] приведены результаты экспериментов по определению трещиностойкости G_{IC} адгезива AV138. Образец состоит из двух пластин толщиной B в направлении, ортогональном плоскости $x_1 0x_2$ (см. рисунок), соединенных тонким слоем адгезива на части пластин. Образец нагружается расклинивающими силами $N = Q_2 B$. Определяется зависимость силы N от перемещения точки ее приложения – u . Приведены линейные размеры образца, мм: $h = 3; B = 25; a = 40$ и значение модуля Юнга $E = 4.9 \cdot 10^3$ Н/мм². Из приведенных зависимостей внешней силы от перемещения точки ее приложения можно оценить величину упругой составляющей $N_e = Q_e B = 30$ Н. Подставляя приведенные значения в формулу (53), получим значение $2\gamma_0 \sim 0.22$ Н/мм. В статье [32] приведено среднее значение трещиностойкости $G_{IC} = 0.14$ Н/мм, полученное в результате испытания шести образцов.

Выделим нагрузку, связанную с пластической деформацией $Q_p = 2Q_e \ell_{p\delta}$, тогда $Q_2 = Q_e + Q_p$ и с ростом пластической зоны растет параметр $\ell_{p\delta}$. Используя экспериментальные зависимости внешней нагрузки от перемещения, исходя из выражения $\ell_{p\delta} = 0.5 \left(\frac{Q_2(u)}{Q_e} - 1 \right)$, можно установить закон изменения параметра $\ell_{p\delta}$ от u .

Заключение

В результате упрощенного аналитического решения задачи упругопластического деформирования ДКБ-образца получены следующие результаты:

1. Установлена зависимость полей перемещений и напряжений от длины и толщины слоя взаимодействия. Напряжения обратно пропорциональны корню квадратному от толщины слоя и убывают по экспоненте вдоль длины слоя.

2. Использование классического условия перехода в пластическое состояние отражает упругую стадию деформирования только при конечной толщине слоя взаимодействия. При переходе к математическому разрезу пластическая составляющая деформации, как и в моде-

лях Ирвина – Орована и Дагдейла, возникает с начала внешнего нагружения.

3. Локальное условие пластичности, определяемое критическим значением энергетического произведения, позволяет отразить стадию упругого деформирования при сколь угодно малой конечной толщине слоя взаимодействия.

4. Для экспериментальной конкретизации локального условия пластичности достаточно стандартного эксперимента над ДКБ-образцом с промежуточными нагрузками, в результате которого определяется упругая составляющая внешней нагрузки.

Благодарность

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и правительства Тульской области в рамках научного проекта № 19-41-710001 р_а

Acknowledgment

The reported study was funded by the RFBR and the Government of the Tula region according to the Research Project No. 19-41-710001 r_a.

Библиографический список

1. Broberg K.V. Cracks and fracture. – Academic Press, London, UK, 1999. – 752 p.
2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. Мураками Ю. (ред.) Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т. 1. – М.: Мир, 1990. – 448 с.
4. Irvin G.R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control // Engineering Fracture Mechanics. – 1968. – Vol. 1, no. 2. – P. 241–257. DOI: 10.1016/0013-7944(68)90001-5
5. Orowan E.O. In: Proc. Symposium on internal stresses in metals and alloys // London: Institute of Metals. – 1948. – P. 451.
6. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, № 3. – С. 434–444.
7. Kumar N., Rajagopal A., Pandey M. A rate independent cohesive zone model for modeling failure in quasi-brittle materials // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2015. – Vol. 22, no. 8. – P. 681–696. DOI: 10.1080/15376494.2013.855852
8. Experimental characterization of cohesive zone models for thin adhesive layers loaded in mode I mode II, and mixed-mode I/II by the use of a direct method / G. Lélías, E. Paroissien, F. Lachaud, J. Morlier // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 158. – P. 90–115. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.005
9. Thanh L.T., Belaya L.A., Lavit I.M. A solution to the problem of elastic half-plane with a cohesive edge crack // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 973, no. 1. – id. 12020. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012020.
10. Лавит И.М. Об устойчивом росте трещины в упругопластическом материале // Проблемы прочности. – 1988. – № 7. – С. 18–23.
11. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges / M. Ellices, G.V. Guinea, J. Gómez, J. Planas // Engi-

neering Fracture Mechanics. – 2002. – Vol. 69, no. 2. – P. 137–163. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00083-2

12. Перельмутер М.Н. Критерий роста трещин со связями в концевой области // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 1. – С. 152–171.

13. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. – 1959. – Т. 5, № 4. – С. 391–401.

14. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – Vol. 8, no. 2. – P. 100–104. [http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)

15. Захаров А.П., Шлянников В.Н., Иштыряков И.С. Пластический коэффициент интенсивности напряжений в задачах механики разрушения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 100–115. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.08

16. Корнев В.М. Обобщенный достаточный критерий прочности. Описание зоны предразрушения // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43, № 5. – С. 153–161.

17. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Multiparametric sufficient criterion of quasi-brittle fracture for complicated stress state // Engineering Fracture Mechanics. – 2008. – Vol. 75, no. 5. – P. 1099–1113. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2007.04.023

18. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.

19. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.

20. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 701 с.

21. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 320 с.

22. Макклиток Ф. Пластические аспекты разрушения // Разрушение. Т. 3 – М.: Мир, 1976. – С. 67–262.

23. Prandtl L. Ein Gedankenmodell für den Zerreibvorgang spröder Körper // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1933. – Vol. 13. – P. 129–133. (перевод на английский: Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids // International Journal of Fracture. – 2011. – Vol. 171, no. 2. – P. 105–109. DOI: 10.1007/s10704-011-9637-3)

24. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Изв. АН СССР. МТТ. – 1968. – № 6. – С. 87–99.

25. Салганик Р.Л., Мищенко А.А., Федотов А.А. Модель трещины Прандтля и ее применение для решения задачи механики контактного взаимодействия // К 75-летию со дня рождения профессора Владимира Марковича Ентова. – Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2012. – 180 с.

26. Салганик Р.Л., Мищенко А.А., Федотов А.А. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегавшем горизонтальном пласте // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2015. – № 2. – С. 24–33.

27. Shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto, V.V. Glagolev, L.V. Glagolev, A.A. Markin // International Journal of Solids and Structures. – 2020. – Vol. 193–194. – P. 447–454. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039

28. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 93–97. DOI:10.15593/perm.mech/2018.4.08

References

1. Broberg K.B. Cracks and fracture. *Academic Press, London, UK*, 1999, 752 p.

2. Cherepanov G.P. *Mekhanika hrupkogo razrusheniya* [Mechanics of brittle failure]. Moscow: Nauka, 1974, 640 p.

3. Murakami YU. et al. *Spravochnik po koeffitsientam intensivnosti napryazhenij* [Stress Intensity Factor Handbook]. Moscow, Mir, 1990, vol. 1., 448 p.

4. Irvin G.R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control, *Engineering Fracture Mechanics*, 1968, vol.1, no. 2, pp. 241–257. DOI: 10.1016/0013-7944(68)90001-5

5. Orowan E.O. In: Proc. Symposium on internal stresses in metals and alloys. *London, Institute of Metals*, 1948, pp. 451.

6. Barenblatt G.I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, vol. 23, no. 3, pp. 622–636. DOI: 10.1016/0021-8928(59)90157-1

7. Kumar N., Rajagopal A., Pandey M. A rate independent cohesive zone model for modeling failure in quasi-brittle materials, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2015, vol. 22, no. 8, pp. 681–696. DOI: 10.1080/15376494.2013.855852

8. Lélías G. Paroissien E., Lachaud F., Morlier J. Experimental characterization of cohesive zone models for thin adhesive layers loaded in mode I mode II, and mixed-mode I/II by the use of a direct method, *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 158, pp. 90–115. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.005

9. Thanh L.T., Belaya L.A., Lavit I.M. A solution to the problem of elastic half-plane with a cohesive edge crack, *Journal of*

29. Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. Определение напряженно-деформированного состояния упругопластических тел с боковым трещиноподобным дефектом с использованием модели с линейным размером // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 6. – С. 143–154. DOI: 10.15372/PMTF20180610

30. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 158. – P. 141–149. DOI.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002

31. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // International Journal of Fracture. – 2020. – Vol. 224, no. 2. – P. 277–284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0

32. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // International Journal of Fracture. – 2017. – Vol. 207, no. 1. – P. 55–71. DOI: 10.1007/s10704-017-0219-x

33. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.

34. Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // Eur. J. Mech. A-Solid. – 2016. – Vol. 58. – P. 172–186. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.01.015

35. Panettieri E., Fanterla D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // Composite Structures. – 2016. – Vol. 137. – P. 140–147. DOI:10.1016/J.COMPSTRUCT.2015.11.018

36. Panteghini A., Bardella L. Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams subject to severe boundary conditions // Eur. J. Mech. A-Solid. – 2017. – Vol. 61. – P. 393–407. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.10.012

Physics: Conference Series, 2018, vol. 973, no. 1, id. 12020. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012020.

10. Lavit I.M. Stable crack growth in an elastoplastic material, *Strength of Materials*, 1988, vol. 20, no. 7, pp. 854–860. DOI: 10.1007/BF01528695

11. Elices M., Guinea G.V., Gómez J., Planas J. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, vol. 69, no. 2, pp. 137–163. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00083-2

12. Perelmuter M.N. A criterion for the growth of cracks with bonds in the end zone. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, vol. 71, no 1, pp. 137–151. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2007.03.002

13. Leonov M. Ya., Panasyuk V. V. Razvitie mel'chajshih treshchin v tverdom tele [Development of the smallest cracks in a solid]. *Prikladnaya mekhanika - Applied mechanics*, 1959, vol. 5, no. 4, pp. 391–401.

14. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 100–104. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2

15. Zakharov A.P., Shlyannikov V.N., Ishtyryakov I.S. Plastic stress intensity factor in fracture mechanics. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 100–115. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.08

16. Kornev V.M. Generalized sufficient strength criteria. Description of pre-fracture zone. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, no. 5, pp. 763–769. DOI: 10.1023/A:1019856323266

17. Kornev V. M., Kurguzov V. D. Multiparametric sufficient criterion of quasi-brittle fracture for complicated stress state.

Engineering Fracture Mechanics, 2008, vol. 75, no. 5, pp. 1099-1113. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2007.04.023

18. Bykovcev G.I., Ivlev D.D. Teoriya plastichnosti [Plasticity theory]. *Vladivostok: Dal'nauka*, 1998, 528 p.

19. Il'yushin A.A. Plastichnost'. Osnovy obshchej matematicheskoj teorii [Plastic. Foundations of general mathematical theory]. *Moscow, Izd-vo AN SSSR*, 1963, 272 p.

20. Ishlinskij A.Yu. Ivlev D.D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematical theory of plasticity]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2001, 701 p.

21. Markin A.A., Sokolova M.Yu. Termomekhanika uprugoplasticheskogo deformirovaniya [Thermomechanics of elastoplastic deformation]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2013, 320 p.

22. Makklintok F. Plasticheskie aspekty razrusheniya [Plastic aspects of destruction]. *Moscow, Mir*, 1976, vol. 3, p. 67-262.

23. Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids. *International Journal of Fracture*, 2011, vol. 171, no. 2, pp. 105-109. DOI: 10.1007/s10704-011-9637-3

24. Entov V.M., Salganik R.L. K modeli hrupkogo razrusheniya Prandtlya [To the Prandtl model of brittle fracture]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1968, no. 6, pp. 87-99.

25. Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Model' treshchiny Prandtlya i ee primeneniye dlya resheniya zadachi mekhaniki kontaktного vzaimodejstviya [Prandtl crack model and its application for solving the problem of contact interaction mechanics]. *Izhevsk, Institut komp'yuternyh issledovanij*, 2012, 180 p.

26. Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Stress state in the vicinity of excavation in deep horizontal bed. *Journal of Mining Science*, 2015, vol. 51, no. 2, pp. 220–227. DOI: 10.1134/S1062739115020027

27. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 193-194, pp. 447-454. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039

28. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 4, pp. 93–97. doi:10.15593/perm.mech/2018.4.08

29. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Determining the stress-strain state of elastic-plastic solids with a lateral crack-like defect with the use of a model with a linear size. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, no. 6, pp. 1085-1094. DOI: 10.1134/S0021894419060191

30. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 158, pp. 141-149. doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002

31. Berto, F., Glagolev, V.V., Markin, A.A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite. *International Journal of Fracture*, 2020, vol. 224, no. 2, pp. 277-284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0

32. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility, *International Journal of Fracture*, 2017, vol. 207, no. 1, pp. 55-71. doi:10.1007/s10704-017-0219-x

33. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Krigrer S. Plastiny i obolochki [Plates and shells]. *Moscow, Fizmatgiz*, 1963, 636 p.

34. Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 2016, vol. 58, pp.172-186. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.01.015

35. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results. *Composite Structures*, 2016, vol. 137, pp. 140-147. DOI: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2015.11.018

36. Panteghini A., Bardella L. Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams subject to severe boundary conditions. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 2017, vol. 61, pp. 393-407. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.10.012