



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.07

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВЫВОДУ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

С.В. Каштанова¹, А.В. Ржонсницкий²

¹Институт проблем машиностроения РАН, Санкт-Петербург, Россия

²Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), Санкт-Петербург, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 8 февраля 2021 г.
Принята: 21 мая 2021 г.
Опубликована: 12 июля 2021 г.

Ключевые слова:

цилиндрическая оболочка,
оболочки с отверстиями,
поле напряжений, теория оболочек.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача о поле напряжений в цилиндрической оболочке с круговым отверстием под действием одноосного растяжения. Основным препятствием к получению ответа является необходимость поиска таких коэффициентов в разложении решения в сумму базисных функций, при которых это решение удовлетворяет граничным условиям. Изучение классических работ привело к пониманию того, что ни один из до сих пор предложенных методов поиска коэффициентов нельзя считать окончательно удачным, а результаты, полученные этими методами, разнятся, и остается неясным, на что можно опираться. В данной работе предлагается новый аналитический подход к изучению этого вопроса, позволяющий расширить диапазон применимости решения и открывающий возможности для аналитического исследования поля напряжений. Идея состоит в том, чтобы разложить каждую базисную функцию в ряд Фурье, разделив переменные, что позволяет явно получить бесконечную систему алгебраических уравнений для поиска коэффициентов. Одним из важных шагов исследования является то, что авторы смогли доказать, какое именно из уравнений системы является линейной комбинацией нескольких других, и исключить его, что позволило составить редуцированную систему для нахождения неизвестных коэффициентов. Предложенный подход, в отличие от большинства классических работ, не накладывает математических ограничений на значения основного параметра, характеризующего цилиндрическую оболочку. Имеющиеся ограничения носят механический характер, так как для больших отверстий требуется другая модель. Также в работе достаточно полно представлены численные результаты, полученные новым методом, и проведено их сравнение с результатами классических работ.

© ПНИПУ

© Каштанова Станислава Викторовна – к.ф.-м.н., с.н.с., доц., e-mail: kastasya@yandex.ru, [iD: 0000-0003-1090-0320](https://orcid.org/0000-0003-1090-0320).
Ржонсницкий Алексей Викторович – ст. преп., e-mail: rzhonsnitskiy@yandex.ru, [iD: 0000-0002-5825-5036](https://orcid.org/0000-0002-5825-5036).

Stanislava V. Kashtanova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Associate Professor,
e-mail: kastasya@yandex.ru, [iD: 0000-0003-1090-0320](https://orcid.org/0000-0003-1090-0320).

Alexey V. Rzhonsnitskiy – Senior Lecturer, e-mail: rzhonsnitskiy@yandex.ru, [iD: 0000-0002-5825-5036](https://orcid.org/0000-0002-5825-5036).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

AN ANALYTICAL APPROACH TO OBTAINING THE STRESS FIELD OF A CYLINDRICAL SHELL WITH A CIRCULAR HOLE UNDER TENSION

S.V. Kashtanova¹, A.V. Rzhonsnitskiy²

¹Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation

²Saint-Petersburg State Institute of Technology, Saint-Petersburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 8 February 2021
Accepted: 21 May 2021
Published: 12 July 2021

Keywords:

shell theory, cylindrical shells, shells with circular cutouts, stress state.

ABSTRACT

The problem of a cylindrical shell with a circular hole under uniaxial tension is considered. The main obstacle of solving this problem is the necessity to find such coefficients in the expansion of the solution into a sum of basis functions, for which this solution satisfies the boundary conditions. The study of the classical works led to understanding that none of the so far proposed approaches can be considered successfully, and the results of these approaches differ, so it is not clear, which results can be used as a basis. In the present paper, a new analytical approach to studying this issue is proposed. It allows expanding the range of applicability of the solution and gives the opportunity for the analytical study of the stress state. The idea consists in expanding each of the basis functions in a Fourier series by dividing the variables, which allows obtaining explicitly an infinite system of algebraic equations for finding coefficients. One of the important steps of this research is that the authors were able to prove which exact equation is a linear combination of the others and exclude, which made it possible to compose a reduced system for finding unknown coefficients. The proposed approach, in contrast to most classical works, does not impose mathematical restrictions on the values of the main parameter characterizing the cylindrical shell. The existing restrictions are of mechanical nature, as larger cutouts require another model. Moreover, the numerical results obtained by the new method are presented in a fairly complete manner and they are compared with the results of the classical works.

© PNRPU

Введение

В работе предлагается новый аналитический подход к выводу напряжений цилиндрической оболочки с круговым отверстием при растяжении вдоль образующей.

Постановка задачи и решение методом разложения по малому параметру β , характеризующим отношение радиуса отверстия, толщины оболочки и радиуса кривизны, принадлежат А.И. Лурье [1, 25] (40-е гг. XX в.). Далее в середине 60–70-х гг. всплеск интереса к этой проблеме происходит не только среди советских, но и среди зарубежных ученых, нашедших ошибку в постановке краевых условий на границе кругового отверстия и пересмотревших эту задачу либо тем же способом (Пирогов, Murthy, Naghdi, Eringen [4, 6, 17–23, 26, 30]), либо численным методом коллокаций (Lekkerkerker, Eringen, Naghdi, VanDyke [3, 5, 7]). Однако предложенное аналитическое решение было крайне трудоемким и работало для диапазона значений параметра β , мало отличающегося от плоской задачи Кирша, а результаты, полученные методом коллокаций, различались [9]. Также предпринимались попытки подойти к этой задаче энергетическим методом [23, 29] и методом комплексных переменных для произвольных отверстий [16, 27, 28]. Ресурсы рассмотренных методов себя исчерпали, не дав удобного решения, а альтернативных методов пока предложено не было. Последующие работы опираются на компьютерное моделирование, в частности основанное на методе конечных элементов [10–15]. Однако по сей день актуальность и применяемость этой задачи

остаются высокими [31–37], особенно в области авиапромышленности, и именно аналитически найденное поле напряжений в области отверстия может дать толчок для фундаментального изучения вопросов разрушения и устойчивости. В настоящей работе представлена новая идея решения, которая позволяет легко находить численные значения напряжений и открывает перспективы их аналитического исследования, а также снимает математические ограничения на значения параметра β . В работе особое внимание уделено технике решения задачи и строгой математической постановке.

1. Постановка задачи

Рассматривается цилиндрическая оболочка с круговым отверстием, растягиваемая вдоль образующей x некоторой силой p на бесконечности. В задаче будут использоваться следующие обозначения: параметр

$$\beta^2 = r_0^2 \cdot \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4Rh} \quad \text{– основной параметр, отвечающий}$$

за отношение геометрических и физических параметров, в том числе за кривизну оболочки; r_0 – радиус отверстия (не умаляя общности, можно принять r_0 за единицу измерения, т.е. $r_0 = 1$); R, h – радиус кривизны и толщина оболочки соответственно; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга. Заметим, что предельный случай при $\beta \rightarrow 0$ приводит нас к задаче Кирша. Также

вводится функция $\Phi = \frac{Eh}{8\beta^2 R} w - iU$, зависящая от про-

гиба w и функции напряжений U [1, 25]. Связь между усилиями T и функцией U задается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{pmatrix},$$

а напряжение срединной поверхности тонкой оболочки как $\sigma = T/h$.

В [1, 2] показано, что система уравнений равновесия оболочки сводится к следующему уравнению:

$$\Delta \Delta \Phi + 8i\beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Сформулируем условие задачи полностью: найти функцию, удовлетворяющую уравнению (1) и всем граничным условиям

– на бесконечности

$$T_x = p, \quad T_{xy} = 0, \quad T_y = 0, \quad w = 0; \quad (2)$$

– на границе кругового отверстия в полярной системе координат (r, ϑ) .

$$\begin{cases} T_{rr}|_{r=r_0} = 0 \\ T_{r\vartheta}|_{r=r_0} = 0 \\ M_r|_{r=r_0} = 0 \\ Q_r|_{r=r_0} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь M_r – момент, Q_r – обобщенное граничное условие на свободном крае [1].

2. Решение

Несмотря на то что метод решения уравнения (1) хорошо известен [1, 2, 4, 6, 9, 24, 25], некоторым техническим деталям не было уделено должного внимания.

Рассмотрим два коммутирующих линейных оператора $L_1 = \left(\Delta - 2i\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right)$ и $L_2 = \left(\Delta + 2i\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right)$, где $\alpha = (1+i)\beta$. Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$L_1 L_2 \Phi = 0 \Leftrightarrow \Phi \in \text{Ker} L_1 L_2.$$

Другими словами, задача сводится к нахождению ядра произведения $L_1 L_2$. Из того, что операторы коммутируют, следует

$$\text{Ker} L_1 + \text{Ker} L_2 \subset \text{Ker} L_1 L_2.$$

Нахождение по отдельности решений уравнений $L_1 \Phi = 0$ и $L_2 \Phi = 0$ с последующей возможностью найти их сумму существенно упрощает решение исход-

ного уравнения, так как понижает его порядок. Однако важно отметить, что сумма ядер $\text{Ker} L_1 + \text{Ker} L_2$ не совпадает с множеством всех решений уравнения (1), что может приводить к потере решений. Поэтому такой метод может быть использован для доказательства существования решения и его конструктивного нахождения, а исследование единственности должно быть проведено отдельно.

С помощью замены и разделения переменных легко установить [1, 2, 25], что решениями $L_{1,2} \Phi = 0$ являются функции $e^{\pm i\alpha x} \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot e^{\pm in\vartheta}$, где $n \in \mathbb{Z}_+$.

Выбор функций Ханкеля при построении решения связан с тем, что это единственные из бесселевых функций, стремящиеся к нулю в бесконечно далекой комплексной точке [8]:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} H_n^{(1)}(\rho e^{i\varphi}) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} H_n^{(2)}(\rho e^{-i\varphi}) = 0, \quad \varphi \in [\varepsilon; \pi - \varepsilon].$$

Поскольку $\alpha = (1+i)\beta$ имеет аргумент $\frac{\pi}{4} \in [\varepsilon; \pi - \varepsilon]$,

функции $e^{\pm i\alpha x} \cdot H_n^{(2)}(\alpha r) \cdot e^{\pm in\vartheta}$ заведомо не удовлетворяют граничным условиям, так как прогиб $w \neq 0$ на бесконечности. В то же время, руководствуясь [8], можно вывести, что

$$\left| e^{\pm i\alpha x} \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot e^{\pm in\vartheta} \right| \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{r}} e^{-\beta r(1-|\cos \vartheta|)}.$$

Заметим, что первые три граничных условия системы (2) ставятся не относительно функции U , а относительно ее вторых производных. Поэтому необходимо убедиться в том, что не только потенциал, но и напряжения стремятся к нулю при больших r . Это верно, так как из рекуррентных соотношений для функций Бесселя [8] следует, что

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(e^{\pm i\alpha x} \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot e^{\pm in\vartheta} \right)$$

является линейной комбинацией функций такого же вида $e^{\pm i\alpha x} \cdot H_m^{(1)}(\alpha r) \cdot e^{\pm im\vartheta}$.

Кроме того, непосредственные вычисления показывают, что

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(e^{\pm i\alpha x} \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot e^{\pm in\vartheta} \right)$$

является линейной комбинацией функций вида

$$e^{\pm i\alpha x} \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot e^{\pm in\vartheta} \text{ и } \frac{e^{\pm i\alpha x} \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot e^{\pm in\vartheta}}{r}.$$

Тем самым решение $e^{\pm i\alpha x} \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot e^{\pm in\vartheta}$ удовлетворяет всем граничным условиям на бесконечности. Такую проверку не удалось найти ни в одной из известных работ. Отсутствие полной четкой формулировки задачи

и недостаточное внимание к поведению функций на бесконечности привело к тому, что полученные в работах [1, 6] решения граничным условиям не удовлетворяют.

Если перейти к тригонометрической форме записи $e^{\pm i\alpha x} \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot e^{\pm im\vartheta}$ и учесть симметрию кругового отверстия, получается, что решение задачи (1)–(3) можно искать в следующем виде для четных и нечетных n [1, 2]:

$$\Phi = -i \frac{py^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + iB_n) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha x) \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot \cos(n\vartheta) \\ \sin(\alpha x) \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot \cos(n\vartheta) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Функция Φ является решением уравнения математической физики (1), при этом Φ удовлетворяет граничным условиям (2). Остается лишь найти коэффициенты A_n и B_n из граничных условий (3). На этом этапе авторы предшествующих работ столкнулись с наибольшими затруднениями [подробнее см. 9]. Именно метод поиска коэффициентов является основной содержательной частью данной работы.

Как уже отмечалось выше, ранее предлагались три различных метода поиска коэффициентов:

1. В работе [1] $H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot \cos(\alpha x)$ и $H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot \sin(\alpha x)$ разложены в ряд по степеням βr . Это позволило разделить переменные r и ϑ . Однако вычисления получились слишком громоздкими, и появилось сильное ограничение на параметр $\beta (\beta \ll 1)$. Этот подход не оставляет возможности аналитического исследования напряжений и не позволяет получить численных значений напряжений для всех $\beta \in [0; 4]$.

2. Численный поиск коэффициентов (методом локаций). Имеет мало перспектив для аналитического исследования напряжений. Полученные численные результаты отличались друг от друга (причем даже в статьях одного автора). Напряжения для всех $\beta \in [0; 4]$ были получены только в работе [7].

3. Подставить решение в виде (4) в граничные условия. Получившиеся крайне громоздкие соотношения не позволяют провести аналитическое исследование, а возможность получения численных результатов представляется сомнительной.

3. Новый подход

Основная идея заключается в разделении переменных r и ϑ в каждой базисной функции. Только в отличие от [1] для достижения этой цели предлагается разложение в тригонометрический ряд Фурье.

Из известного разложения $e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}$ в ряд Лорана [8]

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m \cdot J_m(z)$$

для $e^{i\alpha x} \cdot e^{im\vartheta}$ получается

$$\begin{aligned} e^{i\alpha x} \cdot e^{im\vartheta} &= e^{\frac{\beta(1+i)r}{2} \left(2i \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \right)} \cdot e^{im\vartheta} = e^{\frac{\beta(1+i)r}{2} \left(i e^{i\vartheta} - \frac{1}{i e^{i\vartheta}} \right)} \cdot e^{im\vartheta} = \\ &= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (i e^{i\vartheta})^m J_m((1+i)\beta r) \right) \cdot e^{im\vartheta} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{i(n+m)\vartheta} J_m((1+i)\beta r) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^{k-n} J_{k-n}((1+i)\beta r) e^{ik\vartheta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-i)^{k-n} J_{n-k}((1+i)\beta r) e^{ik\vartheta}. \end{aligned}$$

Замена n на $-n$ приводит к

$$e^{i\alpha x} \cdot e^{-in\vartheta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (i)^{k+n} J_{k+n}((1+i)\beta r) e^{ik\vartheta}.$$

Если сложить оба полученных равенства, получится

$$\begin{aligned} e^{i\alpha x} \cdot (e^{in\vartheta} + e^{-in\vartheta}) &= \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[(-i)^{k-n} J_{n-k}((1+i)\beta r) + (i)^{k+n} J_{k+n}((1+i)\beta r) \right] e^{ik\vartheta}. \end{aligned}$$

Теперь можно заменить α на $-\alpha$ в последней формуле и сложить оба равенства при четных n , а при нечетных n вычесть из одного другое:

$$\begin{aligned} \cos \alpha x \cdot \cos n\vartheta &= \frac{1}{4} (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}) (e^{in\vartheta} + e^{-in\vartheta}) = \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}} J_n((1+i)\beta r) + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+\frac{n}{2}} \cdot (J_{n-2l}((1+i)\beta r) + J_{n+2l}((1+i)\beta r)) \cos 2l\vartheta, \\ \sin \alpha x \cdot \cos n\vartheta &= \frac{1}{4i} (e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}) (e^{in\vartheta} + e^{-in\vartheta}) = \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} J_n((1+i)\beta r) + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+\frac{n-1}{2}} \cdot (J_{n-2l}((1+i)\beta r) + J_{n+2l}((1+i)\beta r)) \cos 2l\vartheta. \end{aligned}$$

В результате четные и нечетные базисные функции можно записать одной общей формулой

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos(\alpha x) \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot \cos(n\vartheta) \\ \sin(\alpha x) \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot \cos(n\vartheta) \end{bmatrix} &= f_n(r, \vartheta) = \\ &= (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \frac{H_n^{(1)}((1+i)\beta r)}{H_n^{(1)}((1+i)\beta)} \times \\ &\times \left[J_n((1+i)\beta r) + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \times \right. \\ &\left. \times (J_{n+2l}((1+i)\beta r) + J_{n-2l}((1+i)\beta r)) \cdot \cos 2l\vartheta \right], \quad (5) \end{aligned}$$

где $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ – целая часть числа и в знаменателе введен нормирующий коэффициент $H_n^{(1)}((1+i)\beta)$. Последнее

сделано для того, чтобы численные значения неизвестных коэффициентов имели умеренные значения, с которыми удобно работать.

Далее для удобства вводятся обозначения для коэффициентов Фурье в тригонометрическом разложении базисной функции $g(r, n, l)$:

$$g(r, n, l) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l} \cdot \frac{H_n^{(1)}((1+i)\beta r)}{H_n^{(1)}((1+i)\beta)} \times \\ \times (J_{n+2l}((1+i)\beta r) + J_{n-2l}((1+i)\beta r)), \quad n = 0, 1, \dots, \infty, \\ l = 0, 1, \dots, \infty.$$

Тогда (5) примет вид

$$f_n(r, \vartheta) = \frac{g(r, n, 0)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} g(r, n, l) \cdot \cos 2l\vartheta. \quad (6)$$

Теперь решение (4) может быть записано в виде

$$\Phi(r, \vartheta) = -i \frac{py^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot f_n(r, \vartheta), \quad (7)$$

удобном для подстановки в граничные условия (3).

4. Граничные условия

Первое граничное условие $\sigma_{rr} = 0$ в полярных координатах

$$\mathcal{L}_1(U) = \mathcal{L}_1(-\text{Im}\Phi) = 0, \quad \mathcal{L}_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

приводит к уравнению

$$\left(\frac{p}{2} + \frac{p}{2} \cos 2\vartheta - \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{g'(r, n, 0)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (-4l^2 \cdot g(r, n, l) + g'(r, n, l)) \cdot \cos 2l\vartheta \right) \right) = 0. \quad (8)$$

Коэффициенты при косинусах дают нам следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 0: \quad \frac{p}{2} - \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot \frac{g'(r, n, 0)}{2} = 0 \\ \cos 2\vartheta: \quad \frac{p}{2} + \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (4g(r, n, 1) - g'(r, n, 1)) = 0 \\ \cos 4\vartheta: \quad \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (16g(r, n, 2) - g'(r, n, 2)) = 0 \\ \dots \\ \cos 2l\vartheta: \quad \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (4l^2 g(r, n, l) - g'(r, n, l)) = 0. \end{array} \right. \quad (8a)$$

Второе граничное условие $\sigma_{r\vartheta} = 0$

$$\mathcal{L}_2(U) = \mathcal{L}_2(-\text{Im}\Phi) = 0, \quad \mathcal{L}_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta}$$

дает уравнение

$$-\frac{p}{2} \sin 2\vartheta - \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \times$$

$$\times 2 \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot (g'(r, n, l) - g(r, n, l)) \cdot \sin 2l\vartheta = 0. \quad (9)$$

Коэффициенты при синусах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2\vartheta: \quad -\frac{p}{2} - \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} 2(a_n + ib_n) \cdot (g'(r, n, 1) - g(r, n, 1)) = 0, \\ \sin 4\vartheta: \quad -\text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} 4(a_n + ib_n) \cdot (g'(r, n, 2) - g(r, n, 2)) = 0, \\ \dots \\ \sin 2l\vartheta: \quad -\text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} 2l(a_n + ib_n) \cdot (g'(r, n, l) - g(r, n, l)) = 0. \end{array} \right. \quad (9a)$$

Из третьего граничного условия $M_{rr} = 0$

$$\mathcal{L}_3(\text{Re}\Phi) = 0$$

$$\mathcal{L}_3 = -D \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

получаем

$$\text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \left(\frac{g''(r, n, 0)}{2} + \nu \frac{g'(r, n, 0)}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} [g''(r, n, l) + \nu(g'(r, n, l) - 4l^2 \cdot g(r, n, l))] \cdot \cos 2l\vartheta \right) = 0. \quad (10)$$

Коэффициенты при косинусах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 0: \quad \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot \left(\frac{\nu g'(r, n, 0) + g''(r, n, 0)}{2} \right) = 0, \\ \cos 2\vartheta: \quad \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (-4\nu g(r, n, 1) + \nu g'(r, n, 1) + g''(r, n, 1)) = 0, \\ \cos 4\vartheta: \quad \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (-16\nu g(r, n, 2) + \nu g'(r, n, 2) + g''(r, n, 2)) = 0, \\ \dots \\ \cos 2l\vartheta: \quad \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (-4l^2 \nu g(r, n, l) + \nu g'(r, n, l) + g''(r, n, l)) = 0. \end{array} \right. \quad (10a)$$

Из четвертого граничного условия $Q_r^* = 0$

$$\mathcal{L}_4(\text{Re}\Phi) = 0$$

$$\mathcal{L}_4 = -D \left(\frac{\partial}{\partial r} \Delta + (1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta^2} \right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$$

получаем

$$\text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot \left(\frac{-g'(r, n, 0) + g''(r, n, 0) + g'''(r, n, 0)}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} [4l^2(3-\nu)g(r, n, l) - (1+4l^2(2-\nu))] \times \right. \\ \left. \times g'(r, n, l) + g''(r, n, l) + g'''(r, n, l) \right] \cdot \cos 2l\vartheta = 0. \quad (11)$$

Коэффициенты при косинусах:

$$\begin{cases} \cos 0: & \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot \left(\frac{-g'(r,n,0) + g''(r,n,0) + g'''(r,n,0)}{2} \right) = 0, \\ \cos 2\vartheta: & \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (4(3-\nu)g(r,n,1) - \\ & - (9-4\nu)g'(r,n,1) + g''(r,n,1) + g'''(r,n,1)) = 0, \\ \cos 4\vartheta: & \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (16(3-\nu)g(r,n,2) - \\ & - (33-16\nu)g'(r,n,2) + g''(r,n,2) + g'''(r,n,2)) = 0, \\ \dots \\ \cos 2l\vartheta: & \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (4l^2(3-\nu) \cdot g(r,n,l) - \\ & - (1+4l^2(2-\nu))g'(r,n,l) + g''(r,n,l) + g'''(r,n,l)) = 0. \end{cases} \quad (11a)$$

5. Исследование системы

Во второй паре систем (10a–11a) можно домножить выражения, стоящие под знаком суммы, на i . Тогда во все уравнения четырех систем будет входить только мнимая часть от суммы. Из всех полученных систем составим общую линейную систему с бесконечным числом неизвестных и уравнений. Предварительно сделаем некоторые элементарные преобразования:

1. Для $l > 1$ уравнения систем (8a) и (9a) запишем следующим образом:

$$\begin{cases} 4l^2 \cdot \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g(n,l) + (-1) \cdot \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g'(n,l) = 0, \\ 2l \cdot \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g(n,l) - 2l \cdot \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g'(n,l) = 0. \end{cases}$$

Получилась однородная система относительно неизвестных $\operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g(n,l)$ и $\operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g'(n,l)$, имеющая определитель, отличный от нуля

$$\begin{vmatrix} 4l^2 & -1 \\ 2l & -2l \end{vmatrix} \neq 0,$$

а следовательно, имеющая только тривиальное решение, т.е.

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g(n,l) = 0, \\ \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g'(n,l) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

2. Для $l = 1$ те же уравнения дают неоднородную систему

$$\begin{cases} 4 \cdot \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g(n,1) + (-1) \cdot \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g'(n,1) = -\frac{P}{2}, \\ 2 \cdot \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g(n,1) - 2 \cdot \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g'(n,1) = \frac{P}{2}. \end{cases}$$

Разрешая ее относительно неизвестных, получаем

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g(n,1) = -\frac{P}{4}, \\ \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g'(n,1) = -\frac{P}{2}. \end{cases} \quad (13)$$

3. Введем обозначения

$$t_3(n,l) = i(-4l^2 \nu g(n,l) + \nu g'(n,l) + g''(n,l)),$$

$$t_4(n,l) = i(12l^2 \cdot g(n,l) - (1 + \nu + 4l^2(2-\nu))g'(n,l) + g''(n,l)).$$

Для того чтобы избавиться от $g''(n,l)$ в выражении $t_4(n,l)$, можно вычесть из последнего уравнения системы (11a) последнее уравнение (10a):

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot t_3(n,l) = 0, \\ \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot t_4(n,l) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Важно отметить, что первое уравнение системы (8a), как доказано авторами, является следствием четырех уравнений: двух уравнений системы (13) и двух уравнения системы (14) при $l = 0$. Доказательство строится на свойствах функций Бесселя [8] и его идея изложена в аппендиксе. Факт линейной зависимости уравнений, но непонимание – каких именно ставили в тупик авторов предшествующих работ [6].

Все уравнения систем (12)–(14) можно записать в матричной форме (табл. 1).

Таким образом, получена линейная система с бесконечным числом уравнений и неизвестных. При этом элементы бесконечной матрицы системы, существенно отличающиеся от нуля, расположены вблизи главной диагонали (аналогия с диагональным преобладанием), так как значения $J_k((1+i)\beta)$, от которых зависят все элементы матрицы системы, с ростом k становятся очень малы, а именно рядом с главной диагональю расположены элементы, у которых индекс $k = n - 2l$ близок к нулю. Пример для $\beta = 0,212$ представлен в табл. 2. Следовательно, подматрица, составленная из первых $4N$ строк и столбцов, будет иметь ненулевой определитель, и при решении системы однозначно будут найдены коэффициенты для первых $2N$ базисных функций. При этом, как показывают расчеты, при увеличении N первые найденные коэффициенты практически не изменяются, а коэффициенты при базисных функциях с большими индексами стремятся к нулю. Этот метод не имеет математических ограничений на значения основного параметра β . С точки зрения механики эта модель применима для диапазона $0 \leq \beta \leq 3,5 \dots 4,5$ [2].

Таблица 1

Системы (12)–(14) в матричной форме

Table 1

Systems (12)–(14) in the matrix form

l	n	0		1		2		3		⋮	Незав.	Свободн.
		Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re			
0	0	$t_3(0,0)$	$t_3(0,0)$	$t_3(1,0)$	$t_3(1,0)$	$t_3(2,0)$	$t_3(2,0)$	$t_3(3,0)$	$t_3(3,0)$		a_0	0
0	0	$t_4(0,0)$	$t_4(0,0)$	$t_4(1,0)$	$t_4(1,0)$	$t_4(2,0)$	$t_4(2,0)$	$t_4(3,0)$	$t_4(3,0)$		b_0	0
1	1	$g(0,1)$	$g(0,1)$	$g(1,1)$	$g(1,1)$	$g(2,1)$	$g(2,1)$	$g(3,1)$	$g(3,1)$		a_1	$-\frac{p}{4}$
1	1	$g'(0,1)$	$g'(0,1)$	$g'(1,1)$	$g'(1,1)$	$g'(2,1)$	$g'(2,1)$	$g'(3,1)$	$g'(3,1)$		b_1	$-\frac{p}{2}$
1	1	$t_3(0,1)$	$t_3(0,1)$	$t_3(1,1)$	$t_3(1,1)$	$t_3(2,1)$	$t_3(2,1)$	$t_3(3,1)$	$t_3(3,1)$		a_2	0
1	1	$t_4(0,1)$	$t_4(0,1)$	$t_4(1,1)$	$t_4(1,1)$	$t_4(2,1)$	$t_4(2,1)$	$t_4(3,1)$	$t_4(3,1)$		b_2	0
2	2	$g(0,2)$	$g(0,2)$	$g(1,2)$	$g(1,2)$	$g(2,2)$	$g(2,2)$	$g(3,2)$	$g(3,2)$		a_3	0
2	2	$g'(0,2)$	$g'(0,2)$	$g'(1,2)$	$g'(1,2)$	$g'(2,2)$	$g'(2,2)$	$g'(3,2)$	$g'(3,2)$		b_3	0
...												

Таблица 2

Численный пример для $\beta = 0,212$

Table 2

The numerical solution for $\beta = 0,212$

n:	l:	0		1		2		3		4		5			
		Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re		
0	0	0,846	0,571	-0,026	0,003	0,0007	-0,0001	0	0	0	0	0	0	a_0	0
0	0	-0,778	-0,777	0,066	0,026	-0,001	-0,0001	0	0	0	0	0	0	b_0	0
1	1	-0,022	-0,0001	0,104	0,108	-0,022	0,999	0,105	0,107	-0,011	0	0	0	a_1	$-\frac{p}{4}$
1	1	-0,032	0,005	0,005	-0,017	0,044	-2,002	-0,21	-0,214	0,022	0	0,001	-0,001	b_1	$-\frac{p}{2}$
1	1	0,016	-0,011	-0,141	0,128	4,203	0,093	0,45	-0,44	0	0,047	0,002	0,002	a_2	0
1	1	-0,043	-0,014	1,435	-1,209	4,202	0,091	0,45	-0,44	0	0,047	0,002	0,002	b_2	0
2	2	0	0	-0,0003	0,0003	-0,011	0	0,105	0,107	-0,022	1	0,105	0,107	a_3	0
2	2	0	-0,0001	-0,0007	0,0008	0	0,0003	-0,21	-0,214	0,06	-4	-0,42	-0,428	b_3	0
2	2	0	0	-0,0007	-0,001	0,0007	-0,054	0,064	-0,063	14	0,014	1,493	-1,475	a_4	0
2	2	0,002	0	-0,004	-0,002	-0,013	0,54	8,682	-8,49	41,99	1,528	4,525	-4,378	b_4	0
3	3	0	0	0	0	0	0	-0,0003	0,0003	-0,011	0	0,105	0,107	a_5	0
3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0,022	0	-0,42	-0,428	b_5	0

6. Обсуждение результатов

Найденные коэффициенты a_n и b_n можно подставить в (4). При этом любая конечная частичная сумма

$$\Phi = -i \frac{py^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_n + ib_n)}{H_n((1+i)\beta)} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha x) \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot \cos(n\vartheta) \\ \sin(\alpha x) \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot \cos(n\vartheta) \end{bmatrix}$$

является точным решением уравнения матфизики в области (в отличие, например, от решения данной задачи методом Рунге) и удовлетворяет граничным условиям на бесконечности. Причем, как показывают расчеты, краевые условия на границе отверстия выполняются достаточно точно для любого $\beta \in (0; 4]$ уже при 18 базисных функциях, коэффициенты которых найдены из редуцированной системы. Так, максимальное отклоне-

ние граничных условий от нуля для $\beta = 0,212$ составляет не более 10^{-14} , а при $\beta = 4$ не более $6 \cdot 10^{-3}$. Естественно, что с ростом β максимальное отклонение увеличивается: для большей точности можно взять 24 базисные функции для больших значений β , и тогда отклонение составит не более $5 \cdot 10^{-6}$.

При возрастании β увеличивается число базисных функций, существенно влияющих на ответ, т.е. растут базисные коэффициенты при больших n . Полученная система позволяет построить графики зависимости коэффициентов от β .

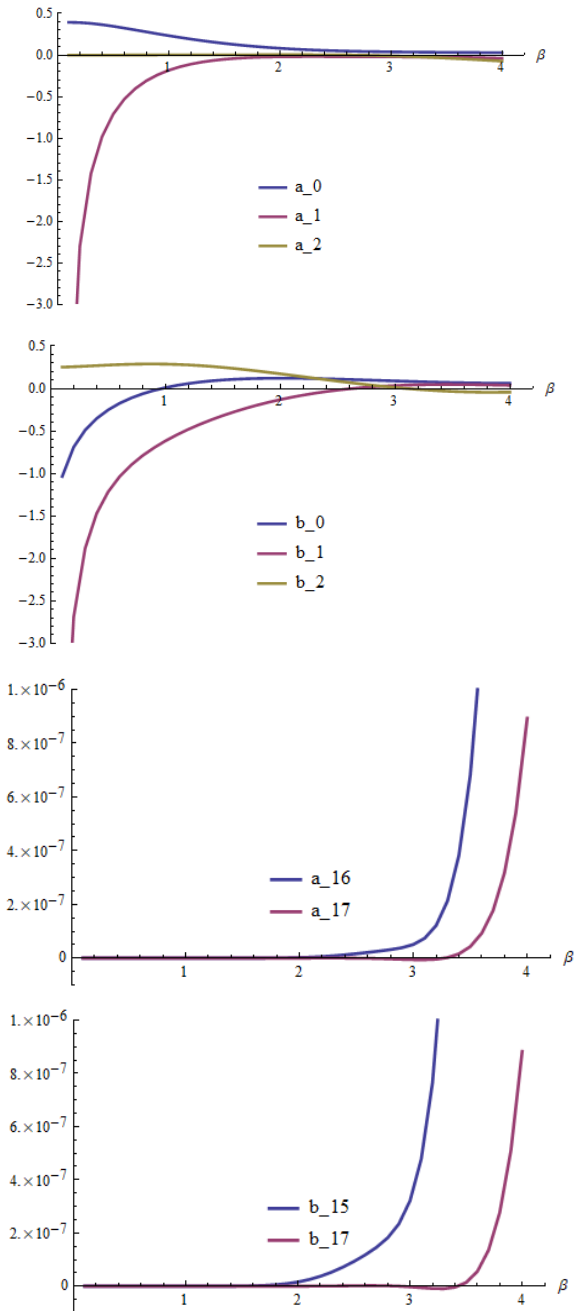


Рис. 1. Графики коэффициентов a_n и b_n в зависимости от $\beta \in (0;4]$

Fig. 1. Graphs of coefficients a_n and b_n depending on $\beta \in (0;4]$

По графикам рис. 1 видно, как при возрастании β начинают себя проявлять коэффициенты a_n, b_n , например, коэффициенты a_{17}, b_{17} при $\beta < 2,5$ равны нулю, а далее начинают влиять на ответ (однако их порядок гораздо меньше, чем у первых коэффициентов).

В табл. 3 указано количество базисных функций для получения напряжения σ_{99}/p с точностью до 10^{-3} при различных значениях β .

Таблица 3

Количество базисных функций при различных значениях β

Table 3

Number of basic functions with different values of β

$\beta \leq 0,8$	$N = 6$
$\beta \leq 2$	$N = 10$
$\beta \leq 2,9$	$N = 14$
$\beta \leq 3,3$	$N = 16$
$\beta \leq 4$	$N = 18$

Результаты, изображенные на графике рис. 2, полностью совпадают с результатами, полученными в работе [7] методом коллокаций. Ранее в работах разных авторов результаты различались, и оставалось неясным, на какие результаты опираться. Теперь удалось найти аналитический метод, простой в реализации и дающий достоверные результаты и возможности дальнейшего исследования напряжений.

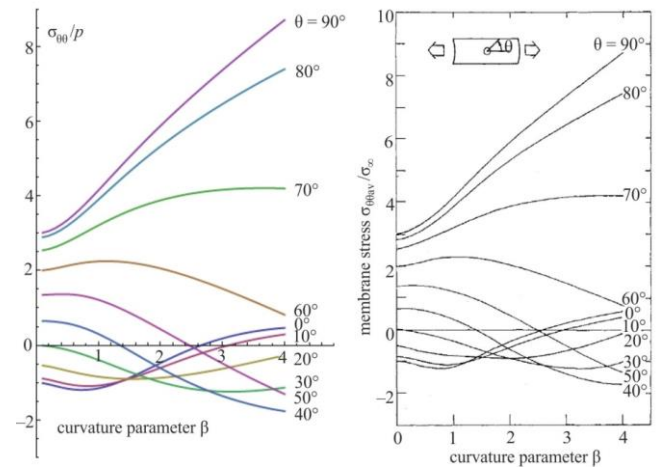


Рис. 2. Сравнение результатов, полученных авторами (слева) и в работе [7] (справа)

Fig. 2. Comparison of results obtained by the authors (on the left) and in work [7] (on the right)

Приводим сравнение результатов с известным асимптотическим анализом задачи при малых значениях параметра β и $\nu = 0,3$ (табл. 4).

Ниже представлены графики зависимости напряжений от r , по которым видно, что напряжения меняются в пределах значений $r < 3r_0$ даже для большого значения $\beta = 4$ (рис. 3, 4).

Таблица 4

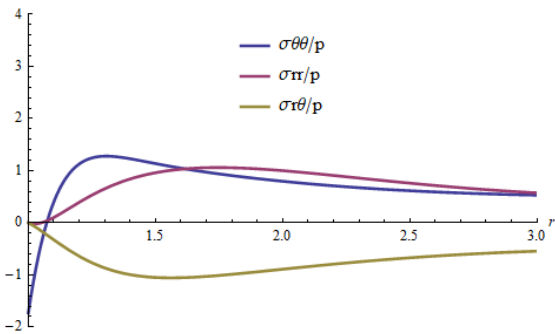
Сравнение результатов $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$ по $\vartheta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
с интервалом 10°

Table 4

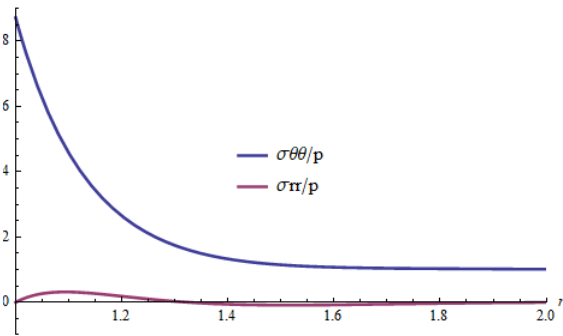
Comparison of results $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$ according to $\vartheta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
with an interval 10°

Угол	$\beta = 0,1$		$\beta = 0,3$	
	Наш метод	Метод Лурье*	Наш метод	Метод Лурье*
0°	-1,01434	-1,01434	-1,09003	-1,08888
10°	-0,892895	-0,892897	-0,965589	-0,964564
20°	-0,543185	-0,543185	-0,606287	-0,6056
30°	-0,00732409	-0,00732314	-0,0529143	-0,0526668
40°	0,650131	0,65013	0,630768	0,630601
50°	1,34993	1,34993	1,36436	1,3639
60°	2,00767	0,00766	2,05954	2,05891
70°	0,54396	2,54396	2,63051	2,62984
80°	2,89405	2,89405	3,00529	3,00462
90°	3,01564	3,01564	3,13585	3,13519

*В данной работе разложение посчитано до β^6 .



a



b

Рис. 3. Зависимость напряжений от r для $\beta = 4$ при $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ (a)

и $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (б)

Fig. 3. Dependence of stresses on r for $\beta = 4$ when $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ (a)

and $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (b)

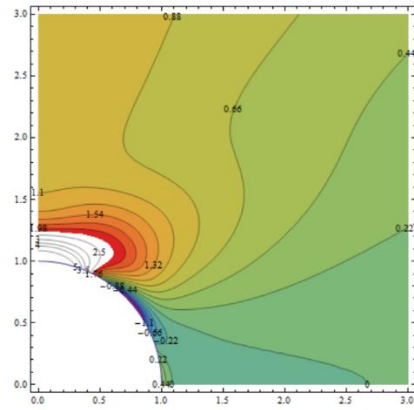


Рис. 4. Поле напряжений $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$ от координат (x, y)
при $\beta = 4$ и $\nu = 0,3$

Fig. 4. Stress field $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$ from coordinates (x, y)
when $\beta = 4$ and $\nu = 0,3$

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60008.

Аппендикс

Утверждение: первое уравнение (8a) является следствием четырех уравнений, а именно двух уравнений системы (13) и двух уравнений системы (14) при $l = 0$.

Доказательство: введем следующие обозначения:

$$I : (8a) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g'(n, 0) = p,$$

$$II : (14-1, l=0) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot t_3(n, 0) = 0,$$

$$III : (14-2, l=0) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot t_4(n, 0) = 0,$$

$$IV : (13-1) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g(n, 1) = -\frac{p}{4},$$

$$V : (13-2) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot g'(n, 1) = -\frac{p}{2}.$$

Утверждается следующий факт:

$$4\beta^2 [I + V + 2IV] = II + III.$$

Равенство для правых частей очевидно. Для левых частей нужно доказать, что $\forall n \in \mathbb{Z}_+$

$$4\beta^2 [g'(n, 0) + g'(n, 1) + 2g(n, 1)] = i(g''(n, 0) + g'''(n, 0) - g'(n, 0)). \quad (*)$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}y = y'' + \frac{y'}{z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)y.$$

Лемма: Пусть $u, v \in \text{Ker } \mathcal{L}$, т.е. u, v – функции Бесселя индекса n ,

$$G(z) = u(z)v(z).$$

Тогда

$$G'''(z) + \frac{3}{z}G''(z) + \left(4 - \frac{4n^2 - 1}{z^2}\right)G'(z) + \frac{4}{z}G(z) = 0.$$

Библиографический список

1. Лурье А.И. Концентрации напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра // ПММ. – 1946. – Т. 10, № 3. – С. 397–406
2. Гузь А.Н.: Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. – Киев: Наукова Думка, 1974.
3. Lekkerkerker J.G. On the stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole // Delft: Uitgeverij Waltman (1965)
4. Naghdi A.K., Eringen A.C. Stress Distribution in a Circular Cylindrical Shell with a Circular Cutout // Archive of Applied Mechanics. – 1965. – Vol. 34(3). – P. 161–172.
5. Eringen A.C., Naghdi A.K., Thiel C.C. State of Stress in a Circular Cylindrical Shell With a Circular Hole // Welding Research Council Bulletin. – 1965. – № 102.
6. Murthy V.V.M. Stresses Around an Elliptic Hole in a Cylindrical Shell // J. of App. Mech. – 1969. – Vol. 36. – P. 39–46.
7. Van Dyke P. Stresses about a Circular Hole in a Cylindrical Shell // AIAA Journal. – 1965. – Vol. 3, no. 9. – P. 1733–1742.
8. Ватсон Дж.Н. Теория бесселевых функций / пер. с англ. В.С. Бермана; под ред. и с доп. Г. Шилова. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949
9. Kashtanova S.V., Rzhonsnitskiy A.V., Gruzdkov A.A. On the Issue of Analytical Derivation of Stress State in a Cylindrical Shell with a Circular Hole under Axial Tension // Materials Physics and Mechanics (to be published 2021).
10. Effects of Size and Location of a Circular Cutout on Buckling and Failure of a Cylindrical Shell in Bending / M. Celebi, Z. Gürdal, B.F. Tatting, A. Blom-Schieber, M. Rassaian, S.P. Wanthal // AIAA 2017-0433, Session: Composite Structure Design, Test and Analysis. – 2017.
11. A Numerical–Analytical Approach for the Preliminary Design of Thin-Walled Cylindrical Shell Structures with Elliptical Cut-Outs / A. Russo, A. Sellitto, S. Saputo, V. Acanfora, A. Riccio // Aerospace 2019, 6, 52.
12. Stress–Strain State near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section / E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko, A.V. Yatsura // International Applied Mechanics. – 2018. – Vol. 54, no. 5. DOI 10.1007/s10778-018-0909-8
13. Yu Ban Hai, Jian Jun Ma, Yong Liu. Finite Element Analysis of Cylindrical Shell with a Circular Cutout Using Combination Model of Solid Element and Shell Element // Applied Mechanics and Materials, vol. 799–800, Trans Tech Publications, Ltd. – Oct. 2015. – P. 739–745. – Crossref. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amm.799-800.739.
14. Stress Analysis of Uniform Circular Cylindrical Shells with Large Circular Holes / R. Kamalarajah, W. Stoffberg, J.W. Bull, M. Chizari // Proceedings of the World Congress on Engineering. – 2015. – Vol II. – London, U.K.
15. Stress Concentration around Cut-Outs in Plates and Cylindrical Shells / R. Chowdhury, M. Saiteja Reddy, P.C. Jain, P. Banga-

Доказательство леммы выводится из соотношений для функций Бесселя.

Если применить утверждение леммы для

$$u(z) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \frac{2}{H_n^{(1)}((1+i)\beta)} H_n^{(1)}(z),$$

$$v(z) = J_n(z), \quad G(z) = u(z)v(z),$$

доказывается равенство (*).

ru Babu // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2016. – Vol. 11, no 18.

16. Chekhov V.N., Zakora S.V. Numerical determination of the stress concentration around a hole in a circular cylindrical shell. – 1972. – Vol. 8(7). – P. 785–788. DOI: 10.1007/bf00886290

17. Пирогов И.М. Изгиб цилиндрической пластинки, ослабленной отверстием // Изв. вузов. Машиностроение. – 1959. – № 12.

18. Пирогов И.М. Влияние кривизны на распределение напряжений около отверстия в цилиндрической оболочке // ПМ. – 1965. – № 12.

19. Пирогов И.М. Концентрация напряжений возле эллиптического отверстия в цилиндрической пластине // Расчеты на прочность, 13. – М.: Машиностроение, 1967.

20. Пирогов И.М. Влияние кривизны на распределение изгибных напряжений около отверстия на поверхности кругового цилиндра // Сб. трудов Всесоюз. заочной политех. ин-та. – 45. – М.: Высшая школа, 1967.

21. Пирогов И.М. Изгиб цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием // Сб. трудов Всесоюз. заочной политех. ин-та, 45. – М.: Высшая школа, 1967.

22. Пирогов И.М. Определение функции напряжений для цилиндрической оболочки с круговым отверстием // Сб. трудов Всесоюз. заочной политех. ин-та, 51. – М.: Высшая школа, 1968.

23. Пирогов И.М., Юматов В.П. О напряжениях в цилиндрической оболочке ослабленной круговым отверстием // Сб. трудов Всесоюз. заочной политех. ин-та, 51. – М.: Высшая школа, 1968.

24. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 891 с.

25. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. – М.: Гостехиздат, 1947.

26. Houghton D.S. Stress Concentrations Around Cut-outs in a Cylinder // The Journal of the Royal Aeronautical Society. – 1961. – Vol. 65(603). – P. 201–204.

27. Liu Diankui, Hu Chao. The general solution for the stress problem of circular cylindrical shells with an arbitrary cutout // Applied Mathematics and Mechanics. – 1997. – Vol. 18(7). – P. 629–646.

28. On the stress concentration in thick cylindrical shells with an arbitrary cutout / Hu Chao, Liu Diankui, Ma Xingrui, Wang Benli. // Applied Mathematics and Mechanics. – 1998. – Vol. 19(5). – P. 399–410.

29. Adams N.J. Stress Concentration in a Cylindrical Shell Containing a Circular Hole // Materials Science, Journal of Engineering for Industry. – 1971.

30. Naghdi A.K. An approximate solution to the problem of a circular cylindrical shell with a circular hole subjected to an arbitrary self-equilibrated edge loading. // Ingenieur-Archiv. – 1969. – Vol. 38. – P. 380–388.

31. Довбня Е.Н., Крупко Н.А. Влияние кругового отверстия на напряженное состояние оболочки произвольной гауссовой кривизны // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2014. – № 1.

32. Oterkus E., Madenci E., Nemeth M.P. Stress analysis of composite cylindrical shells with an elliptical cutout // American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 2005. – Vol. 43, no. 12. – P. 1–22.

33. Hwai-Chung Wu, Bin Mu. On stress concentrations for isotropic/orthotropic plates and cylinders with a circular hole // Composites Part B: Engineering. – 2003. – Vol. 34, Iss. 2. – P. 127–134.

34. Influence of the property of hole on stress concentration factor for isotropic plates / Lican Zhuang, Bixin Su, Minghao Lin, Yiyuan Liao, Yafang Peng, Yinglong Zhou, Dongmei Luo // 10th

International Conference on Composite Science and Technology, ICCST/10. – 2015.

35. Komal Chawla and Samit Ray-Chaudhuri. Stress and strain concentration factors in orthotropic composites with hole under uniaxial tension // Curved and Layered Structures. – 2018. – Vol. 5, Iss. 1.

36. Silpa V.J.K. [et al.] Structural Analysis of thin isotropic and orthotropic plates using finite element analysis. // Indian Journal of Medical Ethics. – 2017. – Vol. 4. – P. 17–27.

37. Jain N.K. The reduction of stress concentration in a uniaxially loaded infinite width rectangular isotropic/orthotropic plate with central circular hole by coaxial auxiliary holes // IIUM Engineering Journal. – 2011. – Vol. 12, no. 6. Special Issue in Science and Ethics

References

1. Lurie, A.I.: Concentration of stresses in the Vicinity of an Aperture in the Surface of a Circular Cylinder (*in Russian*), *Prikladnaya Matematika I Mekhanika*, 1946, vol.10,p.397

2. Guz, A.N.: Cylindrical Shells with cutouts (*in Russian*), *Naukova Dumka, Kiev*, 1974

3. Lekkerkerker, J. G.: *On the stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole*. Delft: Uitgeverij Waltman, 1965

4. Naghdi, A.K., Eringen, A.C.: Stress Distribution in a Circular Cylindrical Shell with a Circular Cutout, *Archive of Applied Mechanics* 34(3):161-172, 1965

5. Eringen, A.C., Naghdi, A.K. and Thiel, C.C.: “State of Stress in a Circular Cylindrical Shell With a Circular Hole”. *Welding Research Council Bulletin*, no. 102., 1965

6. Murthy, V. V. M.: Stresses Around an Elliptic Hole in a Cylindrical Shell. *J. of App. Mech.*36, 39–46, 1969

7. Van Dyke, P: Stresses about a Circular Hole in a Cylindrical Shell. *AIAA Journal*, Vol.3, № 9, pp.1733-1742, 1965

8. G.N. Watson A Treatise on the Theory of Bessel Functions *Cambridge University Press* 1945

9. Kashtanova, S.V., Rzhonsnitskiy A.V., Gruzdkov A.A. On the Issue of Analytical Derivation of Stress State in a Cylindrical Shell with a Circular Hole under Axial Tension. *Materials Physics and Mechanics*

10. Celebi M, Gürdal Z, Tatting B.F., Blom-Schieber A., Rassaian M., Wanthal S.P. Effects of Size and Location of a Circular Cutout on Buckling and Failure of a Cylindrical Shell in Bending. *AIAA 2017-0433, Session: Composite Structure Design, Test and Analysis*, 2017

11. Russo A.; Sellitto A.; Saputo S.; Acanfora V.; Riccio A. A Numerical–Analytical Approach for the Preliminary Design of Thin-Walled Cylindrical Shell Structures with Elliptical Cut-Outs. *Aerospace* 2019, 6, 52.

12. Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S., and Yatsura A. V.: Stress–Strain State near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section. *International Applied Mechanics*, 2018, vol. 54, no. 5. DOI 10.1007/s10778-018-0909-8

13. Yu, Ban Hai, Jian Jun Ma, and Yong Liu. Finite Element Analysis of Cylindrical Shell with a Circular Cutout Using Combination Model of Solid Element and Shell Element. Ltd., Oct. 2015, pp. 739–745. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amm.799-800.739.

14. Chekhov V.N.; Zakora S.V. Numerical determination of the stress concentration around a hole in a circular cylindrical shell., 1972, 8(7), 785–788. DOI:10.1007/bf00886290

15. Chowdhury R., M Saiteja Reddy, P. C. Jain, P. Bangaru Babu. Stress Concentration around Cut-Outs in Plates and Cylindrical Shells..*ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2016, vol. 11, no 18

16. Chekhov V.N.; Zakora S.V. Numerical determination of the stress concentration around a hole in a circular cylindrical shell.,1972, 8(7), 785–788. DOI:10.1007/bf00886290

17. Pirogov I.M. Izhig tsilindricheskoi plastinki, oslablennoi otverstiem [Bending of a cylindrical plate weakened by a hole]. *Izv. vuzov, Mashinostroenie*, 1959, 12

18. Pirogov I.M. Vliianie krivizny na raspredelenie napriazhenii okolo otverstia v tsilindricheskoi obolochke [Influence of curvature on stress distribution around a hole in a cylindrical shell].*PM*, 1965, 12

19. Pirogov I.M. Kotsentratsiia napriazhenii vozle ellipticheskogo otverstia v tsilindricheskoi plastine [Stress concentration near an elliptical hole in a cylindrical plate].*Moscow, «Mashinostroenie»*, 1967

20. Pirogov I.M. Vliianie krivizny na raspredelenie izgibnykh napriazhenii okolo otverstia na poverkhnosti krugovogo tsilindra [Influence of curvature on the distribution of bending stresses near a hole on the surface of a circular cylinder].*Moscow, Sb. trudov Vsesoiuzn. zaochnoi politekh. int-ta, 45. «Vysshiaia shkola»*, 1967

21. Pirogov I.M. Izhig tsilindricheskoi obolochki, oslablennoi krugovym otverstiem [Bending of a cylindrical shell weakened by a circular hole].*Moscow, Sb. trudov Vsesoiuzn. zaochnoi politekh. int-ta, 45. «Vysshiaia shkola»*, 1967

22. Pirogov I.M. Opredelenie funktsii napriazhenii dlia tsilindricheskoi obolochki s krugovym otverstiem [Determination of the stress function for a cylindrical shell with a circular hole].*Moscow, Sb. trudov Vsesoiuzn. zaochnoi politekh. int-ta, 45. «Vysshiaia shkola»*, 1968

23. Pirogov I.M., Iumatov V.P. O napriazheniiakh v tsilindricheskoi obolochke oslablennoi krugovym otverstiem [On stresses in a cylindrical shell weakened by a circular hole].*Moscow, Sb. trudov Vsesoiuzn. zaochnoi politekh. int-ta, 45. «Vysshiaia shkola»*, 1968

24. Savin G.N. Stress Concentration [Distribution of stresses around holes].*Public Domain* 1967.

25. Lur'e A.I. Statika tonkostennykh uprugikh obolochek [The statics of thin-walled elastic shells].*Moscow, Gostekhizdat*, 1947

26. Houghton, D. S. Stress Concentrations Around Cut-outs in a Cylinder..*The Journal of the Royal Aeronautical Society*, 1961, 65(603), 201–204.

27. Liu Diankui, Hu Chao. The general solution for the stress problem of circular cylindrical shells with an arbitrary cut-out. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, 18(7), 629–646.
28. Hu Chao, Liu Diankui, Ma Xingrui, Wang Benli. On the stress concentration in thick cylindrical shells with an arbitrary cut-out. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, 19(5), 399–410.
29. N. J. Adams. Stress Concentration in a Cylindrical Shell Containing a Circular Hole. *Materials Science, Journal of Engineering for Industry*, 1971
30. Naghdi A.K. An approximate solution to the problem of a circular cylindrical shell with a circular hole subjected to an arbitrary self-equilibrated edge loading. *Ingenieur-Archiv*, 1969, vol. 38, pp 380–388,
31. Dovbnya E.N., Krupko N.A. Influence of Circular Hole on the Shell Stress State for Arbitrary Gaussian Curvature. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. №1.
32. E. Oterkus, E. Madenci and M. P. Nemeth. Stress analysis of composite cylindrical shells with an elliptical cut-out. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 2005, vol. 43, no. 12, pp. 1-22.
33. Hwai-Chung Wu, Bin Mu, On stress concentrations for isotropic/orthotropic plates and cylinders with a circular hole. *Composites Part B: Engineering*, vol. 34, iss. 2, 2003, pp. 127-134
34. Lican Zhuang, Bixin Su, Minghao Lin, Yiyuan Liao, Yafang Peng, Yinglong Zhou, Dongmei Luo. Influence of the property of hole on stress concentration factor for isotropic plates. *10th International Conference on Composite Science and Technology, ICCST/10*, 2015
35. Komal Chawla and Samit Ray-Chaudhuri. Stress and strain concentration factors in orthotropic composites with hole under uniaxial tension. *Curved and Layered Structures / Volume 5: Issue 1*, 2018
36. Silpa, V.J.K. et al. Structural Analysis of thin isotropic and orthotropic plates using finite element analysis. *Indian Journal of Medical Ethics* 4, 2017, pp. 17-27.
37. Jain N.K. The reduction of stress concentration in a uniaxially loaded infinite width rectangular isotropic/orthotropic plate with central circular hole by coaxial auxiliary holes. *IJUM Engineering Journal*, 2011, vol. 12, no. 6.