

Муйземнек А.Ю., Иванова Т.Н., Карташова Е.Д. Сопоставление результатов экспериментального и расчетного определения эффективных характеристики упругих свойств полимерных слоистых композитов из угле- и стеклотканей // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 2. С. 88-105. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.09

Muyzemnek A.Yu., Ivanova T.N., Kartashova E.D. A Comparison of Experimental and Computation Results of Finding Effective Characteristics of Elastic Properties of Polymer Layered Composites from Carbon and Glass Fabrics *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 2, pp. 88-105. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.09



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.09

УДК 539.2

СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО И РАСЧЕТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГИХ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРНЫХ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ИЗ УГЛЕ- И СТЕКЛОТКАНЕЙ

А.Ю. Муйземнек¹, Т.Н. Иванова², Е.Д. Карташова¹

¹Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

²Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, Ижевск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 2 ноября 2020 г.
Принята: 16 мая 2020 г.
Опубликована: 12 июля 2021 г.

Ключевые слова:

полимерные слоистые композиционные материалы, эффективные характеристики упругих свойств, модели и методы экспериментальных исследований и расчета.

АННОТАЦИЯ

Отличительными чертами полимерных слоистых композиционных материалов является анизотропия механических свойств всего материала и каждого его слоя и то, что процессы производства композиционного материала и детали из него часто совмещены по времени. При этом упругие свойства и прочность материала различны не только по толщине детали, но и в каждой ее точке. Все это приводит к усложнению процесса проектирования, которое обусловлено необходимостью определения упругих свойств и прочности полимерного слоистого композиционного материала с учетом структуры всего материала и каждого его слоя. Целью работы является оценка существующих методов вычисления эффективных характеристик упругих свойств путем сравнения результатов расчета, полученных различными методами, между собой, а также с результатами экспериментального определения упругих свойств полимерных слоистых композиционных материалов из угле- и стеклотканей.

Оценка методов вычисления эффективных характеристик упругих свойств композитов выполнена на основе результатов экспериментального определения характеристик упругих свойств полимерных слоистых композиционных материалов из угле- и стеклотканей, различающихся плотностью и типом плетения. Экспериментальные значения эффективных характеристик упругих свойств были определены в результате стандартных испытаний лабораторных образцов на растяжение.

В результате исследования установлено, что все рассматриваемые модели и методы дают согласованные результаты при вычислении продольного модуля упругости E_{11} , результаты вычисления модуля поперечной упругости E_{33} и модулей сдвига G_{12} и G_{23} менее согласованы для всех рассматриваемых материалов. Сопоставление результатов экспериментальных исследований и расчета показало, что модель Чамиса и мостовая модель позволяют лучше других моделей предсказать значения продольного модуля упругости.

© ПНИПУ

© Муйземнек Александр Юрьевич – д.т.н., проф., зав. каф., e-mail: muyzemnek@yandex.ru, ID: [0000-0002-9137-6892](https://orcid.org/0000-0002-9137-6892).

Иванова Татьяна Николаевна – д.т.н., проф., e-mail: rsg078829@mail.ru, ID: [0000-0003-2284-2949](https://orcid.org/0000-0003-2284-2949).

Карташова Екатерина Дмитриевна – асп., e-mail: katrina89@yandex.ru, ID: [0000-0002-9393-1183](https://orcid.org/0000-0002-9393-1183).

Alexander Yu. Muyzemnek – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, e-mail: muyzemnek@yandex.ru, ID: [0000-0002-9137-6892](https://orcid.org/0000-0002-9137-6892).

Tatyana N. Ivanova – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: rsg078829@mail.ru, ID: [0000-0003-2284-2949](https://orcid.org/0000-0003-2284-2949).

Ekaterina D. Kartashova – PhD Student, e-mail: katrina89@yandex.ru, ID: [0000-0002-9393-1183](https://orcid.org/0000-0002-9393-1183).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

A COMPARISON OF EXPERIMENTAL AND COMPUTATION RESULTS OF FINDING EFFECTIVE CHARACTERISTICS OF ELASTIC PROPERTIES OF POLYMER LAYERED COMPOSITES FROM CARBON AND GLASS FABRICS

A.Yu. Muzemnek¹, T.N. Ivanova², E.D. Kartashova¹

¹Penza State University, Penza, Russian Federation

²Institute of Mechanics FGBUN “Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of RAN”, Izhevsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 2 November 2020

Accepted: 16 May 2021

Published: 12 July 2021

Keywords:

polymer layered composite materials, effective characteristics of elastic properties, models and methods of experimental research and calculation.

ABSTRACT

Anisotropy of mechanical properties of the entire material and each of its layers is characteristic for polymer layered composite materials, as well as the fact that production processes of the composite material and parts from it are often combined in time. In this case, the elastic properties and strength of the material will be different not only in the thickness of the part, but also at each point. All this leads to a complication of the design process, which is due to the need to determine the elastic properties and strength of the polymer layered composite materials, taking into account the structure of the entire material and each of its layers. This work aims at evaluating the existing computational methods of finding effective characteristics of elastic properties by comparing computation results obtained by various methods with each other, as well as with the experimental results related to elastic properties of polymer layered composite materials from carbon and glass fabrics.

We estimated the computational methods of finding effective characteristics of the elastic properties of composites based on the experimental results of finding the characteristics of the elastic properties of polymer layered composite materials made of carbon and glass fabrics, differing in density and type of weaving. The experimental values of the effective characteristics of elastic properties were determined as a result of standard tensile tests of laboratory specimens.

As a result of the study, it was found that all the considered models and methods give consistent results when calculating the longitudinal modulus of elasticity E_{11} , the results of calculating shear modulus E_{33} and shear moduli G_{12} and G_{23} are less consistent for all the considered materials. The comparison of the results of the experimental studies and computations showed that the Chamis model and the bridge model are better than other models to predict the values of the longitudinal elastic modulus.

© PNRPU

Введение

Современное развитие многих отраслей промышленного производства характеризуется увеличением объема и расширением номенклатуры применяемых полимерных слоистых композиционных материалов, значительная часть которых изготавливается из угле- и стеклотканей. Эти материалы обладают уникальным комплексом физико-механических свойств, к которым следует отнести сравнительно высокую удельную прочность и жесткость. Отличительными чертами этих материалов является анизотропия механических свойств всего материала и каждого его слоя и то, что процессы производства композиционного материала и детали из него часто совмещены по времени. Перечисленные особенности обуславливают возможность за счет рационального расположения тканевых слоев получить большую прочность и жесткость детали при сохранении массы детали или уменьшить массу детали при сохранении ее прочности и жесткости. В этом случае упругие свойства и прочность материала будут различными не только по толщине детали, но и в каждой ее точке. Все это приводит к усложнению процесса проектирования, которое обусловлено необходимостью

определения упругих свойств и прочности полимерного слоистого композиционного материала с учетом структуры всего материала и каждого его слоя, а также характеристик физико-механических свойств его компонентов. Таким образом, наличие методов определения характеристик упругих свойств имеет решающее значение для использования рассматриваемых типов композитов в различных отраслях промышленного производства. Целью работы является оценка существующих методов вычисления эффективных характеристик упругих свойств путем сравнения результатов расчета, полученных различными методами, между собой, а также с результатами экспериментального определения упругих свойств полимерных слоистых композиционных материалов из угле- и стеклотканей.

Аналитическое или численное моделирование текстильных композитов с целью оценки их упругих свойств зависит от прогноза упругих свойств однонаправленных композитов (UniDirectional – UD-композитов). Они рассматриваются как трансверсально-изотропные материалы, состоящие из двух составляющих – связующего и армирующего компонентов. В данной работе армирующим компонентом в UD-композитах являются нити из угле- или стекловолокна, связующим – эпоксидная

смола. Волокна, из которых состоят нити, могут рассматриваться как анизотропные или изотропные материалы. Связующий компонент, представляющий собой эпоксидную смолу, рассматривается как изотропный материал. Эффективные матрицы жесткости и податливости трансверсально-изотропного материала определяются пятью независимыми инженерными константами: продольным и поперечным модулями Юнга E_t и E_p ; (t – направление вдоль волокна (рис. 1, а), p – направление поперек волокна); продольным и поперечным модулями сдвига G_p и G_t ; главным коэффициентом Пуассона ν_p . Коэффициент Пуассона ν_p связан с поперечным модулем сдвига G_p и поперечным модулем Юнга E_p зависимостью $G_p = \frac{E_p}{2(1+\nu_p)}$. Инженерные константы

UD-композита зависят от характеристик упругих свойств армирующего и связующего компонентов и объемной доли армирующего компонента V^f (объемной доли волокна в композите). UD-композиты представляют собой основной элемент моделирования всех слоистых композитов из тканей.

Композиционные материалы, армированные тканями (Woven-композиты), рассматриваются как ортотропные материалы. Эффективные матрицы жесткости и податливости ортотропного материала определяются девятью независимыми инженерными константами: модулями Юнга E_{11} , E_{22} и E_{33} , модулями сдвига G_{12} , G_{23} и G_{13} и главными коэффициентами Пуассона ν_{21} , ν_{31} , ν_{32} (направление осей показано на рис. 1, б). Ввиду симметрии матрицы податливости существуют зависимости

$\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = \frac{\nu_{ji}}{E_{jj}}$ (без суммирования). Матрица податливости $[S]$ ортотропного материала предоставляется следующим образом:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & -\nu_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{32}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_{11} & -\nu_{23}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Для тканых слоев, имеющих одинаковые нити основы и утка, которые расположены под углом 90° , систему координат, в которой определяются инженерные константы, можно выбрать таким образом, что будут выполняться равенства $E_{11} = E_{22}$, $\nu_{31} = \nu_{32}$ и $G_{23} = G_{13}$. Таким образом, эффективные матрицы жесткости и податливости ортотропного материала определяются шестью независимыми инженерными константами E_{11} , E_{33} , G_{12} , G_{23} , ν_{21} , и ν_{31} .

Инженерные константы тканого слоя, а значит, и его матрицы жесткости и податливости можно определить, используя различные микромеханические модели, которые можно разделить на феноменологические,

в которых структура композита не учитывается, структурно-феноменологические, в которых структура композита учитывается через поправочные коэффициенты или функции, и структурные.

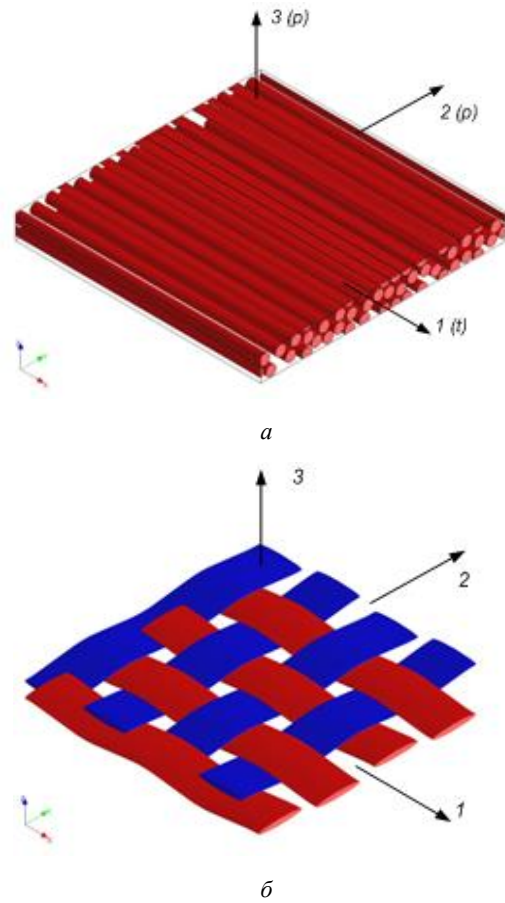


Рис. 1. Композиционные материалы (без связующего компонента): а – однонаправленный композит; б – тканый слой

Fig. 1. Composite materials (without a binder): a) is a unidirectional composite; b) is a woven layer

К феноменологическим моделям, не учитывающим структуру композита, следует отнести модели Фойгта (Voigt) [1] и Рейсса (Reuss) [2]. Значения упругих модулей, полученных с использованием этих моделей, образуют так называемую вилку Фойгта – Рейсса, которая для практического использования часто оказывается слишком широкой. Более узкий интервал упругих модулей в этом случае может быть определен с помощью вилки Хашина – Штрикмана (Hashin – Shtrikman) [3]. Для более точного определения упругих модулей необходимо использовать модели, которые учитывают структуру композита.

Принимая во внимание то, что микромеханические модели в лучшей степени разработаны для UD-композитов, отметим, что оправданным представляется подход, согласно которому тканый слой рассматривается как двухслойный, состоящий из двух UD-слоев (псевдослоев), соответствующих нитям основы и нитям утка. После определения инженерных констант или

матриц жесткости и податливости инженерные константы всего тканевого слоя находятся с применением моделей Фойгта (Voigt) [1] и Рейсса (Reuss) [2] или путем осреднения матриц жесткости каждого псевдослоя, с использованием следующей зависимости [4]:

$$\langle C_{ijkl} \rangle = \sum_{s=1}^N v_s C_{ijkl}^s, \quad (2)$$

где C_{ijkl}^s – компоненты тензора жесткости модулей упругости слоя s ; v_s – объемная концентрация компонента s в N -компонентном композите (в рассматриваемом случае $N = 2$).

Подробное сравнительное обзорное исследование по моделированию упругих свойств UD-композитов с использованием наиболее известных доступных аналитических микромеханических моделей, а также метода конечных элементов (FEM) представлено в работе [5]. Там же представлены выводы, полученные при сравнении результатов, полученных с помощью широкого ряда аналитических и численных моделей, с доступными экспериментальными данными для различных типов UD-композитов.

1. Краткое описание моделей и методов вычисления эффективных характеристик упругости композитов

Прогнозирование механических свойств UD-композитов было основной целью многих исследований. Предложены различные микромеханические модели для оценки упругих свойств UD-композитов. Эти модели можно разделить на четыре категории: феноменологические модели, полуэмпирические модели, модели упругого приближения и модели гомогенизации.

К феноменологическим моделям (phenomenological models) относится модель, построенная на правиле смесей (Rule of Mixture – ROM).

К полуэмпирическим моделям (semi-empirical models) относятся модель, построенная на модифицированном правиле смесей (Modified Rule of Mixture – MROM), модель Халпина – Цая (Halpin – Tsai model) [6] и модель Чамиса (Chamis model) [7]. В полуэмпирических моделях для повышения точности вычисления инженерных констант в правило смесей вводятся корректирующие коэффициенты.

К моделям упругого приближения (Elasticity approach models) относят модели Хашина – Розена [8] и Кристенсена [9].

К моделям гомогенизации (Homogenization models) относят модель Мори – Танака (Мори – Tanaka model – M-T) [10], модель двойного включения (DI) [11] и мостовую модель (Bridging mode) [14, 15].

Для прогнозирования механических свойств композитов широко используется численное моделирование методом конечных элементов (FEM).

1.1. Правило смесей (Rule of Mixture – ROM)

Первыми и наиболее простыми моделями, которые были предложены и использованы для оценки свойств композитов, являются модели Фойгта (Voigt) [1] и Рейсса (Reuss) [2]. Модель Фойгта основывается на предположении о том, что в репрезентативной ячейке композита действуют постоянные деформации, в то время как модель Рейсса – на предположении о постоянстве напряжений. При отсутствии учета структуры композита, полученные с использованием этих моделей значения упругих модулей, образуют вилку Фойгта – Рейсса. Верхнее значение вычисляется по модели Фойгта, нижнее – по модели Рейсса.

Точность определения характеристик упругих свойств UD-композитов можно повысить, если для вычисления E_{11} и ν_{12} использовать модель Фойгта

$$E_{11} = V^f E_{11}^f + V^m E^m, \quad \nu_{12} = V^f \nu_{12}^f + V^m \nu^m, \quad (3)$$

а для вычисления E_{22} и G_{12} – модель Рейсса

$$E_{22} = \frac{E_{22}^f E^m}{E^m V^f + E_{22}^f V^m}, \quad G_{12} = \frac{G_{12}^f G^m}{G^m V^f + G_{12}^f V^m}. \quad (4)$$

1.2. Модифицированное правило смесей (Modified Rule of Mixture – MROM)

Для повышения точности определения E_{22} и G_{12} в выражения для их вычисления (3) и (4) были введены корректирующие коэффициенты [5]:

$$\eta^f = \frac{E_{11}^f V^f + [(1 - \nu_{12}^f \nu_{21}^f) E^m + \nu^m \nu_{21}^f E_{11}^f] V^m}{V^f E_{11}^f + V^m E^m}, \quad (5)$$

$$\eta^m = \frac{[(1 - \nu^m) E_{11}^f - (1 - \nu^m \nu_{12}^f) E^m] V^f + E^m V^m}{V^f E_{11}^f + V^m E^m}. \quad (6)$$

После этого выражения для определения E_{22} и G_{12} приобрели следующий вид:

$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{\eta^f V^f}{E_{22}^f} + \frac{\eta^m V^m}{E^m}, \quad \frac{1}{G_{12}} = \frac{V^f}{G_{12}^f} + \frac{\eta^m V^m}{G^m}, \quad (7)$$

где η^i – корректирующий коэффициент $0 < \eta^i < 1$ (предпочтительное значение $\eta^i = 0,6$).

Для вычисления E_{11} и ν_{12} в модифицированном правиле смесей используются выражения (3).

1.3. Модель Халпина – Цая (Halpin-Tsai)

В модели Халпина – Цая [6] для вычисления E_{22} и G_{12} используются следующие выражения:

$$E_{22} = E^m \left(\frac{1 + \zeta^e \eta^e V^f}{1 - \eta^e V^f} \right), \quad G_{12} = G^m \left(\frac{1 + \zeta^g \eta^g V^f}{1 - \eta^g V^f} \right), \quad (8)$$

где η^i, ζ^i – корректирующие коэффициенты ($i = e, g$).

$$\eta^e = \begin{pmatrix} \frac{E_f - 1}{E_m} \\ \frac{E_f}{E_m} + \zeta^e \end{pmatrix}, \quad \eta^g = \begin{pmatrix} \frac{G_f - 1}{G_m} \\ \frac{G_f}{G_m} + \zeta^g \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$\zeta^e = 1$, $\zeta^g = 2$, E_f, E_m – модули Юнга армирующего и связующего компонентов; G_f, G_m – модули сдвига армирующего и связующего компонентов.

Для вычисления E_{11} и ν_{12} в модели Халпина – Цая используются выражения (3).

1.4. Модель Чамиса (Chamis)

Модель Чамиса [7] является наиболее часто используемой и считается самой точной моделью, применяемой для определения характеристик упругих свойств композитов. В этой модели константы E_{11} и ν_{12} UD-композита определяются так же, как и в модели ROM (3), в то время как для других модулей V^f заменяется его квадратным корнем

$$E_{22} = \frac{E_{22}^f E^m}{1 - \sqrt{V^f} \left(1 - \frac{E^m}{E_{22}^f}\right)}, \quad G_{12} = \frac{G^m}{1 - \sqrt{V^f} \left(1 - \frac{G^m}{G_{12}^f}\right)},$$

$$G_{23} = \frac{G^m}{1 - \sqrt{V^f} \left(1 - \frac{G^m}{G_{23}^f}\right)}. \quad (10)$$

1.5. Модели Хашина – Розена (Hashin and Rosen) и Кристенсена (Christensen)

Модель Хашина – Розена [8] первоначально была предложена для оценки упругих свойств цилиндров из UD-композитов. Для вычисления модуля Юнга E_{11} , коэффициента Пуассона ν_{12} и модуля сдвига G_{12} в ней использовались следующие выражения:

$$E_{11} = V^f E_{11}^f + V^m E^m + \frac{4V^f V^m (\nu_{12}^f - \nu^m)^2}{\frac{V^f}{K^m} + \frac{1}{G^m} + \frac{V^m}{K^f}},$$

$$\nu_{12} = V^f \nu_{12}^f + V^m \nu^m + \frac{V^f V^m (\nu_{12}^f - \nu^m) \left(\frac{1}{K^m} - \frac{1}{K^f}\right)}{\frac{V^f}{K^m} + \frac{1}{G^m} + \frac{V^m}{K^f}}, \quad (11)$$

$$G_{12} = G^m \frac{G^f (1 + V^f) + G^m V^m}{G^f V^m + G^m (1 + V^f)}.$$

Для повышения точности вычисления поперечного модуля сдвига G_{23} Кристенсен [9] предложил обобщенную самосогласованную модель, модуль сдвига G_{23} в которой определялся путем решения уравнения

$$A \left(\frac{G_{23}}{G_m}\right)^2 + 2B \left(\frac{G_{23}}{G_m}\right) + C = 0, \quad (12)$$

где A, B, C – коэффициенты, вычисляемые по следующим зависимостям:

$$A = 3V^f (1 - V^f)^2 \left(\frac{G_{23}^f}{V^m} - 1\right) \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} + \eta_f\right) + \left[\frac{G_{23}^f}{G^m} \eta_m + \eta_f \eta_m - \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} \eta_m + \eta_f\right) V^{f3}\right] \times \left[V^f \eta_m \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} - 1\right) - \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} \eta_m + 1\right)\right];$$

$$B = -3V^f V^{m2} \left(\frac{G_{23}^f}{V^m} - 1\right) \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} + \eta_f\right) + \frac{V^f}{2} (\eta_m + 1) \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} - 1\right) \left[\frac{G_{23}^f}{G^m} + \eta_f + \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} \eta_m - \eta_f\right) V^{f3}\right] + \left\{\frac{1}{2} \left[\frac{G_{23}^f}{G^m} \eta_m - \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} - 1\right) V^f + 1\right] \times \left[(\eta_f - 1) \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} + \eta_f\right) - 2 \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} \eta_m - \eta_f\right) V^{f3}\right]\right\};$$

$$C = -3V^f V^{m2} \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} - 1\right) \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} + \eta_f\right) + \left[\frac{G_{23}^f}{G^m} \eta_m + \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} - 1\right) V^f + 1\right] \left[\frac{G_{23}^f}{G^m} + \eta_f + \left(\frac{G_{23}^f}{G^m} \eta_m - \eta_f\right) V^{f3}\right],$$

где

$$\eta_m = 3 - \nu^m, \quad \eta_f = 3 - \nu_{23}^f, \quad K_f = \frac{E^f}{2(1 - 2\nu^f)(1 + \nu^f)},$$

$$K^m = \frac{E^m}{2(1 - 2\nu^m)(1 + \nu^m)},$$

$$\nu_{23} = \frac{K - mG_{23}}{K + mG_{23}}, \quad m = 1 + 4K \frac{\nu_{12}^2}{E_{11}},$$

$$K = \frac{K^m (K^f + G^m) V^m + K^f (K^m + G^m) V^f}{(K^f + G^m) V^m + (K^m + G^m) V^f},$$

$$E_{22} = 2(1 + \nu_{23}) G_{23}.$$

1.6. Модель Мори – Танака (Mori – Tanaka)

Модель Мори – Танака [10] широко используется для моделирования различных видов композиционных материалов. Она основывается на решении задачи об одном эллипсоидальном включении с модулем упругости C_1 , которое расположено в бесконечной матрице с модулем упругости C_0 , данном Эшелби [11, 12].

В указанных работах установлено, что под действием однородных деформаций $\bar{\epsilon}$ на удаленной границе поле деформации во включении $\epsilon(\mathbf{x})$ также однородно и связано с деформацией на удаленной границе следующим образом:

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^e(I, C_0, C_1) : \bar{\epsilon} \quad \forall \mathbf{x} \in (I), \quad (13)$$

где (I) – область включения; \mathbf{x} – микроскопическая координата; $\mathbf{H}^e(I, C_1, C_0)$ – тензор концентрации деформаций, имеет следующее выражение:

$$\mathbf{H}^e(I, C_0, C_1) = [\mathbf{I} + \mathbf{P}(C_0, C_1) : (C_1 - C_0)]^{-1}, \quad (14)$$

$\mathbf{P}(C_0, C_1)$ – поляризационный тензор, который может быть вычислен по тензору Эшелби $\xi(I, C_0)$ по зависимости

$$\mathbf{P}(C_0, C_1) = \xi(I, C_0) : (C_0)^{-1}. \quad (15)$$

Следует отметить, что как модель Мори – Танака, так и модель двойного включения, построенные на тензоре концентрации деформации, определяют макроскопическую жесткость композита $\bar{\mathbf{C}}$ следующим выражением:

$$\bar{\mathbf{C}} = [V^f C_1 : \mathbf{V}^e + (1 - V^f) C_0] : [V^f \mathbf{V}^e + (1 - V^f) \mathbf{I}]^{-1}. \quad (16)$$

Модель Мори – Танака основывается на допущении, что тензор концентрации деформаций \mathbf{V}^e равен $\mathbf{H}^e(I, C_1, C_0)$. Таким образом, модель Мори – Танака имеет следующую физическую интерпретацию: поведение каждого включения похоже на поведение изолированного включения в материале, средняя деформация в котором соответствует деформации на удаленной границе.

1.7. Модель двойного включения (Double inclusion model – D-I)

Модель двойного включения (D-I) была предложена Нематом-Насером (Nemat-Nasser) и Хори (Hori) [13]. Она основана на предположении о том, что каждое включение (I) жесткости C_1 окружено в его близком окружении действительным матричным материалом жесткости C_0 , а вне этих областей имеется эталонный носитель жесткости C_r . Таким образом, реальный композит заменяется на эквивалентный, состоящий из фиктивной эталонной матрицы жесткости C_r , в которой находится включение жесткости C_1 , покрытое материалом жесткости C_0 .

1.8. Мостовая модель (Bridging mode)

Мостовая модель [14, 15] разработана для прогнозирования жесткости и прочности UD-композитов. Инженерные константы в ней E_{22} и G_{12} определяются следующим образом:

$$E_{22} = \frac{(V^f + V^m a_{11})(V^f + V^m a_{22})}{(V^f + V^m a_{11})(V^f S_{11}^f + V^m a_{22} S_{22}^m) + V^f V^m (S_{21}^m + S_{21}^f) a_{12}}, \quad (17)$$

$$G_{12} = \frac{(V^f + V^m a_{66}) G_{12}^f G^m}{V^f G^m + V^m a_{66} G_{22}^f}, \quad (18)$$

где a_{ij} являются компонентами матрицы $[A]$ мостовой модели; S_{ij}^f и S_{ij}^m – компонентами матриц податливости волокон и матрицы соответственно.

Для вычисления E_{11} и ν_{12} в мостовой модели используются выражения (3).

1.9. Численное моделирование методом конечных элементов (FEM)

В настоящее время для моделирования композитов кроме традиционно используемого метода асимптотического осреднения [4, 16] широкое распространение получили численные методы гомогенизации и гетерогенизации, которые позволяют проводить анализ механического поведения композитов на нескольких масштабных уровнях, осуществляя переходы с более низкого уровня на более высокий (гомогенизация), а также обратный переход (гетерогенизация). Наиболее перспективными считаются технологии, использующие многомасштабные методы. К числу последних следует отнести многомасштабный метод конечных элементов [17–20], гетерогенный многомасштабный метод конечных элементов [21], расширенный метод конечных элементов [22]. Решение ряда задач может быть выполнено методом «локальных гетерогенизаций» на основе концепции гибридной модели композита, предложенной А.И. Боровковым и В.А. Пальмовым [23]. Анализ численных методов определения упругих свойств содержится в работах [24–26], а результаты сопоставления вычисленных инженерных констант с результатами их экспериментального определения – в работах [27–29]. Ряд наиболее простых и универсальных методов решения типовых задач механики композитов реализован в некоторых распространенных системах автоматизированного инженерного анализа. В данной работе используется прямой метод гомогенизации, основанный на решении упругой задачи на ячейке периодичности многомасштабным методом конечных элементов, который реализован в программе ANSYS/Material Designer [30, 31]. Также используется метод конечных элементов, реализованный в программе DIGIMAT/Mark.

2. Описание материалов и методик лабораторных испытаний, результаты испытаний

Сравнение результатов использования аналитических моделей и численных методов с имеющимися экспериментальными данными осуществлено для двух видов Woven-композитов – углерод/эпоксидного

композита (CF/EP) и стекло/эпоксидного композита (GF/EP). Каждый вид был представлен двумя композициями, которые различались тканями и связующим компонентом. Основные характеристики тканевых слоев исследуемых композитов приведены в табл. 1.

Характеристики физико-механических свойств волокон и эпоксидных смол исследуемых композитов приведены в табл. 2. Внешний вид тканей показан на рис. 2.

Испытаниям были подвергнуты лабораторные образцы из четырех пластин, изготовленных из тканевых слоев, характеристики которых представлены в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики тканевых слоев

Table 1

Characteristics of fabric layers

Наименование характеристики	Номер тканевого слоя			
	первый	второй	третий	четвертый
Марка ткани	углеткань 200 г/м ² , 3К, плейн	углеткань 200 г/м ² , 3К, твил 2/2	стеклоткань 200 г/м ² , плейн	стеклоткань 200 г/м ² , твил 2/2
Толщина ткани, мм	0,24	0,2	0,18	0,15
Плотность укладки нитей, см ⁻¹	8,33	4,62	7,2	13,5
Количество филаментов в нить	3000	3000	3000	3000
Диаметр филаментов, мкм	5,319	7,139	4,895	3,575
Относительный объем армирующего компонента в нити	0,7	0,7	0,7	0,7
Относительный объем армирующего компонента в ткани	0,463	0,556	0,452	0,542
Ширина сечения нити, мм	1,011	2,183	1,141	0,73
Высота сечения нити, мм	0,12	0,1	0,09	0,075
Удельная плотность нити, текс	120	216	120	216
Расстояние между нитями, мм	1,2	2,16	1,39	0,74
Марка связующего компонента	эпоксидная система Epolam 2017		эпоксидная система SIN EpoxySystem	

Примечание: 1. Относительный объем армирующего компонента в нити равен 0,7.

2. Высота сечения нити равна половине толщины ткани.

Таблица 2

Характеристики физико-механических свойств материалов [32]

Table 2

Characteristics of physical and mechanical properties of materials [32]

Наименование характеристики	Наименование материала		
	углеродное волокно	стекловолокно	эпоксидные смолы
Плотность, г/см ³	1,8	2,52	1,4
Модуль упругости, ГПа	290	73	3,7
Коэффициент Пуассона	0,22	0,33	0,35

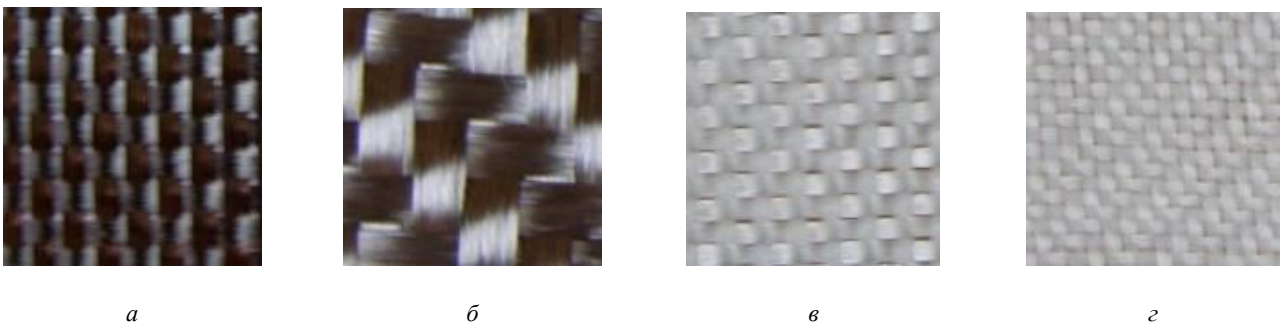


Рис. 2. Внешний вид тканей: а – углеткань 200 г/м², 3К, плейн; б – углеткань 200 г/м², 3К, твил 2/2; в – стеклоткань 200 г/м², плейн; г – стеклоткань 200 г/м², твил 2/2

Fig. 2. View of fabrics: a) a carbon fabric 200 g/m², 3K, plain; b) a carbon fabric 200 g/m², 3K, twill 2/2; c) a glass fabric 200 g/m², plain; g) a glass fabric 200 g/m², twill 2/2

Тканевые слои в каждой пластине были ориентированы одинаково. Пластины были изготовлены по технологии вакуумной инфузии. Особенности технологии изготовления пластин и подготовки исходных данных для построения микромеханических моделей изложены в работах [33, 34], а результаты применения моделей – в работах [35, 36]. Из каждой пластины были вырезаны 10 лабораторных образцов. Испытания на растяжение осуществлены согласно ГОСТ 25.601–80 [37]. При проведении испытаний использована универсальная испытательная машина МИ-40КУ с числовым программным управлением. Толщина лабораторных образцов соответствовала толщине пластин. Лабораторные образцы из пластин вырезались вдоль направления нитей основы. В процессе проведения испытаний определялись значения модуля упругости при растяжении. Математические ожидания и стандартные отклонения определенных экспериментально значений модуля упругости при растяжении исследуемых пластин приведены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты экспериментальных исследований

Table 3

Experimental results

Наименование характеристики	Номер материала			
	первый ¹	второй	третий	четвертый
Математическое ожидание, ГПа	53,3	60,1	15,6	18,4
Стандартное отклонение, ГПа	5,6	6,1	1,65	1,79

Примечание. ¹Характеристики тканевых слоев приведены в табл. 1.

3. Результаты вычисления эффективных характеристик упругих свойств композитов

Для определения эффективных характеристик упругих свойств рассматриваемых композитов требуется определение эффективных характеристик нитей, входящих в состав тканевых слоев. Каждая нить может быть представлена как UD-композит, состоящий из элементарных волокон (филаментов), пустоты между которыми заполнены связующим компонентом. Для вычисления эффективных характеристик упругих свойств могут быть использованы все перечисленные в первом разделе модели и методы. Результаты вычисления эффективных характеристик упругих свойств нитей с использованием программ DIGIMAT (DM) и ANSYS/Material Designer (MD), а также с использованием модели Чамиса и заимствованные из работ [38, 39] данные представлены в табл. 4.

Сопоставление значений эффективных характеристик упругих свойств угле- и стеклонитей, полученных с использованием программ DIGIMAT (DM) и ANSYS/Material Designer (MD), а также с использованием модели Чамиса, позволяют считать их достаточно

хорошо согласованными. Различие между вычисленными и заимствованными из работы [5] данными, достигающими по модулю упругости E_t 29 %, может быть объяснено различием химического состава и физико-механических свойств филаментов.

Таблица 4

Характеристики упругих свойств нитей

Table 4

Characteristics of elastic properties of yarns

Наименование нити	Наименование материала				
	E_t , ГПа	E_p , ГПа	G_{tp} , ГПа	G_p , ГПа	ν_{tp}
Нить из углеволокна (DM)	209,6	19,53	7,84	6,69	0,25
Нить из углеволокна (MD)	204,2	17,83	7,67	6,23	0,246
Нить из углеволокна (Chamis)	204,1	21,26	6,31	6,31	0,259
Нить из углеволокна (работа [38])	232	15	24	5,033	0,279
Нить из стекловолокна (DM)	52,18	15,51	5,4	6,1	0,335
Нить из стекловолокна (MD)	52,19	17,18	6,23	6,2	0,339
Нить из стекловолокна (Chamis)	52,21	17,98	5,32	5,32	0,336
Нить из стекловолокна (работа [39])	73,1	73,1	29,95	29,95	0,22

Результаты вычисления инженерных констант полимерных тканевых слоев, полученные с помощью моделей Рейсса (Reuss), Фойхта (Voigt), Хашина – Штрикмана (Hashin – Shtrikman), феноменологической модели, основанной на правиле смесей (ROM), полуэмпирической модели, основывающейся на модифицированном правиле смесей (MROM), модели Хэлпина – Цая (Halpin – Tsai) и модели Чамиса (Chamis), модели Хашина – Розена (Hashin – Rosen), модели Кристенсена (Chistensen), модели Мори – Танака (Mori – Tanaka), модели двойного включения (Double Inclusion), мостовой модели (Bridging model), метода конечных элементов (FEM), а также инженерные константы, полученные экспериментально, приведены в табл. 5–8.

При вычислении инженерных констант с помощью модели Мори – Танака (Mori – Tanaka), модели двойного включения (Double Inclusion) использовалась программа DIGIMAT, при вычислении методом конечных элементов – программа ANSYS/Material Designer. Геометрические модели используемых при этом репрезентативных ячеек, показаны на рис. 3, характеристики репрезентативной ячейки – в табл. 1, внешний вид тканей – на рис. 2.

Анализ представленных в табл. 5–8 результатов позволяет сделать следующие общие для четырех рассматриваемых материалов выводы:

– использование вилок Фойхта – Рейсса и Хашина – Штрикмана позволяет лишь очень грубо оценить значения модулей продольной упругости и сдвига. Как и должно быть, вилка Фойхта – Рейсса шире вилки Хашина – Штрикмана. Все вычисленные с использовани-

ем других моделей и методов значения упругих модулей располагаются внутри вилок Фойхта – Рейсса и Хашина – Штрикмана;

– значения модуля продольной упругости E_{11} , вычисленные с использованием всех моделей и методов, имеют сравнительно небольшой разброс и полностью помещаются в диапазон разброса экспериментальных значений;

– значения инженерных констант E_{33} , G_{12} , G_{23} , ν_{21} , и ν_{31} имеют существенно больший разброс. Для них

в наибольшей мере согласованными оказались значения, полученные с помощью модели Мори – Танака (Mori – Tanaka), модели двойного включения (Double Inclusion) и метода конечных элементов (FEM);

– значения коэффициента Пуассона, полученные с помощью модели Мори – Танака (Mori – Tanaka), модели двойного включения (Double Inclusion) и метода конечных элементов (FEM), оказались согласованными между собой и существенно отличными от значений, полученных с использованием других моделей.

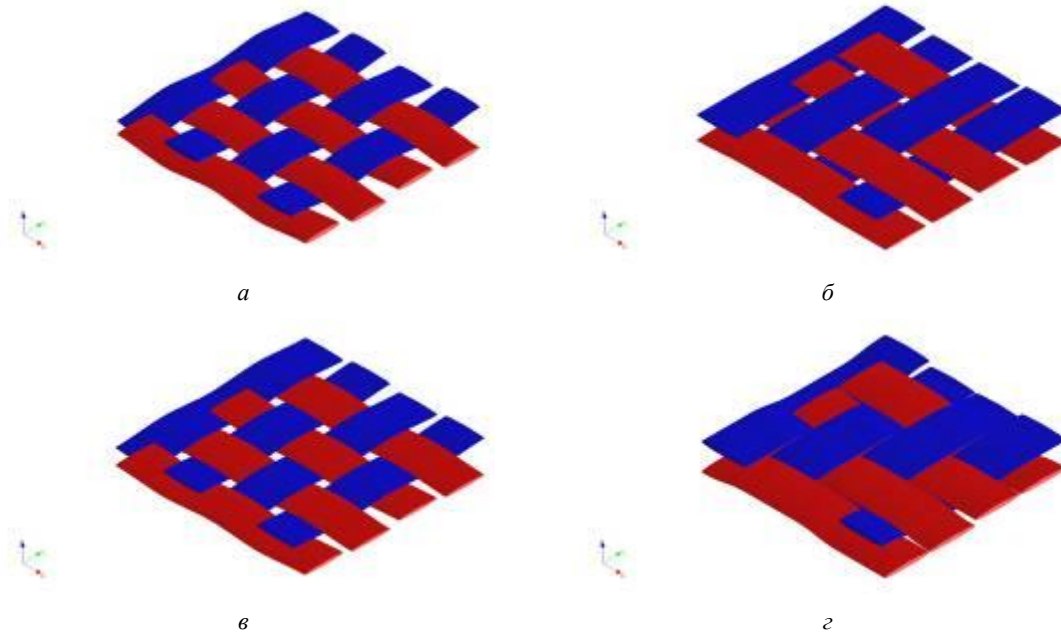


Рис. 3. Репрезентативные ячейки: *a* – углеткань 200 г/м², 3К, плейн; *б* – углеткань 200 г/м², 3К, твил 2/2; *в* – стеклоткань 200 г/м², плейн; *г* – стеклоткань 200 г/м², твил 2/2

Fig. 3. Representative cells: *a*) a carbon fabric 200 g/m², 3K, plain; *b*) a carbon fabric 200 g/m², 3K, twill 2/2; *c*) a glass fabric 200 g/m², plain; *g*) a glass fabric 200 g/m², twill 2/2

Таблица 5

Результаты вычисления инженерных констант (первая пластина)

Table 5

Results of calculating engineering constants (the first plate)

Модель или метод вычисления	Обозначение инженерной константы					
	E_{11} , ГПа	E_{33} , ГПа	ν_{12}	ν_{13}	G_{12} , ГПа	G_{23} , ГПа
Reuss	5,53	5,53	0,377	0,377	2,01	2,01
Voigt	118,85	118,85	0,259	0,259	47,21	47,21
Hashin – Shtrikman (bottom)	7,52	7,52	0,355	0,355	2,78	2,78
Hashin – Shtrikman (top)	87,87	87,87	0,380	0,380	31,83	31,83
ROM	52,46	5,92	0,304	–	1,81	–
MROM	52,79	6,6	0,304	–	2,21	–
Halpin – Tsai	53,05	7,11	0,304	–	3,74	–
Chamis	53,62	8,25	0,304	0,630	2,63	2,53
Hashin – Rosen	–	–	0,299	–	2,89	–
Cristensen	51,83	4,67	0,299	0,585	2,89	2,89
Mori – Tanaka	53,43	9,13	0,041	0,457	2,69	2,57
Double Inclusion	53,63	9,53	0,042	0,453	2,90	2,74
Bridge	51,50	9,53	0,304	–	8,14	–
FEM	51,75	8,92	0,041	0,457	2,62	2,47
Experimental	53,3±10,97	–	–	–	–	–

Таблица 6

Результаты вычисления инженерных констант (вторая пластина)

Table 6

Results of calculating engineering constants (the second plate)

Модель или метод вычисления	Обозначение инженерной константы					
	E_{11} , ГПа	E_{33} , ГПа	ν_{12}	ν_{13}	G_{12} , ГПа	G_{23} , ГПа
Reuss	6,66	6,66	0,38	0,38	2,42	2,42
Voigt	142,07	142,07	0,26	0,26	56,47	56,47
Hashin – Shtrikman (bottom)	9,51	9,51	0,35	0,35	3,52	3,52
Hashin– Shtrikman (top)	112,08	112,08	0,39	0,39	40,27	40,27
ROM	62,43	6,73	0,294	–	2,09	–
MROM	62,79	7,461	0,294	–	2,61	–
Halpin – Tsai	63,17	8,21	0,29	–	4,90	–
Chamis	63,74	9,35	0,29	0,61	3,04	2,90
Hashin – Rosen	–	–	0,29	–	3,69	–
Cristensen	61,93	5,73	0,29	0,56	3,69	3,69
Mori – Tanaka	63,56	10,44	0,04	0,45	3,13	2,97
Double Inclusion	63,86	11,04	0,04	0,44	3,45	3,23
Bridge	61,46	11,04	0,29	–	9,62	–
FEM	63,78	10,77	0,04	0,44	3,25	3,27
Experimental	60,1±11,96	–	–	–	–	–

Таблица 7

Результаты вычисления инженерных констант (третья пластина)

Table 7

Results of calculating engineering constants (the third plate)

Модель или метод вычисления	Обозначение инженерной константы					
	E_{11} , ГПа	E_{33} , ГПа	ν_{12}	ν_{13}	G_{12} , ГПа	G_{23} , ГПа
Reuss	5,42	5,42	0,377	0,377	1,97	1,97
Voigt	116,10	116,10	0,259	0,259	46,11	46,11
Hashin– Shtrikman (bottom)	7,33	7,33	0,355	0,355	2,71	2,71
Hashin – Shtrikman (top)	85,23	85,23	0,379	0,379	30,90	30,90
ROM	15,63	5,64	0,343	–	1,73	–
MROM	16,02	6,43	0,343	–	2,08	–
Halpin – Tsai	16,08	6,55	0,343	–	3,63	–
Chamis	16,60	7,58	0,343	0,755	2,43	2,16
Hashin – Rosen	–	–	0,342	–	2,82	–
Cristensen	15,03	4,44	0,342	0,570	2,82	2,82
Mori – Tanaka	16,36	7,40	0,142	0,200	2,38	2,38
Double Inclusion	16,46	7,62	0,146	0,436	2,59	2,48
Bridge	14,75	7,62	0,343	–	7,58	–
FEM	16,6	7,19	0,140	0,197	2,30	2,26
Experimental	15,6±3,23	–	–	–	–	–

Таблица 8

Результаты вычисления инженерных констант (четвертая пластина)

Table 8

Results of calculating engineering constants (the fourth plate)

Модель или метод вычисления	Обозначение инженерной константы					
	E_{11} , ГПа	E_{33} , ГПа	ν_{12}	ν_{13}	G_{12} , ГПа	G_{23} , ГПа
Reuss	6,46	6,46	0,377	0,377	2,35	2,35
Voigt	138,57	138,57	0,258	0,258	55,07	55,07
Hashin – Shtrikman (bottom)	9,16	9,16	0,351	0,351	3,39	3,39
Hashin – Shtrikman (top)	108,21	108,21	0,390	0,390	38,93	38,93
ROM	18,14	6,30	0,342	–	1,96	–
MROM	18,14	6,30	0,34	–	1,96	–
Halpin – Tsai	18,69	7,40	0,342	–	4,69	–
Chamis	19,20	8,42	0,342	0,767	2,75	2,38
Hashin – Rosen	–	–	0,341	–	3,55	–
Cristensen	17,59	5,19	0,341	0,555	3,55	3,55
Mori – Tanaka	18,96	8,32	0,137	0,193	2,69	2,69
Double Inclusion	19,16	8,64	0,143	0,434	2,99	2,84
Bridge	17,27	8,64	0,342	–	8,76	–
FEM	19,09	8,54	0,14	0,20	2,81	2,87
Experimental	18,4±3,51	–	–	–	–	–

4. Сопоставление результатов экспериментального и расчетного определения эффективных характеристик упругих свойств композитов

В данном разделе представлено сравнение результатов вычисления инженерных констант E_{11} , E_{33} , G_{12} , G_{23} , ν_{21} и ν_{31} для четырех материалов с использованием рассматриваемых моделей и методов с имеющимися экспериментальными данными. Сопоставление осуществляется в характерном для CF/EP- и GF/EP-композитов диапазоне изменения относительного объема армирующего компонента (от 0,4 до 0,6).

Анализ вычисленных значений инженерных констант для всех исследованных композитов (см. табл. 5–8) еще раз подтвердил сделанный во многих работах вывод о том, что модель Рейсса не применима для оценки характеристик упругих свойств в направлении армирования, а модель Фойгта не применима для оценки характеристик упругих свойств в направлении поперек армирования. Поэтому в дальнейшем сопоставлении результатов экспериментального и расчетного определения характеристик упругих свойств модели Рейсса и Фойгта не используются.

4.1. Сопоставление значений продольного модуля Юнга (Longitudinal Young's modulus) E_{11}

Зависимости продольного модуля упругости E_{11} от относительного объема армирующего компонента для четырех рассматриваемых материалов представлены на рис. 4. Сопоставление графиков зависимостей свидетельствует об их согласованности. Для первого CF/EP композита график зависимости, полученный FEM, при $V^f > 0,46$ лежит несколько ниже других кривых. При этом следует отметить, что зависимости для вычисления E_{11} в моделях ROM, MROM, Chamis, Halpin – Tsai и Bridging совпадают. Результаты вычисления E_{11} с использованием всех рассматриваемых моделей и методов не противоречат экспериментальным данным – вычисленные значения лежат в доверительном интервале этой случайной величины (доверительная вероятность 0,95).

Из-за отсутствия экспериментальных данных для исследуемых материалов результаты вычисления значений инженерных констант E_{33} , G_{12} , G_{23} , ν_{21} , и ν_{31} сравниваются только между собой, т.е. сравниваются значения, вычисленные с использованием различных моделей и методов.

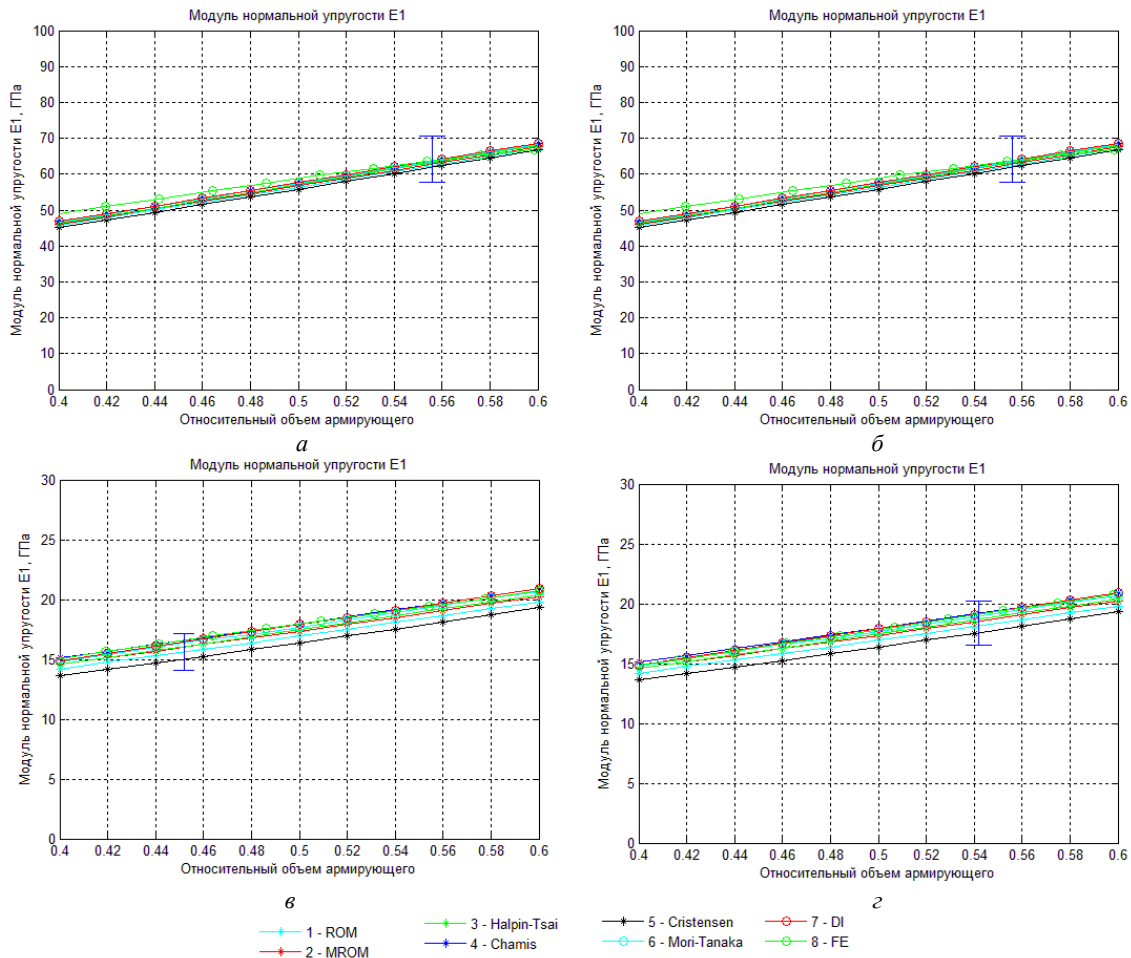


Рис. 4. Зависимости продольного модуля упругости E_{11} от относительного объема армирующего компонента: а – первый материал; б – второй; в – третий; г – четвертый

Fig. 4. Dependences of the longitudinal elastic modulus E_{11} on the relative volume Reinforcing component: a) is the first material; b) is the second one; c) is the third one; d) is the fourth one

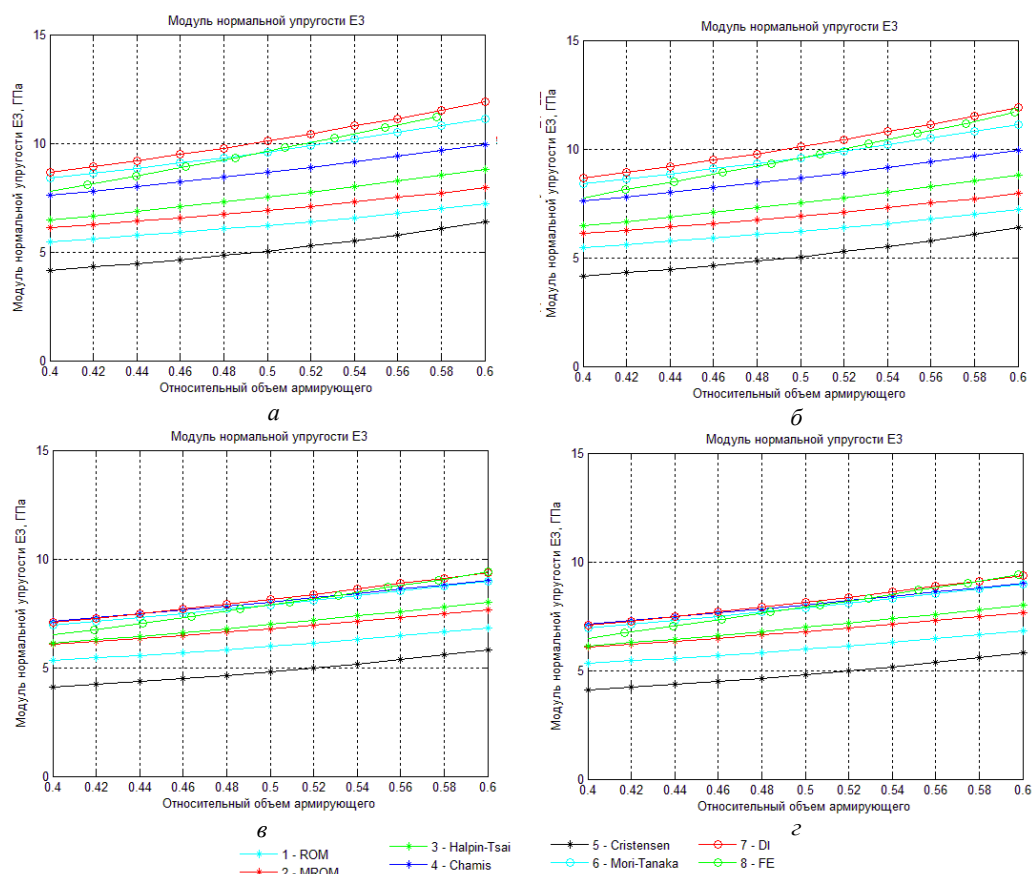


Рис. 5. Зависимости модуля упругости E_{33} от относительного объема армирующего компонента: а – первый материал; б – второй; в – третий; г – четвертый

Fig. 5. Dependences of the elastic modulus E_{33} on the relative volume reinforcing component: a) is the first material; b) is the second one; c) is the third one; d) is the fourth one

4.2. Сопоставление значений продольного модуля Юнга (Longitudinal Young's modulus) E_{33}

Зависимости продольного модуля упругости E_{33} от относительного объема армирующего компонента для четырех рассматриваемых материалов представлены на рис. 5. Сопоставление графиков зависимостей свидетельствует об их плохой согласованности. Для всех четырех материалов максимальные значения модуля дает модель двойного включения, минимальные значения – модель Кристенсена. Расхождение максимальных и минимальных значений превышает 60%. Достаточно близкие значения получены с использованием моделей Мори – Танака (Mori – Tanaka), двойного включения (Double Inclusion) и метода конечных элементов (FEM), а также модели Чамиса (Chamis). Диапазон разброса результатов расчета модуля упругости E_{33} для CF/EP композитов больше, чем для GF/EP-композитов во всем диапазоне изменения V^f .

4.3. Сопоставление значений модуля сдвига (Shear modulus) G_{12}

Зависимости модуля сдвига G_{12} от относительного объема армирующего компонента для четырех рассматриваемых материалов представлены на рис. 6. Сопоставление графиков зависимостей свидетельствует о

том, что для всех четырех материалов модель MROM дает завышенные результаты, модели MROM и Halpin – Tsai занижают результаты. Для GF/EP-композитов модель Кристенсена так же, как и модель MROM, завышает значения модуля сдвига, но в меньшей степени. Расхождение между полученными значениям модуля сдвига повышается с увеличением относительного объема армирующего компонента.

4.4. Сопоставление значений модуля сдвига (Shear modulus) G_{23}

Зависимости модуля сдвига G_{23} от относительного объема армирующего компонента для четырех рассматриваемых материалов представлены на рис. 7. Сопоставление графиков зависимостей свидетельствует об их удовлетворительной согласованности при значениях $V^f < 0,5$. При больших значениях относительного объема армирующего компонента расхождение между полученными значениям модуля сдвига увеличивается до величин, превышающих 15%. Лучше согласованы результаты вычислений, полученные для CF/EP-композитов. Следует заметить, что модели Рейсса, Фойгта, Хашина – Штрикмана, ROM, MROM и модели Хэल्पина – Цая не позволяют вычислить все инженерные константы рассматриваемых композитов.

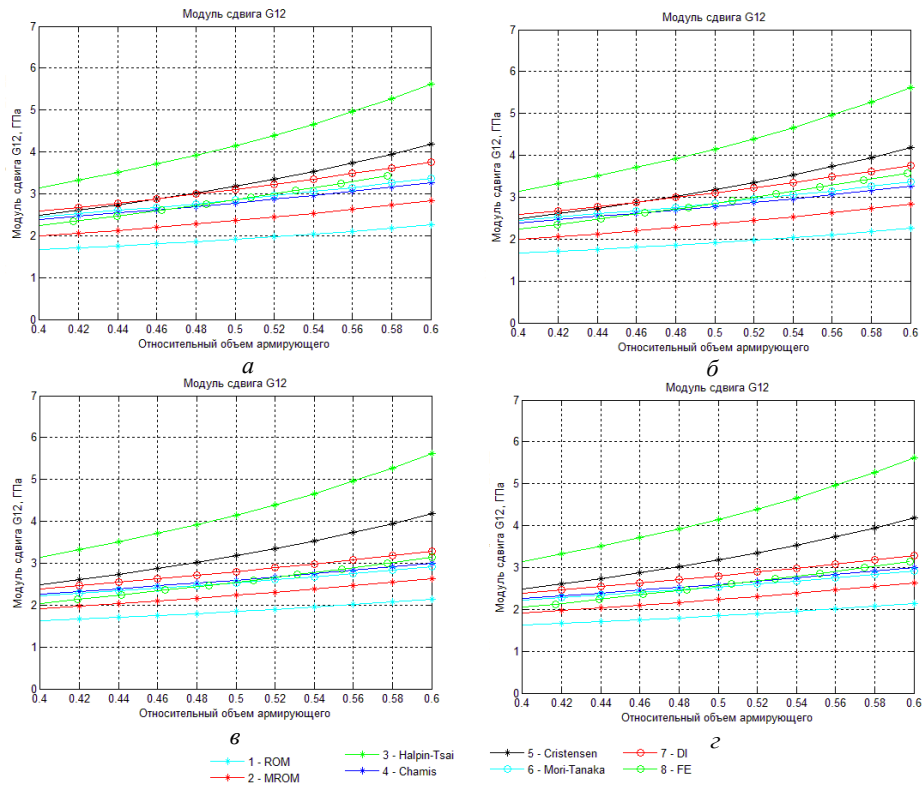


Рис. 6. Зависимости модуля сдвига G_{12} от относительного объема армирующего компонента: a – первый материал; b – второй; $в$ – третий; $г$ – четвертый

Fig. 6. Dependences of shear modulus G_{12} on the relative volume Reinforcing component: $a)$ is the first material; $b)$ is the second one; $c)$ is the third one; $d)$ is the fourth one

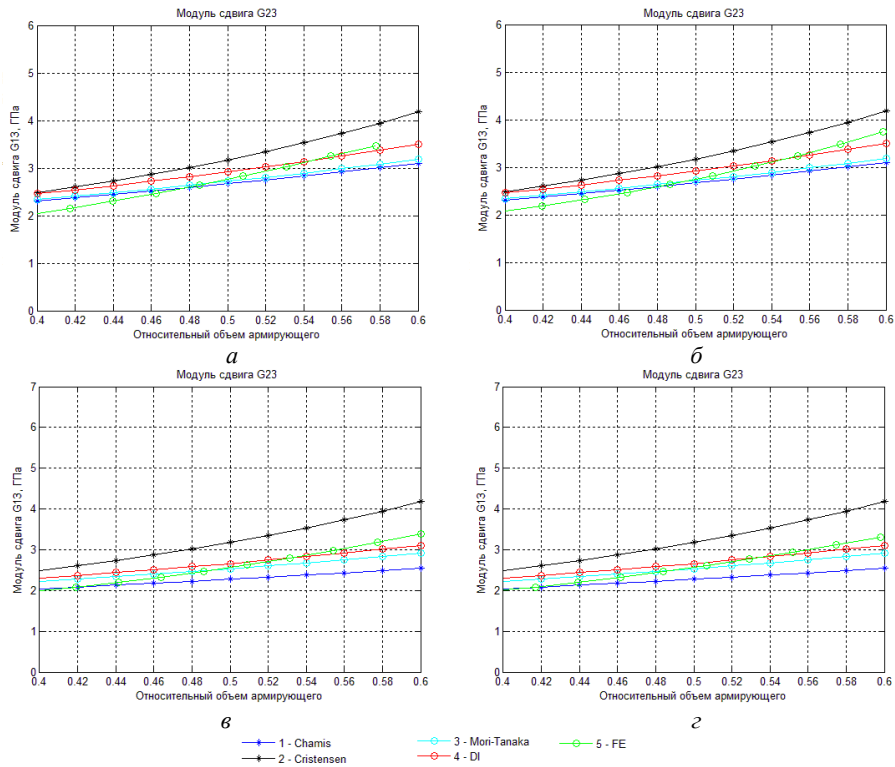


Рис. 7. Зависимости модуля сдвига G_{23} от относительного объема армирующего компонента: a – первый материал; b – второй; $в$ – третий; $г$ – четвертый

Fig. 7. Dependences of shear modulus G_{23} on the relative volume Reinforcing component: $a)$ is the first material; $b)$ is the second one; $c)$ is the third one; $d)$ is the fourth one

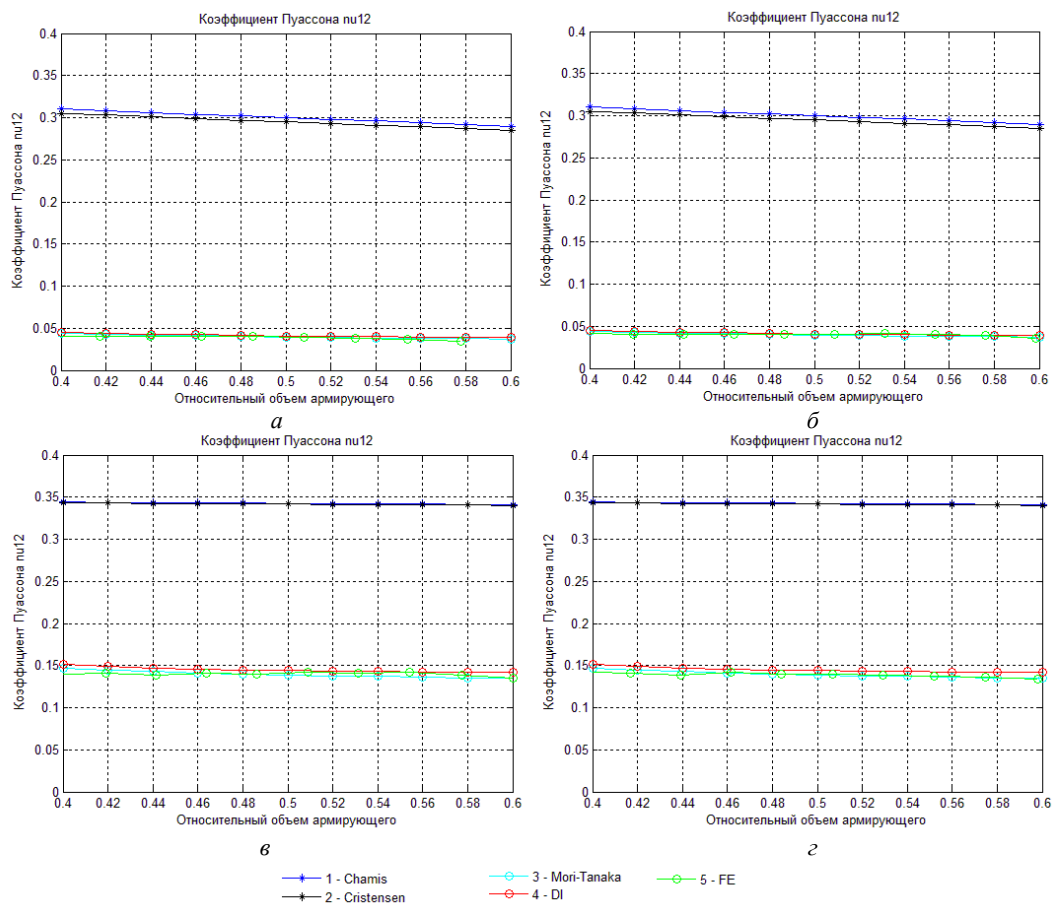


Рис. 8. Зависимости коэффициента Пуассона ν_{12} от относительного объема армирующего компонента: a – первый материал; b – второй; $в$ – третий; $г$ – четвертый

Fig. 8. Dependences of Poisson's ratio ν_{12} on the relative volume Reinforcing component: a) is the first material; b) is the second one; c) is the third one; d) is the fourth one

4.5. Сопоставление значений коэффициента Пуассона (MajorPoisson's ratio) ν_{12}

Зависимости коэффициента Пуассона ν_{12} от относительного объема армирующего компонента для четырех рассматриваемых материалов представлены на рис. 8. Графики зависимостей, полученные с использованием моделей ROM, MROM, Хэльпина – Цая и Чамиса, образуют одну группу хорошо согласованных кривых, а кривые, полученные с использованием моделей Мори – Танака, двойного включения и методом конечных элементов, – вторую группу. Расхождение между вычисленными значениям коэффициента Пуассона между этими группами превышает 200 %. Следует заметить, что в моделях ROM, MROM, Хэльпина – Цая и Чамиса для вычисления значений коэффициента Пуассона ν_{12} используется единая зависимость.

Заключение

В работе оценены существующие модели и методы, используемые для вычисления эффективных характеристик упругих свойств полимерных слоистых композитов, путем сравнения результатов вычислений, полу-

ченных различными методами, между собой, а также с результатами экспериментального определения упругих свойств четырех CF/EP и GF/EP Woven-композитов. Эти композиты различались материалом волокон, плетением тканей и объемным содержанием армирующего компонента. При вычислении инженерных констант использовалось большинство известных аналитических микромеханических моделей, а также применялся метод конечных элементов.

Анализ результатов вычисления показал, что все аналитические модели и численные методы показывают достаточно хорошее соответствие значений продольного модуля Юнга E_{11} . Полученные с использованием всех рассматриваемых моделей и методов значения модуля Юнга не противоречат экспериментальным данным – вычисленные значения лежат в доверительном интервале этой случайной величины.

Результаты вычисления модуля поперечной упругости E_{33} свидетельствуют об их плохой согласованности. Максимальные значения модуля дает модель двойного включения, минимальные значения – модель Кристенсена. Достаточно близкие значения получены с использованием моделей Мори – Танака, двойного включения и метода конечных элементов, а также модели Чамиса.

Результаты вычисления модуля сдвига G_{12} и G_{23} менее согласованы, чем продольного модуля Юнга E_{11} для всех рассматриваемых материалов. Модель MROM дает завышенные значения модуля сдвига G_{12} , модели MROM и Хэल्पина – Цая занижают результаты вычислений. Результаты вычисления модуля сдвига G_{23} свидетельствуют об их удовлетворительной согласованности при значениях $V^f < 0,5$. Лучше согласованы результаты вычислений, полученные для CF/EP-композитов.

Результаты вычисления коэффициента Пуассона ν_{12} также менее согласованы, чем продольного модуля Юнга E_{11} для всех рассматриваемых материалов. Графики, полученные с использованием моделей ROM, MROM, Хэल्पина – Цая и Чамиса образуют одну группу хорошо согласованных кривых, а кривые, полученные с использованием моделей Мори – Танака, двойного включения и методом конечных элементов, – вторую группу.

Следует заметить, что результаты вычисления всех инженерных констант, полученные с использованием моделей Мори – Танака, двойного включения, Чамиса и метода конечных элементов, показывают достаточно хорошую согласованность. Также следует заметить, что эти модели, в отличие от моделей Рейсса, Фойгта, Хашина – Штрикмана, ROM, MROM и модели Хэल्पина – Цая, позволяют вычислить все инженерные константы слоистых композитов.

Библиографический список

- Voigt W. Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten Isotroper Körper // Wied. Ann. – 1889. – Vol. 38. – P. 573–587.
- Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1929. – No. 9. – P. 49–58.
- Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1963. – Vol. 11, no. 2. – P. 127–140.
- Победра Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та. 1984. – 336 с.
- Comparative Review Study on Elastic Properties Modeling for Unidirectional Composite Materials / R. Younes, A. Hallal, F. Fardoun, F.H. Chehade // Composite Materials Book 1 Chapter August. – 2012. DOI: 10.5772/50362 <http://dx.doi.org/10.5772/50362>
- Halpin J.C., Kardos J.L. The Halpin-Tsai equations: A review // Polymer Engineering and Science. – 1976. – Vol. 16, no. 5.
- Chamis C.C. Mechanics of composite materials: past, present, and future // Journal of Composites Technology and Research. – 1989. – No. 11. – P. 3–14.
- Hashin Z., Rosen B.W. The elastic moduli of fiber reinforced materials // Journal of Applied Mechanics, Trans ASME. – 1964. – No. 31. – P. 223–232.
- Christensen R.M. A critical evaluation for a class of micromechanics models // Journal of Mechanics and Physics of Solids. – 1990. – Vol. 38, no. 3. – P. 379–404.
- Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metall. – 1973. – No. 21. – P. 571–574.

Использование метода конечных элементов для вычисления значений продольного модуля Юнга E_{11} для первого CF/EP-композита при $V^f > 0,5$ дало заниженные значения. Возможной причиной этого могло явиться низкое качество конечно-элементной сетки для композитов, имеющих большой относительный объем армирующего компонента.

Основными возможными направлениями дальнейшей работы по повышению достоверности определения эффективных характеристики полимерных слоистых композитов из угле- и стеклотканей являются:

- увеличение объема экспериментальных данных, которые могут быть использованы для оценки существующих и перспективных методов вычисления эффективных характеристик;
- совершенствование методов вычисления эффективных характеристик слоистых композитов, использующих как метод асимптотического осреднения [4, 16], так и метод конечных элементов [17–22];
- учет при вычислении эффективных характеристик действительной структуры композита, включая технологические дефекты и искажения структуры слоистого композита, обусловленные укладкой ткани на криволинейную поверхность [40–42];
- вычисление эффективных характеристик упругих свойств совместно с характеристиками разрушения.

- Doghri I. Mechanics of deformable solids. Linear, nonlinear, analytical and computational aspects. – Springer, Berlin, 2000.
- Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. – 1957. – Vol. 241. – P. 376–396.
- Nemat-Nasser S. and Hori M. Micromechanics: overall properties of heterogeneous solids. – Elsevier Science, 1993.
- Huang Z.M. Simulation of the mechanical properties fibrous composites by the bridging micromechanics model // Composites Part A. – 2001. – Vol. 32. – P. 143–172.
- Huang Z.M. Micromechanical prediction of ultimate strength of transversely isotropic fibrous composites // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38. – P. 4147–4172.
- Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах // Математические задачи механики композиционных материалов. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
- Nou N., Efendiev Y. Multiscale Finite Element Methods: Theory and Applications. B. Springer, 2009. 241 p.
- Shurina E.P., Kutischeva A.Y. Numerical Determination of the Effective Elasticity Tensor of an Heterogeneous Solid // 14th International Scientific - Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE-2018) – 44894: Proceedings. – Novosibirsk, 2018. – Vol. 1, part 4. – P. 294–297.
- Finite element modeling of a multi-physics poro-elastic problem in multiscale media / M.I. Eпов, E.P. Shurina, N.B. Itkina, A.U. Kutischeva, S.I. Markov // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 352. – P. 1–22.
- Шурина Э.П., Кутищева А.Ю. Вычисление эффективного тензора упругости гетерогенных сред с включениями //

Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. – 2018. – Т. 1, № 8. – С. 59–63.

21. Abdulle A. The Finite Element Heterogeneous Multiscale Method: a computational strategy for multiscale PDEs // *Multiple scales problems in Biomathematics, Mechanics, Physics and Numerics*. – 2009. – Vol. 31.

22. Baydoun M., Fries T.P. Crack propagation criteria in three dimensions using the XFEM and an explicit-implicit crack description // *International Journal of Fracture*. – 2012. – Vol. 178, no. 1-2. – P. 51–70.

23. Белов Д.А., Боровков А.И., Пальмов В.А. Новый метод восстановления микронапряжений в гомогенизированных композитах // *Научно-технические ведомости. СПбГПУ*. – 2008. – № 6. – С. 50–57.

24. Соловьев А.Н., Зиборов Е.Н., Шевцов С.Н. Определенные упругие свойства армированных композиционных материалов на основе конечно-элементного моделирования // *Наука Юга России (Вестник Южного научного центра)*. – 2016. – Т. 12, № 2. – С. 3–10.

25. Kasiviswanathan V., Arockiarajan A. Analytical, numerical and experimental studies on effective properties of layered (2-2) multiferroic composites // *Sensors and Actuators*. – 2015. – Vol. 236. – P. 380–393.

26. Vilchevskaya E., Sevostianov I. Effective elastic properties of a particulate composite with transversely isotropic matrix // *International Journal of Engineering Science*. – 2015. – Vol. 94. – P. 139–149.

27. Экспериментально-теоретическое исследование механического поведения 3D композитов при квазистационарном разрушении / М.В. Цепенников, А.А. Стром, И.А. Повышев, О.Ю. Сметанников // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2016. – № 2. – С. 143–158. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.10

28. Lomov S.V., Ivanov D.S., Verpoest I. Meso-FE modelling of 3-axial braided composites // *Proceedings of 8th international conference on textile composites*. – Nottingham, 2006, October. – P. 16–18.

29. Цепенников М.В., Повышев И.А., Сметанников О.Ю. Численная модель разрушения конструкций из тканых композиционных материалов // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная математика и механика*. – 2012. – № 10. – С. 225.

30. Comparative Review Study on Elastic Properties Modeling for Unidirectional Composite Materials / R. Younes, A. Hallal, F. Fardoun, F.H. Chehade // *Composites and Their Properties, Chapter 17*. – 2012.

31. Kouznetsova V., Geers M.G.D., Brekelmans W.A.M. Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme // *International journal for numerical methods in engineering*. – 2002. – Vol. 54. – P. 1235–1260. DOI: 10.1002/nme.541

References

1. Voigt W. Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten Isotroper Körper. *Wied. Ann*, 1889, vol. 38, pp. 573–587.

2. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1929, no. 9, pp. 49–58.

3. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1963, vol.11, no. 2, pp. 127–140.

32. Композиционные материалы: справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

33. Муйземнек А.Ю., Савицкий В.Я., Нестеров С.А. Особенности подготовки исходных данных для построения микромеханических моделей слоистых пластиков // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. – Пенза: ИИЦ ПГУ. – 2015. – № 1. – С. 152–162.

34. Муйземнек А.Ю. Савицкий В.Я. Технологическое обеспечение изготовления изделий из слоистых пластиков, армированных волокнами из стекла и углерода // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки*. – Пенза: ИИЦ ПГУ. – 2015. – № 2. – С. 171–181.

35. Богомолов А.И., Муйземнек А.Ю., Карташова Е.Д. Модели сопротивления деформированию и разрушению дискретно-тканевых преград при ударном нагружении // *Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки*. – 2018. – № 2. – С. 154–167.

36. Компьютерное моделирование сопротивления деформированию и разрушения дискретно-тканевых оболочек бронешлема при высокоскоростном ударе / И.Е. Жуков, А.В. Милляев, А.Ю. Муйземнек, А.А. Котосов // *Актуальные проблемы защиты и безопасности: сб. тр. XX Всерос. науч.-практ. конф.*, 3–6 апреля 2017 года. – 2017, Т. 2. – С. 143–148.

37. ГОСТ 25.601–80. Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний композиционных материалов с полимерной матрицей (композитов). Метод испытаний плоских образцов на растяжение при нормальной и повышенной температурах.

38. Huang Z.M. Micromechanical prediction of ultimate strength of transversely isotropic fibrous composites // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – Vol. 38. – P. 4147–4172.

39. Shan H.Z., Chou T.W. Transverse elastic moduli of unidirectional fiber composites with fiber/matrix interfacial debonding // *Composites Science and Technology*. – 1995. – Vol. 53. – P. 383–391.

40. Карташова Е.Д., Муйземнек А.Ю. Технологические дефекты полимерных слоистых композиционных материалов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки*. – 2017. – № 2. – С. 79–89.

41. Карташова Е.Д., Муйземнек А.Ю. Влияние технологических отклонений расположения армирующего в полимерном слоистом композиционном материале на сопротивление деформированию и разрушению // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки*. – 2017. – № 3 (43). – С. 134–145.

42. Компьютерное моделирование драпировки ткани в процессе производства слоистых композитов / Е.Д. Карташова, А.А. Косова, А.А. Желудкова, А.Ю. Муйземнек // *Информационные технологии в науке и образовании. Проблемы и перспективы. (МСНПК-2017)*. – 2017. – С. 325–327.

4. Pobedrja B.E. *Mehanika kompozicionnyh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Izd-vo Mosk. un-ta, 1984, 336 p.

5. Younes R., Hallal A., Fardoun F. and Chehade F.H. Comparative Review Study on Elastic Properties Modeling for Unidirectional Composite Materials. *Composite Materials Book 1 Chapter August*, 2012. DOI: 10.5772/50362

6. Halpin J.C., Kardos J.L. The Halpin-Tsai equations: A review. *Polymer Engineering and Science*, 1976, vol. 16, no. 5.

7. Chamis C.C. Mechanics of composite materials: past, present, and future. *Journal of Composites Technology and Research ASTM*, 1989, no.11, pp. 3–14.
8. Hashin Z, Rosen B.W. The elastic moduli of fiber reinforced materials. *Journal of Applied Mechanics, Trans ASME*, 1964, no. 31, pp. 223-232.
9. Christensen R.M. A critical evaluation for a class of micromechanics models. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1990, vol. 38, no. 3, pp. 379-404.
10. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 1973, no. 21, pp. 571-574.
11. Doghri I. Mechanics of deformable solids. *Linear, nonlinear, analytical and computational aspects*. Springer, Berlin, 2000.
12. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1957, vol. 241, pp 376-396.
13. Nemat-Nasser S. and Hori M. Micromechanics: overall properties of heterogeneous solids. *Elsevier Science*, 1993.
14. Huang Z.M. Simulation of the mechanical properties fibrous composites by the bridging micromechanics model. *Composites Part A*, 2001, vol. 32, pp. 143–172.
15. Huang Z.M. Micromechanical prediction of ultimate strength of transversely isotropic fibrous composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, pp. 4147-4172.
16. Bahvalov N.S., Panasenko G.P. Osrednenie processov v periodicheskikh sredah. Matematicheskie zadachi mehaniki kompozitsionnykh materialov [Averaging processes in periodic environments. Mathematical problems of mechanics of composite materials]. *Moscow, Nauka*, 1984, 352 p.
17. Nou N., Efendiev Y. Multiscale Finite Element Methods: Theory and Applications. B. *Springer*, 2009. 241 p.
18. Shurina E.P., Kutischeva A.Y. Numerical Determination of the Effective Elasticity Tensor of an Heterogeneous Solid. *14th International Scientific - Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE-2018) - 44894: Proceedings*. Novosibirsk, 2018, vol. 1, part 4, pp. 294-297.
19. Epov M.I., Shurina E.P., Itkina N.B., Kutischeva A.U., Markov S.I. Finite element modeling of a multi-physics poroelastic problem in multiscale media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, vol. 352, pp. 1-22.
20. Shurina Je.P., Kutishheva A.Ju. Vychislenie jeffektivnogo tenzora uprugosti geterogennykh sred s vkljuchenijami [Calculation of the effective elasticity tensor of heterogeneous media with inclusions]. *High-performance computing systems and technologies*, 2018, vol. 1, no. 8, pp. 59-63.
21. Abdulle A. The Finite Element Heterogeneous Multiscale Method: a computational strategy for multiscale PDEs. *Multiple scales problems in Biomathematics, Mechanics, Physics and Numerics*, 2009, vol. 31.
22. Baydoun M., Fries T.P. Crack propagation criteria in three dimensions using the XFEM and an explicit-implicit crack description. *International Journal of Fracture*, 2012, vol. 178, no. 1-2, pp. 51-70.
23. Belov D.A., Borovkov A.I., Pal'mov V.A. Novyj metod vosstanovlenija mikronaprjazhenij v gomogenizirovannykh kompozitah [A new method for the recovery of the micro-strains in a homogenised composites]. *Nauchno-tehnicheskie vedomosti. SPbGPU – Scientific and technical statements. SPbPU*, 2008, no. 6. pp. 50-57.
24. Solov'ev A.N., Ziborov E.N., Shevcov S.N. Opredelenie uprugih svojstv armirovannykh kompozitsionnykh materialov na osnove konechno-jelementnogo modelirovanija [Determination of elastic properties of reinforced composite materials based on finite element modeling]. *Nauka Juga Rossii (Vestnik Juzhnogo nauchnogo centra) – Science of the South of Russia (Bulletin of the southern scientific center)*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 3-10.
25. Kasiviswanathan V., Arockiarajan A. Analytical, numerical and experimental studies on effective properties of layered (2-2) multiferroiccomposites. *Sensors and Actuators*, 2015, vol. 236, pp. 380–393.
26. Vilchevskaya E., Sevostianov I. Effective elastic properties of a particulate composite with transverselyisotropic matrix. *International Journal of Engineering Science*, 2015, vol. 94, pp. 139–149.
27. Tsepennikov M.V., Strom A.A., Povyshev I.A., Smetannikov O.Yu. Theoretical-experimental study of mechanical behavior in 3D composites under quasi-steady damage. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 2, pp. 143-158. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.10.
28. Lomov S.V., Ivanov D.S., Verpoest I. Meso-FE modelling of 3-axial braided composites. // Proceedings of 8th international conference on textile composites. Nottingham, 2006, October. pp. 16–18.
29. Tsepennikov M.V., Povyshev I.A., Smetannikov O.Yu. Numerical model of destruction of structures made of woven composite materials. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2012, no. 10, pp. 225.
30. Younes R., Hallal A., Fardoun F., Chehade F.H. Comparative Review Study on Elastic Properties Modeling for Unidirectional Composite Materials". *Composites and Their Properties, Chapter 17*. 2012
31. Kouznetsova V., Geers M.G.D., Brekelmans W.A.M. Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International journal for numerical methods in engineering*, 2002, vol. 54, pp. 1235–1260. doi: 10.1002/nme.541.
32. Kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Composite materials: Reference] / V.V. Vasil'ev, V.D. Protasov, V.V. Bolotin et al.; Pod obshh. red. V.V. Vasil'eva, Ju.M. Tarnopol'skogo. Moscow, Mashinostroenie, 1990. 512 p.
33. Muyzemnek A.Yu., Savitskiy V.Ya., Nesterov S.A. Osobennosti podgotovki ishodnykh dannykh dlja postroenija mikromechanicheskikh modelej sloistykh plastikov [Features of preparing initial data for construction of micromechanical models of layered plastics]. *Models, systems, networks in economics, engineering, nature ans society*. Penza State University, 2015, no. 1, pp, 152-162.
34. Muyzemnek A.Yu., Savitskiy V.Ya. Technological maintenance of manufacturing of products from layered plastics reinforced with fibres from glass and carbon. *University proceedings. Volga region. Technical science*, 2015, no. 2, pp, 171-181.
35. Bogomolov A.I., Muyzemnek A.Yu., Kartashova E.D. Models of resistance to deformation and destruction of discrete-tissue overcomes under shock loading. *University proceedings. Volga region. Technical science*, 2018, no. 2, pp, 154-167.
36. Zhukov I.E., Miljaev A.V., Muyzemnek A.Yu., Kotosov A.A. Komp'yuternoe modelirovanie soprotivlenija deformirovaniju i razrushenija diskretno-tkanevykh obolochek broneshlema pri vysokoskorostnom udare [Computer simulation of strain resistance and fracture of discrete-fabric shells of an armored helmet under high-speed impact]. *Sbornik trudov XX Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Aktual'nye problemy zashhity i bezopasnosti» 3-6 aprelja 2017 goda*. (Current problems of protection and security: Proceedings of the Twentieth All-Russian Scientific and Practical Conference). Sankt-Peterburg, 2017, pp. 143-148.

37. GOST 25.601-80 Raschety i ispytaniya na prochnost'. Metody mehanicheskikh ispytaniy kompozitsionnykh materialov s polimernoj matricej (kompozitov). Metod ispytaniy ploskih obrazcov na rastjazhenie pri normal'noj i povyshennoj temperaturah [GOST 25.601-80 Calculations and strength tests. Methods of mechanical testing of composite materials with a polymer matrix (composites). Method for testing flat samples for tensile strength at normal and elevated temperatures].

38. Huang Z.M. Micromechanical prediction of ultimate strength of transversely isotropic fibrous composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, pp. 4147-4172.

39. Shan H.Z., Chou T.W. Transverse elastic moduli of unidirectional fiber composites with fiber/matrix interfacial debonding. *Composites Science and Technology*, 1995, vol. 53, pp. 383-391.

40. Kartashova E.D., Muzyemnek A.Yu. Technological defects of polymeric layered composite materials. *University proceedings. Volga region. Technical science*. Penza State University, 2017, no. 2, pp. 79-89.

41. Kartashova E.D., Muzyemnek A.Yu. The influence of technological deviations of the reinforcement's location in a polymeric layered composite material on resistance to deformation and destruction. *University proceedings. Volga region. Technical science*. Penza State University, 2017, no. 3 (43), pp. 134-145.

42. Kartashova E.D., Kosova A.A., Zheludkova A.A., Muzyemnek A.Yu. Komp'yuternoe modelirovanie drapirovki tkani v processe proizvodstva sloistykh kompozitov [Computer simulation of fabric drapery in the production of layered composites]. *Penza, Informacionnye tehnologii v nauke i obrazovanii. Problemy i perspektivy. (MSNPK-2017) (Information technologies in science and education. Problems and prospects)*. 2017, pp. 325-327.