



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.10

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНО-ЗАЩЕМЛЕННОЙ ТОЛСТОЙ ПЛАСТИНЫ

С.О. Папков

Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 20 октября 2020 г.
Принята: 12 мая 2021 г.
Опубликована: 12 июля 2021 г.

Ключевые слова:

консольно-защемленная пластина, теория Рейснера – Миндлина, колебания, собственные частоты, собственные формы, аналитическое решение, бесконечная система линейных уравнений.

АННОТАЦИЯ

В работе впервые представлено аналитическое решение задачи о свободных колебаниях консольно-защемленной толстой ортотропной пластины. Данная задача является достаточно громоздкой для использования точных методов теории упругости, в связи с чем для ее решения разрабатывались методы на основе вариационного подхода. В статье предлагается использовать метод суперпозиции для построения общего решения уравнений колебаний пластины в виде ряда по частным решениям, полученным на основе разделения переменных. При этом частные решения по одной из координат выбираются в форме тригонометрических функций специального вида (модифицированная тригонометрическая система). Построенное решение, в отличие известных в литературе решений на основе вариационного подхода, точно удовлетворяет уравнениям колебаний. Использование модифицированной тригонометрической системы функций позволяет получить единообразные выкладки для четных и нечетных форм колебаний и уменьшить число граничных условий на сторонах пластины с 12 до 9, при этом 5 из 9 граничных условий также выполняются точно. Структура представленного решения такова, что на границе пластины каждая из кинематических или силовых характеристик пластины представляется в виде суммы двух рядов – тригонометрического ряда и ряда по гиперболическим функциям. Относительно неопределенных коэффициентов рядов, представляющих решение, из оставшихся граничных условий, получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Сходимость решения бесконечной системы по методу редукции исследуется численно. Приведены примеры численной реализации, на основе полученного решения выполнены численные исследования спектра собственных частот консольно-защемленной толстой пластины, как при вариации упругих характеристик материала, так и при вариации геометрических параметров.

© ПНИПУ

© Папков Станислав Олегович – д.ф.-м.н., доц., зав. каф., e-mail: stanislav.papkov@gmail.com, ID: [0000-0001-8624-0846](https://orcid.org/0000-0001-8624-0846).

Stanislav O. Papkov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Department, e-mail: stanislav.papkov@gmail.com, ID: [0000-0001-8624-0846](https://orcid.org/0000-0001-8624-0846).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

VIBRATIONS OF A CANTILEVERED THICK PLATE

S.O. Papkov

Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 October 2020

Accepted: 12 May 2021

Published: 12 July 2021

Keywords:

cantilevered plate, Reissner – Mindlin theory, vibrations, natural frequencies, natural shape modes, analytical solution, infinite system of linear equations.

ABSTRACT

It has been for the first time that an analytical solution to the problem of free vibrations of a cantilevered thick orthotropic plate is presented. This problem is quite cumbersome for using the exact methods of the theory of elasticity; therefore, methods based on the variational approach were developed to solve it. The paper suggests using the superposition method to construct a general solution of the vibration equations of a plate in the series form of particular solutions obtained with the help of a variables separation. The particular solutions of one of the coordinates are built in the form of trigonometric functions of a special type (modified trigonometric system). The constructed solution, in contrast to the solutions known in the literature on the basis of the variational approach, accurately satisfies the equations of vibrations. The use of a modified trigonometric system of functions makes it possible to obtain uniform formulas for even and odd vibration shapes and to reduce the quantity of boundary conditions on the plate sides from twelve to nine ones, while five of the nine boundary conditions are also accurately satisfied. The structure of the presented solution on the plate boundary is such that, each of the kinematic or force characteristics of the plate is represented as a sum of two series, i.e. a trigonometric series and a series in hyperbolic functions. Remaining boundary conditions make it possible to obtain an infinite system of linear algebraic equations with respect to the unknown coefficients of the series representing the solution. The convergence of the solution by the reduction method of the infinite system is investigated numerically. Examples of the numerical implementation are given; numerical studies of the spectrum of natural frequencies of the cantilevered thick plate were carried out based on the obtained solution, both with varying elastic characteristics of the material and with varying geometric parameters.

© PNRPU

Введение

Проблема колебаний консольно-защемленных пластин относится к одной из наиболее давних задач механики деформированного твердого тела. Элементы в форме консольно-защемленных по одному из краев прямоугольных пластин можно встретить во многих технических и строительных конструкциях, они являются неотъемлемыми элементами зданий, авиационного и автомобильного транспорта, различных приборов. По этой причине первые работы, посвященные проблеме колебаний подобных пластин, в рамках теории тонких пластин относятся к середине XX в. Young [1], используя произведение балочных функций в качестве базиса метода Релея – Ритца, одним из первых получил достаточно точные верхние оценки собственных частот колебаний изотропной квадратной консольно-защемленной пластины. В работах [2, 3] для решения той же проблемы было предложено использовать метод, основанный на вариационном принципе Рейснера. Заметим, что при этом подходе граничные условия на свободных сторонах пластины выполнялись не полностью, в частности условия на сдвиговые силы игнорировались. В работах [4–6] развиты модификации метода Релея – Ритца для анализа колебаний прямоугольных изотропных пластин в случае консольного защемления, которые позволили с достаточной точностью найти первые собственные частоты пластины и построить собственные формы колебаний. Можно заметить, что во всех упомянутых работах используются методы, основанные на вариационном подходе.

Однако, как известно, в ряде прикладных задач теория тонких пластин зачастую не позволяет адекватно описать структурный элемент, что привело к развитию теорий толстых пластин, в частности теории Рейснера – Миндлина [7]. Одно из первых теоретических и экспериментальных исследований колебаний толстых консольно-защемленных пластин представлено в [8]. В работе Lim и др. [9] был развит метод Ритца для анализа колебаний толстых изотропных пластин для ряда классических граничных условий, в том числе для консольного защемления. В качестве базиса метода Ритца авторами выбирается тригонометрическая система функций, обеспечивающая как выполнение граничных условий, так и достаточно быструю сходимость метода. Метод Ритца и его модификации остаются основой для теоретического анализа консольно-защемленных пластин и на сегодняшний день. Среди недавних работ можно отметить работы Liew и др. [10], где получены собственные частоты колебаний на основе $rb-2$ метода Релея – Ритца, в работе Cheung и Zhou [11] в качестве базиса метода Релея – Ритца предлагается взять статические балочные функции. Вариационный DSC – element method был предложен [12] для анализа свободных колебаний толстых пластин при различных граничных условиях. В работе [13] строится решение задачи о колебаниях консольно-защемленной пластины на основе вариационного подхода применительно к трехмерным уравнениям теории упругости.

На основе аналитических решений [14] в работах [15–17] развит Dynamic Stiffness method для колебаний

изотропных толстых пластин. В статье [18] развит асимптотический подход к анализу высокочастотных колебаний прямоугольных пластин при различных граничных условиях. Для получения численного решения исследуемой задачи в [19, 20] используется метод конечных разностей, развитый с использованием теории степенных рядов. Численный подход на основе метода конечных разностей и метода конечных элементов также можно найти в работах [21–24]. В статье [25] авторы фактически используют метод суперпозиции для сведения задачи о колебаниях консольно-защемленной изотропной тонкой пластины к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В представленной статье на основе подхода [26–28] предлагается аналитическое решение задачи о колебаниях консольно-защемленной толстой ортотропной пластины. В отличие от предыдущих работ, посвященных колебаниям консольно-защемленной толстой пластины, построенное решение точно удовлетворяет разрешающим уравнениям колебаний. Выполнение граничных условий приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов в общем решении.

1. Основные уравнения и структура общего решения задачи

Рассмотрим свободные колебания однородной толстой ортотропной пластины $\{(x, y) \in [-a; a] \times [-b; b]\}$ постоянной толщины h . Согласно гипотезе теории толстых пластин Рейснера – Миндлина [7] элемент пластины смещается в прямолинейном направлении относительно срединной поверхности пластины, что приводит к следующему представлению компонентов вектора смещений:

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u^0(x, y, t) + z\varphi_x^0(x, y, t), \\ V(x, y, z, t) &= v^0(x, y, t) + z\varphi_y^0(x, y, t), \\ W(x, y, z, t) &= w^0(x, y, t) \end{aligned} \tag{1}$$

В случае гармонических колебаний углы поворота $\varphi_x^0(x, y, t) = \varphi_x(x, y)e^{i\omega t}$, $\varphi_y^0(x, y, t) = \varphi_y(x, y)e^{i\omega t}$ и прогиб пластины $w^0(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}$ должны удовлетворять уравнениям колебаний толстой ортотропной пластины:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + k_6 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \tilde{k} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - k_4 \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \varphi_x \right) + \Omega_h^4 \varphi_x &= 0, \\ k_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + k_6 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + \tilde{k} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} - k_5 \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \varphi_y \right) + \Omega_h^4 \varphi_y &= 0, \\ k_4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + k_5 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \Omega^4 W &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Omega^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D_1}$, $\Omega_h^4 = \frac{h^2}{12} \Omega^4$ – частотные параметры;

$$k_2 = \frac{D_2}{D_1}, \quad k_4 = \frac{A_{44}}{D_1}, \quad k_5 = \frac{A_{55}}{D_1}, \quad k_6 = \frac{D_{66}}{D_1}, \quad \tilde{k} = \frac{D_{66} + D_{12}}{D_1}.$$

Упругие константы $D_1, D_2, D_{12}, D_{66}, A_{44}$ и A_{55} связаны с техническими константами (модулями Юнга E_1 и E_2 , модулями сдвига G_{12} и G_{13}, G_{23} , и коэффициентами Пуассона ν_{12} и ν_{21}) посредством соотношений

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{h^3 E_1}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_2 = \frac{h^3 E_2}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \\ D_{12} &= \frac{h^3 \nu_{12} E_2}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \\ D_{66} &= \frac{h^3 G_{12}}{12}; \quad A_{44} = khG_{13}; \quad A_{55} = khG_{23}. \end{aligned}$$

При этом граничные условия консольного защемления можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} x = -a: \quad W = \varphi_x = \varphi_y = 0, \\ x = a: \quad M_x = M_{xy} = Q_x = 0, \\ y = \pm b: \quad M_y = M_{xy} = Q_y = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где моменты и сдвиговые силы имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{M_x}{D_1} &= \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} + (\tilde{k} - k_6) \frac{\partial \varphi_y^0}{\partial y}; \quad \frac{M_y}{D_1} = (\tilde{k} - k_6) \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \varphi_y^0}{\partial y}; \\ \frac{M_{xy}}{D_1} &= k_6 \left(\frac{\partial \varphi_x^0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y^0}{\partial x} \right); \\ \frac{Q_x}{D_1} &= k_4 \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} + \varphi_x^0 \right); \quad \frac{Q_y}{D_1} = k_5 \left(\frac{\partial w^0}{\partial y} + \varphi_y^0 \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Четное решение относительно оси y (индекс $j=0$) или же нечетное решение по y ($j=1$) краевой задачи (2)–(3)

$$\begin{pmatrix} W \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^1 \begin{pmatrix} W_{kj} \\ \varphi_{x,kj} \\ \varphi_{y,kj} \end{pmatrix}$$

строится в форме суммы рядов с неопределенными коэффициентами X_{ln} и Y_{ln} по модифицированной тригонометрической системе функций $\{T_k(\alpha_{nk}x)\}$ и $\{T_j(\beta_{nj}y)\}$. Используя подход, представленный в статье [28], можно получить

$$\begin{aligned} W_{kj} &= \delta_{k0} (X_{1,0k} A_{1,0k} H_j(p_{1,0k} y) + X_{2,0k} A_{2,0k} H_j(p_{2,0k} y)) + \\ &+ \delta_{j0} (Y_{1,0k} E_{1,0j} H_k(q_{1,0j} x) + Y_{2,0k} E_{2,0j} H_k(q_{2,0j} x)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{l,nk} A_{l,nk} H_j(p_{l,nk} y) T_k(\alpha_{nk} x) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{l,nk} E_{l,nj} H_k(q_{l,nj} x) T_j(\beta_{nj} y); \\
 \Phi_{x,kj} = & \delta_{j0} (Y_{1,0k} H'_k(q_{1,0j} x) + Y_{2,0k} H'_k(q_{2,0j} x)) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{l,nk} B_{l,nk} H_j(p_{l,nk} y) T'_k(\alpha_{nk} x) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{l,nk} H'_k(q_{l,nj} x) T_j(\beta_{nj} y) \\
 \Phi_{y,kj} = & \delta_{k0} (X_{1,0k} H'_j(p_{1,0k} y) + X_{2,0k} H'_j(p_{2,0k} y)) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{l,nk} H'_j(p_{l,nk} y) T_k(\alpha_{nk} x) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{l,nk} G_{l,nj} H_k(q_{l,nj} x) T'_j(\beta_{nj} y), \quad (5)
 \end{aligned}$$

где $T_k(z) = (1-k)\cos z + k\sin z$; $H_k(z) = (1-k)\cosh z + k\sinh z$; δ_{mn} – символ Кронекера; $\alpha_{nk} = \frac{\pi}{a} \left(n - \frac{k}{2} \right)$; $\beta_{nj} = \frac{\pi}{b} \left(n - \frac{j}{2} \right)$.

Величины $q_{l,nj}$, $p_{l,nk}$ ($n=1, 2, \dots$) являются корнями ветви l следующих характеристических бикубических уравнений:

$$c_0 p^6 + c_1 p^4 + c_2 p^2 + c_3 = 0, \quad (6)$$

$$d_0 q^6 + d_1 q^4 + d_2 q^2 + d_3 = 0, \quad (7)$$

где

$$c_0 = k_2 k_5 k_6,$$

$$\begin{aligned}
 c_1 = & \alpha^2 \left(k_5 (\tilde{k}^2 - k_6^2) - k_2 (k_5 + k_4 k_6) \right) + \\
 & + \Omega_h^4 k_5 (k_2 + k_6) + \Omega^4 k_2 k_6 - k_2 k_4 k_5,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 = & \alpha^4 \left(k_4 (k_2 + k_6 - \tilde{k}^2) + k_5 k_6 \right) + \\
 & + \alpha^2 \left(\Omega^4 (\tilde{k}^2 - k_6^2) - k_5 \Omega_h^4 (1 + k_6) - k_2 (\Omega^4 + k_4 \Omega_h^4) + \right. \\
 & \left. + k_4 (2k_5 (k_6 + \tilde{k}) - k_6 \Omega_h^4) \right) + \\
 & + \Omega^4 \left(\Omega_h^4 (k_2 + k_6) - k_2 k_4 \right) + k_5 \left(\Omega_h^4 (\Omega_h^4 - k_4) - k_6 \Omega^4 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_3 = & -\alpha^6 k_4 k_6 + \alpha^4 (-k_4 k_5 + k_6 \Omega^4 + k_4 \Omega_h^4 (1 + k_6)) + \\
 & + \alpha^2 \left(\Omega^4 (k_5 + k_4 k_6 - \Omega_h^4) + \right. \\
 & \left. + \Omega_h^4 (k_4 k_5 - k_6 \Omega^4 - k_4 \Omega_h^4) \right) + \Omega^4 (\Omega_h^4 - k_4) (\Omega_h^4 - k_5);
 \end{aligned}$$

$$d_0 = k_4 k_6,$$

$$d_1 = \beta^2 \left(k_4 (\tilde{k}^2 - k_6^2 - k_2) - k_5 k_6 \right) + \Omega_h^4 k_4 (1 + k_6) + \Omega^4 k_6 - k_4 k_5,$$

$$\begin{aligned}
 d_2 = & \beta^4 \left(k_5 (k_2 + k_6 - \tilde{k}^2) + k_2 k_4 k_6 \right) + \\
 & + \beta^2 \left(2k_4 k_5 (k_6 + \tilde{k}) - \Omega^4 (k_2 + k_6^2 - \tilde{k}^2) - \right. \\
 & \left. - \Omega_h^4 (k_2 k_4 + k_5 + k_4 k_6 + k_5 k_6) \right) + \\
 & + \Omega^4 \left(\Omega_h^4 (1 + k_6) - k_5 - k_4 k_6 \right) + k_4 \Omega_h^4 (\Omega_h^4 - k_5), \\
 d_3 = & -\beta^6 k_2 k_5 k_6 + \beta^4 (-k_2 k_4 k_5 + k_2 k_6 \Omega^4 + k_5 \Omega_h^4 (k_2 + k_6)) + \\
 & + \beta^2 \left(\Omega^4 (k_2 k_4 + k_5 k_6 - k_2 \Omega_h^4) + \right. \\
 & \left. + \Omega_h^4 (k_4 k_5 - k_6 \Omega^4 - k_5 \Omega_h^4) \right) + \Omega^4 (\Omega_h^4 - k_4) (\Omega_h^4 - k_5).
 \end{aligned}$$

Для случая $n = 0$ уравнения (6), (7) вырождаются [28] в биквадратные уравнения вида

$$k_2 k_5 p_0^4 + (k_2 \Omega^4 + k_5 \Omega_h^4) p_0^2 + \Omega^4 (\Omega_h^4 - k_5) = 0, \quad (8)$$

$$k_4 q_0^4 + (\Omega^4 + k_4 \Omega_h^4) q_0^2 + \Omega^4 (\Omega_h^4 - k_4) = 0. \quad (9)$$

Заметим, что все представленные характеристические уравнения (6)–(9) допускают точное решение.

При этом значения величин $A_{l,nk}$, $E_{l,nj}$, $B_{l,nk}$ и $G_{l,nj}$, входящих в решение (5), могут быть выражены следующим образом для каждой ветви l характеристических уравнений:

$$A_{l,nk} = \frac{\tilde{k} k_5 p_{l,nk}^2 - k_4 (k_2 p_{l,nk}^2 - k_6 \alpha_{nk}^2 - k_5 + \Omega_h^4)}{p_{l,nk} (\tilde{k} k_5 p_{l,nk}^2 - \tilde{k} k_4 \alpha_{nk}^2 + k_4 k_5 + \tilde{k} \Omega^4)},$$

$$B_{l,nk} = \frac{k_5^2 p_{l,nk}^2 + (k_2 p_{l,nk}^2 - k_6 \alpha_{nk}^2 - k_5 + \Omega_h^4) (k_5 p_{l,nk}^2 - k_4 \alpha_{nk}^2 + \Omega^4)}{\alpha_{nk} p_{l,nk} (\tilde{k} k_5 p_{l,nk}^2 - \tilde{k} k_4 \alpha_{nk}^2 + k_4 k_5 + \tilde{k} \Omega^4)},$$

$$E_{l,nj} = \frac{\tilde{k} k_4 q_{l,nj}^2 - k_5 (q_{l,nj}^2 - k_6 \beta_{nj}^2 - k_4 + \Omega_h^4)}{q_{l,nj} (\tilde{k} k_4 q_{l,nj}^2 - \tilde{k} k_5 \beta_{nj}^2 + k_4 k_5 + \tilde{k} \Omega^4)},$$

$$G_{l,nj} = \frac{k_4^2 q_{l,nj}^2 + (q_{l,nj}^2 - k_6 \beta_{nj}^2 - k_4 + \Omega_h^4) (k_4 q_{l,nj}^2 - k_5 \beta_{nj}^2 + \Omega^4)}{q_{l,nj} \beta_{nj} (\tilde{k} k_4 q_{l,nj}^2 - \tilde{k} k_5 \beta_{nj}^2 + k_4 k_5 + \tilde{k} \Omega^4)},$$

$$A_{l,0k} = \frac{k_5 p_{l,0k}}{k_5 p_{l,0k}^2 + \Omega^4}; \quad E_{l,0j} = \frac{k_4 q_{l,0j}}{k_4 q_{l,0j}^2 + \Omega^4}.$$

2. Сведение к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

Прежде всего, можно заметить, что с учетом четности решения по переменной y , из 12 граничных условий (3) достаточно выполнить девять (граничные значения кинематических и силовых характеристик для сторон $y = b$ и $y = -b$ совпадают с точностью до знака). Далее, из данных 9 условий 5 условий можно выполнить тождественно, так как в этом случае на границе пластины соответствующая характеристика пластины представляются полными тригонометрическими рядами с неопределенными коэффициентами. Например, из условия $\varphi_x(-a, y) = 0$ и формул (5) получаем

$$\begin{aligned} & \varphi_{x,0,j}(-a, y) + \varphi_{x,1,j}(-a, y) = \\ & = -\delta_{j0} \left(Y_{1,00} H'_0(q_{1,0j}a) + Y_{2,00} H'_0(q_{2,0j}a) \right) + \\ & + \delta_{j0} \left(Y_{1,01} H'_1(q_{1,0j}a) + Y_{2,01} H'_1(q_{2,0j}a) \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{l,n0} H'_0(q_{l,nj}a) T_j(\beta_{nj}y) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{l,n1} H'_1(q_{l,nj}a) T_j(\beta_{nj}y) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, следуют соотношения между неизвестными коэффициентами $Y_{l,nk}$

$$\begin{aligned} -Y_{1,00} H'_0(q_{1,0j}a) - Y_{2,00} H'_0(q_{2,0j}a) + Y_{1,01} H'_1(q_{1,0j}a) + Y_{2,01} H'_1(q_{2,0j}a) = 0, \\ -\sum_{l=1}^3 Y_{l,n0} H'_0(q_{l,nj}a) + \sum_{l=1}^3 Y_{l,n1} H'_1(q_{l,nj}a) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме упомянутого граничного условия, аналогичным образом можно выполнить также условия $M_{xy} = Q_x = 0$ при $x = a$, если положить

$$\begin{aligned} & (q_{1,0j} E_{1,0j} - 1) (Y_{1,00} H'_0(q_{1,0j}a) + Y_{1,01} H'_1(q_{1,0j}a)) + \\ & + (q_{2,0j} E_{2,0j} - 1) (Y_{2,00} H'_0(q_{2,0j}a) + Y_{2,01} H'_1(q_{2,0j}a)) = 0, \\ & \sum_{l=1}^3 (q_{l,nj} G_{l,nj} + \beta_{nj}) (Y_{l,n0} H'_0(q_{l,nj}a) + Y_{l,n1} H'_1(q_{l,nj}a)) = 0, \quad (11) \\ & \sum_{l=1}^3 (q_{l,nj} E_{l,nj} - 1) (Y_{l,n0} H'_0(q_{l,nj}a) + Y_{l,n1} H'_1(q_{l,nj}a)) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, на сторонах пластины $y = \pm b$ можно точно выполнить условия $M_{xy} = Q_y = 0$, если для неизвестных $X_{l,nk}$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & X_{1,00} (p_{1,00} A_{1,00} - 1) H'_j(p_{1,00}b) + \\ & + X_{2,00} (p_{2,00} A_{2,00} - 1) H'_j(p_{2,00}b) = 0, \\ & \sum_{l=1}^3 X_{l,nk} (p_{l,nk} B_{l,nk} + \alpha_{nk}) H'_j(p_{l,nk}b) = 0, \quad (12) \\ & \sum_{l=1}^3 X_{l,nk} (p_{l,nk} A_{l,nk} - 1) H'_j(p_{l,nk}b) = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (10)–(12) позволяют явно выразить неизвестные коэффициенты $Y_{l,n1}$ через коэффициенты $Y_{l,n0}$, а неизвестные $X_{2,nk}, X_{3,nk}$ – через $X_{1,nk}$.

Действительно, введем для удобства новые неизвестные

$$y_{l,nk} = Y_{l,nk} H'_k(q_{l,nj}a) \text{ и } x_{l,nk} = X_{l,nk} H'_j(p_{l,nk}b), \quad (13)$$

а также матрицы, соответствующие левым частям систем (11), (12):

$$\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_{1,nj} E_{1,nj} - 1 & q_{2,nj} E_{2,nj} - 1 & q_{3,nj} E_{3,nj} - 1 \\ q_{1,nj} G_{1,nj} + \beta_{nj} & q_{2,nj} G_{2,nj} + \beta_{nj} & q_{3,nj} G_{3,nj} + \beta_{nj} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{nk} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{1,nk} A_{1,nk} - 1 & p_{2,nk} A_{2,nk} - 1 & p_{3,nk} A_{3,nk} - 1 \\ p_{1,nk} B_{1,nk} + \alpha_{nk} & p_{2,nk} B_{2,nk} + \alpha_{nk} & p_{3,nk} B_{3,nk} + \alpha_{nk} \end{pmatrix},$$

тогда из (10) и (11) получаем следующие соотношения:

$$y_{l,n1} = \frac{2\tilde{T}_{ll,n}}{\det \mathbf{T}_n} \sum_{i=1}^3 y_{i,n0} - y_{l,n0}, \quad (14)$$

$$x_{l,nk} = \frac{\tilde{S}_{ll,nk}}{\tilde{S}_{11,nk}} x_{1,nk} \quad (l = 2, 3), \quad (15)$$

где $\tilde{T}_{ll,n}$ и $\tilde{S}_{ll,nk}$ – алгебраические дополнения к элементам с индексами (l, l) соответственно матриц \mathbf{T}_n и \mathbf{S}_{nk} .

Аналогичные соотношения можно найти и для случая $n = 0$:

$$\begin{pmatrix} y_{1,01} \\ y_{2,01} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_0 \begin{pmatrix} y_{1,00} \\ y_{2,00} \end{pmatrix},$$

$$x_{2,00} = s_0 x_{1,00},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 &= \frac{1}{q_{1,0j} E_{1,0j} - q_{2,0j} E_{2,0j}} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -q_{1,0j} E_{1,0j} - q_{2,0j} E_{2,0j} + 2 & -2q_{2,0j} E_{2,0j} + 2 \\ 2q_{1,0j} E_{1,0j} - 2 & q_{1,0j} E_{1,0j} + q_{2,0j} E_{2,0j} - 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$s_0 = -\frac{p_{1,00} A_{1,00} - 1}{p_{2,00} A_{2,00} - 1}.$$

Таким образом, для решения поставленной задачи остается выполнить 4 граничных условия на сторонах пластины, используя неопределенные коэффициенты $y_{l,n0}$ ($l = 1, 2, 3$) и $x_{1,nk}$ ($k = 0, 1$). При этом структура представленного решения такова, что на границе пластины каждая из кинематических или силовых характеристик пластины представляется в виде суммы двух рядов – тригонометрического ряда и ряда по гиперболическим функциям. Используя схожесть разложения [29] на отрезке $t \in [-\tau; \tau]$ гиперболических функций

$\cosh qt$ по тригонометрическим функциям $\cos \frac{\pi nt}{\tau}$

и $\sinh qt$ по системе функций $\sin \frac{\pi(2n-1)t}{2\tau}$ согласно

$$\frac{H_k(qt)}{H'_k(qt)} = \frac{\delta_{k0}}{\tau q} + \frac{2q}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k} T_k\left(\frac{\pi}{\tau} \left(m - \frac{k}{2}\right) t\right)}{\frac{\pi^2}{\tau^2} \left(m - \frac{k}{2}\right)^2 + q^2},$$

получаем из краевых условий (3) бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов решения следующего вида:

$$\delta_{j_0} \left(\left(\frac{A_{1,00}}{p_{1,00}} + s_0 \frac{A_{2,00}}{p_{2,00}} \right) x_{1,00} + b \left(E_{1,0j} \text{Coth}_0(q_{1,0j}a) - T_{11,0} E_{1,0j} \text{Coth}_1(q_{1,0j}a) - T_{21,0} E_{2,0j} \text{Coth}_1(q_{2,0j}a) \right) y_{1,00} + b \left(E_{2,0j} \text{Coth}_0(q_{2,0j}a) - T_{12,0} E_{1,0j} \text{Coth}_1(q_{1,0j}a) - T_{22,0} E_{2,0j} \text{Coth}_1(q_{2,0j}a) \right) y_{2,00} + \sum_{k=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{nk} \sum_{l=1}^3 \frac{A_{l,nk} \tilde{S}_{1l,nk}}{p_{l,nk}} \right) = 0, \quad (16)$$

$$\delta_{j_0} \left(k^* (1 + s_0) x_{1,00} + b \left(q_{1,0j} \text{Coth}_0(q_{1,0j}a) + q_{1,0j} T_{11,0} \text{Coth}_1(q_{1,0j}a) + q_{2,0j} T_{21,0} \text{Coth}_1(q_{2,0j}a) \right) y_{1,00} + b \left(q_{2,0j} \text{Coth}_0(q_{2,0j}a) + q_{1,0j} T_{12,0} \text{Coth}_1(q_{1,0j}a) + q_{2,0j} T_{22,0} \text{Coth}_1(q_{2,0j}a) \right) y_{2,00} + \sum_{k=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \chi_{nk} \sum_{l=1}^3 \left(k^* - \frac{B_{l,nk} \alpha_{nk}}{p_{l,nk}} \right) \tilde{S}_{1l,nk} \right) = 0, \quad (17)$$

$$ak_2 \left(p_{1,00} \text{Coth}_j(p_{1,00}b) + s_0 p_{2,00} \text{Coth}_j(p_{2,00}b) \right) \times x_{1,00} + k^* \delta_{j_0} (y_{1,00} + y_{2,00}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+j} \sum_{l=1}^3 \left(k^* - k_2 \frac{\beta_{nj} G_{l,nj}}{q_{l,nj}} \right) y_{l,n0} = 0, \quad (18)$$

$$2 \left(\frac{A_{1,00} p_{1,00}}{\beta_{mj}^2 + p_{1,00}^2} + \frac{s_0 A_{2,00} p_{2,00}}{\beta_{mj}^2 + p_{2,00}^2} \right) x_{1,00} + 2 \sum_{k=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{nk} \sum_{l=1}^3 \frac{A_{l,nk} \tilde{S}_{1l,nk}}{\beta_{mj}^2 + p_{l,nk}^2} + b (-1)^{m+j} \sum_{l=1}^3 \left(E_{l,mj} \left(\text{Coth}_0(q_{l,mj}a) + \text{Coth}_1(q_{l,mj}a) \right) - \frac{2}{\det \mathbf{T}_n} \sum_{i=1}^3 E_{i,mj} \text{Coth}_1(q_{i,mj}a) \tilde{T}_{li,m} \right) y_{l,m0} = 0, \quad (19)$$

$$2 \left(\frac{1}{\beta_{mj}^2 + p_{1,00}^2} + \frac{s_0}{\beta_{mj}^2 + p_{2,00}^2} \right) x_{1,00} + 2 \sum_{k=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{nk} \sum_{l=1}^3 \frac{\tilde{S}_{1l,nk}}{\beta_{mj}^2 + p_{l,nk}^2} + b \frac{(-1)^{m+j}}{\beta_{mj}} \sum_{l=1}^3 \left(G_{l,mj} \left(\text{Coth}_0(q_{l,mj}a) + \text{Coth}_1(q_{l,mj}a) \right) - \frac{2}{\det \mathbf{T}_n} \sum_{i=1}^3 G_{i,mj} \text{Coth}_1(q_{i,mj}a) \tilde{T}_{li,m} \right) y_{l,m0} = 0, \quad (20)$$

$$2k^* \left(\frac{p_{1,00}^2}{\beta_{mj}^2 + p_{1,00}^2} + \frac{s_0 p_{2,00}^2}{\beta_{mj}^2 + p_{2,00}^2} \right) x_{1,00} + 2 \sum_{k=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \chi_{nk} \sum_{l=1}^3 \frac{p_{l,nk} \left(k^* p_{l,nk} - \alpha_{nk} B_{l,nk} \right) \tilde{S}_{1l,nk}}{\beta_{mj}^2 + p_{l,nk}^2} + b (-1)^{m+j} \sum_{l=1}^3 \left(\left(q_{l,mj} - k^* \beta_{mj} G_{l,mj} \right) E_{l,mj} \left(\text{Coth}_0(q_{l,mj}a) - \text{Coth}_1(q_{l,mj}a) \right) + \frac{2}{\det \mathbf{T}_n} \sum_{i=1}^3 \left(q_{i,mj} - k^* \beta_{mj} G_{i,mj} \right) \text{Coth}_1(q_{i,mj}a) \tilde{T}_{li,m} \right) \times y_{l,m0} = 0, \quad (21)$$

$$2k^* \delta_{j_0} \left(\frac{q_{1,0j}^2 y_{1,00}}{q_{1,0j}^2 + \alpha_{m0}^2} + \frac{q_{2,0j}^2 y_{2,00}}{q_{2,0j}^2 + \alpha_{m0}^2} \right) + a \sum_{l=1}^3 \left(k_2 p_{l,m0} - k^* \alpha_{m0} B_{l,m0} \right) \text{Coth}_j(p_{l,m0}b) \tilde{S}_{1l,m0} \chi_{m0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+j} \sum_{l=1}^3 \frac{q_{l,nj} \left(k^* q_{l,nj} - k_2 \beta_{nj} G_{l,nj} \right)}{\alpha_{m0}^2 + q_{l,nj}^2} y_{l,n0} = 0, \quad (22)$$

$$2k^* \delta_{j_0} \left(\left[\frac{q_{1,0j}^2 T_{11,0}}{q_{1,0j}^2 + \alpha_{m1}^2} + \frac{q_{2,0j}^2 T_{21,0}}{q_{2,0j}^2 + \alpha_{m1}^2} \right] y_{1,00} + \left[\frac{q_{1,0j}^2 T_{12,0}}{q_{1,0j}^2 + \alpha_{m1}^2} + \frac{q_{2,0j}^2 T_{22,0}}{q_{2,0j}^2 + \alpha_{m1}^2} \right] y_{2,00} \right) + a \sum_{l=1}^3 \left(k_2 p_{l,m1} - k^* \alpha_{m1} B_{l,m1} \right) \text{Coth}_j(p_{l,m1}b) \tilde{S}_{1l,m1} \chi_{m1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+j} \sum_{l=1}^3 \left(\frac{2}{\det \mathbf{T}_n} \sum_{i=1}^3 \frac{q_{i,nj} \left(k^* q_{i,nj} - k_2 \beta_{nj} G_{i,nj} \right)}{\alpha_{m1}^2 + q_{i,nj}^2} \tilde{T}_{li,n} - \frac{q_{l,nj} \left(k^* q_{l,nj} - k_2 \beta_{nj} G_{l,nj} \right)}{\alpha_{m1}^2 + q_{l,nj}^2} \right) y_{l,n0} = 0, \quad (23)$$

где $k^* = \tilde{k} - k_6$, $\text{Coth}_j(z) = \frac{H_j(z)}{H_j'(z)}$, $\chi_{nk} = \frac{(-1)^n x_{1,nk}}{\tilde{S}_{11,nk}}$.

3. Численные результаты

Для исследования и решения полученной бесконечной системы использовался пакет Mathematica. Согласно методу редукции полученная бесконечная система (16)–(23) сводилась к конечной системе относительно первых N неизвестных χ_{nk} и $y_{l,n0}$, при этом в расчетах удерживались первые $(5N + 3)$ уравнения системы в случае симметричных относительно оси Oy колебаний ($j = 0$) и $(5N + 1)$ уравнений в случае антисимметричных колебаний ($j = 1$). Определитель конечной системы служил в качестве дисперсионного уравнения для определения собственных частот колебаний, а нетривиальное решение – для определения собственных форм колебаний. В табл. 1 представлена сходимость метода редукции при увеличении порядка аппроксимирующей системы.

В табл. 2 приведены первые собственные частоты квадратной изотропной пластины в сравнении с результатами [10] и [12]. Заметим, что в [10] используется модифицированный вариационный подход (DSC метод), в работе [12] классический метод – Релея – Ритца. Полученные результаты оказываются в хорошем соответствии с данными [10] и [12], что позволяет сделать вывод об адекватности предложенного подхода.

На основе полученного решения проводились численные исследования спектра собственных частот консольно-зашемленной толстой пластины, как при вариации упругих характеристик материала, так и при вариации геометрических параметров.

Таблица 1

Сходимость метода редукции на первой собственной частоте $\Omega_1 = 0.9301$ для изотропной квадратной пластины при $\nu = 0,3$, $\kappa = 5/6$, $h/a = 0,1$

Table 1

Convergence of reduction method for the first fundamental natural frequency $\Omega_1 = 0.9301$ of the isotropic square plate with $\nu = 0.3$, $\kappa = 5/6$, $h/a = 0.1$

n	1	2	3	5
$Y_{1,n0}$ при $N = 10$	-0,32742	0,195743	-0,152986	-0,114373
$Y_{1,n0}$ при $N = 20$	-0,351037	0,209318	-0,164008	-0,124418
$Y_{1,n0}$ при $N = 40$	-0,357335	0,212983	-0,167122	-0,127549

Таблица 2

Первые собственные частоты $\tilde{\Omega} = \frac{4\Omega^2}{\pi^2}$ изотропной квадратной пластины при $\nu = 0,3$, $\kappa = 5/6$, $h/a = 0,1$

Table 2

First fundamental natural frequencies $\tilde{\Omega} = \frac{4\Omega^2}{\pi^2}$ of the isotropic square plate with $\nu = 0.3$, $\kappa = 5/6$, $h/a = 0.1$

	1	2	3	4	5	6	7	8
Представленное решение	0,3505	0,8170	2,0350	2,5839	2,8621	4,8172	5,4788	5,7741
[10]	0,3735	0,8403	2,0502	2,5997	2,8752	4,8285	5,4885	5,7860
[12]	0,3476	0,8168	2,0356	2,5836	2,8620	4,8162	5,4834	5,7769

В табл. 3 представлены первые десять собственных частот пластины из эпоксидного стекла при вариации ее толщины. Можно заметить, что при малой толщине пластины $h/a = 0.01$ собственные частоты колебаний в рамках теории Рейснера – Миндлина мало отличаются от соответствующих частот, вычисленных согласно теории тонких пластин. С увеличением толщины пластины различие между собственными значениями согласно теории толстых пластин и теории тонких пластин несколько увеличивается, но не превосходит 3 %.

Нетривиальное решение бесконечной системы (16)–(23) на собственной частоте колебаний позволяет построить согласно (5) собственные формы колебаний пластины. На рис. 1 представлены первые собственные формы колебаний квадратной консольно-защемленной пластины в случае ортотропного материала, представленного в табл. 3. Первая, третья и десятая формы колебаний соответствуют симметричным относительно оси Oy колебаниям (в приведенных формулах $j = 0$), вторая, пятая и седьмая формы колебаний – антисимметричным

колебаниям ($j = 1$). Сверхя узловые линии построенных собственных форм с известными в литературе формами для тонких пластин [30], можно заметить, что отличия незначительны.

Таблица 3

Первые собственные частоты консольно-защемленной квадратной пластины при $\kappa = 0,8601$ $E_1 = 60,7$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 12$ ГПа, $\nu_{12} = 0,23$, $\nu_{21} = 0,094$

Table 3

First fundamental natural frequencies of the cantilevered square plate with $\kappa = 0.8601$ $E_1 = 60.7$ GPa, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 12$ GPa, $\nu_{12} = 0.23$, $\nu_{21} = 0.094$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h/a = 0,01$	0,9363	1,3124	2,1443	2,3484	2,6147	3,2433	3,2674	3,9217	4,1035	4,4660
$h/a = 0,05$	0,9357	1,3080	2,1368	2,3417	2,6021	3,2202	3,2540	3,8955	4,0708	4,4362
$h/a = 0,10$	0,9346	1,2998	2,1212	2,3218	2,5725	3,1693	3,2197	3,8198	3,9877	4,3885

Заметим, что схожая ситуация наблюдается и для других граничных условий (например, полностью защемленной пластины и пластины со свободными краями [28]). Более того, соответствующие по номеру собственные формы в случае изотропного материала имеют тот же качественный характер, что и формы на рис. 1, количественные различия можно увидеть, например, на рис. 2, где представлены линии уровня первых двух собственных форм для ортотропного и изотропного материалов. Можно заметить, что в приведенном случае собственные формы колебаний почти совпадают.

Чтобы оценить, насколько ортотропные свойства материала влияют на спектр собственных значений консольно-защемленной пластины, рассмотрим пластину с защемлением по стороне $y = -b$ из того же материала $E_1 = 60,7$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 12$ ГПа, $\nu_{12} = 0,23$, $\nu_{21} = 0,094$, что и в предыдущих примерах. В этом случае материал уже оказывается более жестким в направлении, перпендикулярном защемленной стороне, что сказывается как на значениях собственных частот (табл. 4), так и на отвечающих им собственных формах колебаний (рис. 3 [PW2]).

Действительно, если первая частота колебаний в табл. 4 почти совпадает для обоих случаев защемления, то для второго типа защемления (по $y = -b$) собственные частоты лежат существенно выше. Кроме этого, меняется и четность ряда форм колебаний; так, четвертая и пятая моды колебаний являются антисимметричной и симметричной, в то же время при защемлении пластины по стороне $x = -a$ они соответственно симметричная и антисимметричная. На рис. 3 представлены вторая, третья, четвертая и пятая формы колебаний, соответствующих случаю защемления ортотропной пластины по стороне $y = -b$.

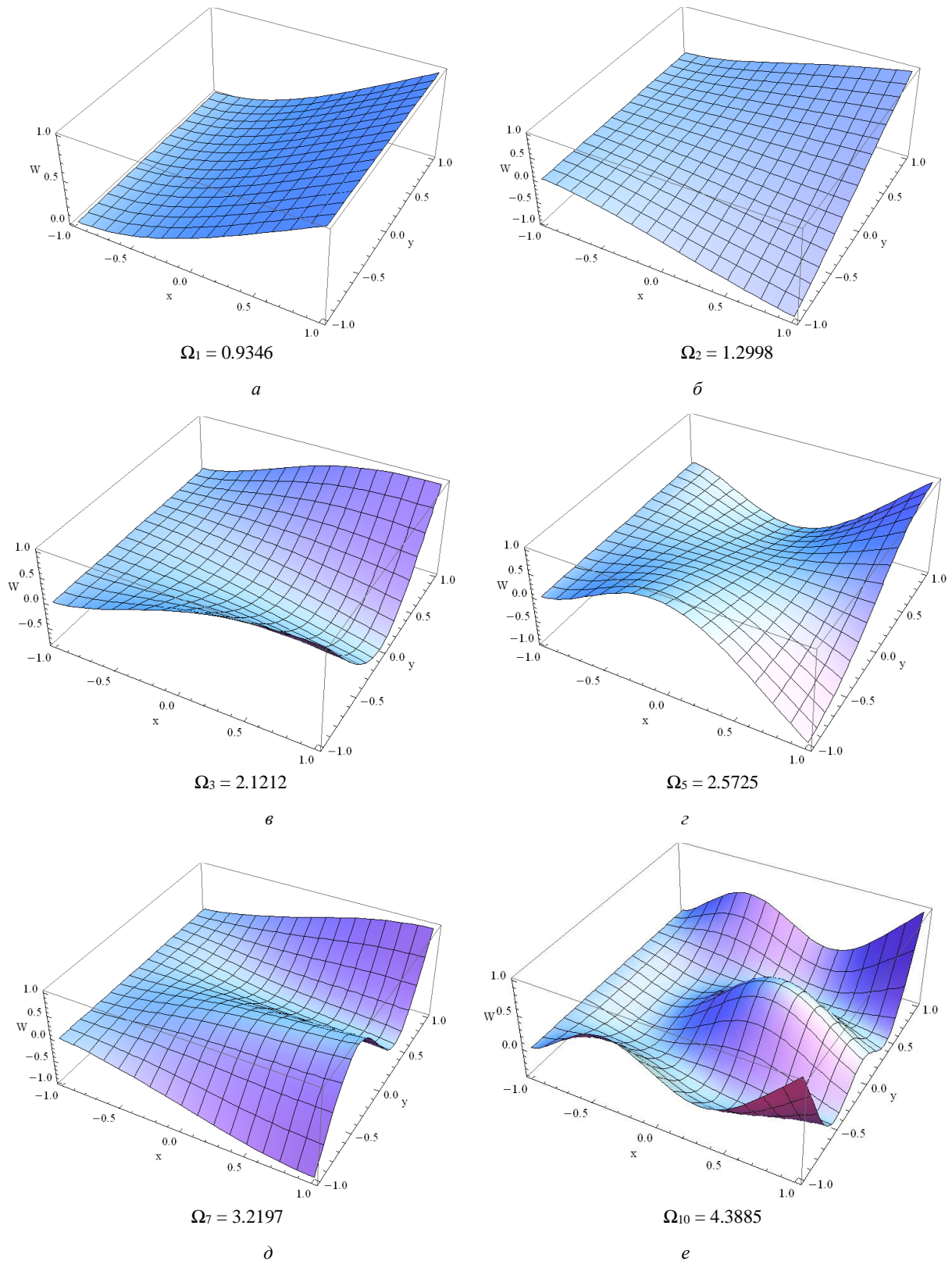


Рис. 1. Собственные формы колебаний консольно-закрепленной толстой пластины: *a*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е* – первая, вторая, третья, пятая, седьмая и десятая формы колебаний

Fig. 1. The natural modes of the cantilevered thick plate; (a), (b), (c), (d), (e), (f) are the first, second, third, fifth, seventh and tenth shape modes, respectively [IIW3]

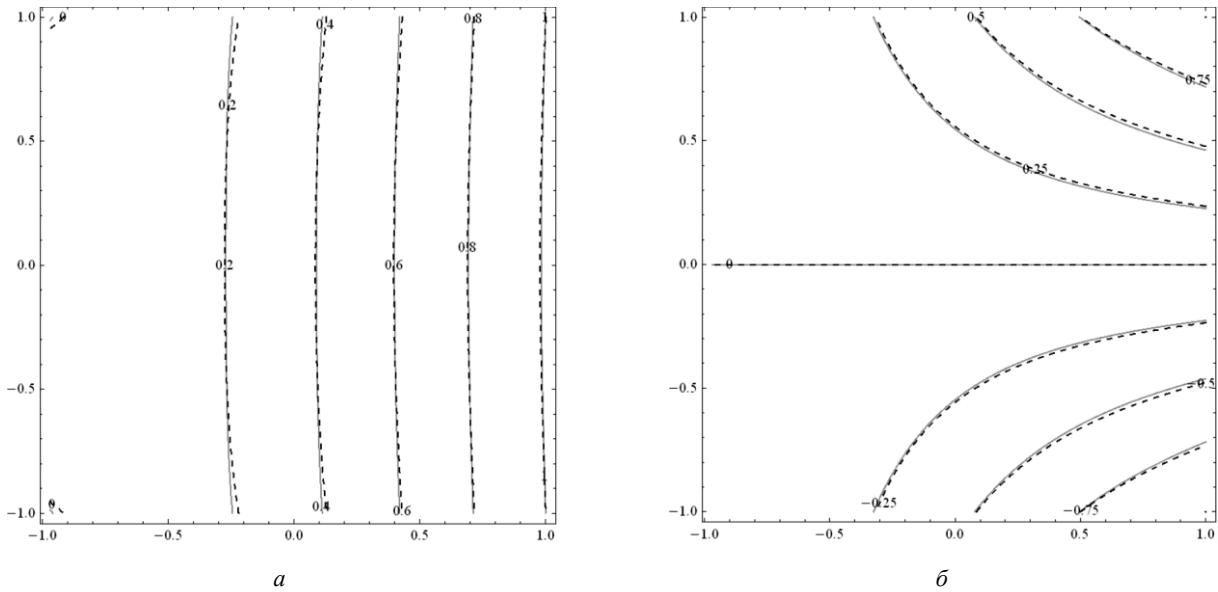


Рис. 2. Линии уровня собственных форм колебаний консольно-защемленной толстой пластины: *a*, *b* – первая и вторая формы колебаний (сплошная линия – ортотропный материал с данными из табл. 3, пунктирная линия – изотропный материал при $\nu = 0.3$)

Fig. 2. Level lines of natural vibration modes of the cantilevered thick plate; (a), (b) are the first and second shape modes (the solid line shows the orthotropic material with data from Table 3, the dotted line shows the isotropic material at $\nu = 0.3$)

Таблица 4

Первые собственные частоты консольно-защемленной толстой квадратной пластины ($E_1 = 60,7$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 12$ ГПа, $\nu_{12} = 0,23$, $\nu_{21} = 0,094$; $h/a = 0,10$) в случае защемления различных сторон пластины

Table 4

First fundamental natural frequencies of the cantilevered thick square plate for the case of different clamped sides ($\kappa = 0.8601$ $E_1 = 60.7$ GPa, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 12$ GPa, $\nu_{12} = 0.23$, $\nu_{21} = 0.094$)

	1	2	3	4	5
	0.9346	1.2998	2.1212	2.3218	2.5725
	0.9348	1.5301	2.3255	2.8626	3.0903

Таким образом, можно предположить, что при консольном защемлении пластины на спектр колебаний большее влияние оказывают упругие свойства материала в направлении, перпендикулярном защемленной стороне.

Заключение

Таким образом, в работе впервые на основе метода суперпозиции построено аналитическое решение задачи о свободных колебаниях консольно-защемленной ортотропной пластины. Данное решение, в отличие от вариационного подхода, точно удовлетворяет уравнениям колебаний, 5 из 9 граничных условий также выполнены

точно. Оставшиеся граничные условия приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, сходимость решения которой по методу редукции исследована численно. Решение, представленное в статье, имеет самостоятельное практическое значение, состоящее в том, что высокочастотные колебания консольно-защемленных пластин встречаются в различных прикладных задачах технического характера (микро- и нанoeлектронике, в задачах строительной механики, при моделировании технических систем, в геофизике и др.), также данные решения могут быть использованы для параметрической оптимизации, для анализа устойчивости к вибрации технических систем.

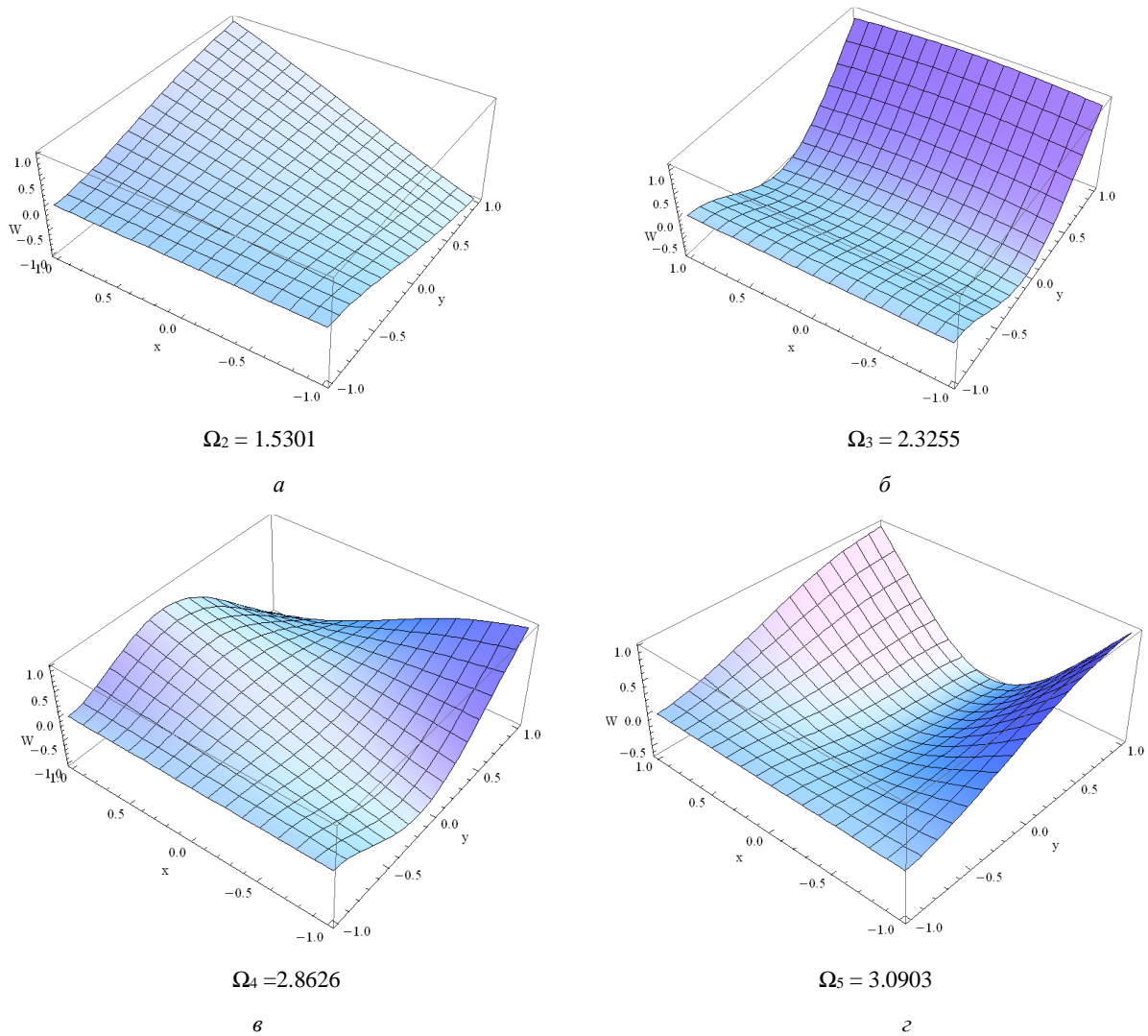


Рис. 3. Собственные формы колебаний консольно-зашемленной толстой пластины: а, б, в, г – вторая, третья, четвертая и пятая

Fig. 3. The natural modes of the cantilevered thick plate; (a), (b), (c), (d) are the second, third, fourth, fifth shape modes

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и города Севастополя в рамках научного проекта № 18-41-920001.

Библиографический список

1. Young D. Vibration of rectangular plates by the Ritz method // J. Appl. Mech. – 1950. Vol. 17, no 4. – P. 448–453.
2. Plass H.J., Gaines J.H., Newsom C.D. Application of Reissner’s variational principle to cantilever plate deflection and vibration problems // J. Appl. Mech. – 1962. – Vol. 29, no 1. – P. 127–135.
3. Austin R.N., Caughfield D.A., Plass H.J. Application of Reissner’s variational principle to the vibration analysis of square flat plates with various root support conditions // Developments in theoretical and applied mechanics. – N.Y.: Plenum press, 1963. – P. 1–24.
4. Barton M.V. Vibration of rectangular and skew cantilever plates // J. Appl. Mech. – 1951. – Vol. 18, no 1. – P. 129–134.
5. Martin A.I. On the vibration of a cantilever plate // Quart. J. Appl. Math. – 1956. – Vol. 9. – P. 94–102.

Acknowledgments

The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the city of Sevastopol within the framework of the scientific project No. 18-41-920001.

6. Claassen R.W., Thorne C.J. Vibrations of a rectangular cantilever plate // J. Aerospace Sci. – 1962. – Vol. 29, no 11. – P. 1300–1305.
7. Mindlin R. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates // ASME Journal Applied Mechanics. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38.
8. Plunkett R. Natural frequencies of uniform and non-uniform rectangular cantilever plates // J. Mech. Eng. Sci. – 1963. – Vol. 5, no 2. – P. 146–156.
9. Lim C. W., Liew K.M., Kitipornchai S. Numerical aspects for free vibration of thick Part I: Formulation and verification plates // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 1998. – Vol. 156. – P. 15–29.
10. Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S., Transverse vibration of thick rectangular plates – I. Comprehensive sets of bounda-

ry conditions // *Computers & Structures* – 1993. – Vol. 49(2). – P. 1–29.

11. Chung J.H., Zhou D. Vibration of moderately thick rectangular plates in terms of a set of static Timoshenko beam functions // *Computers & Structures*. – 2000. – Vol. 78(6). – P. 757–768.

12. Xiang Y., Lai S.K., Zhou L. DSC- element method for free vibration analysis of rectangular Mindlin plates // *Int. J. of Mech. Science*. – 2010. – Vol. 52. – P. 548–560.

13. Seok J., Tiersten H.F., Scarton H.A. Free vibrations of rectangular cantilever plates. Part I: out-of-plane motion // *Journal of Sound and Vibration* – 2004. – Vol. 271, no. 22. – P. 131–146.

14. Gorman D. J. Free vibration analysis of Mindlin plates with uniform elastic edge support by the superposition method // *Journal of Sound and Vibration*. – 1997. – Vol. 207, no. 3. – P. 335–350.

15. Kolarevic N., Nefovska-Danilovic M., Petronijevic M. Dynamic stiffness elements for free vibration analysis of rectangular Mindlin plate assemblies // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Vol. 359 – P. 84–106.

16. Shear deformable dynamic stiffness elements for a free vibration analysis of composite plate assemblies – Part I: Theory / M. Nefovska-Danilovic, N. Kolarevic, M. Marjanovic', M. Petronijevic // *Composite Structures*. – 2017. – Vol. 159. – P. 728–744.

17. Free vibration study of sandwich plates using a family of novel shear deformable dynamic stiffness elements: limitations and comparison with the finite element solutions / M. Marjanovic, N. Kolarevic, M. Nefovska-Danilovic, M. Petronijevic // *Thin-Walled Structures*. – 2016. – Vol. 107. – P. 678–694.

18. Иванова Е.А. Асимптотический и численный анализ высокочастотных свободных колебаний прямоугольных пластин // *МТТ*. – 1998. – № 2. – С. 163–174.

19. Usarov M. Dynamic Design of Thick Orthotropic Cantilever Plates with Consideration of Bimoments // *World Journal of Mechanics*. – 2016. – No. 6. – P. 341–356.

20. On the Simple and Mixed First-Order Theories for Plates Resting on Elastic Foundations / A.M. Zenkour, M.N.M. Allam,

M.O. Shaker, A.F. Radwan // *Acta Mechanica* – 2011. – Vol. 220. – P. 33–46.

21. Torabi K., Afshari H. Vibration analysis of a cantilevered trapezoidal moderately thick plate with variable thickness // *Engineering Solid Mechanics*. – 2017. – Vol. 5(1). – P. 71–92.

22. Huang C.S., Leissa A.W., Chang M.J. Vibrations of skewed cantilevered triangular, trapezoidal and parallelogram Mindlin plates with considering corner stress singularities // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2005. – Vol. 62. – P. 1789–1806.

23. Free vibration analysis of plates using least-square-based on finite difference method / M. Huang, X.O. Ma, T. Sakiyama, M. Matuda, C. Morita // *Journal of Sound and Vibration*. – 2005. – Vol. 288. – P. 931–955.

24. Nguyen-Xuan H., Liu G.R., Thai-Hoang C. An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner-Mindlin // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2010. – Vol. 199. – P. 471–489.

25. Sukhoterlin M., Baryshnikov S., Aksenov D. Free Vibration Analysis of Rectangular Cantilever Plates Using the Hyperbolic-Trigonometric Series // *American Journal of Applied Sciences*. – 2016. – Vol. 13 (12). – P. 1442–1451.

26. Papkov S.O. A new method for analytical solution of in-plane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems // *Journal of Sound and Vibration*. – 2016. – Vol. 369. – P. 228–245.

27. Papkov S.O., Banerjee J.R. A new method for free vibration and buckling analysis of rectangular orthotropic plates // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Vol. 339. – P. 342–358.

28. Papkov S.O. New analytical solutions for vibration problem of thick plates // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2019. – № 4. – P. 145–156.

29. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1981. – 800 с.

30. Leissa A.W. *Vibration of Plates (NASA SP-160)*. – Washington, DC: Government Printing office, 1969. – 353 p.

References

1. Young D. Vibration of rectangular plates by the Ritz method. *J. Appl. Mech.*, 1950, vol. 17, no 4, pp. 448 – 453.

2. Plass H.J., Gaines J.H., Newsom C.D. Application of Reissner's variational principle to cantilever plate deflection and vibration problems. *J. Appl. Mech.*, 1962, vol. 29, no 1, pp. 127–135.

3. Austin R.N., Caughfield D.A., Plass H.J. Application of Reissner's variational principle to the vibration analysis of square flat plates with various root support conditions. *Developments in theoretical and applied mechanics*. N.Y.: Plenum press, 1963. pp. 1-24.

4. Barton M.V. Vibration of rectangular and skew cantilever plates. *J. Appl. Mech.*, 1951, vol. 18, no 1, pp. 129-134.

5. Martin A.I. On the vibration of a cantilever plate. *Quart. J. Appl. Math.*, 1956, vol.9, pp. 94-102.

6. Claassen R.W., Thorne C.J. Vibrations of a rectangular cantilever plate. *J. Aerospace Sci.*, 1962, vol. 29, no 11, pp. 1300 -1305.

7. Mindlin R. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *ASME Journal Applied Mechanics*, 1951, vol.18, pp. 31–38.

8. Plunkett R. Natural frequencies of uniform and non-uniform rectangular cantilever plates. *J. Mech. Eng. Sci.*, 1963, vol. 5, no 2, pp. 146-156.

9. Lim C. W., Liew K.M., Kitipornchai S. Numerical aspects for free vibration of thick Part I: Formulation and verification plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1998, 156, pp. 15-29

10. Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S., Transverse vibration of thick rectangular plates – I. Comprehensive sets of boundary conditions. *Computers & Structures*, 1993, 49(2), pp. 1-29.

11. Chung J.H., Zhou D. Vibration of moderately thick rectangular plates in terms of a set of static Timoshenko beam functions. *Computers & Structures*, 2000, 78(6), pp. 757-768.

12. Xiang Y., Lai S.K., Zhou L. DSC- element method for free vibration analysis of rectangular Mindlin plates. *Int. J. of Mech. Science*, 2010, 52, pp. 548–560

13. Seok J., Tiersten H.F., Scarton H.A. Free vibrations of rectangular cantilever plates. Part I: out-of-plane motion. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, vol. 271, 22, pp. 131-146.

14. Gorman D. J. Free vibration analysis of Mindlin plates with uniform elastic edge support by the superposition method. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol. 207, no.3, pp.335–350.

15. Kolarevic N., Nefovska-Danilovic M., Petronijevic M. Dynamic stiffness elements for free vibration analysis of rectangular Mindlin plate assemblies. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 359, pp. 84–106
16. Nefovska-Danilovic M., Kolarevic N., Marjanovic' M., Petronijevic M. Shear deformable dynamic stiffness elements for a free vibration analysis of composite plate assemblies – Part I: Theory. *Composite Structures*, 2017, 159, pp.728–744.
17. Marjanovic M., Kolarević N., Nefovska-Danilović M., Petronijević M. Free vibration study of sandwich plates using a family of novel shear deformable dynamic stiffness elements: limitations and comparison with the finite element solutions. *Thin-Walled Structures*, 2016, 107, pp. 678–694.
18. Ivanova E. A. Asimptoticheskiy i chislennyy analiz vysokochastotnykh svobodnykh kolebaniy pryamougol'nykh platin [Asymptotic and numerical analysis of high-frequency free vibrations of rectangular plates] *Mechanics of Solids*, 1998, no. 2, pp. 163-174
19. Usarov M. Dynamic Design of Thick Orthotropic Cantilever Plates with Consideration of Bimoments. *World Journal of Mechanics*, 2016, no 6, pp. 341-356.
20. Zenkour, A.M., Allam, M.N.M., Shaker, M.O. and Radwan, A.F. On the Simple and Mixed First-Order Theories for Plates Resting on Elastic Foundations. *Acta Mechanica*, 2011, 220, pp. 33-46
21. Torabi K., Afshari H. Vibration analysis of a cantilevered trapezoidal moderately thick plate with variable thickness. *Engineering Solid Mechanics*, 2017, 5(1), pp. 71-92.
22. Huang C.S., Leissa A.W., Chang M.J. Vibrations of skewed cantilevered triangular, trapezoidal and parallelogram Mindlin plates with considering corner stress singularities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 62, pp. 1789-1806.
23. Huang M., Ma X.O., Sakiyama T., Matuda M., Morita C. Free vibration analysis of plates using least-square-based on finite difference method. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 288, pp. 931-955.
24. Nguyen-Xuan H., Liu G.R., Thai-Hoang C. An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner-Mindlin. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199, pp. 471-489.
25. Sukhoterina M., Baryshnikov S., Aksenov D. Free Vibration Analysis of Rectangular Cantilever Plates Using the Hyperbolic-Trigonometric Series. *American Journal of Applied Sciences*, 2016, 13 (12), pp. 1442.1451.
26. Papkov S.O. A new method for analytical solution of in-plane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 369, pp. 228-245.
27. Papkov S.O., Banerjee J.R. A new method for free vibration and bucking analysis of rectangular orthotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 339, pp. 342 – 358.
28. Papkov S.O. New analytical solutions for vibration problem of thick plates. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no 4, pp. 145-156.
29. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. Integraly i ryady [Integrals and series], *Moscow, Nauka*, 1985, 800 p.
30. Leissa A.W. Vibration of Plates (NASA SP-160). Washington, DC: *Government Printing office*, 1969, 353 p.