



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.16

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ДЛИННОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 14 октября 2020 г.

Принята: 22 апреля 2021 г.

Опубликована: 12 июля 2021 г.

Ключевые слова:

длинный пьезокерамический цилиндр, связанная задача термоэлектроупругости, нестационарное температурное воздействие, конечные интегральные преобразования.

АННОТАЦИЯ

Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра. Рассматривается случай действия на его внутренней цилиндрической поверхности нестационарной нагрузки в виде функции изменения температуры при заданном законе конвекционного теплообмена на внешней лицевой стенке (граничные условия теплопроводности 1-го и 3-го родов). Электродированные поверхности цилиндра подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением (электрический холостой ход).

Исследуется задача, в которой скорость изменения температурной нагрузки не оказывает влияние на инерционные характеристики упругой системы, что позволяет включить в исходные линейные расчетные соотношения уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности относительно радиальной компоненты вектора перемещений, электрического потенциала, а также функции изменения температурного поля. В расчетах используется гиперболическая LS-теория теплопроводности.

Решение задачи осуществляется с помощью обобщенного метода биортогонального конечного интегрального преобразования, основанного на многокомпонентном соотношении собственных вектор-функций двух однородных краевых задач. Структурный алгоритм данного подхода позволяет выделить сопряженный оператор, без которого невозможно осуществить решение несамосопряженных линейных задач математической физики.

Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно-деформированное состояние, термоэлектрические поля, индуцируемые в пьезокерамическом элементе при произвольном температурном внешнем воздействии. Подключение электроупругой системы к измерительному прибору позволяет измерить электрическое напряжение.

Анализ численных результатов позволяет, во-первых, установить скорость изменения температурной нагрузки, при которой необходимо использовать гиперболическую теорию теплопроводности и, во-вторых, определить физические характеристики пьезокерамического материала для случая, когда скорость изменения объема тела приводит к перераспределению температурного поля.

Разработанный алгоритм расчета может быть использован при проектировании нерезонансных пьезоэлектрических датчиков температуры.

© ПНИПУ

© Шляхин Дмитрий Аверкиевич – д.т.н., доц., зав. каф., e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru, [iD: 0000-0003-0926-7388](https://orcid.org/0000-0003-0926-7388).
Кальмова Мария Александровна – асп., e-mail: kalmova@inbox.ru, [iD: 0000-0001-9212-8631](https://orcid.org/0000-0001-9212-8631).

Dmitry A. Shlyakhin – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of Department, e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru, [iD: 0000-0003-0926-7388](https://orcid.org/0000-0003-0926-7388).

Maria A. Kalmova – PhD student, e-mail: kalmova@inbox.ru, [iD: 0000-0001-9212-8631](https://orcid.org/0000-0001-9212-8631).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE NONSTATIONARY THERMOELECTRIC ELASTICITY PROBLEM FOR A LONG PIEZOCERAMIC CYLINDER

D.A. Shlyakhin, M.A. Kalmova

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 14 October 2020

Accepted: 22 April 2021

Published: 12 July 2021

Keywords:

long piezoceramic cylinder, coupled problem of thermoelectric elasticity, non-stationary temperature effect, finite integral transformations.

ABSTRACT

A new closed-loop solution for the coupled nonstationary problem of thermoelectric elasticity is designed for a long piezoceramic radially polarized cylinder. The case of the nonstationary load acting on its inner cylindrical surface is considered as a function of temperature change at a given law of the convection heat exchange on the outer face wall (boundary conditions of heat conductivity of the 1st and 3rd types). Electrodynamical cylinder surfaces are connected to a measuring device with a high input resistance (electric idling).

We investigate the problem where the rate of the temperature load changes does not affect the inertial characteristics of the elastic system. It makes it possible to expand the initial linear computational relations with the equilibrium, electrostatics and heat conductivity equations with respect to the radial component of the displacement vector, electric potential as well as the function of temperature field changes. Hyperbolic LS-theory of the thermal conductivity is used in the computations.

The problem is solved with a generalized method of biorthogonal finite integral transformation based on a multicomponent ratio of eigen functions of two homogeneous boundary value problems. The structural algorithm of this approach allows identifying a conjugated operator, without which it is impossible to solve non-self-conjugated linear problems in mathematical physics.

The resulted computational relations make it possible to determine the stress-strain state, temperature and electric fields induced in the piezoceramic element under an arbitrary external temperature effect. By connecting the electroelastic system to the measuring tool, we can find voltage.

Firstly, the analysis of the numerical results allows identifying the rate of the temperature load changes, at which it is necessary to use the hyperbolic theory of thermal conductivity. Secondly, it allows determining the physical characteristics of the piezoceramic material for the case when the rate of changing the body volume leads to a redistribution of the temperature field.

The developed computational algorithm can be used to design non-resonant piezoelectric temperature sensors.

© PNRPU

Введение

В настоящее время пьезокерамические материалы используются при разработке датчиков температуры, работа которых основана на зависимости электрического поля, индуцируемого в пьезокерамическом элементе, от величины внешнего температурного воздействия [1–7]. Для расширения функциональных возможностей измерительных приборов данного типа возникает необходимость углубленного анализа нестационарных процессов, позволяющего понять эффект взаимодействия механических, температурных и электрических полей.

Математическая формулировка начально-краевых задач термоэлектростатической упругости включает систему несамосопряженных дифференциальных уравнений, исследование которых в последнее время, как правило, проводится при использовании численных методов [8–12]. Однако достаточно слабые эффекты взаимодействия полей различной физической природы удастся проанализировать только с помощью замкнутых аналитических решений. При этом проблема интегрирования исходных расчетных соотношений и построение общего решения приводит к проведению расчетов в упрощенной постановке, а именно: исследуются несвязанные задачи [13,14] или анализируются бесконечно длинные тела [15–17].

Замкнутые решения динамических задач термоэлектростатической упругости представлены в немногих исследованиях [5, 14–17]. В работе [5] на основании известных характеристик вынужденных стационарных электроупругих колебаний исследовалась плотность распределения температуры по длине конструкции. Статья [14] посвящена анализу напряженно-деформированного состояния длинного полого цилиндра в рамках LS-теории теплопроводности [18] при тепловом ударе без учета влияния электрического потенциала на термоупругие поля. В [15, 16] рассматриваются связанные задачи классической СТЕ-теории [19] для однородного и неоднородного пьезокерамических неограниченных слоев. Использование преобразования Лапласа позволило сформулировать в пространстве изображений интегральное уравнение Фредгольма, которое реализовывалось численным методом. В работе [17] предложена модель электротермоупругого полупространства с неоднородным покрытием, где для построения решения использовался численно-аналитический метод.

Можно отметить также работы [20–22], в которых используется нелинейная теория термоэлектростатической упругости, позволяющая описать отклик пьезокерамических конструкций с учетом неоднородных начальных условий.

Целью настоящей работы является решение связанной нестационарной задачи термоэлектродупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра при действии на его поверхностях температурной нагрузки и учете конвекционного теплообмена с окружающей средой [19] с использованием гиперболической LS-теории теплопроводности [18]. Рассматривается случай, когда скорость изменения нагрузки существенно меньше скорости распространения упругих волн, что позволяет не учитывать инерционные свойства конструкции и использовать в расчетах уравнения равновесия [23, 24].

1. Постановка задачи. Пусть полый длинный незакрепленный пьезокерамический цилиндр занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) область $\Omega : \{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$. Рассматривается случай действия на внутренней $(r_* = a)$ цилиндрической поверхности нестационарной нагрузки в виде функции изменения температуры $\omega_1^*(t_*)$ (граничное условие 1-го рода), а на внешней $(r_* = b)$ лицевой поверхности задан закон конвекционного теплообмена (граничное условие 3-го рода) и известна температура окружающей среды ϑ^* .

Внутренняя электродированная поверхность заземлена, а внешняя подключена к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, что соответствует режиму электрического холостого хода.

В общем случае дифференциальные уравнения равновесия, электростатики и теплового баланса на основании гиперболической зависимости Лорда – Шульмана имеют вид [18, 25–27]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r_*} = 0, \quad \tilde{\nabla} D_r = 0, \quad (1)$$

$$T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial t_*} + \beta_{rel} \frac{\partial^2 s}{\partial t_*^2} \right) = \Lambda \tilde{\nabla} \frac{\partial \Theta^*}{\partial r_*},$$

где $\sigma_{rr}(r_*, t_*)$, $\sigma_{\theta\theta}(r_*, t_*)$ – компоненты тензора механических напряжений; $D_r(r_*, t_*)$ – радиальная составляющая вектора индукции электрического поля; $s(r_*, t_*)$ – объемная плотность энтропии; $\Theta^* = T - T_0$; Θ^* , T , T_0 – соответственно приращение, текущая температура, а также температура первоначального состояния тела, при котором отсутствуют механические напряжения; β_{rel} – время релаксации; Λ – коэффициент теплопроводности материала.

Уравнения осесимметричного состояния электродупругой анизотропной среды при радиальной поляризации пьезокерамического материала с гексагональной кристаллической решеткой класса 6 mm записываются следующим образом [17, 27]:

$$\sigma_{rr} = C_{33} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{13} \frac{U^*}{r_*} + e_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} - \gamma_{33} \Theta^*, \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{13} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{11} \frac{U^*}{r_*} + e_{31} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} - \gamma_{11} \Theta^*,$$

$$D_r = -\epsilon_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} + e_{33} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + e_{31} \frac{U^*}{r_*} + g_3 \Theta^*,$$

а объемная плотность энтропии $s(r_*, t_*)$ при разложении в ряд Тейлора, с учетом условия $\frac{\Theta^*}{T} \ll 1$, определяется зависимостью [15]

$$s = \gamma_{33} \tilde{\nabla} U^* + k \frac{\Theta^*}{T_0} - g_3 \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*}. \quad (3)$$

В равенствах (2),(3) $U^*(r_*, t_*)$ – радиальная составляющая векторов перемещений; $\phi^*(r_*, t_*)$ – потенциал электрического поля; C_{ms} , e_{ms} , ϵ_{33} – модули упругости, пьезомодули и коэффициент диэлектрической проницаемости электроупругого материала $(m, s = \overline{1,3})$; k – коэффициент объемной теплоемкости материала; γ_{11}, γ_{33} – компоненты тензора температурных напряжений; g_3 – компонента тензора пьезокоэффициентов; оператор $\tilde{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r_*} + \frac{1}{r_*}$.

В результате подстановки (2), (3) в (1) получаем следующую систему дифференциальных уравнений термоэлектродупругости и краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме:

$$\nabla \frac{\partial U}{\partial r} - a_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \Theta + a_3 \frac{\Theta}{r} = 0, \quad (4)$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + a_6 \nabla \Theta = 0,$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\Theta + a_7 \nabla U - a_8 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_9 \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad \phi|_{r=R} = 0, \quad \Theta|_{r=R} = \omega_1, \quad (5)$$

$$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{U}{r} + a_6 \Theta \right) \Big|_{r=1} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} + a_{10} \Theta \right) \Big|_{r=1} = a_{10} \vartheta;$$

$$t = 0 \quad U = \phi = \Theta = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0; \quad (6)$$

где

$$\{U, r, R\} = \{U^*, r_*, a\} / b,$$

$$\{\Theta, \omega_1, \vartheta\} = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \{\Theta^*, (\omega_1^* - T_0), (\vartheta^* - T_0)\},$$

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{e_{33}}{C_{33}b} \phi^*, \quad t = \frac{\Lambda}{kb^2} t_*, \quad a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad a_2 = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \\ a_3 &= \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}, \quad a_4 = \frac{e_{33}^2}{C_{33}\epsilon_{33}}, \\ a_5 &= \frac{e_{31}e_{33}}{C_{33}\epsilon_{33}}, \quad a_6 = \frac{g_3 e_{33}}{\epsilon_{33}\gamma_{33}}, \quad a_7 = \frac{\gamma_{33}^2 T_0}{C_{33}k}, \\ a_8 &= \frac{\gamma_{33} g_3 T_0}{e_{33}k}, \quad a_9 = \frac{C_{13}}{C_{33}}, \end{aligned}$$

$$a_{10} = \alpha \frac{b}{\Lambda}, \quad \beta = \beta_{rel} \frac{\Lambda}{kb^2}, \quad \alpha - \text{коэффициент теплоотдачи.}$$

Расчетные соотношения (5) учитывают отсутствие механических напряжений на цилиндрических поверхностях, заземление внутренней ($r = R$) и подключение к измерительному прибору внешней ($r = 1$) электродированных поверхностей, а также граничные условия теплопроводности.

С учетом заземления металлической подложки, напряжение холостого хода $V(t_*)$ определяется потенциалом электрического поля на внешней поверхности цилиндра:

$$V(t_*) = \phi(1, t_*). \quad (7)$$

2. Построение общего решения. На первом этапе решения выполняется процедура приведения расчетных соотношений (4)–(6) к виду, позволяющему в дальнейшем использовать метод конечных биортогональных интегральных преобразований [28]. Для этого вводятся новые функции $u(r, t)$, $\chi(r, t)$, $L(r, t)$ связанные с $U(r, t)$, $\phi(r, t)$, $\Theta(r, t)$ следующими соотношениями:

$$U(r, t) = H_1(r, t) + u(r, t), \quad \phi(r, t) = H_2(r, t) + \chi(r, t), \quad (8)$$

$$\Theta(r, t) = H_3(r, t) + L(r, t),$$

где

$$\begin{aligned} \{H_1, H_2, H_3\} &= \{f_1(r), f_2(r), f_3(r)\} \omega_1(t) + \\ &+ \{f_4(r), f_5(r), f_6(r)\} \vartheta, \end{aligned}$$

Подстановка (8) в (4)–(6) при удовлетворении условий

$$\begin{aligned} r = R, 1 \quad \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_9 \frac{H_1}{r} + \frac{\partial H_2}{\partial r} - H_3 = 0, \\ H_{2|r=R} = 0, \quad H_{3|r=R} = \omega_1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial H_2}{\partial r} - a_4 \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{H_1}{r} - a_6 H_3 \right)_{|r=1} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial H_3}{\partial r} + a_{10} H_3 \right)_{|r=1} = a_{10} \vartheta$$

позволяет получить краевую задачу относительно функций $u(r, t)$, $\chi(r, t)$, $L(r, t)$ с однородными граничными условиями:

$$\nabla \frac{\partial u}{\partial r} - a_1 \frac{u}{r^2} + \nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \nabla L + a_3 \frac{L}{r} = R_1, \quad (10)$$

$$-\nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial u}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + a_6 \nabla L = R_2,$$

$$\nabla \frac{\partial L}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(L + a_7 \nabla u - a_8 \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) = R_3;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial u}{\partial r} + a_9 \frac{u}{r} + \frac{\partial \chi}{\partial r} - L = 0, \quad \chi_{|r=R} = 0, \quad L_{|r=R} = 0, \quad (11)$$

$$\left(-\frac{\partial \chi}{\partial r} + a_4 \frac{\partial u}{\partial r} + a_5 \frac{u}{r} + a_6 L \right)_{|r=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial r} + a_{10} L \right)_{|r=1} = 0;$$

$$t = 0 \quad \{u, \chi, L\} = -\{H_1, H_2, H_3\},$$

$$\frac{\partial \{u, \chi, L\}}{\partial t} = -\frac{\partial \{H_1, H_2, H_3\}}{\partial t}; \quad (12)$$

где

$$R_1 = -\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_1 \frac{H_1}{r^2} - \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} + \nabla H_3 - a_3 \frac{H_3}{r},$$

$$R_2 = \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} - a_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_6 \nabla H_3,$$

$$R_3 = -\nabla \frac{\partial H_3}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(H_3 + a_7 \nabla H_1 - a_8 \frac{\partial H_2}{\partial r} \right).$$

Начально-краевую задачу (10)–(12) решаем, используя структурный алгоритм биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [28]. Для этого вводим на сегменте $[R, 1]$ КИП с неизвестными компонентами собственных вектор-функций ядер преобразований $K_1(\lambda_i, r) \dots K_3(\lambda_i, r)$, $N_1(\mu_i, r) \dots N_3(\mu_i, r)$:

$$G(\lambda_i, t) = \int_R^1 \left(L(r, t) + a_7 \nabla u(r, t) - a_8 \frac{\partial \chi(r, t)}{\partial r} \right) K_3(\lambda_i, r) r dr, \quad (13)$$

$$\{u(r, t), \chi(r, t), L(r, t)\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)\} \|K_i\|^2,$$

$$\|K_i\|^2 = \int_R^1 K_3(\lambda_i, r) N_3(\lambda_i, r) r dr,$$

где λ_i, μ_i – собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных $K_k(\lambda_i, r)$ и инвариантных $N_k(\mu_i, r)$ компонент вектор-функций ядер КИП ($k = 1, 2, 3$).

В результате использования алгоритма КИП [22] получаем задачу для трансформанты $G(\lambda_i, t)$:

$$\beta \frac{d^2 G_i}{dt^2} + \frac{dG_i}{dt} + \lambda_i^2 G_i = R_H, \quad (14)$$

$$t = 0 \quad G_{i|t=0} = G_0, \quad \frac{dG_i}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{dG_0}{dt}; \quad (15)$$

а также две системы дифференциальных уравнений, граничные условия относительно неизвестных компонент преобразований $K_1(\lambda_i, r) \dots K_3(\lambda_i, r)$:

$$\nabla \frac{dK_1}{dr} - a_1 \frac{K_1}{r^2} + a_4 \nabla \frac{dK_2}{dr} - a_5 \frac{1}{r} \frac{dK_2}{dr} - \lambda_i^2 a_7 \frac{dK_3}{dr} = 0, \quad (16)$$

$$-\nabla \frac{dK_2}{dr} + \nabla \frac{dK_1}{dr} + a_2 \frac{1}{r} \frac{dK_1}{dr} + \lambda_i^2 a_8 \nabla K_3 = 0,$$

$$\nabla \frac{dK_3}{dr} + \frac{dK_1}{dr} + a_3 \frac{K_1}{r} - a_6 \frac{dK_2}{dr} + \lambda_i^2 K_3 = 0;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{dK_1}{dr} + a_9 \frac{K_1}{r} + a_4 \frac{dK_2}{dr} - \lambda_i^2 a_7 K_3 = 0,$$

$$K_{2|r=R} = K_{3|r=R} = 0, \quad (17)$$

$$\left(-\frac{dK_2}{dr} + \frac{dK_1}{dr} + a_2 \frac{K_1}{r} + \lambda_i^2 a_8 K_3 \right) \Big|_{r=1} = 0,$$

$$\left(\frac{dK_3}{dr} + a_{10} K_3 \right) \Big|_{r=1} = 0;$$

и $N_1(\mu_i, r) \dots N_3(\mu_i, r)$:

$$\nabla \frac{dN_1}{dr} - a_1 \frac{N_1}{r^2} + \nabla \frac{dN_2}{dr} - a_2 \frac{1}{r} \frac{dN_2}{dr} - \nabla N_3 + a_3 \frac{N_3}{r} = 0, \quad (18)$$

$$-\nabla \frac{dN_2}{dr} + a_4 \nabla \frac{dN_1}{dr} + a_5 \frac{1}{r} \frac{dN_1}{dr} + a_6 \nabla N_3 = 0,$$

$$\nabla \frac{dN_3}{dr} + \mu_i^2 \left(N_3 + a_7 \nabla N_1 - a_8 \frac{dN_2}{dr} \right) = 0;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{dN_1}{dr} + a_9 \frac{N_1}{r} + \frac{dN_2}{dr} - N_3 = 0, \quad N_{2|r=R} = 0,$$

$$N_{3|r=R} = 0, \quad (19)$$

$$\left(-\frac{\partial N_2}{\partial r} + a_4 \frac{\partial N_1}{\partial r} + a_5 \frac{N_1}{r} + a_6 N_3 \right) \Big|_{r=1} = 0,$$

$$\left(\frac{dN_3}{dr} + a_{10} N_3 \right) \Big|_{r=1} = 0;$$

$$\text{где } R_H = -\int_R^1 (R_1 K_1 + R_2 K_2 + R_3 K_3) r dr,$$

$$G_0 = -\int_R^1 (H_1 K_1 + H_2 K_2 + H_3 K_3) \Big|_{r=0} r dr,$$

$$\frac{dG_0}{dt} = -\int_R^1 \left(\frac{\partial H_1}{\partial t} K_1 + \frac{\partial H_2}{\partial t} K_2 + \frac{\partial H_3}{\partial t} K_3 \right) \Big|_{r=0} r dr.$$

Задача для трансформанты G_i (14), (15) и сопряженная однородная задача (16), (17) относительно компонент ядра $K_1(\lambda_i, r) \dots K_3(\lambda_i, r)$ получены в результате применения вырожденного преобразования (13), а соотношения (18), (19) построены путем применения к полученной (сопряженной) задаче (16), (17) аналогичного (13) КИП с компонентами ядра $N_1(\mu_i, r) \dots N_3(\mu_i, r)$.

Общий интеграл уравнения (14) с учетом начальных условий (15) имеет вид

$$G(\lambda_i, t) = [\beta(m_{1i} - m_{2i})]^{-1} \times \\ \times \left\{ \beta \left(\frac{dG_0}{dt} - G_0 N_{2i} \right) \exp(m_{1i} t) - \beta \left(\frac{dG_0}{dt} - G_0 N_{1i} \right) \exp(m_{2i} t) + \right. \\ \left. + \int_0^t R_H(\tau) \left\{ \exp[m_{1i}(t - \tau)] - \exp[m_{2i}(t - \tau)] \right\} d\tau \right\}, \quad (20)$$

где m_{1i}, m_{2i} – корни характеристического уравнения: $\beta m_i^2 + m_i + \lambda_i^2 = 0$.

В уравнении теплопроводности (10) перераспределение тепла в теле при малых значениях коэффициентов a_7, a_8 происходит за счет учета скоростей изменения его объема и напряженности электрического поля. Это приводит к тому, что связанность термоупругих полей в большей степени оказывает влияние на трансформанту нагрузки $G(\lambda_i, t)$ и незначительно – на форму функций $K_1(\lambda_i, r) \dots K_3(\lambda_i, r), N_1(\mu_i, r) \dots N_3(\mu_i, r)$ [23, 24]. Учитывая данный факт, при решении систем (16), (18) принимаем значения $a_7 = a_8 = 0$ и в результате получаем следующие выражения функций $K_1(\lambda_i, r) \dots K_3(\lambda_i, r), N_1(\mu_i, r) \dots N_3(\mu_i, r)$:

$$K_1(\lambda_i, r) = D_{1i} + D_{2i} r^A + D_{3i} r^{-A}, \quad (21)$$

$$K_2(\lambda_i, r) = D_{1i} a_{11} \ln(r) + D_{2i} a_{12} r^A + D_{3i} a_{13} r^{-A} + D_{6i},$$

$$K_3(\lambda_i, r) = D_{1i} a_{14} Q_{0,0}(\lambda_i r) + D_{2i} a_{15} Q_{0,A}(\lambda_i r) + \\ + D_{3i} a_{16} Q_{0,-A}(\lambda_i r) + D_{4i} J_0(\lambda_i r) + D_{5i} Y_0(\lambda_i r),$$

$$N_1(\mu_i, r) = E_{1i} r^A + E_{2i} r^{-A} + E_{3i} V_{i,1}(r) + E_{4i} V_{i,2}(r) + E_{5i} a_{17},$$

$$N_2(\mu_i, r) = E_{1i} a_{18} r^A + E_{2i} a_{19} r^{-A} + \\ + E_{3i} V_{i,3}(r) + E_{4i} V_{i,4}(r) + E_{5i} a_{20} \ln(r) + E_{6i},$$

$$N_3(\mu_i, r) = E_3 J_0(\mu_i r) + E_4 Y_0(\mu_i r),$$

где

$$V_{i,m}(r) = \frac{1}{2A} \left[r^A \int F_{i,m}(r) r^{-A} dr - r^{-A} \int F_{i,m}(r) r^A dr \right] \\ (m = 1, 2),$$

$$V_{i,3}(r) = \int \left[a_4 \frac{dV_{i,1}(r)}{dr} + a_3 r^{-1} V_{i,1}(r) + a_6 J_0(\mu_i r) \right] dr,$$

$$V_{i,4}(r) = \int \left[a_4 \frac{dV_{i,2}(r)}{dr} + a_3 r^{-1} V_{i,2}(r) + a_6 Y_0(\mu_i r) \right] dr,$$

$$F_{i,m} = (1 + a_4)^{-1} \times$$

$$\times \left[(1 - a_6 + a_2 a_6 - a_3) \frac{Z_0(\mu_i r)}{r} + (1 - a_6) \frac{dZ_0(\mu_i r)}{dr} \right],$$

$$m = 1 \quad Z_0(\mu_i r) = J_0(\mu_i r),$$

$$m = 2 \quad Z_0(\mu_i r) = Y_0(\mu_i r),$$

$$A^2 = (a_1 + a_2 a_3)(1 + a_4)^{-1}, \quad a_{11} = -a_1 a_5^{-1}, \quad a_{12} = a_2 A^{-1} + 1,$$

$$a_{13} = a_2 A^{-1} - 1,$$

$$a_{14} = -(a_1 a_6 a_5^{-1} + a_3), \quad a_{15} = a_2 a_6 - a_3 + A(a_6 - 1),$$

$$a_{16} = a_2 a_6 - a_3 - A(a_6 - 1),$$

$$a_{17} = a_2 \left[(1 - A^2)(1 + a_4) \right]^{-1}, \quad a_{18} = a_3 A^{-1} + a_4,$$

$$a_{19} = a_3 A^{-1} - a_4, \quad a_{20} = 1 + a_3 a_{17}.$$

В равенствах (21) $J_0(\dots), Y_0(\dots)$ – обыкновенные функции Бесселя 1-го и 2-го родов нулевого порядка, $Q_{0,\beta}(\dots)$ – неэлементарные функции Ломмеля ($\beta = -A, 0, A$) [29], $D_{i1} \dots D_{6i}, E_{i1} \dots E_{6i}$ – постоянные интегрирования.

Подстановка $K_1(\lambda_i, r) \dots K_3(\lambda_i, r), N_1(\mu_i, r) \dots N_3(\mu_i, r)$ в соответствующие граничные условия (17), (19) формирует две системы алгебраических уравнений, решение которых позволяет определить постоянные интегрирования $D_{i1} \dots D_{6i}, E_{i1} \dots E_{6i}$ и собственные значения λ_i, μ_i .

Окончательные выражения функций $U(r, t), \phi(r, t), \Theta(r, t)$ получим, применяя к трансформанте (20) формулы обращения (13). В результате, с учетом (8), имеем:

$$\{U(r, t), \phi(r, t), \Theta(r, t)\} = \{H_1(r, t), H_2(r, t), H_3(r, t)\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)\} \|K_i\|^2. \quad (22)$$

Полученные выражения являются сходящимися в силу полноты систем функций $[K_m(\lambda_i, r), N_m(\mu_i, r)]_{i=1}^{\infty}$ на интервале $z \in [R, 1]$.

Функции $H_1(r, t) \dots H_3(r, t)$ определяются при решении следующих дифференциальных уравнений:

$$-\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_1 \frac{H_1}{r^2} - \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} + \nabla H_3 - a_3 \frac{H_3}{r} = 0, \quad (23)$$

$$\nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} - a_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_6 \nabla H_3 = 0, \quad \nabla \frac{\partial H_3}{\partial r} = 0.$$

что позволяет существенно упростить правые части расчетных соотношений (10). В результате подстановки выражений $H_1 \dots H_3$ в (23) формируются две системы уравнений относительно $f_1(r) \dots f_3(r)$ и $f_4(r) \dots f_6(r)$. Их решение, при удовлетворении условий (9), позволяет определить функции $H_1 \dots H_3$.

3. Численный анализ результатов. В качестве примера рассматривается радиально поляризованный пьезокерамический цилиндр ($R = 0.8$) состава ПКР-35, который для электроупругих материалов имеет относительно большой коэффициент линейного температурного расширения ($\alpha_r = 1.1 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) [30]. В расчетах использовались следующие физические характеристики материала [30, 31, 32]: $\{C_{11}, C_{33}, C_{13}\} = \{13.9, 11.8, 6.2\} \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\varepsilon_{33} = 7.87 \times 10^{-9} \text{ Ф/м}$, $k = 4 \times 10^6 \text{ Дж/(м}^3 \text{ К)}$, $g_3 = 2 \times 10^{-4} \text{ Кл/(м}^2 \text{ К)}$, $\{e_{31}, e_{33}\} = \{-7.3, 16.2\} \text{ Кл/м}^2$, $\{\gamma_{11}, \gamma_{33}\} = \{2.93, 2.43\} \times 10^6 \text{ Н/(м}^2 \text{ К)}$,

$$\Lambda = 3.14 \text{ Вт/(м К)}, \quad \alpha = 5.6 \text{ Вт/(м}^2 \text{ К)}, \quad \beta_{rel} = 5 \times 10^{-6} \text{ с}.$$

Рассматривается случай действия на внутренней поверхности ($r_* = a$) температурной нагрузки в виде

$$\omega_1^*(t_*) = T_{\max} \left[\sin(\theta t_*) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad (24)$$

где $H(\tilde{t})$ – единичная функция Хэвисайда ($H(\tilde{t}) = 1$ при $\tilde{t} \geq 0$, $H(\tilde{t}) = 0$ при $\tilde{t} < 0$), $T_{\max} = T_{\max}^* - T_0$, T_{\max}^*, t_{\max}^* – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T_{\max}^* = 373 \text{ К}$, $T_0 = 293 \text{ К}$), $\theta = \frac{\pi}{2t_{\max}^*}$.

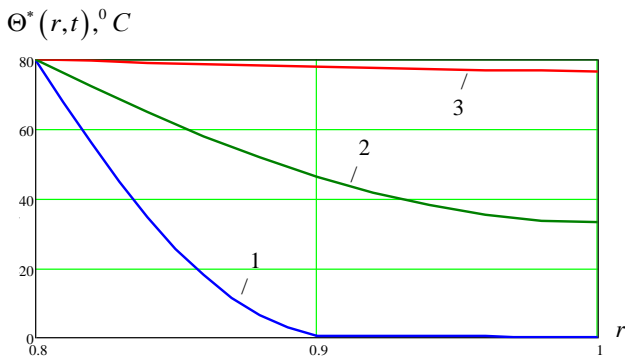
На рис. 1 представлены графики изменения функций $\Theta^*(r, t), \phi(r, t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени t ($b = 0.02 \text{ м}$, $t_{\max}^* = 1 \text{ с}$). Цифрами 1–3 соответственно обозначены результаты, полученные при значениях $t = t_{\max}^*, 10t_{\max}^*, 100t_{\max}^*$.

Анализ представленных графиков позволяет сделать следующие выводы:

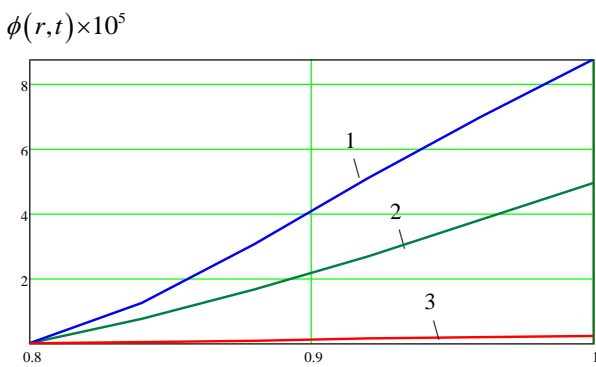
1. При достижении температурной нагрузки максимальных значений $t = t_{\max}^*$ (рис. 1, а, кривая 1) температурное поле изменяется в области, близкой с лицевой нагреваемой поверхности ($r = R$). В дальнейшем температурное поле цилиндра растет (рис. 1, а, кривая 2), и полный прогрев пьезокерамической конструкции наблюдается при $t = 100t_{\max}^*$ (рис. 1, а, кривая 3).

2. Наибольшие значения индуцируемого электрического поля $\phi(r, t)$ наблюдаются при достижении температурной нагрузки максимальных значений $t = t_{\max}^*$ (рис. 1, б, кривая 1). Далее, при постоянном значении

температурной нагрузки происходит уменьшение численных значений $\phi(r,t)$ (рис. 1, б, кривые 2, 3).



а



б

Рис. 1. Графики изменения функций $\Theta^*(r,t), \phi(r,t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени: а – $\Theta^*(r,t) \div r$; б – $\phi(r,t) \div r$ (1 – $t = t_{\max}^*$; 2 – $t = 10t_{\max}^*$; 3 – $t = 100t_{\max}^*$, $t_{\max}^* = \frac{\Lambda_* t_{\max}^*}{kb^2 t_{\max}^*}$)

$$3 - t = 100t_{\max}^*, t_{\max}^* = \frac{\Lambda_* t_{\max}^*}{kb^2 t_{\max}^*}$$

Fig. 1. Graphs of changes in functions $\Theta^*(r,t), \phi(r,t)$ along radial coordinate r at different moments: а – $\Theta^*(r,t) \div r$; б – $\phi(r,t) \div r$ (1 – $t = t_{\max}^*$; 2 – $t = 10t_{\max}^*$; 3 – $t = 100t_{\max}^*$, $t_{\max}^* = \frac{\Lambda_* t_{\max}^*}{kb^2 t_{\max}^*}$)

$$t_{\max}^* = \frac{\Lambda_* t_{\max}^*}{kb^2 t_{\max}^*}$$

На рис. 2 показаны графики изменения перемещений $U(1,t)$ во времени t в случае достижения нагрузки максимальных значений за период время $t_{\max}^* = 10^{-4}$ (с) ($t_{\max} = 1,33 \times 10^{-7}$). Сплошной и пунктирной линией соответственно обозначены результаты, полученные при использовании гиперболической и параболической ($\beta = 0$) теорий теплопроводности.

Результаты расчета показывают, что при исследовании пьезокерамических радиально поляризованных цилиндров уточненную теорию Лоренца – Шульмана необходимо использовать при очень быстром изменении температурной нагрузки ($t_{\max}^* \leq 10^{-4}$ с). Это приводит увеличению перемещений до 10 %.

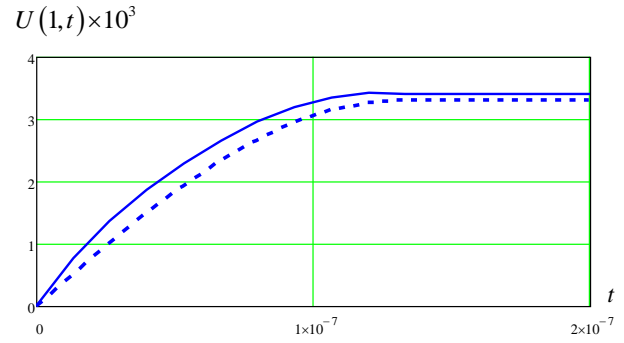


Рис. 2. Графики изменения функции $U(1,t)$ по времени t

Fig. 2. Graphs of function change $U(1,t)$ by time t

При этом необходимо дать оценку влияния сил инерции упругой системы на напряженно-деформированное состояние рассматриваемой конструкции при высокоскоростном температурном воздействии. Численные результаты расчета задачи электроупругости для длинного цилиндра [33] позволяют сделать вывод, что при гармоническом воздействии силы инерции необходимо учитывать при следующем соотношении частоты вынужденных колебаний ω и первой частоты собственных колебаний ψ : $\frac{\omega}{\psi} \geq 0.5$.

Принимая $\omega = \theta = \frac{\pi}{2t_{\max}^*}$ и учитывая численные результаты

расчета, приведенные в работе [33], получаем, что при $t_{\max}^* \leq 10^{-5}$ данные характеристики оказывают влияние на деформированное состояние электроупругой системы. Таким образом, построенный алгоритм расчета, позволяющий учесть инерцию теплового потока, справедлив при $10^{-5} \leq t_{\max}^* \leq 10^{-4}$ (с).

На рис. 3, 4 представлены графики изменения температуры $\Theta^*(r,t)$ по радиальной координате r и разности потенциалов $V(t)$ во времени t . Сплошной и пунктирной линиями соответственно обозначены результаты, полученные с учетом и без учета скорости изменение объема электроупругого тела ($\frac{\partial}{\partial t} \nabla U$).

В настоящем примере при вычислении температурного поля $\Theta^*(r,t)$ и разности потенциалов $V(t)$ наибольший эффект связанности наблюдается соответственно при $t = 2t_{\max}^*$ и $t = t_{\max}^*$. В дальнейшем данный эффект снижается.

Заключение. Полученные численные результаты позволяют сделать вывод, что при исследовании работы электроупругого цилиндра, выполненного из пьезокерамического материала с коэффициентом линейного температурного расширения $\alpha_t \geq 10^{-5} K^{-1}$, необходимо учитывать связанность температурных и упругих полей. При этом вследствие различных скоростей распростра-

нения электромагнитных и термоупругих полей можно не принимать во внимание влияние скорости изменения напряженности на температурное поле.

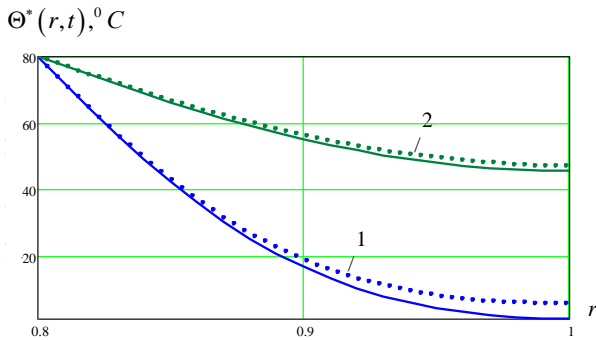


Рис. 3. Графики изменения $\Theta^*(r,t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени ($1 - t = 2t_{\max}$; $2 - t = 10t_{\max}$)

Fig. 3. Graphs of change $\Theta^*(r,t)$ along radial coordinate r at different moments ($1 - t = 2t_{\max}$, $2 - t = 10t_{\max}$)

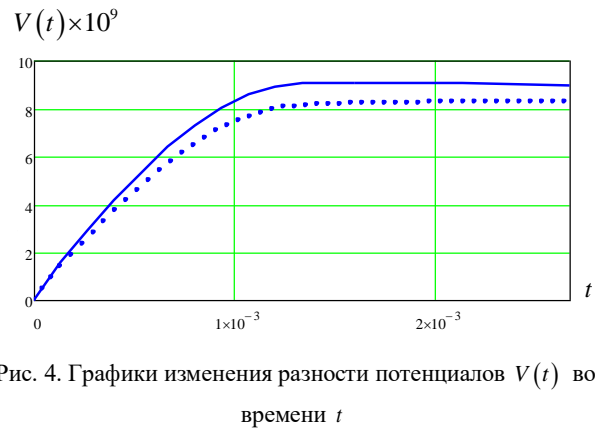


Рис. 4. Графики изменения разности потенциалов $V(t)$ во времени t

Fig. 4. Graphs of difference in potentials $V(t)$ within time t

Построенный алгоритм решения позволяет также учесть передачу тепла в виде теплового излучения. В этом случае нелинейное граничное условие теплопроводности 3-го рода удовлетворяется путем организации итерационного процесса.

Библиографический список

1. Козлов В.Л. Оптоэлектронные датчики. – Минск.: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2005. – 116 с.
2. Кульчин Ю.Н. Распределенные волоконно-оптические измерительные системы. – М.: Физматлит, 2001. – 272 с.
3. Дмитриев С.А., Слепов Н.Н. Волоконно-оптическая техника: современное состояние и новые перспективы: сб. ст. – 3-е изд. – М.: Техносфера, 2010. – 608 с.
4. Паньков А.А. Математическое моделирование пьезоэлектрорлюминесцентного эффекта и диагностика распределения давления по длине оптоволоконного датчика // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 259–272.
5. Паньков А.А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектрорлюминесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 2. – С. 72–82.
6. Ларионов В.А. Резистивный датчик температуры с метрологическим контролем // Датчики и системы. – 2015. – № 9–10. – С. 76–78.
7. Казарян А.А. Тонкопленочный датчик давления и температуры // Датчики и системы. – 2016. – № 3. – С. 50–56.
8. Abbas I.A., Youssef H.M. Finite element analysis of two-temperature generalized magneto-thermoelasticity // Arch Appl Mech. – 2009. – № 79. – P. 917–925.
9. T. He [et al.] A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder // European Journal of Mechanics A-Solids. – 2005. – Vol. 24. – P. 349–359.
10. Youssef H.M. Theory of two-temperature generalized thermoelasticity // IMA J. Appl. Math. – 2006. – Vol. 71(3). – P. 383–390.
11. Kulikov G.M., Mamontov A.A., Plotnikov S.V. Coupled thermoelectroelastic stress analysis of piezoelectric shells // Composite Structures. – 2015. – Vol. 124. – P. 65–76.
12. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Решение трехмерных задач термоупругости для слоистых оболочек из функцио-

- нальных материалов // Вестник ПГТУ. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 185–190.
13. Фирсанов В.В., Нгуен, Ле Хунг. Напряженно-деформированное состояние произвольных оболочек с учетом термоэлектрического воздействия на основе уточненной теории // Тепловые процессы в технике. – 2010. – № 3. – С. 110–117.
14. Abbas I.A., Zenkour A.M. LS model on electro-magneto-thermoelastic response of an infinite functionally graded cylinder // Composite Structures. – 2013. – Vol. 96. – P. 89–96.
15. Ватульян А.О., Кириютенко А.Ю., Наседкин А.В. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектрорупругости // ПМТФ. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 135–142.
16. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Динамическая задача термоэлектрорупругости для функционально-градиентного слоя // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10, № 2. – С. 117–126.
17. Белянкова Т.И., Калинин В.В. К моделированию преднапряженного термоэлектрорупругого полупространства с покрытием // Изв. РАН. МТТ. – 2017. – № 1. – С. 117–135.
18. Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // Elasticity. – 1967. – P. 299–309.
19. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1965. – 204 с.
20. Montanaro A. Some theorems of incremental thermo-electroelasticity // Arch. Mech. – 2010. – Vol. 62. – P. 49–72.
21. Ueda S. Thermally induced fracture of a functionally graded piezoelectric layer/ Journal of Thermal Stresses. – 2004. – Vol. 27(4). – P. 291–309.
22. Yang J.S., Equations for Small Fields Superposed on Finite Biasing Fields in a Thermoelectroelastic Body // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. – 2003. – Vol. 50/2. – P. 187–192.
23. Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакреплен-

ной круглой пластины // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2018. – Вып. 5(77). DOI:10.18698/2308–6033–2018–5

24. Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 4. – С. 191–200. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.18

25. Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 4. – С. 138–154.

26. Радаев Ю.Н., Таранова М.В. Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 2(23). – С. 53–61.

27. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – 279 с.

28. Сеницкий Ю.Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к

краевым задачам механики // Известия вузов. Математика. – 1996. – № 8. – С. 71–81.

29. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.

30. ГОСТ Р 8.945–2018. Теплофизические характеристики пьезокерамик на основе ниобата лития в диапазоне температур от 300 К до 900 К. – М.: Стандартинформ, 2018. (www.docs.cntd.ru).

31. Панич А.А. Мараховский М.А., Мотини Д.В. Кристаллические и керамические пьезоэлектрики // Инженерный вестник Дона. – 2011. – № 1 (www.indon.ru).

32. Бабенков М.Б. Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока // ПМиТФ. – 2013. – № 2(54). – С. 126–137.

33. Шляхин Д.А. Динамическая осесимметричная задача прямого пьезоэффекта для анизотропного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра // ПМиТФ. – 2010. – № 1(51). – С. 153–161.

References

1. Kozlov V.L. Optoelektronnyye datchiki [Optoelectronic sensors]. Minsk, Publishing house of Belarus. state un-that, 2005, 116 p.

2. Kulchin Yu.N. Raspredeleynnye volokonno–opticheskie izmeritelnyye sistemy [Distributed fiber-optic measuring systems]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 272 p.

3. Dmitriev S.A., Slepov N.N. Volokonno–opticheskaya tehnika. Sovremennoe sostoyanie i novyye perspektivy [Fiber optic technology. Current state and new perspectives]. Moscow, Technosphere. Sat. articles, 3rd ed., 2010, 608 p.

4. Pankov A.A. Mathematical modeling of the piezoelectroluminescent effect and diagnostics of pressure distribution along the length of the fiber optic sensor *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 259–272.

5. Pankov A.A. Resonant diagnostics of temperature distribution with a piezoelectric-luminescent fiber-optic sensor by solving the Fredholm integral equation. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 72–82.

6. Larionov V.A. Rezystivnyy datchik temperatury s metrologicheskim kontrolem [Resistive temperature sensor with metrological control]. *Sensors and systems*, 2015, no. 9–10, pp. 76–78.

7. Kazaryan A.A. Tonkoplechnyy datchik davleniya i temperatury [Thin-film pressure and temperature sensor]. *Sensors and systems*, 2016, no. 3, pp. 50–56.

8. Abbas I.A., Youssef H.M. Finite element analysis of two-temperature generalized mag-neto-thermoelasticity. *Arch Appl Mech.*, 2009, vol. 79, pp. 917–925.

9. He T. et al. A generalized electromagneto – thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder // *European Journal of Mechanics A – Solids*, 2005, vol. 24, pp. 349–359.

10. Youssef H.M. Theory of two – temperature generalized thermoelasticity. *IMA J. Appl. Math.*, 2006, vol. 71 (3), pp. 383–390.

11. Kulikov G.M., Mamontov A.A., Plotnikov S.V. Coupled thermoelastic stress analysis of piezoelectric shells. *Composite Structures*, 2015, vol. 124, pp. 65–76.

12. Kulikov GM, Plotnikova SV Reshenie trehmernykh zadach termouprugosti dlya sloistykh obolochek iz funktsionalnykh materialov [Solution of three-dimensional problems of thermoelasticity for layered shells from functional materials]. *Vestnik TSTU*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 185–190.

13. Firsanov V.V., Nguyen, Le Hung Napryazhenno–deformirovannoe sostoyanie proizvolnykh obolochek s uchetom termoelektricheskogo vozdeystviya na osnove utochnennoy teorii [Stress-strain state of arbitrary shells taking into account thermoelectric effect on the basis of a refined theory]. *Thermal processes in technology*, 2010, no. 3, pp. 110–117.

14. Abbas I.A., Zenkour A.M. LS model on electro-magneto-thermoelastic response of an in-finite functionally graded cylinder. *Composite Structures*, 2013, vol. 96, pp. 89–96.

15. Vatulyan A.O., Kiryutenko A.Yu., Nasedkin A.V. Ploskie volny i fundamentalnyye resheniya v lineynoy termoelektro-uprugosti [Plane waves and fundamental solutions in linear thermoelasticity]. *PMTF*, 1996, vol. 37, no. 5, pp. 135–142.

16. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Dinamicheskaya zadacha termoelektro-uprugosti dlya funktsionalno-gradientnogo sloya [Dynamic problem of thermoelasticity for a functional-gradient layer]. *Computational mechanics of continuous media*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 117–126.

17. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. K modelirovaniyu prednapryazhennogo termoelektro-uprugogo poluprostranstva s pokrytiem [On modeling a prestressed thermoelectric-elastic half-space with a coating]. *Izv. RAS. MTT*, 2017, no. 1, pp. 117–135.

18. Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Elasticity*, 1967, pp. 299–309.

19. Kovalenko A.D. Vvedenie v termouprugost [Introduction to thermoelasticity]. *Kiev, Nauk. Dumka*, 1965, 204 p.

20. Montanaro A. Some theorems of incremental thermoelasticity. *Arch. Mech.*, 2010, vol. 62, pp. 49–72.

21. Ueda S. Thermally induced fracture of a functionally graded piezoelectric layer. *Journal of Thermal Stresses*, 2004, vol. 27 (4), pp. 291–309.

22. Yang J.S., Equations for Small Fields Superposed on Finite Biasing Fields in a Thermo-electroelastic Body. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 2003, vol. 50/2, pp. 187–192.

23. Shlyakhin D.A., Dauletmuratova Zh.M. Nestatsionarnaya osesimmetrichnaya zadacha termouprugosti dlya zhestkozakreplennoy krugloy plastiny [Non-stationary axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate]. 2018, *Engineer-*

ing journal: science and innovations, Issue. 5 (77), DOI:10.18698/2308-6033-2018-5.

24. Shlyakhin D.A., Dauletmuratova Zh.M. Unsteady coupled axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate. 2019, *PNRPU Mechanics Bulletin*, no. 4, pp.191-200, DOI: 10.15593 / perm.mech / 2019.4.18.

25. Lychev S.A., Manzhairov A.V., Hubert S.V. Zamknutyie resheniya kraevyih zadach svyazannoy termouprugosti [Closed solutions of boundary value problems of coupled thermoelasticity]. *Izv. RAS. MTT*, 2010, no. 4, pp. 138–154.

26. Radaev Yu.N., Taranova M.V. Volnovyie chisla termouprugih voln v volnovode s teploobmenom na bokovoy stenke [Wavenumbers of thermoelastic waves in a waveguide with heat transfer on the side wall]. *Vestn. Himsel'f. state tech. un-that. Ser. Phys. – mat. Science*, 2011, no. 2 (23), pp. 53–61.

27. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulga N.A. Mehanika svyazannyih poley v elementah konstruktsiy [The mechanics of related fields in structural members]. *Kiev, Nauk. Dumka*, 1989, 279 p.

28. Senitsky Yu.E. Biortogonalnoe mnogokomponentnoe konechnoe integralnoe preobrazovanie i ego prilozhenie k kraevyim zadacham mehaniki [Biorthogonal multicomponent finite inte-

gral transformation and its application to boundary value problems in mechanics]. *Izv. universities. Maths*, 1996, no. 8, pp. 71–81.

29. Kamke E. Spravochnik po obyiknovennyim differentsialnyim uravneniyam [Handbook of ordinary differential equations]. *Moscow, Science*, 1965, 703 p.

30. GOST R 8.945-2018. Teplofizicheskie karakteristiki pe-zokeramik na osnove niobata litiya v diapazone temperatur ot 300 K do 900 K [Thermophysical characteristics of piezoceramics based on lithium niobate in the temperature range from 300 K to 900 K]. *Moscow, Standartinform*, 2018. (www.docs.cntd.ru).

31. Panich A.A. Marakhovsky M.A., Motini D.V. Kristallicheskie i keramicheskie pezoelektriki [Crystalline and ceramic piezoelectrics]. *Engineering Bulletin of the Don*, 2011, no. 1 (www.indon.ru).

32. Babenkov M. B. Propagation of Harmonic Perturbations in a Thermoelastic Medium with Heat Relaxation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, no. 2, pp. 277–286.

33. Shlyakhin D.A. Dynamic axisymmetric direct piezoelectric effect problem for an anisotropic piezoceramic radially polarized cylinder. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2010, no. 1, pp. 253–161.