

Янковский А.П. Уточненная модель упругопластического динамического поведения армированных искривленных панелей, чувствительных к скорости деформирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 2. С. 191-202. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.17

Yankovskii A.P. The refined model of the elastic-plastic dynamic behavior of reinforced curved panels sensitive to strain rate. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 2, pp. 191-202. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.17



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.17

УДК 539.4

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ АРМИРОВАННЫХ ИСКРИВЛЕННЫХ ПАНЕЛЕЙ, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К СКОРОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 2 ноября 2020 г.
Принята: 7 июня 2021 г.
Опубликована: 12 июля 2021 г.

Ключевые слова:

гибкие искривленные панели, пологие оболочки, пространственное армирование, «плоско»-перекрестное армирование, упругопластичность, упруговязкопластичность, чувствительность к скорости деформирования, теория Амбарцумяна, уточненная теория изгиба, динамическое нагружение, численная схема типа «крест».

АННОТАЦИЯ

Сформулирована начально-краевая задача динамического упруговязкопластического деформирования гибких искривленных панелей (пологих оболочек) с «плоско»-перекрестными и пространственными структурами армирования. Неупругое поведение материалов компонентов композиции описывается определяющими уравнениями теории пластического течения с изотропным упрочнением, причем учитывается их чувствительность к скорости деформирования. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Используемые кинематические и динамические двумерные соотношения и соответствующие им краевые условия позволяют описывать механическое изгибное поведение пологих композитных оболочек с разной степенью точности. При этом учитывается возможное слабое сопротивление таких армированных панелей поперечным сдвигам. В первом приближении используемые двумерные уравнения, начальные и граничные условия вырождаются в соотношения традиционной неклассической теории Амбарцумяна. Для численного интегрирования поставленной нелинейной динамической задачи применен алгоритм шагов по времени, базирующийся на использовании явной схемы типа «крест». Исследовано упругопластическое и упруговязкопластическое поведение армированных цилиндрических пологих оболочек под действием поперечной динамической нагрузки, порожденной воздушной взрывной волной. Рассматриваются металлокомпозитные и стеклопластиковые тонкостенные конструкции. Продемонстрировано, что отказ от учета зависимости пластических свойств компонентов композиции от скорости их деформирования не позволяет адекватно описывать неупругое динамическое поведение как металлокомпозитных, так и стеклопластиковых пологих оболочек. Показано, что при расчетах даже относительно тонких (с относительной толщиной 1/50) армированных цилиндрических панелей использование теории Амбарцумяна приводит к совершенно неприемлемым результатам по сравнению с уточненной теорией изгиба. Продемонстрировано, что даже для относительно тонких искривленных панелей из стеклопластика замена традиционно используемой «плоско»-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру с наклонно уложенными некоторыми семействами волокон позволяет значительно уменьшить не только интенсивность деформаций в связующем материале, но и максимальные по модулю значения прогиба. Для металлокомпозитных пологих оболочек, имеющих слабо выраженную анизотропию композиции, положительный эффект от указанной замены структур армирования практически не проявляется.

© ПНИПУ

© Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru, ID: 0000-0001-5532-4641.

Andrey P. Yankovskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru, ID: 0000-0001-5532-4641.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE REFINED MODEL OF THE ELASTIC-PLASTIC DYNAMIC BEHAVIOR OF REINFORCED CURVED PANELS SENSITIVE TO STRAIN RATE

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 2 November 2020

Accepted: 7 June 2021

Published: 12 July 2021

Keywords:

flexible curved panels, shallow shells, spatial reinforcement, *flat*-cross reinforcement, elastoplasticity, viscoelasticity, strain rate sensitivity, Ambartsumyan theory, refined bending theory, dynamic loading, numerical scheme of the *cross* type.

ABSTRACT

The initial-boundary value problem of dynamic elastic-viscoplastic deformation of flexible curved panels (shallow shells) with *plane*-cross and spatial reinforcement structures is formulated. The inelastic behavior of the materials of the composition components is described by the constitutive equations of the theory of plastic flow with isotropic hardening, and their sensitivity to strain rate is taken into account. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The used kinematic and dynamic two-dimensional relations and the corresponding boundary conditions make it possible to describe, with varying degrees of accuracy, the mechanical bending behavior of shallow composite shells. This takes into account the possible weak resistance of such reinforced panels to transverse shears. In the first approximation, the used two-dimensional equations, the initial and boundary conditions degenerate into the relations of the traditional non-classical Ambartsumyan theory. For the numerical integration of the formulated nonlinear dynamic problem, an algorithm of time steps is applied, based on the use of an explicit scheme of the *cross* type. The elastoplastic and elastic-viscoplastic behavior of the reinforced cylindrical shallow shells under transverse dynamic loads generated by an air blast wave is investigated. Metal-composite and fiberglass thin-walled constructions are considered. It is shown that the refusal to take into account the dependence of the plastic properties of the components of the composition on the rate of their deformation does not allow adequately describing the inelastic dynamic behavior of both metal-composite and fiberglass shallow shells. It is shown that in the calculations of even relatively thin reinforced cylindrical panels (with a relative thickness of 1/50), the use of the Ambartsumyan theory leads to completely unacceptable results in comparison with the refined bending theory. It has been demonstrated that even for relatively thin curved fiberglass panels, replacing the traditional *flat*-cross reinforcement structure with a spatial structure with obliquely laid fiber families can significantly reduce not only the intensity of deformations in the binder, but also the maximum deflection values in modulus. For metal-composite shallow shells with a weakly expressed anisotropy of the composition, the positive effect of the indicated replacement of reinforcement structures is practically not manifested.

© PNRPU

Введение

Армированные искривленные панели и пологие оболочки широко используются в конструкторской практике [1–12]. Часто такие тонкостенные элементы конструкций из композиционных материалов (КМ) испытывают высокоинтенсивное нагружение [5, 8, 10–14], при котором компоненты композиции могут деформироваться неупруго [5, 10, 12]. При этом адекватность соответствующей механической модели, описывающей такое поведение КМ-конструкций, определяется точностью используемой теории расчета и количеством учитываемых экспериментальных фактов [15–18].

Жесткопластическое и упругопластическое поведение армированных и слоистых пластин моделировалось в [19–21], оболочек с изотропными слоями – в [12], а армированных искривленных панелей – в [22]. В работах [12, 22] использовалась теория пластического течения материалов с изотропным упрочнением. Однако известно, что при интенсивном динамическом нагружении пластические свойства многих материалов зависят от скорости их деформирования [16, 17, 23–25]. (Согласно терминологии, принятой в [26], такое поведение материалов называется упруговязкопластическим.) В связи с этим в [27] была разработана модель

упруговязкопластического деформирования армированных гибких пластин.

Возможное слабое сопротивление волокнистых тонкостенных конструкций поперечным сдвигам традиционно описывают в рамках теории Тимошенко – Рейснера [8, 10, 12, 28], теории Амбарцумяна [27, 29] или Редди – Немировского [4, 9]. Иногда используют теории изгиба более высоких порядков [8, 12, 22, 30], которые базируются, как правило, на гипотезе ломаной линии. В работе [22] было продемонстрировано, что для адекватного описания динамического упругопластического изгибного деформирования пологих КМ-оболочек следует использовать более точную кинематическую модель, чем в теориях Амбарцумяна и Редди – Немировского. Упруговязкопластическое поведение армированных гибких пластин в [27] рассчитывалось по теории Амбарцумяна. В силу этого остался открытым вопрос: нужно ли при расчетах динамики гибких волокнистых конструкций использовать более точные по сравнению с теорией Амбарцумяна теории изгиба в тех случаях, когда компоненты композиции чувствительны к скорости их деформирования?

Для численного интегрирования динамических нелинейных задач механики пластин и оболочек применяют явные схемы, как правило, типа «крест» [12, 22,

27], или же неявные схемы из семейства методов Нью-марка [5, 31, 32].

В связи с вышеизложенным данная работа посвящена исследованию динамического упруговязкопластического поведения армированных гибких пологих оболочек и искривленных панелей в рамках уточненной теории. Интегрирование соответствующей нелинейной начально-краевой задачи осуществляется с использованием явной численной схемы типа «крест».

1. Постановка задачи

Рассматривается полая оболочка или искривленная панель, которая имеет толщину $2h$ и с которой связана система координат x_i так, что поверхность $x_3 = 0$ – срединная поверхность ($|x_3| \leq h$), ортогональные линии x_1 и x_2 – линии главной кривизны срединной поверхности, координата x_3 откладывается в поперечном направлении. КМ-конструкция может быть пространственно или традиционно («плоско»-перекрестно) усилена K семействами волокон; плотности армирования k -го семейства волокон обозначим ω_k ($1 \leq k \leq K$). По толщине оболочки структура армирования квазиоднородна. На рис. 1, *a* изображена ортогональная «плоско»-перекрестная 2D-структура армирования ($K = 2$) [33, 34]; на рис. 1, *б* – пространственная 4D-структура ($K = 4$) [34]. Искривленность элементов КМ-панели на рис. 1 не изображена в силу ее малости.

Для описания структуры армирования с k -м семейством арматуры свяжем локальную прямоугольную систему координат $x_i^{(k)}$, причем ось $x_1^{(k)}$ ориентируем вдоль волокна, а ее направление зададим двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 2). При этом направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1, 3}$) вычисляются по формулам (2.12) из [27].

В [27] было показано, что в случае упруговязкопластического деформирования компонентов композиции при использовании теории изгиба Амбарцумяна явную численную схему типа «крест» для тонкостенных КМ-конструкций можно разработать лишь в частных случаях нагружения и пространственного армирования: на лицевых поверхностях учитываются только нормальные внешние силы; структура пространственного армирования должна обладать следующим свойством: если есть некоторое k -е семейство волокон, уложенное под наклоном ($0 < \theta_k < \pi/2$), то обязательно должно быть и парное ему l -е семейство, изготовленное из того же материала и имеющее параметры армирования $\theta_l = \pi - \theta_k$, $\varphi_l = \varphi_k$ и $\omega_l = \omega_k$, $1 \leq k, l \leq K$, $l \neq k$ (см. рис. 2). Структуры пространственного армирования, обладающие таким свойством, достаточно часто встречаются в инженерной практике [34]. Так, к ним относятся ортогональные 3D-структуры армирования [35, 36], а также структуры, которые изображены на рис. 1. Учитывая эти обстоятельства, в дальнейшем предполагаем, что касательными силами на лицевых поверхностях КМ-конструкции можно пренебречь, а структура укладки волокон отвечает указанному выше требованию. Согласно результатам работы [22] осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек искривленной КМ-панели U_i в рамках уточненной теории изгиба аппроксимируем так (геометрическую нелинейность задачи учитываем в приближении Кармана):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \\ & + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \left(\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)} \right) + \\ & + \frac{\delta_{ij} w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = (h^2 - x_3^2) \sum_{m=0}^M \frac{x_3^m}{h^2} \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i, j = \overline{1, 2};$$

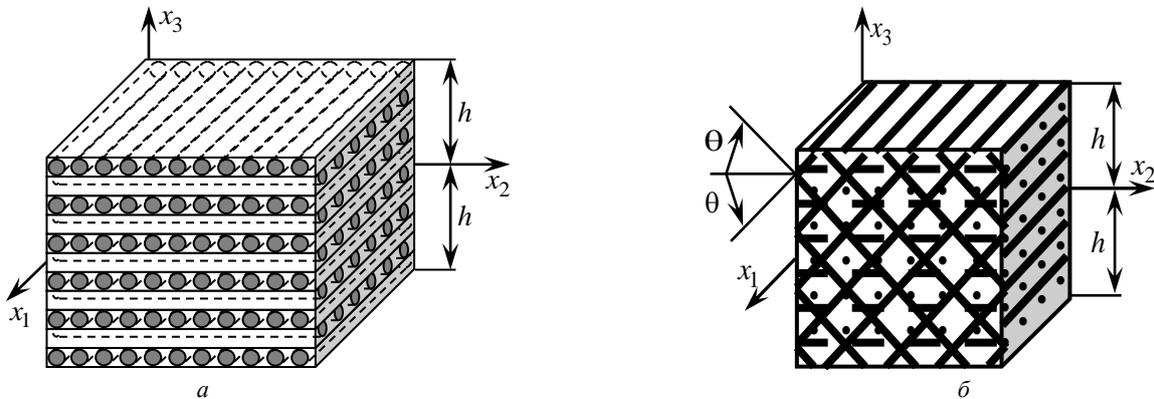


Рис. 1. Элемент искривленной КМ-панели: *a* – с ортогональной структурой 2D-армирования по эквидистантным поверхностям; *б* – с пространственной структурой 4D-армирования

Fig. 1. An element of a curved CM-panel: with an orthogonal structure of 2D-reinforcement along equidistant surfaces (*a*); with the spatial structure of 4D-reinforcement (*b*)

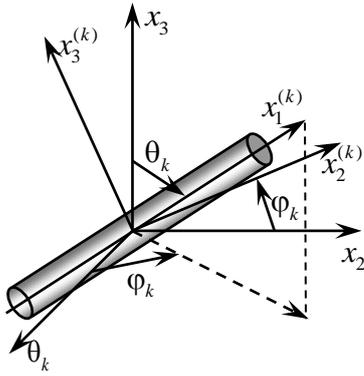


Рис. 2. Локальная прямоугольная система координат, связанная с арматурой k -го семейства

Fig. 2. A local rectangular coordinate system associated with reinforcement of the k -th family

$$\begin{aligned}
 U_i(t, \mathbf{r}) &= u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \\
 &+ 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (2) \\
 U_3(t, \mathbf{r}) &= w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \\
 i &= 1, 2, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\},
 \end{aligned}$$

где w – прогиб; u_i – перемещения точек отсчетной поверхности ($x_3 = 0$) в направлениях x_i ; R_i – главные радиусы кривизны этой поверхности; t_0 – начальный момент времени t ; ∂_i – оператор частного дифференцирования по координате x_i ($i = 1, 2$); M – целое число, задающее количество слагаемых, которые удерживаются в частичных суммах разложений по степеням поперечной координаты x_3 ; Ω – область, занимаемая конструкцией в плане. При $M = 0$ из равенств (1) и (2) получаются кинематические соотношения теорий Амбарцумяна и Редди – Немировского [4, 9, 27, 29]. В выражениях (1), (2) неизвестными являются функции w , u_i и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$), зависящие от времени t и только двух пространственных координат x_1 и x_2 .

В настоящей работе исследуется механическое поведение полой КМ-оболочки как гибкой тонкостенной системы, поэтому напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ в поперечном направлении x_3 можно аппроксимировать линейно [27, 28]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) &= \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \\
 &+ \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – нормальные напряжения на нижней (–) и верхней (+) лицевых поверхностях панели, известные из соответствующих силовых граничных условий.

Двумерные уравнения движения элемента гибкой полой КМ-оболочки в рамках уточненной теории при учете выражений (2), (3) имеют вид [22]

$$\begin{aligned}
 \rho \ddot{u}_i^{(l)} &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w) - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w - \\
 &- h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_i w + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)}, \\
 2h\rho \ddot{w} &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{s=1}^2 M_{js}^{(0)} \partial_s w \right) - \\
 &- \sum_{s=1}^2 R_s^{-1} M_{ss}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \quad (4) \\
 i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho &\equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k, \\
 M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\
 u_s^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_s(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\
 l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &\equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \\
 &= \frac{h^l}{2} \left[(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \right. \\
 &\left. + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \\
 i, j &= 1, 3, \quad s = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1;
 \end{aligned} \quad (5)$$

где ρ_0, ρ_k – объемные плотности материала связующего и арматуры k -го семейства; σ_{ij} – осредненные напряжения в композиции панели; точка – частная производная по времени t . Массовые силы в (4) не учитываются.

Как и в работе [27], материалы компонентов композиции полой оболочки предполагаются изотропными и однородными, а их динамическое упруговязкопластическое поведение описывается моделью, которая разработана в [25, 27]. Согласно структурной модели, предложенной в [27], в произвольный момент времени t определяющие уравнения для рассматриваемой композиции можно записать в виде одного матричного равенства

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &\equiv \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T, \\
 \boldsymbol{\varepsilon} &\equiv \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}\}^T; \quad (7)
 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ – шестикомпонентные векторы-столбцы осредненных напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} в КМ; шестикомпонентный вектор-столбец $\mathbf{p} = \{p_i\}$ и 6×6 -матрица $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, 6}$) вычисляются по матричным фор-

мулам (2.17) из работы [27], причем их элементы зависят от механических характеристик компонентов композиции, от их текущего упруговязкопластического состояния и от структуры армирования (углов θ_k , φ_k и плотностей ω_k ($1 \leq k \leq K$) армирования); индекс T – операция транспонирования.

Линеаризованное с помощью метода переменных параметров упругости [37] матричное соотношение (6) при учете обозначений (7) представляет собой систему шести алгебраических уравнений. Из третьего равенства этой системы можно выразить

$$\dot{\epsilon}_{33} = b_{33}^{-1} (\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31}\dot{\epsilon}_{11} - b_{32}\dot{\epsilon}_{22} - 2b_{34}\dot{\epsilon}_{23} - 2b_{35}\dot{\epsilon}_{31} - 2b_{36}\dot{\epsilon}_{12}), \quad (8)$$

где производная от напряжения $\dot{\sigma}_{33}$ известна после дифференцирования по t аппроксимации (3). Скорости деформаций композиции $\dot{\epsilon}_{ij}$ в правой части (8) получаются путем дифференцирования по времени t кинематических соотношений (1).

Для однозначного интегрирования исследуемой задачи требуется задать граничные и начальные условия. На части кромки КМ-панели (обозначим ее Γ_σ), на которой задаются внешние силы, в рамках уточненной теории изгиба должны выполняться граничные условия в силовых факторах, введенных в (5) [22]:

$$\begin{aligned} n_1 (M_{i1}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_i w) + n_2 (M_{i2}^{(l)} - M_{23}^{(l)} \partial_i w) &= P_i^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ \sum_{j=1}^2 n_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{l=1}^2 M_{jl}^{(0)} \partial_l w \right) &= P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad t \geq t_0;$$

на другой части кромки (обозначим ее Γ_u), на которой задаются перемещения, следует использовать граничные условия для двумерных кинематических величин, которые также введены в (5) [22]:

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) = u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3 \quad (j = \overline{1, 3}, \quad i = 1, 2), \quad (11) \\ n_1 &= \cos \gamma, \quad n_2 = \sin \gamma; \end{aligned}$$

p_j – внешние силы, приложенные к торцевой поверхности панели; U_{*3} – прогиб, который известен на Γ_u ; U_{*i} – заданные перемещения точек торцевой поверхности в тангенциальных направлениях x_i ($i = 1, 2$); γ – угол, который определяет направление внешней нормали к контуру $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$, ограничивающему область Ω .

Начальные условия при $t = t_0$ имеют вид (см. соотношение (2) и (5)) [22]

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) &= U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \\ u_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) &= u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \\ \dot{u}_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) &= v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1;$$

U_{0j} , V_{0j} ($j = \overline{1, 3}$) – известные в начальный момент времени t_0 перемещения и скорости точек полой КМ-оболочки.

Неизвестные двумерные функции w , u_i и $\epsilon_{i3}^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$), которые использованы в выражениях (1) и (2), и введенные соотношениями (5) кинематические переменные $u_i^{(l)}$ ($i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1$) связаны матричным равенством (27) из работы [22], элементы матрицы которого не зависят от решения рассматриваемой задачи.

2. Метод расчета

Как уже отмечалось, численное решение исследуемой задачи будем строить на базе алгоритма шагов по времени [5, 12, 22, 27, 31, 32, 37], поэтому неизвестные функции будем определять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\tau = \text{const} > 0$ – шаг по времени. Согласно результатам работ [22, 27] считаем, что при $t = t_m$ уже известны значения следующих величин:

$$\begin{aligned} w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_s^{(l)m}(\mathbf{x}) \equiv u_s^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \sigma_{33}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \quad \sigma_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\ \epsilon_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv \epsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\epsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \\ \ddot{\epsilon}_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv \ddot{\epsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \chi^{(k)m}(\mathbf{r}) \equiv \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\ s &= 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = n - 1, n, \\ 0 &\leq l \leq M + 1, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$, $\epsilon_{ij}^{(k)}$ – тензоры напряжений и деформаций в k -м компоненте композиции ($k = 0$ – связующий материал, $k \geq 1$ – арматура k -го семейства); $\chi^{(k)}$ – параметр упрочнения (параметр Одквиста) того же материала. Используя (14), по формулам (5) и (11) при $t = t_n$ можно

определить все внутренние силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$, входящие в уравнения динамического равновесия (4) и в силовые граничные условия (9), а также все внешние силы, действующие на КМ-конструкцию.

Производные по времени далее аппроксимируем центральными конечными разностями на шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ [22, 27] (исключение при этом составляют лишь случаи, которые оговорены формулами (2.8), (2.9) в работе [27]). Это позволяет разработать явную численную схему для интегрирования рассматриваемой начально-краевой задачи. Заменим вторые производные по времени в левых частях соотношений (4) их конечно-разностными аналогами, тогда при учете обозначений, аналогичных (14), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\tau^2} \left(w - 2w + w \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\ \frac{\rho}{\tau^2} \left(u_i^{(l)} - 2u_i^{(l)} + u_i^{(l)} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w \right) - \\ &\quad - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w - l M_{i3}^{(l-1)} + \\ &\quad + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w + R_i^{-1} M_{ii}^{(l)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, \\ &\quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно (5) и (14) правые части в (15) известны, поэтому после добавления к уравнениям (15) необходимых граничных условий (9), (10) при учете (11) можем по явной численной схеме рассчитать значения функций w и $u_i^{(l)}$ ($0 \leq l \leq M + 1$) в момент времени t_{n+1} . Далее по матричной формуле (30) из работы [22] определяем искомые функции u_i и $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$), затем на основании выражений (1) вычисляем осредненные деформации композиции пологой оболочки ε_{ij}^{n+1} . После этого решение исследуемой задачи при учете соотношений (6) и (8) строится совершенно так же, как и в работах [22, 27].

Структура левых частей равенств (15) свидетельствует о том, что для начала расчета по разработанной численной схеме необходимо предварительно определить значения функций w , $u_i^{(l)}$ (они заданы начальными условиями (12) при учете (13)) и функций w , $u_i^{(l)}$ (см. равенства (15) при $n = 1$). Последние можно получить по формуле Тейлора с точностью порядка τ^3 (см. выражения (40) в работе [22]). Для этого необходимо использовать начальные условия (12) и уравнения (4) при $t = t_0$.

Необходимые условия устойчивости построенной численной схемы типа «крест» вытекают из критерия Куранта и для однородных пластин и оболочек указаны в [12]. При выполнении этих условий для каждого материала композиции соответствующие условия устойчивости заведомо выполняются с запасом и для искривленной КМ-панели [22, 27].

3. Обсуждение результатов расчетов

Рассмотрим упруговязкопластическое и упругопластическое динамическое изгибное деформирование относительно тонких цилиндрических КМ-панелей толщиной $2h = 2$ см, занимающих в плане прямоугольную область $\Omega : |x_1| \leq a, |x_2| \leq b$ ($a = 3b, b = 50$ см, $h/b = 1/50$). Пологие оболочки имеют искривление в направлении x_2 ($1/R_1 = 0, R_2 = \text{const}$) со стрелой подъема $f = 12$ см. Радиус кривизны срединной поверхности при этом определяется так [22]: $R_2 = (b^2 + f^2)/(2f), 0 \leq f \leq 0,4b$. По всей кромке $\Gamma = \Gamma_u$ панели жестко закреплены (см. (10) и (11) при $U_{*i} \equiv 0$) и до момента времени $t = t_0 = 0$ находятся в естественном состоянии (см. (12) и (13) при учете $U_{0i} \equiv 0$ и $V_{0i} \equiv 0, i = \overline{1, 3}$). Конструкции нагружаются давлением $p(t)$, которое порождается воздушной взрывной волной (см. (3), (4) и (15)) [31]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(-)}(t) &= \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \\ \sigma_{33}^{(+)}(t) &= \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad (16) \\ p(t) &= \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \\ \alpha &= -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}. \end{aligned}$$

В соотношениях (16) смысл параметров p_{\max}, t_{\max} и t_{\min} вполне очевиден и подробно описан в [22]. Согласно выражениям (16) в случае $p_{\max} > 0$ динамическое давление прикладывается к нижней (вогнутой) лицевой поверхности, а в случае $p_{\max} < 0$ – к верхней (выпуклой) лицевой поверхности. На основании экспериментальных данных [31] в дальнейших расчетах приемем $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс.

Пологие КМ-оболочки изготовлены из эпоксисвязующего [38], армированного стекловолокнами [33] (стеклопластик), или из магниевый сплава ВМ65 [23], усиленного стальной проволокой У8А [33] (металлокомпозит). Упругопластическое деформирование материалов композиций при фиксированной скорости деформации характеризуется диаграммой растяжения – сжатия:

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где σ , ε – осевое напряжение и соответствующая деформация; $E^{(k)}$, $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\dot{\varepsilon})$ – модули упругости и упрочнения k -го компонента композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\dot{\varepsilon})$ – предел текучести того же компонента при скорости деформации $\dot{\varepsilon} = \text{const}$. Физико-механические характеристики материалов композиции приведены в таблице, где ν – коэффициент Пуассона. (Аппроксимации зависимостей $\sigma_s^{(k)}(\dot{\varepsilon})$, $E_s^{(k)}(\dot{\varepsilon})$ по данным, представленным в таблице, подробно обсуждаются в [27].)

Физико-механические характеристики материалов композиций [23, 33, 38]

Physical and mechanical characteristics of materials of compositions [23, 33, 38]

Материал	$\dot{\varepsilon}$, с ⁻¹	ρ , кг / м ³	E , ГПа	ν	σ_s , МПа	E_s , ГПа
Эпоксидная смола	$5 \cdot 10^{-4}$	1210	2,8	0,33	20	1,114
	104,0				22	1,238
Стекланные волокна	$5 \cdot 10^{-4}$	2520	86,8	0,25	4500	6,230
	104,0				4600	6,314
Магнийсый сплав ВМ65 (Mg)	$5 \cdot 10^{-4}$	1800	43,0	0,33	267	0,379
	0,417				306	0,589
	104,0				385	1,010
Стальная проволока У8А	$5 \cdot 10^{-4}$	7800	210,0	0,31	3968	6,973
	104,0				4100	7,035

Исследуется динамическое поведение КМ-панелей с двумя однородными ($\omega_k = \text{const}$, $\theta_k = \text{const}$ и $\varphi_k = \text{const}$) структурами армирования: 1) традиционное армирование в двух ($K = 2$) ортогональных направлениях, когда два семейства волокон укладываются по эквидистантным поверхностям в направлениях x_1 , x_2 с плотностями армирования $\omega_1 = \omega_2 = 0,2$ (см. рис. 1, а);

2) пространственное 4D-армирование ($K = 4$), когда первые два семейства волокон по-прежнему укладываются в направлениях x_1 , x_2 , а третье и четвертое семейства – наклонно по направлениям, задаваемым углами (см. рис. 2): $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$ и $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (см. рис. 1, б при $\theta = \pi/4$). Плотности армирования в последнем случае имеют значения: $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,2$ и $\omega_3 = \omega_4 = 0,05$. В обеих структурах армирования общий расход волокон одинаков.

На рис. 3 изображены осцилляции прогиба центральных точек ($w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$) стеклопластиковых пологих оболочек при $|p_{\text{max}}| = 6$ МПа; на рис. 4 – осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций связующей матрицы $\varepsilon_*^{(0)}$ ($\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max_r \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r})$, $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$ и $|x_3| \leq h$) тех же КМ-панелей; на рис. 5 и 6 представлены аналогичные зависимости $w_0(t)$ и $\varepsilon_m^{(0)}(t)$, рассчитанные для Mg–У8А-конструкций при $|p_{\text{max}}| = 20$ МПа. Номера кривых на рис. 3–6 соответствуют номерам структур армирования. Кривые 1 и 1' рассчитаны по теории Амбарцумяна ($M = 0$), а кривые 1'' и 2'' – по уточненной теории изгиба при $M = 7$ (см. (1) и (2)). Штриховые кривые 1' и сплошные кривые 1'' и 2'' получены при учете чувствительности материалов композиций к скорости их деформирования; пунктирные кривые 1 определены без учета этой чувствительности (упругопластический расчет). В последнем случае были использованы механические характеристики материалов, соответствующие скорости деформирования $\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹ (см. таблицу). Кривые на рис. 3, а – рис. 6, а соответствуют случаям $p_{\text{max}} > 0$, т.е. нагружению КМ-панелей со стороны нижних (вогнутых) лицевых поверхностей; на рис. 3, б – рис. 6, б – случаям $p_{\text{max}} < 0$, т.е. нагружению со стороны верхних (выпуклых) лицевых поверхностей.

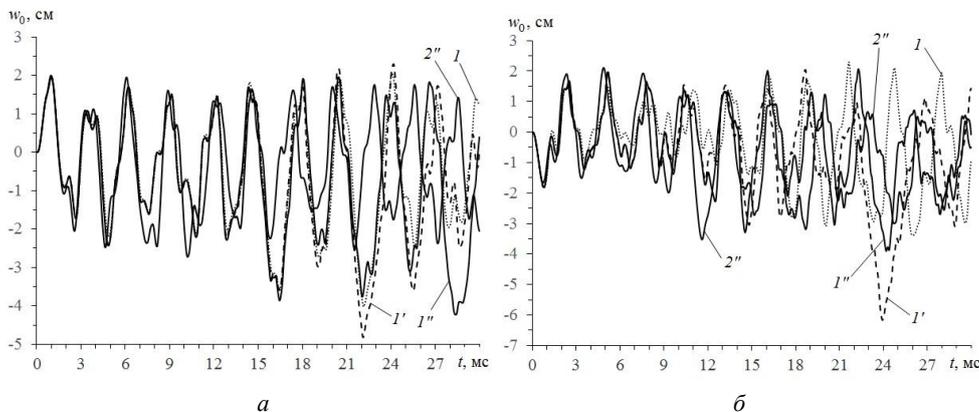


Рис. 3. Прогибы центральных точек пологих цилиндрических оболочек из стеклопластика, рассчитанные по разным теориям при нагружении конструкций снизу (а) и сверху (б)

Fig. 3. Deflections of the central points of shallow cylindrical shells made of fiberglass, calculated according to different theories when the structures are loaded from below (a) and from above (b)

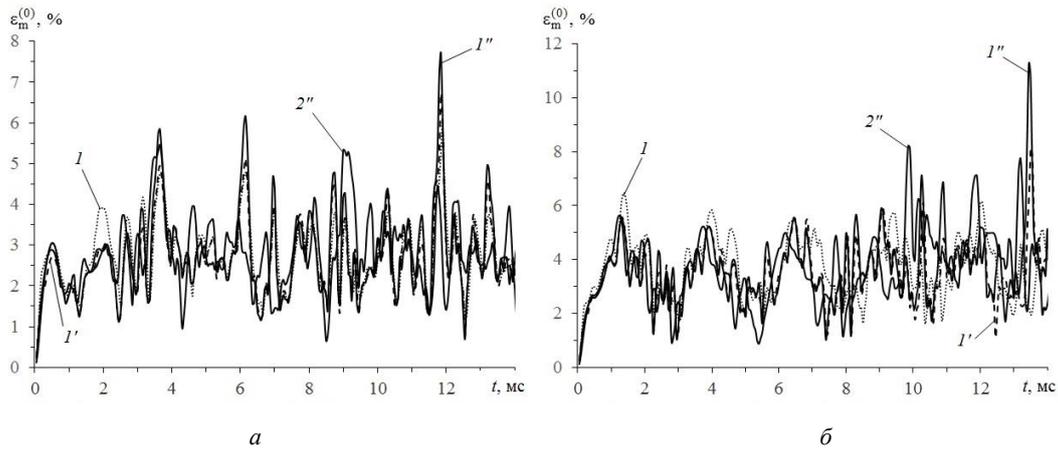


Рис. 4. Максимальные значения интенсивности деформаций связующего материала искривленных панелей из стеклопластика, рассчитанные по разным теориям при нагружении конструкций снизу (а) и сверху (б)
 Fig. 4. Maximum values of the intensity of deformations of the binder material of curved fiberglass panels, calculated according to different theories under loading of structures from below (a) and from above (b)

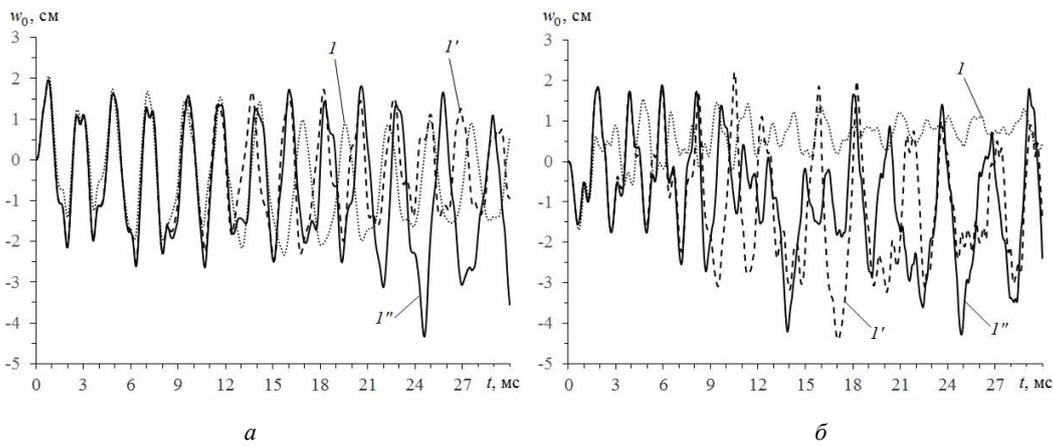


Рис. 5. Прогихбы центральных точек пологих цилиндрических оболочек из Mg-U8A-композиции, рассчитанные по разным теориям при нагружении конструкций снизу (а) и сверху (б)
 Fig. 5. Deflections of the central points of shallow cylindrical shells made of Mg-U8A-composition, calculated according to different theories under loading of structures from below (a) and from above (b)

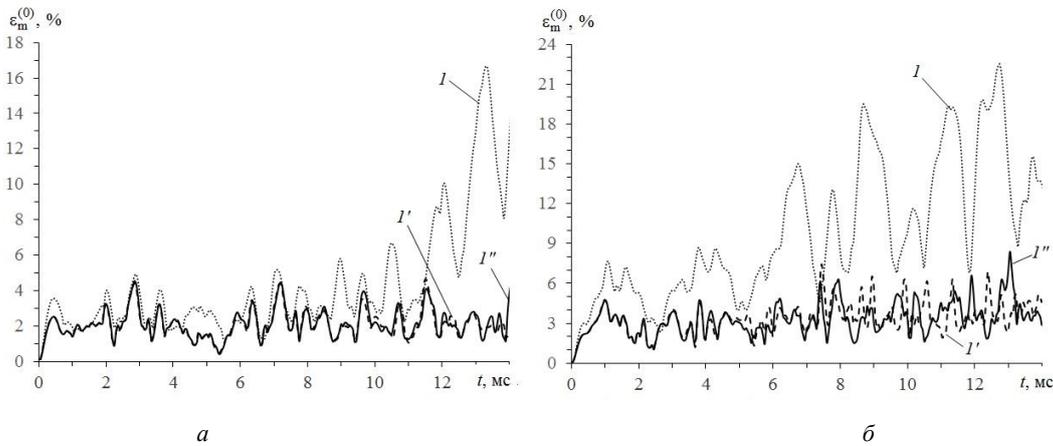


Рис. 6. Максимальные значения интенсивности деформаций связующего материала искривленных панелей из Mg-U8A-композиции, рассчитанные по разным теориям при нагружении конструкций снизу (а) и сверху (б)
 Fig. 6. Maximum values of the intensity of deformations of the binder material of curved panels made of Mg-U8A-composition, calculated according to different theories when the structures are loaded from below (a) and from above (b)

Сопоставление кривых I и I' на рис. 3 и 4 свидетельствует о том, что даже в случае относительно тонких стеклопластиковых панелей, материалы композиции которых имеют слабую зависимость пластических свойств от скорости их деформирования, расчет, выполненный без учета этой зависимости, приводит к неадекватным результатам. Еще большая разность в поведении кривых I и I' просматривается на рис. 5 и 6, т.е. в случаях металлокомпозитных панелей, связующий материал которых проявляет значительную чувствительность пластических свойств к изменению скорости его деформирования (см. таблицу). Следует отметить, что различие кривых I и I' в большей степени наблюдается на рис. 3, б – рис. 6, б (чем на рис. 3, а – рис. 6, а), т.е. при нагружении КМ-панелей сверху (со стороны выпуклых лицевых поверхностей).

Таким образом, для получения адекватных результатов динамических расчетов неупругого поведения даже относительно тонких искривленных КМ-панелей нужно учитывать чувствительность материалов композиции к скорости их деформирования, причем даже в тех случаях, когда такая чувствительность слабо выражена.

Сравнение штриховых кривых I' и сплошных кривых I'' на рис. 3–6 показывает, что эти кривые существенно различаются как для стеклопластиковых КМ-панелей (рис. 3 и 4), материалы композиции которых слабо чувствительны к скорости их деформирования, так и металлокомпозитных пологих оболочек (рис. 5 и 6), связующее которых сильно чувствительно к изменению скорости его деформирования. При этом значительное различие кривых I' и I'' наблюдается как при сравнении прогибов (рис. 3 и 5), так и при сопоставлении интенсивности деформаций в связующей матрице (рис. 4 и 6).

Следовательно, для проведения адекватных динамических расчетов упруговязкопластического поведения пологих КМ-оболочек целесообразно использовать уточненные (по сравнению с традиционной неклассической теорией Амбарцумяна) теории изгиба тонкостенных элементов конструкций. В связи с этим далее будем проводить сравнение расчетов, выполненных по уточненной теории при $M = 7$ (см. (1) и (2)).

Сопоставление кривых I'' и $2''$ на рис. 3 и 4 демонстрирует, что замена традиционной 2D-структуры армирования 1 (см. рис. 1, а) на пространственную 4D-структуру 2 (см. рис. 1, б) даже в случае относительно тонких панелей из стеклопластика позволяет существенно уменьшить как максимальные по модулю значения прогибов центральных точек рассматриваемых пологих оболочек (см. рис. 3), так и наибольшие значения интенсивности деформаций эпоксисвязующего (см. рис. 4).

Следовательно, даже в случаях относительно тонких искривленных панелей из стеклопластика, когда анизотропия композиции сильно выражена, замена традиционной ортогонально-перекрестной 2D-структуры

армирования 1 на пространственную 4D-структуру армирования 2 позволяет существенно уменьшить максимальные прогибы пологой оболочки и наибольшие значения интенсивности деформаций связующего при упруговязкопластическом деформировании таких КМ-конструкций.

Кривые $2''$ на рис. 5 и 6 не изображены, чтобы их не загромождать. Соответствующие расчеты показали, что в случае относительно тонких металлокомпозитных искривленных панелей, композиции которых имеют слабо выраженную анизотропию, указанная выше замена структур армирования позволят незначительно уменьшить максимальное значение интенсивности деформаций связующего материала, но не приводит к уменьшению максимального по модулю значения прогиба.

Таким образом, в металлокомпозитных пологих оболочках «жесткая» связующая матрица достаточно хорошо сопротивляется при изгибе поперечному сдвигу, поэтому замена «плоско»-перекрестной укладки арматуры на пространственную 4D-структуру армирования в относительно тонких КМ-конструкциях не приводит к заметному положительному эффекту. Согласно же результатам, полученным в [27], в относительно толстых (с относительной толщиной 1/10) металлокомпозитных пластинах такой эффект проявляется весьма ярко.

Заключение

Построенная уточненная модель неупругого динамического изгибного деформирования пологих КМ-оболочек позволят более точно (по сравнению с традиционной неклассической теорией Амбарцумяна) определять неупругое поведение таких армированных элементов тонкостенных конструкций при учете чувствительности материалов композиции к скорости их деформирования.

Проведенные расчеты упругопластического и упруговязкопластического поведения динамически нагружаемых в поперечном направлении искривленных КМ-панелей показали, что даже для относительно тонких конструкций неучет чувствительности компонентов композиции к скорости их деформирования дает совершенно неприемлемые результаты как для металлокомпозитных изделий (материалы которых сильно чувствительны к изменению скорости их деформирования), так и для стеклопластиковых пологих оболочек (компоненты которых слабо чувствительны к такому изменению). Особо ярко этот неучет проявляется при расчетах динамического поведения металлокомпозитных искривленных панелей.

Кроме того, выявлено, что результаты расчетов упруговязкопластического поведения даже относительно тонких пологих КМ-оболочек, выполненных (расчетов) по теории Амбарцумяна и по уточненной теории изгиба существенно различаются как при определении прогибов конструкции, так и при определении деформированного состояния компонентов композиции. Сле-

довательно, для проведения адекватных динамических расчетов упруговязкопластического деформирования искривленных армированных панелей необходимо использовать уточненную теорию их изгиба, а не простейшую неклассическую теорию Амбарцумяна.

Продемонстрировано, что в случае пологих оболочек положительный эффект от замены «плоско»-перекрестной структуры армирования, которая традиционно используется в таких КМ-изделиях [33] (см. рис. 1, а), на пространственную структуру 4D-армирования [34] (см. рис. 1, б) проявляется не только в относительно толстых панелях (с относительной толщиной $1/10$ [27]), но и в относительно тонких конструкциях (с относительной толщиной $1/50$). Причем в последнем случае удастся не только уменьшить максимальные значения интенсивности деформаций связующей матрицы, но и значительно уменьшить проги-

бы искривленной панели. Эффективность указанной замены структур армирования проявляется тем больше, чем сильнее выражена анизотропия КМ-изделия. В силу этого данный эффект ярко проявляется, например, в стеклопластиковых панелях и значительно слабее в металлокомпозитных.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

Acknowledgments

The work was performed within the framework of the state task (state registration no. 121030900260-6).

Библиографический список

1. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines / A.P. Mouritz, E. Gellert, P. Burchill, K. Challis // *Compos. Struct.* – 2001. – Vol. 53, no. 1. – P. 21–42.
2. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Composites.* – 2001. – Part A 32. – P. 901–910.
3. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Progress in Aerospace Sciences.* – 2005. – Vol. 41, no. 2. – P. 143–151.
4. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
5. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* – 2011. – Vol. 46. – P. 807–817.
6. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics / 4th ed. – Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015. – 815 p.
7. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Frontiers of Mechanical Eng.* – 2013. – Vol. 8, no. 2. – P. 187–200.
8. Vasiliev V.V., Morozov E. Advanced mechanics of composite materials and structural elements. – Amsterdam: Elsevier, 2013. – 412 p.
9. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. – Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
10. Прикладные задачи механики цилиндрических оболочек / Ю.С. Соломонов, В.П. Георгиевский, А.Я. Недбай, В.А. Андришин. – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
11. Димитриенко Ю.И. Механика композитных конструкций при высоких температурах. – М.: Физматлит, 2019. – 448 с.
12. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
13. Qatu M.S, Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Composite Structures.* – 2010. – Vol. 93. – P. 14–31.
14. Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // *Int. J. Impact Eng.* – 2014. – Vol. 67. – P. 27–38.
15. Malachowsky J., L'vov G., Daryazadeh S. Numerical prediction of the parameters of a yield criterion for fibrous composites // *Mech. Compos. Mater.* – 2017. – Vol. 53, no. 5. – P. 589–600.
16. Hajlane A., Varna J. Identification of a model of transverse viscoplastic deformation for a ud composite from curvature changes of unsymmetric cross-ply specimens // *Mech. Compos. Mater.* – 2019. – Vol. 55, no. 3. – P. 519–552.
17. Effect of degree of cure on viscoplastic shear strain development in layers of [45/45]_s glass fibre/epoxy resin composites / L. Pupure, S. Saseendran, J. Varna, M. Basso // *J. Compos. Mater.* – 2018. – Vol. 52, no. 24. – P. 3277–3288.
18. Fedotov A.E. Hybrid model for homogenization of the elastoplastic properties of isotropic matrix composites // *Mech. Compos. Mater.* – 2017. – Vol. 53, no. 3. – P. 361–372.
19. Jahangirov A. Load-carrying capacity of fiber-reinforced annular tree-layer composite plate clamped on its external and internal contours // *Mech. Compos. Mater.* – 2016. – Vol. 52, no. 2. – P. 271–280.
20. Romanova T.P. Modeling the dynamic bending of rigid-plastic hybrid composite curvilinear plates with rigid inclusion // *Mech. Solids.* – 2019. – Vol. 54, no. 5. – P. 134–150.
21. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformation of an elastoplastic circular three-layer plate in temperature field // *Mech. Compos. Mater.* – 2019. – Vol. 55, no. 4. – P. 727–740.
22. Янковский А.П. Уточненная модель упругопластического изгибного деформирования гибких армированных пологих оболочек, построенная на основе явной схемы типа «крест» // *Вычислительная механика сплошных сред.* – 2017. – Т. 10, № 3. – С. 276–292.
23. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н.И. Безухов, В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко, А.М. Синюков; под ред. И.И. Гольденבלата. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.
24. Белл Дж. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть II. Конечные деформации. – М.: Мир, 1984. – 431 с.
25. Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш. Модель упругопластического течения при переменной скорости деформирования //

Вестник Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Механика. – 2013. – № 5 (1). – С. 179–187.

26. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. – М.: Мир, 1979. – 302 с.

27. Янковский А.П. Моделирование упругопластического изгиба пространственно-армированных пластин при учете чувствительности компонентов композиции к изменению скорости деформирования // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 4. – С. 660–686.

28. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.

29. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.

30. Whitney J., Sun C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites // J. of Sound and Vibration. – 1973. – Vol. 30, no. 1. – P. 85–97.

31. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Computers & Structures. – 1987. – Vol. 26, no. 1/2. – P. 1–15.

References

1. Mouritz, A.P., Gellert, E., Burchill, P., Challis, K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines, *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21–42.

2. Bannister, M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective, *Composites*, 2001, part A 32, pp. 901–910.

3. Soutis, C. Fibre reinforced composites in aircraft construction, *Progress in Aerospace Sciences*, 2005, vol. 41, no. 2, pp. 143–151.

4. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2004, 831 p.

5. Kazanci, Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, pp. 807–817.

6. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics / 4th ed. Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015, 815 p.

7. Gill, S.K., Gupta, M., Satsangi, P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites, *Frontiers of Mechanical Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200.

8. Vasiliev V.V., Morozov E. Advanced mechanics of composite materials and structural elements. *Amsterdam, Elsevier*, 2013, 412 p.

9. Andreev A.N. Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model i nekotorye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]. *Saarbrücken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing*, 2013. 93 p.

10. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh cilindricheskikh obolochek [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. *Moskva, Fizmatlit*, 2014, 408 p.

11. Dimitrienko Yu.I. Mekhanika kompozitnykh konstruksiy pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite structures at high temperatures]. *Moskva, Fizmatlit*, 2019, 448 p.

12. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukcij [Nonlinear problems of dy-

32. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.

33. Композиционные материалы: справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.

34. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно-армированные композиционные материалы: справочник. – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.

35. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение / И.Г. Жигун, М.И. Душин, В.А. Поляков, В.А. Якушин // Механика полимеров. – 1973. – № 6. – С. 1011–1018.

36. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // *Mechanics of Composite Materials*. – 2009. – Vol. 45, no. 2. – P. 241–254.

37. Хажинский Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов. – М.: Научный мир, 2011. – 231 с.

38. Справочник по композитным материалам: в 2 кн. Кн. 1 / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; под ред. Б.Э. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.

namics composites designs]. *Nizhniy Novgorod, Publ Nizhniy Novgorod State University*, 2002, 400 p.

13. Qatu, M.S, Sullivan, R.W., Wang, W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009, *Composite Structures*, 2010, vol. 93, pp. 14–31.

14. Alderliesten, R.C., Benedictus, R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review, *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27–38.

15. Malachowsky, J., L'vov, G., Daryazadeh, S. Numerical prediction of the parameters of a yield criterion for fibrous composites, *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 589–600.

16. Hajlane, A., Varna, J. Identification of a model of transverse viscoplastic deformation for a ud composite from curvature changes of unsymmetric cross-ply specimens, *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 519–552.

17. Pupure, L., Saseendran, S., Varna, J., Basso, M. Effect of degree of cure on viscoplastic shear strain development in layers of [45/-45]_s glass fibre/epoxy resin composites, *J. Compos. Mater.*, 2018, vol. 52, no. 24, pp. 3277–3288.

18. Fedotov, A.E. Hybrid model for homogenization of the elastoplastic properties of isotropic matrix composites, *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 361–372.

19. Jahangirov, A. Load-carrying capacity of fiber-reinforced annular tree-layer composite plate clamped on its external and internal contours, *Mech. Compos. Mater.*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 271–280.

20. Romanova, T.P. Modeling the dynamic bending of rigid-plastic hybrid composite curvilinear plates with rigid inclusion, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 134–150.

21. Starovoitov, E.I., Leonenko, D.V. Deformation of an elastoplastic circular three-layer plate in temperature field, *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 727–740.

22. Yankovskii, A.P. Utochnennaya model' uprugoplasticheskogo izgibnogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh pologikh obolochek, postroennaya na osnove yavnoi skhemy tipa "krest" [A refined model of elastic-plastic bending deformation of flexible reinforced shallow shells based on explicit "cross" scheme]. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 276–292.

23. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. Raschety na prochnost', ustoychivost' i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur [Calculations on strength, stability and fluctuations in conditions of high temperatures] / Ed. by I.I. Gol'denblat. *Moskva, Mashinostroenie*, 1965, 567 p.
24. Encyclopedia of Physics / Chief ed. S. Flügge. Vol. VIa/1, Mechanics of Solids I / Ed. C. Truesdell. *Berlin – Heidelberg – New York, Springer-Verlag*, 1973.
25. Karimbayev, T.D., Mamayev, S.H. Model' uprugoplasticheskogo techeniya pri peremennoy skorosti deformirovaniya [The model of elastic-plastic flow at a varying strain rate]. *Vestnik Nizhegorod. un-ta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika – Bulletin of the Nizhny Novgorod University. N.I. Lobachevsky. Series: mechanics*, 2013, no. 5 (1), pp. 179-187.
26. Kolarov D., Baltov A., Boncheva N. Mekhanika plasticheskikh sred [Mechanics of plastic mediums]. *Moskva, Mir*, 1979, 302 p.
27. Yankovskii, A.P. Modeling the elasto-visco-plastic bending of spatially reinforced plates accounting for the strain-rate sensitivity of composition components. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 832-852. DOI: 10.3103/S0025654419050200.
28. Bogdanovich A.E., Nelineinye zadachi dinamiki cilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. *Riga, Zinatne*, 1987, 295 p.
29. Ambarcumian S.A. Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek [The general theory of anisotropic shells]. *Moskva, Nauka*, 1974, 446 p.
30. Whitney, J., Sun, C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites, *J. of Sound and Vibration*, 1973, vol. 30, no. 1, pp. 85-97.
31. Houlston, R., DesRochers, C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Computers & Structures*, 1987, vol. 26, no. 1/2, pp. 1-15.
32. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. *Oxford, Butterworth-Heinemann*, 2000, 707 p.
33. Karpinos D.M. Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite materials. Reference Book]. *Kiev, Naukova dumka*, 1985, 592 p.
34. Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A. Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Spatially Reinforced Composite Materials. Reference Book]. *Moskva, Mashinostroenie*, 1987, 224 p.
35. Zhigun, I.G., Dushin, M.I., Poliakov, V.A., Yakushin, V.A. Kompozitsionnye materialy, armirovannye sistemoi priamykh vzaimno ortogonal'nykh volokon. 2. Eksperimental'noe izuchenie [Composite materials reinforced with a system of straight mutually orthogonal fibers. 2. Experimental study], *Mekhanika polimerov – Mechanics of polymers*, 1973, no. 6, pp. 1011-1018.
36. Schuster, J., Heider, D., Sharp, K., Glowania, M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites, *Mechanics of Composite Materials*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 241-254.
37. Khazhinskii G.M. Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov [Model of deformation and fracture of metals]. *Moskva, Nauchny mir*, 2011, 231 p.
38. Lubin G. Handbook of composites. *New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc.*, 1982, 442 p.