

Баженов В.Г., Демарева А.В., Жестков М.Н., Кибец А.И. Особенности численного моделирования упруго-пластического выпучивания полусферических оболочек при нагружении жестким индентором // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 22–33. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.02

Bazhenov V.G., Demareva A.V., Zhestkov M.N., Kibets A.I. Special features of numerical simulation for elastic-plastic buckling of hemispherical shells under loading with the rigid indenter. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 2. Pp. 22-33. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.02



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.2.02

УДК 539.3

## ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВЫПУЧИВАНИЯ ПОЛУСФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НАГРУЖЕНИИ ЖЕСТКИМ ИНДЕНТОРОМ

**В.Г. Баженов, А.В. Демарева, М.Н. Жестков, А.И. Кибец**

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 20 мая 2016 г.  
Принята: 10 июня 2016 г.  
Опубликована: 30 июня 2016 г.

*Ключевые слова:*

оболочка, пластические деформации, выпучивание, критическая нагрузка

АННОТАЦИЯ

Рассматривается трехмерная задача упругопластического деформирования и выпучивания полусферических оболочек при контактом взаимодействии с жесткими телами. Для описания деформирования оболочки применяется текущая лагранжева формулировка. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей. В качестве уравнений состояния используются соотношения теории течения с изотропным упрочнением. Контактное взаимодействие жесткого тела и оболочки моделируется исходя из условия непроникания. Для дискретизации определяющей системы уравнений по пространственным переменным применяется 8-узловой изопараметрический конечный элемент с полилинейными функциями формы. Решение задачи при заданных граничных и начальных условиях основано на моментной схеме метода конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест». Выполнены расчеты упругопластического деформирования и выпучивания полусферической стальной оболочки, расположенной на неподвижной плите при квазистатическом вдавлении недеформируемого индентора. Индентор имеет вид цилиндрической оболочки с продольными вырезами в области контакта. Количество вырезов в расчетах варьировалось. Проведено численное исследование влияния формы индентора на уровень пластических деформаций и величину критической нагрузки. Как показали результаты расчетов, полусферическая оболочка в процессе нагружения претерпевает значительные локальные формоизменения в области контакта с индентором, характеризующиеся большими смещениями и углами поворота конечных элементов как жесткого целого. Достоверность результатов численного решения задачи подтверждается хорошим соответствием с экспериментальными данными других авторов. Показано, что при малых деформациях поперечного сдвига и больших углах поворота применение моментной схемы метода конечных элементов с определением скоростей деформаций и напряжений в локальном базисе вполне обоснованно при использовании явной конечно-разностной схемы интегрирования типа «крест» с малыми шагами по времени.

© ПНИПУ

© **Баженов Валентин Георгиевич** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: bazhenov@mech.unn.ru  
**Демарева Анастасия Вячеславовна** – аспирант, e-mail: ivdemarev@mail.ru  
**Жестков Максим Николаевич** – аспирант, e-mail: mnzhestkov@yandex.ru  
**Кибец Александр Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: kibec@mech.unn.ru

**Valentin G. Bazhenov** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: bazhenov@mech.unn.ru  
**Anastasia V. Demareva** – Postgraduate student, e-mail: ivdemarev@mail.ru  
**Maxim N. Zhestkov** – Postgraduate student, e-mail: mnzhestkov@yandex.ru  
**Alexander I. Kibets** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: kibec@mech.unn.ru

## SPECIAL FEATURES OF NUMERICAL SIMULATION FOR ELASTIC-PLASTIC BUCKLING OF HEMISPHERICAL SHELLS UNDER LOADING WITH THE RIGID INDENTER

V.G. Bazhenov, A.V. Demareva, M.N. Zhestkov, A.I. Kibets

Research Institute of Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 20 May 2016  
Accepted: 10 June 2016  
Published: 30 June 2016

#### Keywords:

shell, plastic deformation, buckling, critical load

### ABSTRACT

The three-dimensional problem of elastic-plastic deformation and buckling of the hemispherical shells under contact with the rigid bodies is considered. Current Lagrangian formulation is applied to describe the shell deformation. The equation of motion is derived from the balance of possible work powers. The ratios of the flow theory with isotropic hardening are used as the equations of state. Contact interaction of a rigid body and shell is modeled based on non-penetration conditions. We use a 8-node isoparametric finite element with multilinear form functions for a digitization of the constitutive system of equations. The solution of the problem under given boundary and initial conditions is based on the moment scheme of finite element method and an explicit cross type finite-difference scheme of time integration. Calculations of elastic-plastic deformation and buckling of hemispherical steel shell, located on the stationary plate at quasi-static indentation by nondeformable indenter, are done. Indenter has a form of a cylindrical shell with longitudinal notches in the contact area. Number of notches is varied in the calculations. A numerical study of the influence of the indenter form on the level of plastic deformation and the value of the critical load is carried out. As shown by the results of calculations, significant local deformations of hemispherical shell in the contact area with the indenter in the process of loading are formed. It is characterized by large displacements and rotation angles of finite element as a rigid body. The reliability of the results of numerical solution of the problem is confirmed by a good agreement with the experimental data of other authors. It is shown that the application of moment scheme of finite element method to determine the rate of strain and stress in the local basis is justified at low shear deformations and large angles of rotation torque by using explicit cross type finite-difference scheme of time integration with small time steps.

© PNRPU

---

## Введение

Для упругопластических сферических оболочек при сжатии, потере устойчивости и последующем закритическом деформировании характерна близкая к билинейной зависимость силы сопротивления от прогиба. Благодаря этому они хорошо поглощают (адсорбируют) энергию внешнего динамического воздействия и представляют значительный интерес как демпфирующий элемент при проектировании современных противоударных конструкций.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований упругопластического выпучивания сферических оболочек при различных условиях нагружения представлены в [1–14]. Рассмотрены задачи упругопластического выпучивания сегментов сферических оболочек [1–3] и замкнутых сферических оболочек [4] при нагружении равномерным внешним давлением. Отмечено, что учет пластических деформаций приводит к существенному снижению критической нагрузки. В [5, 6] представлен обзор методов и результатов теоретических и экспериментальных исследований устойчивости тонкостенных конструкций. Производится анализ выпучивания сегментов пологих сферических оболочек при квазистатическом сжатии локальными нагрузками, приложенными по периметру сегмента. Изучены разнообразные аспекты влияния локальных конструктивных дефектов на устойчивость оболочек. Показано, что угол обхвата ложементов существенно влияет на форму волнообразования. В [7] проведен экспериментальный и численный анализ осесимметричного упруго-

пластического выпучивания полусферических оболочек ( $26 < R/h < 45$ ) при сжатии между двумя плитами. В [8] приводятся результаты экспериментальных и теоретических исследований предельных состояний стальных полусферических оболочек с различными геометрическими параметрами при локальном контактном нагружении недеформируемыми инденторами различной формы. В [9, 10] представлены результаты конечно-элементного анализа нелинейного деформирования алюминиевых и стальных полусферических оболочек при осевом ударном и квазистатическом нагружениях. Исследовано влияние геометрических параметров и упругопластических характеристик конструкционных материалов на деформирование оболочек. В [11] в осесимметричной постановке рассмотрена задача упругопластического выпучивания свинцовой сферической оболочки в алюминиевом скафандре под действием импульса перегрузки. В [12] излагается процедура калибровки теоретических результатов (критических нагрузок) на основании экспериментальных данных.

С развитием математических моделей, вычислительной техники, численных методов и программных систем появились новые возможности решения задач устойчивости упругопластических конструкций в геометрически нелинейной постановке как неидеальных систем с начальными несовершенствами формы при сложных нагружениях. При этом вместо критических бифуркационных нагрузок определяются предельные нагрузки и соответствующие формоизменения конструкций. Для численного решения подобных квазистатических задач в теории упругости хорошо разработан метод продолжения по обобщенному параметру нагружения [13]. Для упругопластических задач этот метод неэффективен и малопригоден, особенно при решении контактных задач, ввиду зависимости решения от истории нагружения, которое фактически не предоставляет свободы выбора оптимального параметра нагружения с целью регуляризации задачи в предельных точках интегральной зависимости нагрузка-перемещение. В связи с этим для исследования процессов деформирования и оценки предельных состояний упругопластических тел при неоднородных напряженно-деформированных состояниях, сложных нагружениях и немалых формоизменениях получила применение динамическая формулировка задачи с использованием в качестве параметра нагружения модифицированного времени [1–3]. В квазистатических задачах роль регуляризатора численного решения выполняют инерционные члены, вклад которых регулируется выбором соответствующей скорости нагружения и ее реверсом при разгрузках. Отметим, что динамическая постановка задачи в сочетании с явной схемой интегрирования по времени позволяет весьма эффективно моделировать закритическое поведение и контактное взаимодействие упругопластических элементов конструкций при квазистатическом нагружении [1–3, 14].

Ниже приводятся результаты численного исследования квазистатического выпучивания упругопластических полусферических оболочек при вдавливании жестких инденторов в динамической постановке [2, 14]. Решение задачи основано на моментной схеме метода конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест» [1, 2]. Результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными.

## 1. Определяющая система уравнений и метод решения

Деформирование оболочки описывается в переменных Лагранжа с позиций механики сплошных сред [15–19]. Наряду с общим базисом  $X = [X_1 X_2 X_3]$  введем местную (сопутствующую) систему координат  $x = [x_1 x_2 x_3]$  с направляющими косинусами  $n_{ij}$ :

$$x_i = n_{ij} X_j, \quad i, j = \overline{1,3} \quad (1)$$

(по повторяющимся индексам ведется суммирование). Здесь  $x_3$  – координата, отсчитываемая от срединной поверхности оболочки и нормальная к ней,  $x_1, x_2$  – ортогональны к  $x_3$ . Деформации поперечного сдвига предполагаем малыми, что позволяет считать местный базис ортогональным в течение всего процесса деформирования. Компоненты тензора скоростей деформаций в местном базисе  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  выражаются через компоненты  $\dot{\varepsilon}'_{ij}$  скорости деформаций в общем базисе:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = n_{im} n_{jk} \dot{\varepsilon}'_{mk}, \quad (2)$$

которые определяются в метрике текущего состояния,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (\dot{U}_{i,j} + \dot{U}_{j,i}) / 2, \quad (i, j = \overline{1,3}) \quad X_i = X_i|_{t=0} + \int_0^t \dot{U}_i dt. \quad (3)$$

В (2)  $U_i$  – перемещения в общей декартовой системе координат  $X$ ; индекс после запятой означает частную производную по соответствующей пространственной переменной, точка над символом – частную производную по времени  $t$ .

Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей [15,16,19]:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{U}_i \delta \dot{U}_i dV = \int_{\Gamma_p} P_i \delta \dot{U}_i d\gamma + \int_{\Gamma_q} P_i^q \delta \dot{U}_i d\gamma \quad (i, j = \overline{1,3}), \quad (4)$$

где  $\dot{U}_i$  – компоненты вектора скорости перемещения в общей декартовой системе координат  $X$ ;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензоров напряжений Коши;  $\rho$  – плотность;  $P_i^q$  – контактное давление;  $P_i$  – распределенная нагрузка;  $\Omega$  – исследуемая область;  $\Gamma_q$  – поверхность контакта;  $\Gamma_p$  – зона действия внешнего давления;  $\delta \dot{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\delta \dot{U}_i$  – вариации  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\dot{U}_i$  (на поверхности с заданными кинематическими граничными условиями  $\delta \dot{U}_i = 0$ ); точка над символом означает частную производную по времени  $t$ ; по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Упругопластическое деформирование материала описывается соотношениями теории течения [1, 20, 21].

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} + \sigma^v \delta_{ij}, \quad \dot{\sigma}^v = -3K \dot{\varepsilon}^v, \quad \dot{\varepsilon}^v = \dot{\varepsilon}_{ii} / 3, \\ \dot{\varepsilon}'_{ij}{}^e &= \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}^v \delta_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}{}^p, \quad \dot{\varepsilon}_{ii}{}^p = 0, \quad \dot{\sigma}'_{ij} = 2G \dot{\varepsilon}'_{ij}{}^e, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}{}^p = \dot{\lambda} \partial f / \partial \sigma'_{ij}, \quad f = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - \frac{2}{3} \sigma_{\tau}^2 = 0; \quad \sigma_{\tau} = \sigma_{\tau}(\chi), \quad \chi = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{\varepsilon}'_{ij}{}^p \dot{\varepsilon}'_{ij}{}^p} dt.$$

Здесь  $\sigma'_{ij}$ ,  $\dot{\varepsilon}'_{ij}$ ,  $\sigma^v$ ,  $\dot{\varepsilon}^v$  – девиаторные и шаровые компоненты тензоров напряжения и скоростей деформаций;  $\dot{\varepsilon}_{ij}{}^p$  – скорости пластических деформаций;  $G, K$  – модули сдвига и объемного сжатия;  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера;  $f$  – поверхность текучести Мизеса;  $\sigma_{\tau}$  – динамический предел текучести;  $\dot{\lambda}$  – параметр, тождественно равный нулю при упругом деформировании и определяемый при упругопластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки.

На контактной поверхности формулируются условия непроникания по нормали и свободного скольжения вдоль касательной к поверхности контакта:

$$\dot{u}_n^1 = \dot{u}_n^2, \quad q_n^1 = -q_n^2, \quad q_i^1 = q_i^2 = 0, \quad i = \tau_1, \tau_2, \quad (6)$$

где  $n, \tau_1, \tau_2$  – единичные векторы локального, ортогонального базиса,  $n$  – вектор нормали к поверхности контакта,  $\tau_1, \tau_2$  ортогональны  $n$ ; нижний индекс  $i$  означает проекцию вектора на оси подвижной системы координат, верхними индексами 1 и 2 обозначены номера соответствующих подобластей, поверхности которых находятся в контакте. Определяющая система уравнений (1)–(4) дополняется кинематическими граничными и начальными условиями.

Для дискретизации определяющей системы уравнений применяются моментная схема метода конечных элементов и явная конечно-разностная схема типа «крест» [19, 22–25]. Оболочка заменяется лагранжевой сеткой, состоящей из 8-узловых конечных элементов (КЭ). В узлах сетки определяются ускорения  $\{\ddot{U}\}$ , скорости  $\{\dot{U}\}$  и перемещения  $\{U\}$  в общей системе координат  $\{X\} = \{X_1 X_2 X_3\}^T$ . Предполагается, что деформации поперечного сдвига в конечных элементах малы, а смещения и углы поворота КЭ как жесткого могут быть большими. В каждом конечном элементе вводится локальный базис  $\{x\} = \{x_1 x_2 x_3\}^T$  (1), отслеживающий его вращение как жесткого целого пошаговым пересчетом направляющих косинусов осей [1, 25, 26]. Конечный элемент с помощью полилинейного изопараметрического преобразования отображается на куб  $-1 \leq \xi_i \leq 1$  ( $i = \overline{1, 3}$ ):

$$x_i = \sum_{k=1}^8 x_i^k N_k(\xi_1 \xi_2 \xi_3), \quad N_k = (1 + \xi_1 / \xi_1^k)(1 + \xi_2 / \xi_2^k)(1 + \xi_3 / \xi_3^k) / 8, \quad (7)$$

где  $x_i^k, \xi_i^k$  – координаты узлов в базисах  $x, \xi$ ;  $N_k$  – функции формы. Компоненты скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}$  в КЭ аппроксимируются линейными функциями

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^0 + \dot{\epsilon}_{ij}^1 \xi_1 + \dot{\epsilon}_{ij}^2 \xi_2 + \dot{\epsilon}_{ij}^3 \xi_3, \quad (8)$$

где  $\dot{\epsilon}_{ij}^0$  – значения компонент скорости деформаций в центре КЭ (безмоментные составляющие), а  $\dot{\epsilon}_{ij}^k = \partial \dot{\epsilon}_{ij} / \partial \xi_k = \text{const}$  – их градиент (моментные составляющие). Чтобы не превышать сдвиговую жесткость элемента, в (6) учитываются только компоненты  $\dot{\epsilon}_{ij}^k$ , соответствующие изгибающим и крутящим моментам в теории оболочек [24].

С применением формул численного интегрирования [17, 18] напряжения, определенные в локальном базисе, заменяются статически эквивалентными узловыми силами, которые проецируются в общую систему координат. После замены интегрирования по области  $\Omega$  суммированием по элементам получим дискретный аналог уравнений движения

$$[M]\{\ddot{U}\} = \{F\}, \quad (9)$$

где  $[M]$  – диагональная матрица масс;  $\{\ddot{U}\}, \{F\}$  – векторы, составленные из ускорений узлов КЭ-сетки и результирующих узловых сил в общей системе координат. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (9) интегрируется по явной конечно-разностной схеме типа «крест».

Численная схема для определения контактного давления и статически эквивалентных ему узловых сил приведена в [23].

Конечно-элементная методика [19, 22, 23] реализована в рамках вычислительной системы (ВС) «Динамика-3», аттестованной в научно-техническом центре по ядерной и радиационной безопасности (регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013) и Госстандарте РФ (сертификат соответствия Госстандарта России № РОСС RU.ME20.H00338).

## 2. Результаты исследований

На основе изложенной выше методики и ВС «Динамика-3» выполнен расчет упругопластического деформирования и выпучивания полусферической стальной оболочки ( $R = 3,85$  см,  $R/h = 48,125$ ,  $\rho = 7,8$  г/см<sup>3</sup>,  $E = 150$  ГПа,  $\mu = 0,33$ , диаграмма деформирования приведена на рис. 1), расположенной на неподвижной плите при квазистатическом вдавливании недеформируемого индентора, имеющего вид цилиндрической оболочки ( $R = 2,5$  см,  $R/h = 5$ ) с продольными вырезами в области контакта, количество  $N$  которых варьировалось (рис. 2, а, б). Размеры опорных элементов инденторов при этом не менялись. Скорость вертикального смещения индентора 1 м/с.

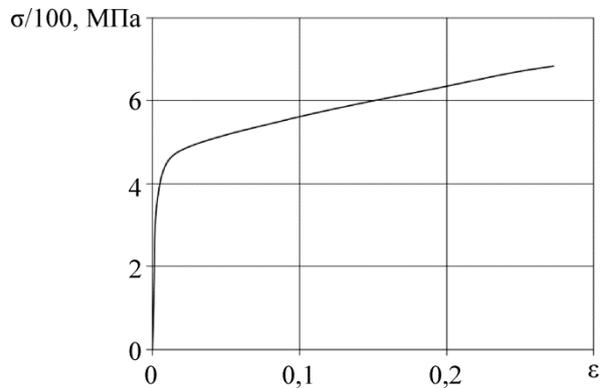


Рис. 1. Диаграмма деформирования

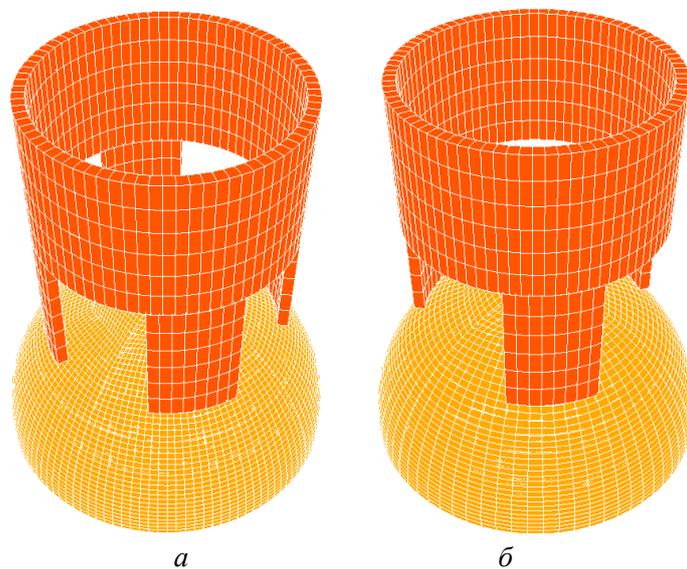


Рис. 2. Формы инденторов и конечно-элементные сетки расчетной области:  
а –  $N = 4$ ; б –  $N = 3$

Численное исследование проводилось на сетках с одним слоем конечных элементов по толщине оболочки. Количество конечных элементов сетки оболочки в расчетах было равным 4800. Результаты решения задачи приведены на рис. 3–5.

На рис. 3, *a, б* представлены графики  $F(u)$  изменения контактной силы в зависимости от смещения инденторов, изображенных на рис. 2, *a, б* соответственно. Сплошной, пунктирной и штриховой линиями отмечены результаты эксперимента [8] и расчетов в квазистатической и динамической постановке с применением вычислительных систем ABAQUS [8, 27] и «Динамика-3» соответственно. На рис. 3, *в* сравниваются графики зависимости  $F(u)$ , полученные на основе ВС «Динамика-3» для инденторов при  $N = 4$  и  $N = 3$ . Остаточные формы полусферической оболочки в расчете и натурном эксперименте [8] для первого варианта задачи ( $N = 4$ ) представлены на рис. 4. Распределение интенсивностей пластических деформаций в оболочке, полученное с применением вычислительной системы «Динамика-3», изображено

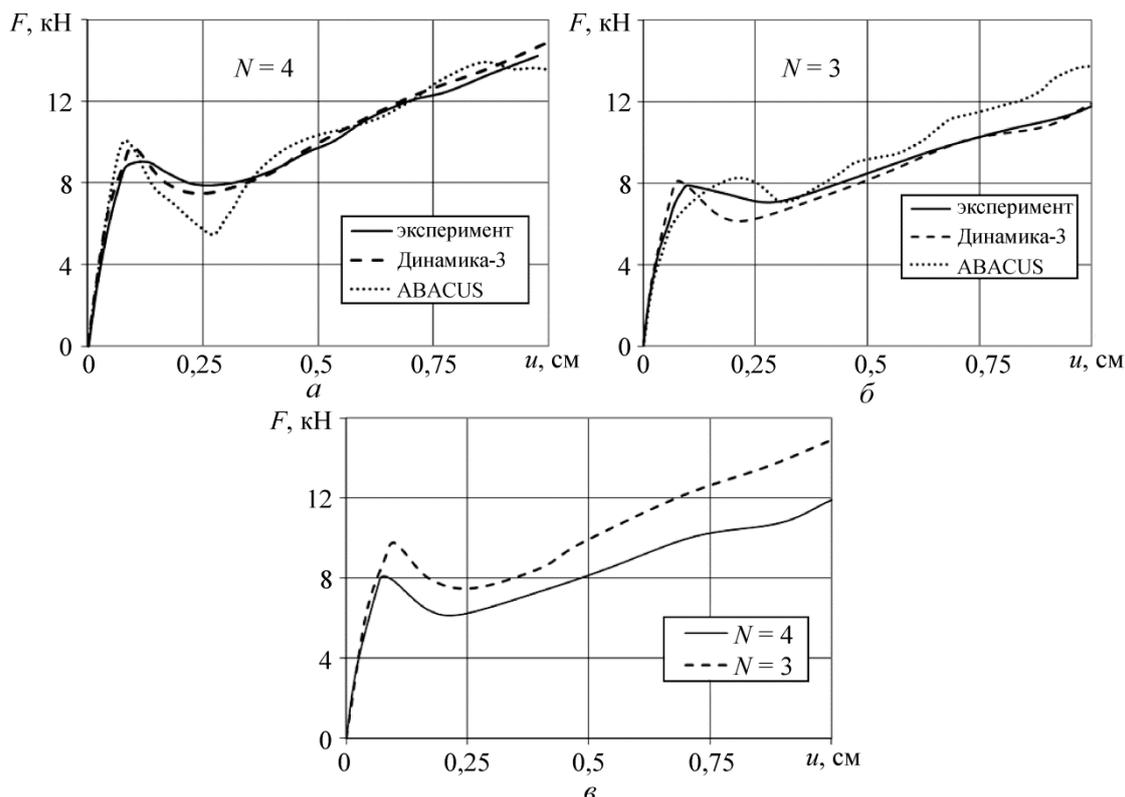


Рис. 3. Зависимость контактной силы от смещения индентора

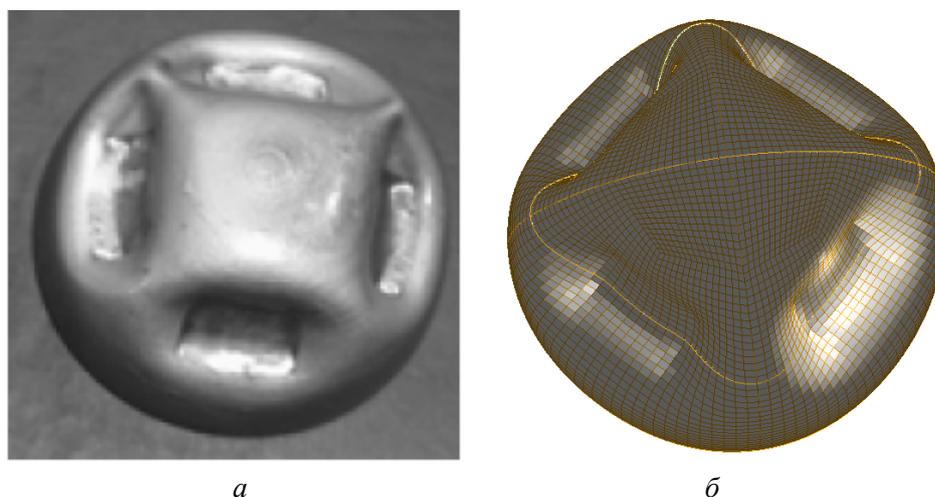


Рис. 4. Остаточная форма оболочки для первой задачи ( $N = 4$ ):  
*a* – эксперимент; *б* – ВС «Динамика-3»

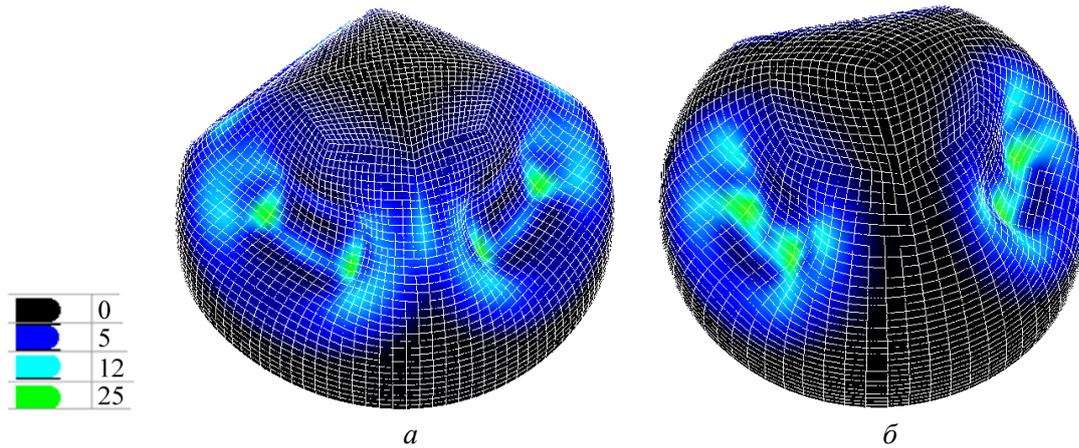


Рис. 5. Остаточное распределение интенсивности пластических деформаций (%) в оболочке:  $a - N = 4$ ;  $b - N = 3$

на рис. 5 на момент окончания нагружения. В табл. 1 приведены максимальные значения параметра Оджвиста  $\chi$ , сдвиговых деформаций  $\varepsilon_{12}$  в срединной поверхности оболочки, а также деформаций поперечного сдвига  $\varepsilon_{23}$ ,  $\varepsilon_{31}$ .

Таблица 1

Максимальные деформации (%)

$N$	$\chi$	$\varepsilon_{12}$	$\varepsilon_{23}$	$\varepsilon_{31}$
4	25	8,3	2,9	2,6
3	23	7	2,5	2

Как видно из рис. 4, 5, полусферическая оболочка в процессе нагружения претерпевает значительные локальные формоизменения, характеризующиеся большими смещениями и углами поворота конечных элементов как жесткого целого. Так, углы поворота конечных элементов в зоне вмятин достигают 70 градусов. Изгибные деформации оболочки, по расчетным данным, не превышают 25 %. Максимальное значение деформаций поперечного сдвига оболочки составляют 3 %, а максимальные сдвиговые деформации срединной поверхности оболочки 8,3 %.

В табл. 2 приведены расчетные и экспериментальные значения критической нагрузки для рассмотренных вариантов задачи.

Таблица 2

Критические значения нагрузки (кН)

	Расчет (ВС «Динамика-3»)	Эксперимент
$N = 4$	9,7	9,02
$N = 3$	8,1	7,9

Снижение площади контакта оболочки и индентора на 25 % при уменьшении числа продольных вырезов в цилиндрической оболочке (см. рис. 2) в расчетах и экспериментах приводит к уменьшению критического значения нагрузки примерно на 15 %.

При кинематическом закритическом нагружении нет скачкообразного динамического перехода на закритическую ветвь деформирования. На всех этапах нагружения, в том

числе и на падающей ветви деформирования после достижения критической нагрузки, оболочка находится в устойчивом равновесном состоянии. Образование локальных вмятин сопровождается временным снижением контактной силы. При дальнейшем расширении локальных вмятин сила сопротивления оболочки внедрению индентора возрастает за счет упрочнения материала и увеличения жесткости оболочки (см. рис. 3).

Проведенные расчеты свидетельствуют о достаточной эффективности применения динамического подхода к исследованию предельных состояний упругопластических оболочек при квазистатических нагружениях и больших формоизменениях. ВС «Динамика-3» с удовлетворительной для инженерной практики точностью описывает исследуемый процесс. Так, рассогласование графиков зависимости контактной силы от смещения нагружающего устройства, полученных расчетным путем на основе ВС «Динамика-3» и экспериментально, на закритической стадии деформирования оболочки не превышает 5%. Остаточные формы оболочки в расчете и эксперименте также соответствуют друг другу. Численные результаты решения задачи с применением ВС «Динамика-3» в динамической постановке в целом лучше согласуются с экспериментальными данными, чем результаты, полученные на основе ABAQUS в квазистатической постановке.

## Выводы

Сопоставление результатов расчетов на основе ВС «Динамика-3» с экспериментом показало, что при малых деформациях поперечного сдвига и больших углах поворота применение моментной схемы метода конечных элементов с определением скоростей деформаций и напряжений в местном вращающемся базисе, определяемом изменением геометрии оболочки, обеспечивает приемлемую точность вычислений при использовании явной конечно-разностной схемы интегрирования типа «крест» с малыми шагами по времени, что соответствует данным расчетно-экспериментальных исследований [28]. Относительно грубая дискретизация геометрии оболочки стала возможной благодаря принятой аппроксимации скоростей деформаций и напряжений в моментной схеме МКЭ [19, 22, 23], которая является, по существу, численной реализацией шестимодального варианта теории оболочек типа Тимошенко [24] и позволяет моделировать динамику тонкостенных оболочек на сетках с одним слоем элементов по толщине.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-19-10113).*

## Библиографический список

1. Конечно-элементное моделирование упругопластического выпучивания незамкнутых сферических оболочек при сжатии / А.А. Артемьева [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. – 2012. – № 74. – С. 84–91.
2. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях / В.Г. Баженов [и др.] // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 13–22.
3. Рябов А.А., Романов В.И., Зефиоров С.В. Численное исследование упругопластического выпучивания сферической оболочки // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1999. – № 60. – С. 125–128.

4. Якушев В.Л. Потеря устойчивости полусферических оболочек при пластических деформациях // Труды XVIII Международной конференции по теории оболочек и пластин. – Саратов, 1997. – Т. 2, – С. 136–141.
5. Гудрамович В.С. Устойчивость упругопластических оболочек. – Киев: Наукова думка, 1987. – 216 с.
6. Hudramovych V.S. Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections//Intern. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42. – No. 12. – P. 1323–1355.
7. Gupta P.K., Gupta N.K. A study of axial compression of metallic hemispherical domes // Journal of materials processing technology. – 2009. – Vol. 209. – P. 2175–2179.
8. Shariati M., Allahbakhsh H.R. Numerical and experimental investigations on the buckling of steel semi-spherical shells under various loadings // Thin-Walled Structures. – 2010. – Vol. 48. – No. 8. – P. 620–628.
9. A large Deformation Elastic Plastic Dynamic Analysis of Square Plate and Spherical Shell Subjected to Shock Loading / C.C. Liang [et al.] // Computer and Structure. – 1991. – Vol. 39. – No. 6. – P. 653–661.
10. Dadras A. Energy Absorption Of Semi-Spherical Shells Under Axial Loading//Australian Journal of Basic and Applied Sciences. – 2011. – Vol. 5. – No. 11. – P. 2052–2058.
11. Исследование больших формоизменений сферической оболочки при контактном взаимодействии с жесткой облоймой под действием импульса перегрузки/ В.Г. Баженов [и др.] // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 38–45.
12. Дегтярь В.Г., Чеканин В.В. Повышение точности методов расчета подкрепленных сферических сегментов на устойчивость с использованием результатов экспериментальных исследований // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. – № 72. – С. 86–92.
13. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. – М.: Эдиториал УРСС, 1999 – 224 с.
14. Баженов В.Г. Большие деформации и предельные состояния упругопластических конструкций // Упругость и неупругость: материалы междунар. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. – М., 2016. – С. 136–140.
15. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
16. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.
17. Bathe K.-Y. Finite element procedures. – New Jersey: Upper Saddle River «Prentice Hall», 1996. – 1037 p.
18. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. Nonlinear finite elements for continua and structures. – New York: John Wiley & Sons, 2000. – 600 p.
19. Математическое моделирование развития запроектной аварии внутри корпуса реактора на быстрых нейтронах / В.Г. Баженов [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 3. – С. 5–14.
20. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
21. Казаков Д.А., Капустин С.А., Коротких Ю.Г. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций: моногр. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 1999. – 226 с.
22. Верификация конечно-элементного решения трехмерных нестационарных задач упругопластического деформирования, устойчивости и закритического поведения оболочек/ А.А. Артемьева [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 5–14.
23. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций / В.Г. Баженов [и др.] // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1995. – № 2. – С. 20–26.

24. Метод конечных элементов в механике твердых тел / под ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Киев: Вища школа; Лейпциг: ФЭБ Фахбухферлаг, 1982. – 480 с.
25. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 391 с.
26. Коробейников С.Н., Шутов А.В. Выбор отсчетной поверхности в уравнениях пластин и оболочек // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 6. – С. 38–59.
27. Abaqus. Analysis User's Manual. Introduction, Spatial Modeling and Execution. – Publisher-Simulia, 2008. – 711 p.
28. О больших деформациях и предельных состояниях упругопластических оболочек вращения при комбинированных сложных нагружениях / А.А. Артемьева [и др.] // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т. 79, № 4. – С. 558–570.

## References

1. Bazhenov V.G., Artem'eva A.A., Gonik E.G., Kibets A.I., Shoshin D.V., Fedorova T.G. Konechno-elementnoe modelirovanie uprugoplasticheskogo vypuchivaniia nezamknytykh sfericheskikh obolochek pri szhatii [Finite-element modeling of elastoplastic buckling of non-closed spherical shells loaded in compression]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2012, no. 74, pp. 84-91.
2. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets, A.I., Shoshin, D.V. Ustoichivost i predelnye sostoianiiia uprugoplasticheskikh sfericheskikh obolochek pri staticheskikh i dinamicheskikh nagruzheniiakh [Stability and limit states of elastoplastic spherical shells under static and dynamic loading]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, no. 1, pp. 8-15.
3. Ryabov A.A., Romanov V.I., Zefirov S.V. Chislennoe issledovanie uprugoplasticheskogo vypuchivaniia sfericheskoi obolochki [Numerical investigation of elastoplastic buckling of spherical shell]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti*, 1999, no. 60, pp. 125-128.
4. Yakushev V.L. Poteria ustoichivosti polusfericheskikh obolochek pri plasticheskikh deformatsiyakh [Buckling of Hemispherical Shells under Plastic Deformations]. *Trudy XVIII Mezhdunarodnoj konferencii po teorii obolochek i plastin*, Saratov, vol. 2, 1997, pp. 136-141.
5. Hudramovich V.S. Ustoichivost uprugoplasticheskikh obolochek [Stability of Elastoplastic Shells]. Kiev: Naukova Dumka, 1987. 216 p.
6. Hudramovich V. S. Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections. *Intern. Appl. Mech.*, 2006, vol. 42, no. 12, pp. 1323-1355.
7. Gupta P.K., Gupta N.K. A study of axial compression of metallic hemispherical domes. *Journal of materials processing technology*, 2009, vol. 209, pp. 2175-2179.
8. Shariati M., Allahbakhsh H.R. Numerical and experimental investigations on the buckling of steel semi-spherical shells under various loadings. *Thin-Walled Structures*, 2010, vol. 48, no. 8, pp. 620-628.
9. Liang C.C., Liao C.C., Ma Y.C. A large Deformation Elastic Plastic Dynamic Analysis of Square Plate and Spherical Shell Subjected to Shock Loading. *Computer and Structure*, 1991, vol. 39, no. 6, pp. 653-661.
10. Dadras A. Energy Absorption Of Semi-Spherical Shells Under Axial Loading. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 2011, vol. 5, no. 11, pp. 2052-2058.
11. Bazhenov V.G., Varavin, D.A., Kibets, A.I., Ryabov A.A., Romanov V.I. Issledovanie bol'shikh formoizmenenii sfericheskoi obolochki pri kontaktnom vsaimodeistvii s zhestkoi oboimoy pod deystviem impul'sa peregruski [Investigation of changes in the spherical shell shape under the action of pulsed loading due to contact interaction with a rigid block] *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 56, no. 6, pp. 966-971.
12. Degtar V.G., Chekanin V.V. Povyshenie tochnosti metodov rascheta podkreplennykh sfericheskikh segmentov na ustoichivost s ispolsovaniiem rezultatov eksperimentalnykh issledovaniy [Improving the Accuracy of Methods for the Stability Calculation of Reinforced Spherical Segments Using the Results of Experimental Studies] *Problems of Strength and Plasticity*, 2010, no. 72, pp. 86-92.

13. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Metod prodolzheniia resheniia po parametru i nailuchshaia parametrizatsiia [Continuation method on parameter and the best parameterization]. Moscow: Editorial URSS, 1999. 224 p.
14. Bazhenov V.G. Bol'shye deformatsii i predelnye sostoiianiia uprugoplasticheskikh konstrukttsii [Large deformation and limit states of elastic-plastic constructions] *Materialy mezhdunarodnogo nauchnogo simposiuma po problemam mekhaniki deformiruemyykh tel, posviashchennogo 105-letiiu so dnia rozhdeniia A.A. Il'iushina "Uprugost' i neuprurugost'"*. Moscow, 2016, pp. 136-140.
15. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Niashin Yu.I. Bol'shie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriia, algoritmy, prilozheniia [The large elastoplastic deformation theory, algorithms, applications]. Moscow: Nauka, 1986, 232 p.
16. Korobeinikov S.N. Nelineinoe deformirovanie tverdykh tel [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk: Sibirskoe otdelenie Rossiiskoi akademii nauk, 2000, 262 p.
17. Bathe K.-Y. Finite element procedures. New Jersey: Upper Saddle River «Prentice Hall», 1996. 1037 p.
18. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. Nonlinear finite elements for continua and structures. New York: John Wiley & Sons, 2000. 600 p.
19. Bazhenov V.G., Zhestkov M.N., Zamyatin V.A., Kibets A.I. Matematicheskoe modelirovanie rasvitiia saproektnoi avarii vnutri korpusa reaktora na bystrykh neitronakh [Mathematical modeling of development of beyond design basis accident in integral fast-neutron reactors vessel]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 3, pp. 5-14.
20. Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti [Foundation of plasticity theory]. Moscow: Nauka, 1969. 420 p.
21. Kazakov D.A., Kapustin S.A., Korotkikh Yu.G. Modelirovanie protsessov deformirovaniia i rusrusheniia materialov i konstrukttsii [Simulation of Deformation and Destruction of Materials and Structures]. Nizhegorodskii gosudarstvennyi universitet, 1999, 226 p.
22. Artem'eva A.A., Bazhenov V.G., Kibets A.I. [et al.] Verifikatsiia konechno-elementnogo resheniia trekhmernykh nestatsionarnykh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniia, ustoiichivosti i zakriticheskogo povedeniia obolochek [Verification of the finite-element solution of 3d non-stationary problems of elasto-plastic deformation, stability and supercritical behavior of shells]. *Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 5-14.
23. Bazhenov V.G., Kibets A.I., Tsvetkova I.N. Chislennoe modelirovanie nestatsionarnykh protsessov udarnogo vzaimodeistviia deformiruemyykh elementov konstrukttsii [Numerical simulation of transient processes of shock interaction of deformable elements of constructions]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin*, 1995, no. 2, pp. 20-26.
24. Sakharov A.S., Al'tenbakh I. Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel [The finite element method in the mechanics of solids]. Kiev: Vishcha shkola; Leiptsig, FEB Fakhbukhferlag, 1982, 480 p.
25. Golovanov A.I., Tiuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstrukttsii [The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow: Fizmatlit, 2006, 391 p.
26. Korobeinikov S.N., Shutov A.V. Vybor otschetnoi poverkhnosti v uravneniiakh plastin i obolochek [A choice of the reference surface in plate and shell equations]. *Vychislitelnye tekhnologii*, 2003, vol. 8, no. 6, pp. 38-59.
27. Abaqus. Analysis User's Manual. Introduction, Spatial Modeling, and Execution. Publisher-Simulia, 2008. 711 p.
28. Artem'eva A.A., Bazhenov V.G., Kazakov D.A., Kibets A.I., Nagornykh Ye.V. O bol'shikh deformatsiiakh i predel'nykh sostoiianiakh uprugoplasticheskikh obolochek vrashcheniia pri kombinirovannykh slozhnykh nagruzheniiakh [Large deformations and limiting states of elastoplastic shells of revolution under combined complex loadings]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 79, no.4, pp. 394-402.