



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.03

УДК 539.375

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И УСЛОВИЯ ИНИЦИИРОВАНИЯ ТРЕЩИНЫ В АДГЕЗИОННОМ СЛОЕ КОМПОЗИТА

В.Э. Богачева<sup>1</sup>, В.В. Глаголев<sup>1</sup>, Л.В. Глаголев<sup>2</sup>, А.А. Маркин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Тулский государственный университет, Тула, Россия

<sup>2</sup>КБП им. академика А.Г. Шипунова, Тула, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 14 апреля 2021 г.  
Принята: 30 июня 2021 г.  
Опубликована: 22 октября 2021 г.

#### Ключевые слова:

энергетическое произведение, локальное напряжение, локальная деформация, слой взаимодействия, линейный параметр.

### АННОТАЦИЯ

На основе концепции слоя взаимодействия рассмотрено упругое деформирование композита, состоящего из пластин, связанных адгезионным слоем. Толщина слоя принимается в качестве линейного параметра. При нагружении нормальным отрывом в случае плоской деформации учитывается трехосное напряженное состояние адгезионного слоя. Из общей вариационной постановки посредством гипотезы плоских сечений получена постановка задачи в дифференциальном виде. В рамках упрощенной постановки найдено аналитическое решение, которое согласуется с численным решением, полученным методом конечных элементов. Показано, что коэффициент Пуассона адгезионного слоя существенно влияет на его напряженное состояние, в котором имеет место практическое совпадение двух главных напряжений. Для слабосжимаемых адгезионных слоев реализуется напряженное состояние, близкое к гидростатическому растяжению. С целью анализа напряженного состояния адгезионного слоя, сингулярного при предельно малых значениях линейного параметра, предлагается использовать энергетическое произведение (ЭП), локальные напряжения (ЛН) и локальные деформации (ЛД). ЭП определяется в виде произведения удельной свободной энергии слоя и линейного параметра, а ЛН (ЛД) – в виде произведения напряжений (деформаций) и квадратного корня из линейного параметра. Показано, что данные характеристики не являются сингулярными относительно малых толщин слоя и не зависят от линейного параметра. Установлено, что величина, к которой сходится ЭП при фиксированной внешней нагрузке и стремлении линейного параметра к нулю не зависит от механических свойств адгезива, а величины ЛН (ЛД) зависят от свойств адгезива. При критической нагрузке инициирования трещины в адгезиве ЛД в направлении отрыва существенно (на несколько порядков) превышает ЛД в ортогональном направлении. При этом ЛН и ЛД отрыва вносят основной вклад в формирование ЭП.

Предложена методика определения критического значения ЭП, соответствующего инициированию трещины в адгезиве, на основе использования максимальной внешней нагрузки из экспериментальных R-кривых.

© ПНИПУ

© Богачева Виктория Эдуардовна – магистрант, e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, [ID: 0000-0002-6303-2160](https://orcid.org/0000-0002-6303-2160)

Глаголев Вадим Вадимович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: vadim@tsu.tula.ru, [ID: 0000-0003-0371-7704](https://orcid.org/0000-0003-0371-7704).

Глаголев Леонид Вадимович – к.ф.-м.н., вед. инж., e-mail: len4ic92@gmail.com, [ID: 0000-0003-2313-2084](https://orcid.org/0000-0003-2313-2084).

Маркин Алексей Александрович – д.ф.-м.н., проф., e-mail: markin-nikram@yandex.ru, [ID: 0000-0003-1456-8281](https://orcid.org/0000-0003-1456-8281).

Viktoriya E. Bogacheva – Postgraduate Student, e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, [ID: 0000-0002-6303-2160](https://orcid.org/0000-0002-6303-2160)

Vadim V. Glagolev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department,

e-mail: vadim@tsu.tula.ru, [ID: 0000-0003-0371-7704](https://orcid.org/0000-0003-0371-7704).

Leonid V. Glagolev – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Leading Engineer, e-mail: len4ic92@gmail.com,

[ID: 0000-0003-2313-2084](https://orcid.org/0000-0003-2313-2084).

Alexey A. Markin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: markin-nikram@yandex.ru,

[ID: 0000-0003-1456-8281](https://orcid.org/0000-0003-1456-8281).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## STRESS STATE AND CONDITIONS FOR CRACK INITIATION IN THE ADHESION LAYER OF THE COMPOSITE

V.E. Bogacheva<sup>1</sup>, V.V. Glagolev<sup>1</sup>, L.V. Glagolev<sup>2</sup>, A.A. Markin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Tula State University, Tula, Russian Federation

<sup>2</sup>KBP named after academician A. Shipunov, Tula, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 14 April 2021  
Accepted: 30 June 2021  
Published: 22 October 2021

#### Keywords:

energy product, local stress,  
local deformation, interaction layer,  
linear parameter.

### ABSTRACT

The paper deals with the elastic deformation of a composite consisting of plates connected with an adhesive layer on the basis of the interaction layer concept. The layer thickness is taken as a linear parameter. Under loading by the normal separation in the case of plane deformation, the triaxial stress state of the adhesive layer is taken into account. From the general variational setting, by using the hypothesis of flat sections, the problem is formulated in a differential form. Within the framework of a simplified formulation, an analytical solution is found that agrees with the numerical solution obtained by the finite element method. It is shown that Poisson's ratio of the adhesive layer significantly affects its stress state, in which there is a coincidence of the two principal stresses. For weakly compressible adhesion layers, a stress state close to hydrostatic tension is realized. In order to analyze the stress state of the adhesion layer, which is singular at extremely small values of the linear parameter, it is proposed to use the energy product (EP), local stresses (LS) and local deformations (LD). EP is determined as the product of the specific free energy of the layer and the linear parameter, and LS (LD) is determined as the product of stresses (deformations) and the square root of the linear parameter. It is shown that these characteristics are not singular with respect to small layer thicknesses and do not depend on the linear parameter. It was found that the value to which the EP converges at a fixed external load and the linear parameter tends to zero does not depend on the mechanical properties of the adhesive, and the LS (LD) values depend on the properties of the adhesive. At the critical load of crack initiation in the adhesive, the LD in the direction of the separation is significantly (by several orders of magnitude) higher than the LD in the orthogonal direction. In this case, the LS and LD of separation make the main contribution to the formation of the EP.

A method is proposed for determining the critical value of the EP corresponding to crack initiation in the adhesive based on the use of the maximum external load from the experimental R-curves.

© PNRPU

### Введение

Экспериментальные исследования трещиностойкости адгезионных слоев используют в качестве образца двухконсольную балку (ДКБ-образец). Непосредственно из эксперимента получают зависимость внешней нагрузки от перемещения консоли (*R*-кривая). Обработка результатов строится на модели линейно-упругого тела и уравнениях Ирвина [1]. При этом исследуется участок устойчивого продвижения трещиноподобного дефекта в адгезионном слое.

Трещиноподобный дефект в адгезионном слое моделируется слоем нулевой толщины. В качестве механических характеристик материала в рассмотрение вводятся предельные значения коэффициентов интенсивности напряжений как в классическом их понимании [1–3], так и с учетом выраженных пластических свойств [4–7]. Данные характеристики являются следствием сингулярного распределения поля напряжений в вершине трещиноподобного дефекта.

Широкое распространение получили когезионные модели [8–16], для которых используется задание закона распределения сил сцепления априори. Достижение предельных значений когезионных сил рассматривается в виде характеристики материала, которая в свою оче-

редь зависит от выбранного закона распределения сил сцепления.

Наряду с классической моделью трещины в виде математического разреза имеют место представления трещиноподобного дефекта в виде разреза с характерной толщиной [17–24]. В данном случае в состоянии разрушения вовлекается материальный объем слоя взаимодействия [22–24], лежащего на продолжении физического разреза с линейным параметром  $\delta_0$ . При этом механические свойства слоя взаимодействия соответствуют материалу, где трещиноподобный дефект будет формироваться. Если рассматривается зарождение трещины в адгезионном слое, соединяющем тела, толщины которых существенно превосходят толщину адгезионного слоя, то при моделировании процесса зарождения трещины адгезионный слой может быть заменен слоем взаимодействия с механическими характеристиками адгезива и толщиной  $\delta_0$ . При  $\delta_0 \rightarrow 0+0$  напряженное состояние в концевой области трещины будет стремиться к бесконечности, однако в отличие от математического разреза будет зависеть от механических свойств слоя взаимодействия. Для описания напряженно-деформированного состояния предлагается ввести в рассмотрение локальные напряжения (ЛН) и локаль-

ные деформации (ЛД), которые при относительно малых толщинах слоя взаимодействия становятся независимыми от толщины. Из анализа экспериментальных  $R$ -кривых ряда адгезивов [25] получены характеристики напряженного состояния зоны предразрушения в виде энергетического произведения (ЭП) [23] и локальных напряжений. При различии в модулях упругости и примерном равенстве коэффициентов Пуассона ЛН принимают практически равные значения, однако ЭП в этом случае имеют существенное различие. Для смолы Sikaforce 7752 значение ЭП совпало с экспериментальными данными по нахождению критического потока энергии  $G_{IC}$  при инициализации трещины [26].

### 1. Постановка задачи

На рис. 1 показан слоистый композит длиной  $\ell + a$ , состоящий из трех тел. Пластины 1 и 2 с одинаковыми толщинами  $h$  и механическими свойствами по длине  $\ell$  связаны слоем взаимодействия 3 толщиной  $\delta_0$ . Правый торец образца жестко закреплен от перемещений, на левых торцах консолей действует антисимметричная нагрузка в виде изгибающего момента  $M$ . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки.

Полагаем материалы консолей и слоя упругими. Композит рассматриваем в состоянии плоской деформации.

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия». В этом случае равновесие тел 1 и 2 согласно работе [23] запишем в вариационной форме для тела 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + 0,5\delta_0 \left( \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl \quad (1)$$

и тела 2:

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds - \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{12} \delta u_1^- dx_1 + 0,5\delta_0 \left( \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathbf{P}^2 \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (2)$$

где  $S_1, S_2$  – площади тел 1 и 2;  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$  – тензоры напряжений и деформаций;  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  – тензоры средних напряжений и деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{11}(x_1) &= \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \boldsymbol{\sigma}_{11}(x_1, x_2) dx_2; \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{22}(x_1) &= \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \boldsymbol{\sigma}_{22}(x_1, x_2) dx_2; \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{21}(x_1) &= \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \boldsymbol{\sigma}_{21}(x_1, x_2) dx_2; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{11}(x_1) = 0,5 \left( \frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right);$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{22}(x_1) = \left( \frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right);$$

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{21}(x_1) &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{12}(x_1) = \\ &= 0,5 \left( \frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0,5 \left( \frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $u_k^+, u_k^-$  – соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя;  $k = 1, 2$ ;  $L_1, L_2$  – граница приложения внешней нагрузки для тела 1 и 2;  $\cdot \cdot$  – двойное скалярное умножение;  $\cdot$  – скалярное умножение.

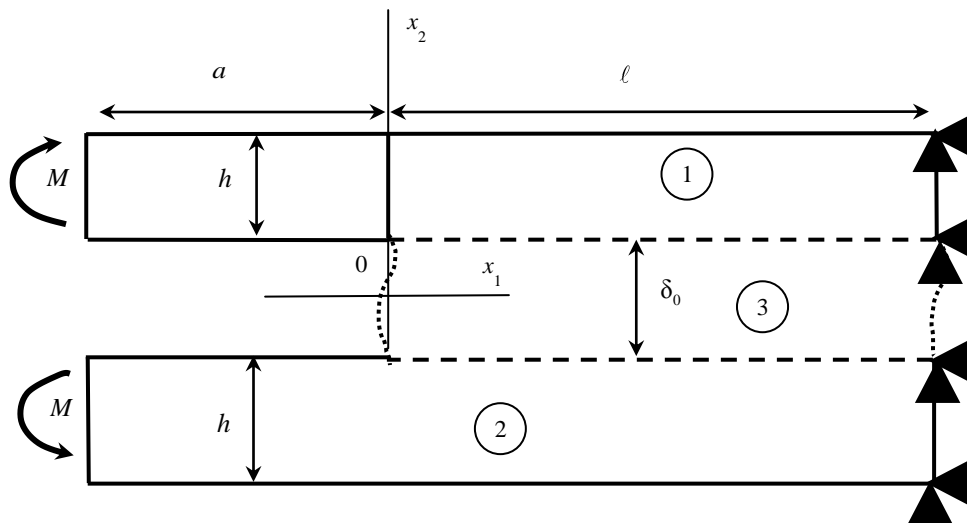


Рис. 1. Модель ДКБ-образца

Fig. 1. DCB model

Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1, 2:

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}(x_1, \delta_0/2); \mathbf{u}^- = \mathbf{u}(x_1, -\delta_0/2); x_1 \in [0, \ell] \quad (5)$$

наряду с равенством компонент векторов напряжений границ слоя и сопрягаемых им пластин.

В силу симметрии задачи проекции поля перемещений удовлетворяют условиям  $u_1^1(x_1) = u_1^2(x_1)$ ,  $u_2^1(x_1) = -u_2^2(x_1)$ .

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций. При упругом деформировании слоя связь средних напряжений и деформаций определяется законом Гука:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left( \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right). \quad (6)$$

Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением тела 1. В этом случае из (4) и (6)  $\bar{\sigma}_{12} = 0$ , и решающая система уравнений (1), (2) преобразуется в вариационное уравнение

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0,5 \delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl. \quad (7)$$

Рассмотрим определяющие соотношения консоли в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_1}{1 + \nu_1} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \varepsilon \delta_{ij} \right), \quad (8)$$

где  $E_1$ ,  $\nu_1$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $\varepsilon$  – объемная деформация;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $i, j = 1, 2, 3$ .

Для упрощения задачи принимаем, что поле перемещений в теле 1 определено следующим образом с учетом условия (5):

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2); \quad (9)$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1). \quad (10)$$

Входящие в представление (9), (10) параметр  $\varphi$  имеет геометрический смысл малого угла поворота материальной нормали к плоскости  $x_2 = \delta_0/2$  в теле 1. Согласно распределению (9), (10) деформации будут определяться в виде

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2); \quad (11)$$

$$\varepsilon_{21}(x_1, x_2) = \varepsilon_{12}(x_1) = 0,5 \left( \frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right); \quad (12)$$

$$\varepsilon_{22}(x_1, x_2) = 0. \quad (13)$$

Выражения (11), (12), как теория Тимошенко [27] и работы [28–30], учитывают сдвиговые деформации и повороты нормалей в теле.

Рассмотрим работу внутренних напряжений для тела 1 с учетом заданных полей деформаций (11)–(13):

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds = \int_{-a}^0 \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left( \sigma_{11} \left( \frac{d\delta u_1^+}{dx_1} - (x_2 - \delta_0/2) \frac{d\delta\varphi}{dx_1} \right) + \sigma_{12} \left( \frac{d\delta u_2^+}{dx_1} - \delta\varphi \right) \right) dx_1 dx_2 + \int_{+0}^{\ell} \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left( \sigma_{11} \left( \frac{d\delta u_1^+}{dx_1} - (x_2 - \delta_0/2) \frac{d\delta\varphi}{dx_1} \right) + \sigma_{12} \left( \frac{d\delta u_2^+}{dx_1} - \delta\varphi \right) \right) dx_1 dx_2. \quad (14)$$

Введем в рассмотрение обобщенные силы

$$Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2; \quad (15)$$

$$Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2 \quad (16)$$

и обобщенный момент

$$M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} (x_2 - \delta_0/2) dx_2. \quad (17)$$

Интегрируем по частям ряд слагаемых в (14) с учетом (15)–(17) и третье слагаемое в левой части (7):

$$\int_{-a}^0 Q_{1k} \frac{d\delta u_k^+}{dx_1} dx_1 = Q_{1k} \delta u_k^+ \Big|_{x_1=-a}^{x_1=0} - \int_{-a}^0 \frac{dQ_{1k}}{dx_1} \delta u_k^+ dx_1; \quad (18)$$

$$\int_{+0}^{\ell} Q_{1k} \frac{d\delta u_k^+}{dx_1} dx_1 = Q_{1k} \delta u_k^+ \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^{\ell} \frac{dQ_{1k}}{dx_1} \delta u_k^+ dx_1; \quad (19)$$

$$\int_{-a}^0 M_{11} \frac{d\delta\varphi}{dx_1} dx_1 = M_{11} \delta\varphi \Big|_{x_1=-a}^{x_1=0} - \int_{-a}^0 \frac{dM_{11}}{dx_1} \delta\varphi dx_1; \quad (20)$$

$$\int_{+0}^{\ell} M_{11} \frac{d\delta\varphi}{dx_1} dx_1 = M_{11} \delta\varphi \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^{\ell} \frac{dM_{11}}{dx_1} \delta\varphi dx_1; \quad (21)$$

$$\int_{+0}^{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{d\delta u_1^+}{dx_1} dx_1 = \bar{\sigma}_{11} \delta u_1^+ \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^{\ell} \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} \delta u_1^+ dx_1. \quad (22)$$

Рассмотрим правую часть (7):

$$\int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl = M \delta\varphi \Big|_{x_1=-a}. \quad (23)$$

Подставив (14), (18)–(23) в (7) и приравняв слагаемые при равных вариациях, приходим к двум системам дифференциальных уравнений для участка  $x_1 \in [-a; 0]$ :

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0; \quad (24)$$

для участка  $x_1 \in (0; \ell]$ :

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0,5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22} \quad (25)$$

с условиями сопряжения

$$u_1^+ \Big|_{x_1=0} = u_1^+ \Big|_{x_1=+0}; \quad (26)$$

$$u_2^+ \Big|_{x_1=0} = u_2^+ \Big|_{x_1=+0}; \quad (27)$$

$$\varphi \Big|_{x_1=0} = \varphi \Big|_{x_1=+0}; \quad (28)$$

$$M_{11} \Big|_{x_1=0} = M_{11} \Big|_{x_1=+0}; \quad (29)$$

$$Q_{12} \Big|_{x_1=0} = Q_{12} \Big|_{x_1=+0}; \quad (30)$$

$$Q_{11} \Big|_{x_1=0} = (Q_{11} + 0,5\delta_0 \bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=+0} \quad (31)$$

и естественными граничными условиями

$$Q_{12} \Big|_{x_1=-a} = 0; \quad (32)$$

$$Q_{11} \Big|_{x_1=-a} = 0; \quad (33)$$

$$M_{11} \Big|_{x_1=-a} = -M, \quad (34)$$

а на правом торце рассматриваем граничные условия

$$u_1^+ \Big|_{x_1=\ell} = 0; \quad (35)$$

$$\varphi \Big|_{x_1=\ell} = 0; \quad (36)$$

$$u_2^+ \Big|_{x_1=\ell} = 0. \quad (37)$$

С учетом (11)–(13) и условия плоской деформации ( $\varepsilon_{33} = 0$ ), определяющие соотношения (8), запишем в виде

$$\sigma_{11} = D \left( \frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right); \quad (38)$$

$$\sigma_{12} = L \left( \frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (39)$$

где  $D = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}$ ,  $L = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$ .

Из (6) и (3) получим связь напряженного состояния в слое взаимодействия и его граничным перемещением на участке  $x_1 \in (0, \ell]$ :

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 \frac{du_1^+}{dx_1} + D_2 u_2^+; \quad (40)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 \frac{du_1^+}{dx_1}; \quad (41)$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \nu_3 (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}), \quad (42)$$

где  $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$ ;  $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$ ;

$$C_1 = \frac{2E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}; \quad C_2 = \frac{E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}.$$

Запишем выражения обобщенных сил:

$$Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left( D \left( \frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi'(x_2 - \delta_0/2) \right) \right) dx_2 = D \left( h \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^2}{2} \varphi' \right); \quad (43)$$

$$Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} L \left( \frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right) dx_2 = Lh \left( \frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right) \quad (44)$$

и момента:

$$M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left( D \left( \frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi'(x_2 - \delta_0/2) \right) \right) (x_2 - \delta_0/2) dx_2 = D \left( \frac{h^2}{2} \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^3}{3} \varphi' \right). \quad (45)$$

В результате задача (24), (25) с учетом (40)–(45) и условий сопряжения (26)–(31) становится замкнутой. Граничные условия (32)–(37) дают решение поставленной задачи.

## 2. Решение задачи

Рассмотрим участок  $[-a; 0]$ . Из системы (24), граничных условий (32)–(34) и условий сопряжения (29)–(31) приходим к следующим условиям на левой границе участка  $(0; \ell]$ :

$$M_{11} \Big|_{x_1=+0} = -M; \quad (46)$$

$$Q_{12} \Big|_{x_1=+0} = 0; \quad (47)$$

$$(Q_{11} + 0,5\delta_0 \bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=+0} = 0. \quad (48)$$

Из (25), (40), (41) для участка  $(0; \ell]$  получим

$$\begin{cases} D \left( \frac{h^2}{2} u_1'' - \frac{h^3}{3} \varphi'' \right) - Lh(u_2^+ - \varphi) = 0; \\ D \left( hu_1'' - \frac{h^2}{2} \varphi'' \right) + 0,5\delta_0 (D_1 u_1'' + D_2 u_2'') = 0; \\ Lh(u_2^+ - \varphi) = C_1 u_2^+ + C_2 u_1'. \end{cases} \quad (49)$$

Решение системы (49) при  $E_1 = E_3$ ,  $\nu_3 = 0$  дано в работе [31]. Получим решение (49) в предположении  $\nu_3 \neq 0$ .

Проинтегрируем второе уравнение системы (49) с учетом третьего:

$$LhS_2 u_2^{*''} - \left( LhS_2 + \frac{Dh^2}{2} \right) \varphi' - (C_1 S_2 - 0,5\delta_0 D_2) u_2^+ = \tilde{C}_1, \quad (50)$$

где  $S_2 = \frac{Dh + 0,5\delta_0 D_1}{C_2}$ .

Из первых уравнений системы (49) с учетом (50) получим линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} LhS_2 u_2^{*''} - \left( LhS_2 + \frac{Dh^2}{2} \right) \varphi' - (C_1 S_2 - 0,5\delta_0 D_2) u_2^+ = \tilde{C}_1; \\ \left( \frac{2h}{3} - \frac{Dh^2}{2C_2 S_2} \right) \varphi'' + \left( \frac{0,5\delta_0 D_2}{C_2 S_2} + \frac{2L}{Dh} \right) u_2^{*'} - \frac{2L}{Dh} \varphi = 0. \end{cases} \quad (51)$$

Преобразуем систему (51) к следующему виду:

$$\begin{cases} u_2^{*'} = y; \\ \varphi' = z; \\ y' = m_1 z + m_2 u_2^+ + \frac{1}{LhS_2} \tilde{C}_1; \\ z' = m_3 y + m_4 \varphi, \end{cases} \quad (52)$$

где  $m_1 = \frac{1}{LS_2} \left( LS_2 + \frac{Dh}{2} \right)$ ;  $m_2 = \frac{1}{LhS_2} (C_1 S_2 - 0,5\delta_0 D_2)$ ;  
 $m_3 = -\frac{3\delta_0 D_2 Dh + 12LC_2 S_2}{Dh(4hC_2 S_2 - 3Dh^2)}$ ;  $m_4 = \frac{12LC_2 S_2}{Dh(4hC_2 S_2 - 3Dh^2)}$ .

Рассмотрим однородную систему

$$\begin{cases} u_2^{*'} = y; \\ \varphi' = z; \\ y' = m_1 z + m_2 u_2^+; \\ z' = m_3 y + m_4 \varphi. \end{cases} \quad (53)$$

Характеристическое уравнение однородной системы (53) имеет вид

$$\lambda^4 - (m_2 + m_1 m_3 + m_4) \lambda^2 + m_2 m_4 = 0. \quad (54)$$

Корни биквадратного уравнения имеют вид

$$\alpha_1 = \frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 + d}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 - d}{2},$$

где  $d^2 = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4$  – дискриминант.

На рис. 2 показана зависимость значения дискриминанта от десятичного логарифма отношения толщины слоя к высоте консоли  $h$ . Расчет проводился при  $h = 0,1$  м, модуль упругости материала адгезива соответствовал характеристикам эпоксидной смолы:  $E_3 = 1,85 \cdot 10^9$  Па. Для консоли модуль упругости материала соответствовал стали:  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Па. График 1 построен для  $\nu_3 = \nu_1 = 0,3$ ; график 2 – для  $\nu_3 = \nu_1 = 0,2$ .

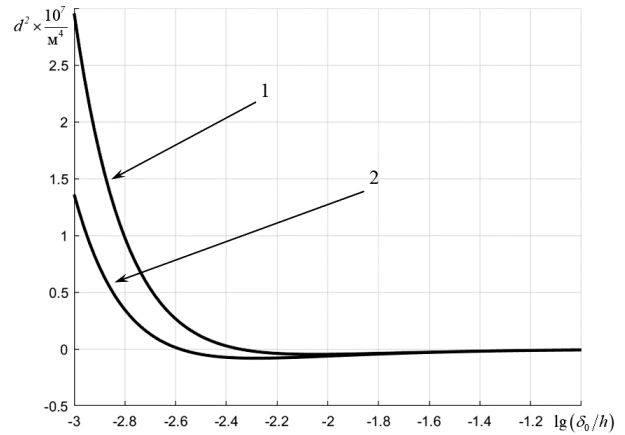


Рис. 2. Зависимость дискриминанта от относительной толщины слоя

Fig. 2. Dependence of the discriminant on the relative layer thickness

Из рисунка видно, что для относительно малых значений толщины слоя значение дискриминанта положительно. В рамках данной работы будем рассматривать только такой диапазон относительных толщин.

На рис. 3 показана зависимость значения  $\alpha_2 h^2$  от десятичного логарифма отношения толщины слоя к высоте консоли для допустимого диапазона толщин при различных модулях упругости слоя и сопрягаемого им материалов. Графики 1 и 2 на рис. 3 соответствуют расчётным значениям характеристик композита, рассмотренных выше. Из рисунка видна асимптотическая сходимость при  $\delta_0/h \rightarrow 0$  к положительному значению.

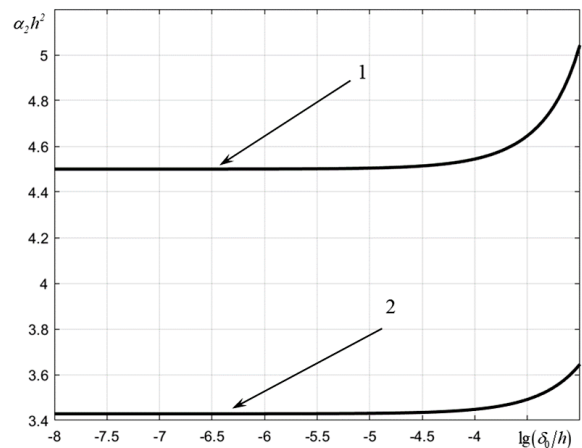


Рис. 3. Зависимость значения  $\alpha_2 h^2$  от относительной толщины слоя

Fig. 3. Dependence of the value  $\alpha_2 h^2$  on the relative layer thickness

Следовательно, в рассматриваемом диапазоне толщин слоя уравнение (54) имеет четыре вещественных корня:

$$\lambda_1 = \sqrt{\alpha_1}; \quad \lambda_2 = -\sqrt{\alpha_1}; \quad \lambda_3 = \sqrt{\alpha_2}; \quad \lambda_4 = -\sqrt{\alpha_2}.$$

Введем обозначения  $\lambda_1 = R_1$ ,  $\lambda_3 = R_2$ , тогда  $\lambda_2 = -R_1$ ,  $\lambda_4 = -R_2$ , и запишем общее решение (49) на участке  $(0; \ell]$ :

$$\left\{ \begin{aligned} u_1^+ &= \frac{1}{R_1} \left( \frac{Lh}{C_2} R_1^2 - \frac{R_1 Lh (\lambda_1^2 - m_2)}{C_2} - \frac{C_1}{C_2} \right) \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} - \\ &- \frac{q}{R_1} \tilde{C}_3 e^{-R_1 x_1} - \frac{t}{R_2} \tilde{C}_5 e^{-R_2 x_1} + \\ &+ \frac{1}{R_2} \left( \frac{Lh}{C_2} R_2^2 - \frac{R_2 Lh (\lambda_3^2 - m_2)}{C_2} - \frac{C_1}{C_2} \right) \tilde{C}_4 e^{R_2 x_1} + \\ &+ \frac{C_1}{C_2} \frac{\tilde{C}_1 x_1}{C_1 S_2 - 0,5 \delta_0 D_2} + \tilde{C}_6; \\ u_2^+ &= \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} + \tilde{C}_3 e^{-R_1 x_1} + \tilde{C}_4 e^{R_2 x_1} + \tilde{C}_5 e^{-R_2 x_1} - \\ &- \frac{\tilde{C}_1}{C_1 S_2 - 0,5 \delta_0 D_2}; \\ \varphi &= \tilde{C}_2 \frac{(\lambda_1^2 - m_2)}{m_1 \lambda_1} e^{R_1 x_1} + \tilde{C}_3 \frac{(\lambda_2^2 - m_2)}{m_1 \lambda_2} e^{-R_1 x_1} + \\ &+ \tilde{C}_4 \frac{(\lambda_3^2 - m_2)}{m_1 \lambda_3} e^{R_2 x_1} + \tilde{C}_5 \frac{(\lambda_4^2 - m_2)}{m_1 \lambda_4} e^{-R_2 x_1}, \end{aligned} \right. \quad (55)$$

где

$$q = \left( \frac{Lh}{C_2} R_1^2 + \frac{R_1 Lh (\lambda_2^2 - m_2)}{C_2} - \frac{C_1}{C_2} \right);$$

$$t = \left( \frac{Lh}{C_2} R_2^2 + \frac{R_2 Lh (\lambda_4^2 - m_2)}{C_2} - \frac{C_1}{C_2} \right).$$

В решении (55) имеем 6 постоянных интегрирования. Условия (35)–(37), (46)–(48) определяют систему линейных уравнений для их нахождения.

На рис. 4 показано распределение напряжений в слое для  $\delta_0 = 10^{-5}$  м,  $h = 0,05$  м,  $\ell = 0,05$  м,  $\ell = 0,3$  м при следующих механических характеристиках композита:  $E_3 = 1,85 \cdot 10^9$  Па,  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu_3 = \nu_1 = 0,3$ . Напряжения  $\hat{\sigma}_{ii} = \bar{\sigma}_{ii} / \bar{\sigma}_{22}(0)$ ,  $i = 1, 2$  отнесены к напряжению отрыва в вершине слоя, получаемому для длины консоли  $\ell = 0,05$  м,  $\hat{x}_1 = x_1 / \delta_0$ . Кривые 1 и 3 соответствуют напряжениям  $\hat{\sigma}_{22}$ , кривые 2 и 4 – напряжениям  $\hat{\sigma}_{11}$ . Кривые 1 и 2 построены для  $\ell = 0,05$  м, а 3 и 4 – для  $\ell = 0,3$  м. Из рис. 4 видно, что увеличение длины консоли слабо влияет на распределение напряжений в слое.

Однако для достаточно больших длин слоя система становится жесткой, ее определитель стремится к нулю. Данный факт является следствием того, что элементы строк, отвечающие в матрице за условия (37) и (48), становятся близкими при больших значениях  $\ell$ .

Рассмотрим случай  $\ell \rightarrow \infty$ . Из граничных условий (36)–(38) в решении (55) получим

$$\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_4 = \tilde{C}_6 = 0. \quad (56)$$

Из (46), (47) приходим к двум линейным уравнениям, решение которых приводит к следующему результату:

$$\tilde{C}_3 = \frac{-M}{Dh^2 \left( \frac{q}{2} - \frac{h \lambda_2^2 - m_2}{3 m_1} - \frac{R_1 + \frac{\lambda_2^2 - m_2}{m_1 \lambda_2}}{R_2 + \frac{\lambda_4^2 - m_2}{m_1 \lambda_4}} \left( \frac{t}{2} - \frac{h \lambda_4^2 - m_2}{3 m_1} \right) \right)};$$

$$\tilde{C}_5 = - \frac{R_1 + \frac{\lambda_2^2 - m_2}{m_1 \lambda_2}}{R_2 + \frac{\lambda_4^2 - m_2}{m_1 \lambda_4}} \tilde{C}_3. \quad (57)$$

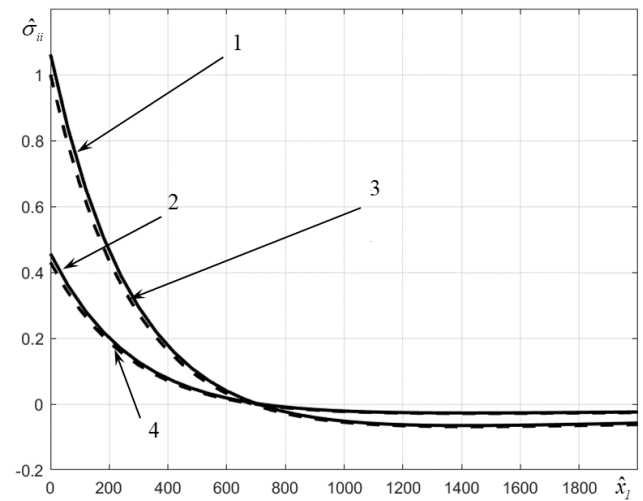


Рис. 4. Распределение напряжений в слое в зависимости от относительной длины консоли

Fig. 4. Distribution of stresses in the layer depending on the relative length of the console

Напряженное состояние слоя, рассчитанное для  $\ell = 0,3$  м, и решение с постоянными (56), (57) практически совпали.

На рис. 5 показано распределение напряжений в слое для  $\delta_0 = 10^{-5}$  м,  $h = 0,05$  м,  $\ell \rightarrow \infty$  при рассматриваемых механических характеристиках композита. Напряжения  $\hat{\sigma}_{ii} = \bar{\sigma}_{ii} / \bar{\sigma}_{22}(0)$ ,  $i = 1, 2, 3$  отнесены к напряжению отрыва в вершине слоя. Кривая 1 соответствует напряжению  $\hat{\sigma}_{22}$ , кривая 2 – напряжению  $\hat{\sigma}_{11}$ , а кривая 3 – напряжению  $\hat{\sigma}_{33}$ .

В этом случае в слое реализуется равенство двух главных напряжений  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{33}$ .

На рис. 6 показано распределение напряжений слоя  $\hat{\sigma}_{ii} = \bar{\sigma}_{ii} / \bar{\sigma}_{22}(0)$ ,  $i = 1, 2, 3$  при различных значениях коэффициента Пуассона,  $\bar{\sigma}_{22}(0)$  – значение напряжения отрыва в вершине слоя при  $\nu_3 = 0,45$ . Остальные геометрические и механические характеристики считались



заданными выше. Кривая 1 соответствует напряжению  $\hat{\sigma}_{22}$ , кривая 2 – напряжению  $\hat{\sigma}_{11}$ , а кривая 3 – напряжению  $\hat{\sigma}_{33}$  для  $\nu_3 = 0,45$ . Кривая 4 соответствует напряжению  $\hat{\sigma}_{22}$ , кривая 5 – напряжению  $\hat{\sigma}_{11}$ , а кривая 6 – напряжению  $\hat{\sigma}_{33}$  для  $\nu_3 = 0,1$ .

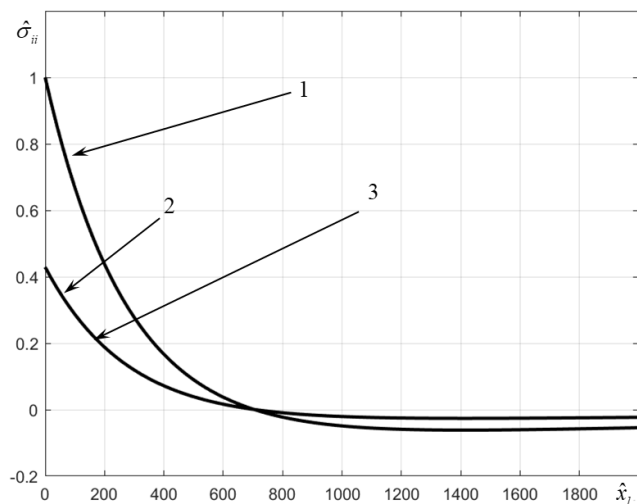


Рис. 5. Трехосное напряженное состояние в слое

Fig. 5. Triaxial stress state in the layer

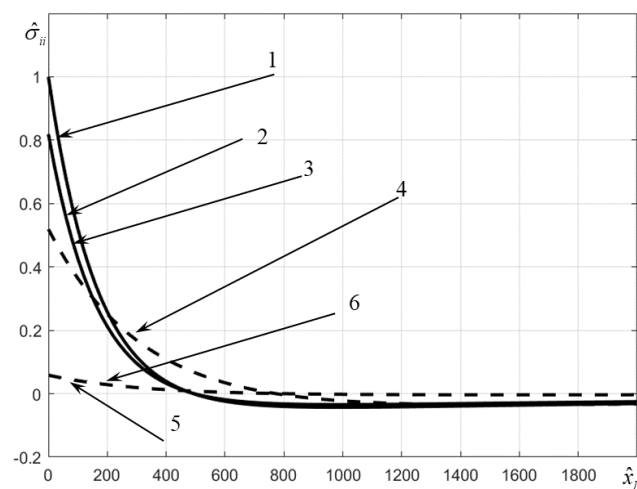


Рис. 6. Напряженное состояние слоя при различных значениях коэффициента Пуассона

Fig. 6. Stress state of the layer at different values of Poisson's ratio

Из рис. 6 видно, что значение коэффициента Пуассона адгезива играет существенную роль в напряженном состоянии слоя. При значениях коэффициента Пуассона, близких к 0,5, в слое будет реализовываться гидростатическое растяжение, что даже при наличии упругопластических свойств адгезива не приведет к его пластическим деформациям при нагружении по моде I.

Верификация упрощенных решений строится на решении общей постановки задачи. В этом случае, как правило, используются численные методы решения. Для решения вариационных постановок задач широкое распространение получил метод конечных элементов

в различных модификациях [32–34]. Рассмотрим решение двумерной задачи на основе вариационной постановки (7) с определяющими соотношениями (6), (8). Решение строилось на основе квадратичного распределения поля перемещений на конечном элементе, приводящего к взаимосвязи между глобальными узловыми силами и узловыми перемещениями в конечно-элементном континууме. Грань элемента соответствовала толщине слоя. Обобщенный момент задавался парой узловых сил, действующих на расстоянии  $h$ , приложенных к левому торцу консоли. На рис. 7 и 8 показано сравнение напряжений в слое, рассчитанных на основе решения (55)–(57), и прямого конечно-элементного решения при следующих длинах участков:  $a = 0,3$  м,  $\ell = 0,3$  м, при единичном обобщенном моменте, задаваемом парой узловых сил на левом торце консоли. Характеристики композита брались следующими:  $E_3 = 1,85 \cdot 10^9$  Па,  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu_3 = 0,45(0,1)$ ,  $\nu_1 = 0,3$ ,  $\delta_0 = 10^{-5}$  м,  $h = 0,05$  м. Напряжения отнесены к напряжению  $\bar{\sigma}_{22}(0)$ , полученному в решении (56)–(58).

На рис. 7 кривая 4 соответствует напряжению  $\hat{\sigma}_{22}$ , кривые 5 и 6 – напряжениям  $\hat{\sigma}_{11}$ ,  $\hat{\sigma}_{33}$  при конечно-элементном решении. Кривая 1 соответствует напряжению  $\hat{\sigma}_{22}$ , а кривые 2 и 3 – напряжениям  $\hat{\sigma}_{11}$ ,  $\hat{\sigma}_{33}$  при аналитическом решении (55)–(57). Расчет был выполнен для коэффициента Пуассона  $\nu_3 = 0,45$ . На рис. 8 представлен аналогичный расчет для  $\nu_3 = 0,1$ .

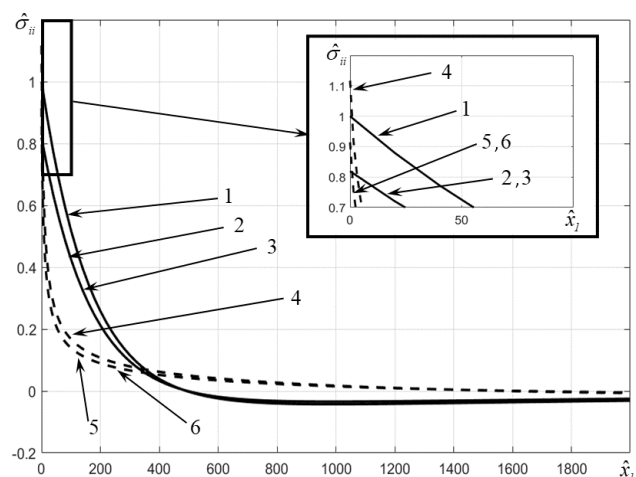


Рис. 7. Сравнение расчетов МКЭ и аналитического решения при значении коэффициента Пуассона  $\nu_3 = 0,45$

Fig. 7. Comparison of FEM calculations and analytical solutions at the value of Poisson's ratio  $\nu_3 = 0,45$

Из графиков на рис. 7 и рис. 8 видно, что упрощенное аналитическое решение (55)–(57) в слое близко к конечно-элементному решению общей вариационной постановки. Максимальное отличие значений напряжений в вершине слоя составляет порядка 10 %. Кроме того, в упрощенном решении имеет место менее выра-



женное падение напряжений и большее обжатие слоя. Данные отличия являются следствием гипотезы (14) для поля перемещений в консоли.

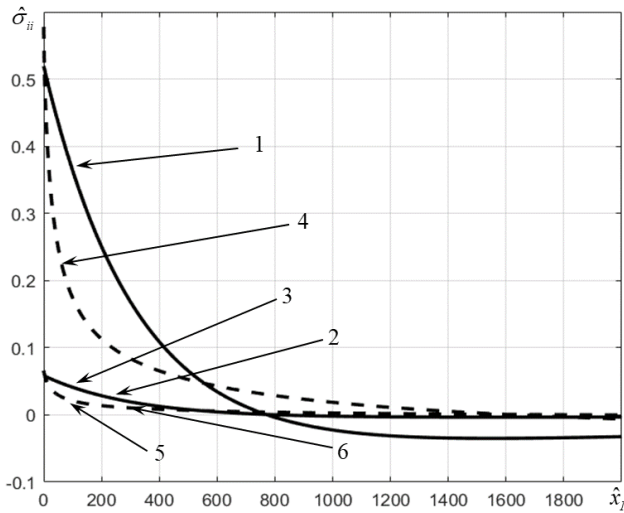


Рис. 8. Сравнение расчетов МКЭ и аналитического решения при значении коэффициента Пуассона  $\nu_3 = 0,1$

Fig. 8. Comparison of FEM calculations and analytical solutions at the value of Poisson's ratio  $\nu_3 = 0.1$

### 3. Определение энергетического произведения и его свойства

При дальнейшем изложении для анализа критических состояний в вершине тонких адгезионных слоев будем использовать аналитическое решение (55)–(57), поскольку расчет методом конечных элементов требует значительно больших вычислительных ресурсов для образцов при соответствии размера грани конечного элемента толщине слоя.

Рассмотрим механические и прочностные характеристики ряда адгезионных слоев, приведенные в работе [25]. Araldite AV138:  $E_3 = 4,9 \cdot 10^9$  Па,  $\nu_3 = 0,35$ ,  $G_{IC} = 0,2 \cdot 10^3$  Н/м; Araldite 2015:  $E_3 = 1,85 \cdot 10^9$  Па,  $\nu_3 = 0,33$ ,  $G_{IC} = 0,43 \cdot 10^3$  Н/м; Sikaforce 7752:  $E_3 = 0,49 \cdot 10^9$  Па,  $\nu_3 = 0,3$ ,  $G_{IC} = 2,36 \cdot 10^3$  Н/м, где  $G_{IC}$  – критический поток энергии.

Проведенный анализ напряженного состояния в адгезивном слое показывает, что компоненты напряжений стремятся к бесконечности при стремлении толщины слоя к нулю. Поэтому необходимо ввести характеристики напряженно-деформированного состояния, регулярные относительно изменения толщины СВ. В работе [23] в качестве такой характеристики используется энергетическое произведение (ЭП)  $2\bar{\gamma} = 0,5(\bar{\sigma}_{11}\bar{\epsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22}\bar{\epsilon}_{22})\delta_0$  в вершине адгезионного слоя. На рис. 9 показана зависимость ЭП в адгезионном слое от десятичного логарифма отношения толщины слоя к высоте консоли  $h$  при рассматри-

ваемых характеристиках консоли:  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu_1 = 0,3$ ,  $h = 0,05$  м. Толщина слоя варьировалась от  $\delta_0 = 10^{-4}$  м до  $\delta_0 = 10^{-9}$  м. График 1 построен для адгезива Araldite AV138, график 2 – для адгезива Araldite 2015, график 3 – для адгезива Sikaforce 7752. Безразмерное ЭП  $2\hat{\gamma}$  на рис. 9 определено в виде отношения ЭП адгезива к ЭП адгезива Araldite AV138, полученного при  $\delta_0 = 10^{-9}$  м.

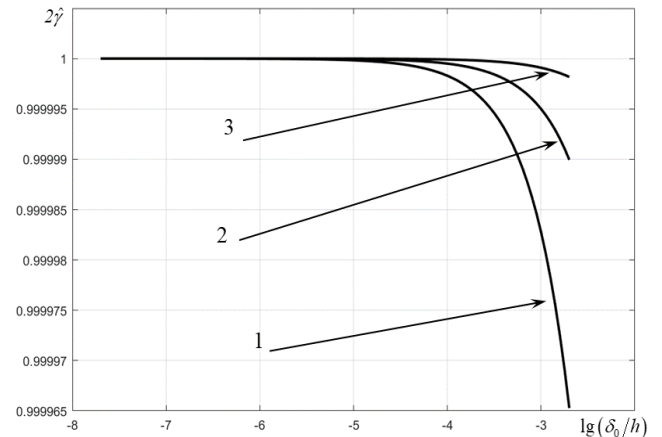


Рис. 9. Зависимость ЭП от толщины слоя

Fig. 9. Dependence of the EP on the layer thickness

На рис. 9 видно, что при уменьшении относительной толщины адгезионного слоя значение ЭП не зависит от упругих механических свойств материала слоя. Приведенные на рис. 9 зависимости получены при постоянном единичном значении внешнего момента. Однако, если подсчитывать критические значения ЭП –  $2\bar{\gamma}_e$  по предельным экспериментальным значениям линейной составляющей момента –  $M_e$ , то будем получать различные значения  $2\bar{\gamma}_e$  для различных адгезивов.

Для определения критического значения ЭП используем R-кривые (рис. 10), полученные из экспериментов на ДКБ-образцах, приведенные в работе [25].

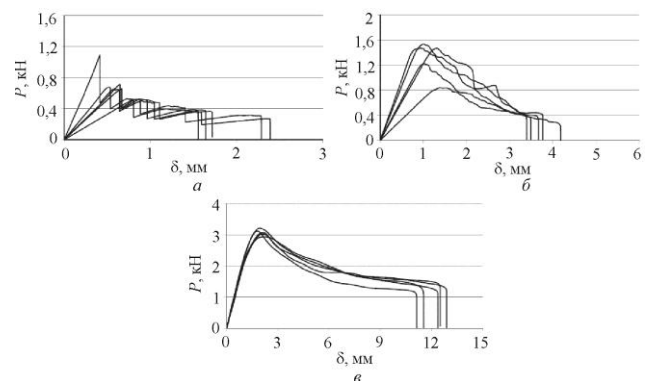


Рис. 10. R-кривые: а – Araldite AV138; б – Araldite 2015; в – Sikaforce 7752

Fig. 10. R-curves: (a) Araldite AV138; (b) Araldite 2015; (c) Sikaforce 7752

По максимальному значению внешней нагрузки определим величину  $2\bar{\gamma}_e$  при зарождении трещины в соответствующем адгезиве. В этом случае изгибающий момент консоли оценим следующим образом:

$$M_e = \frac{P_e}{b} a_0, \text{ где } P_e - \text{максимальное значение силы } P \text{ на}$$

R-кривой для ДКБ-образца;  $a_0$  – расстояние от точки приложения силы до адгезива;  $b$  – толщина образца.

Расчетное значение  $2\bar{\gamma}_e$  определяет поток упругой энергии  $G_{IC}$ , перешедшей в поверхностную энергию, соответствующую инициированию трещины в адгезиве. Согласно работе [25] для ДКБ-образца с  $a_0 = 0,055$  м,  $h = 0,0127$  м,  $b = 0,025$  м экспериментальные значения составили  $P_e = 1,1$  кН для смолы Araldite AV138,  $P_e = 1,5$  кН для смолы Araldite 2015,  $P_e = 3,1$  кН для смолы Sikaforce 7752. Расчетные данные ЭП в данном случае составили:  $2\bar{\gamma}_e = 127$  Н/м для Araldite AV138;  $2\bar{\gamma}_e = 237$  Н/м для Araldite 2015;  $2\bar{\gamma}_e = 1012$  Н/м для Sikaforce 7752. Зарождающийся трещиноподобный дефект, согласно вычислительной сходимости рис. 9, определялся относительным размером  $\delta_0/h = 10^{-6}$ .

В работе [26] приведены значения  $G_{IC}$  для инициализации трещины в адгезиве Sikaforce 7752, соответствующие различным методам расчета. Так, среднее значение для ССМ-метода составило  $G_{IC} = 1103$  Н/м, для метода СВТ  $G_{IC} = 888$  Н/м, для метода СВВМ  $G_{IC} = 873$  Н/м. Таким образом, значение  $2\bar{\gamma}_e$  практически совпало с данными работы [26] для смолы Sikaforce 7752.

#### 4. Локальные напряжения и деформации

Наряду с ЭП в качестве регулярных характеристик будем использовать тензор локальных напряжений  $\bar{\sigma}^{\delta_0} = \bar{\sigma} \sqrt{\delta_0}$  и тензор локальных деформаций  $\bar{\epsilon}^{\delta_0} = \bar{\epsilon} \sqrt{\delta_0}$ . По определению ЭП получим  $2\gamma = 0,5(\bar{\sigma}^{\delta_0} \cdot \bar{\epsilon}^{\delta_0})$ .

На рис. 11 показана зависимость локальных напряжений  $\bar{\sigma}_{ss}^{\delta_0} = \bar{\sigma}_{ss} \sqrt{\delta_0}, s = 1, 2$  при единичной внешней нагрузке слоя от десятичного логарифма отношения толщины слоя к высоте консоли  $h$  для упругих свойств рассматриваемых адгезивов. Графики 1 и 2 построены для локальных напряжений  $\bar{\sigma}_{22}^{\delta_0}$  и  $\bar{\sigma}_{11}^{\delta_0}$  адгезива Araldite AV138, графики 3 и 4 – для напряжений  $\bar{\sigma}_{22}^{\delta_0}$  и  $\bar{\sigma}_{11}^{\delta_0}$  адгезива Araldite 2015, график 5 и 6 – для напряжений  $\bar{\sigma}_{22}^{\delta_0}$  и  $\bar{\sigma}_{11}^{\delta_0}$  адгезива Sikaforce 7752.

На рисунке видно, что для относительно малых толщин локальные напряжения не зависят от толщины. Для адгезивов с различными упругими характеристиками

значения локальных напряжений в точке зарождения дефекта существенно отличаются, когда внешняя нагрузка одинакова. При этом, согласно рис. 9, ЭП не зависит от упругих свойств адгезива. В то же время, зная критическое значение ЭП для данного адгезива, можно определить соответствующее значение внешней нагрузки.

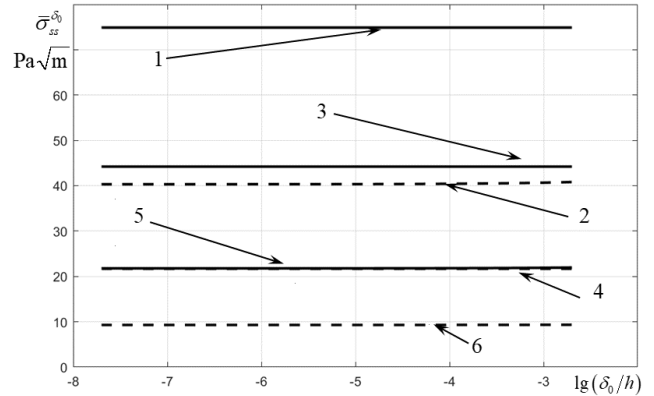


Рис. 11. Зависимость локальных напряжений от толщины слоя

Fig. 11. Dependence of local stresses on the layer thickness

Приведем расчетные данные для локальных напряжений в момент трещинообразования:  $\bar{\sigma}_{22}^{\delta_0} = 1,41 \cdot 10^6$  Па $\sqrt{м}$ ,  $\bar{\sigma}_{11}^{\delta_0} = 7,62 \cdot 10^5$  Па $\sqrt{м}$ ,  $2\bar{\gamma}_e = 127$  Н/м для Araldite AV138;  $\bar{\sigma}_{22}^{\delta_0} = 1,14 \cdot 10^6$  Па $\sqrt{м}$ ,  $\bar{\sigma}_{11}^{\delta_0} = 5,62 \cdot 10^5$  Па $\sqrt{м}$ ,  $2\bar{\gamma}_e = 237$  Н/м для Araldite 2015;  $\bar{\sigma}_{22}^{\delta_0} = 1,15 \cdot 10^6$  Па $\sqrt{м}$ ,  $\bar{\sigma}_{11}^{\delta_0} = 4,95 \cdot 10^5$  Па $\sqrt{м}$ ,  $2\bar{\gamma}_e = 1012$  Н/м для Sikaforce 7752. Зарождающийся трещиноподобный дефект определялся относительным размером  $\delta_0/h = 10^{-6}$ . Результаты расчета показывают, что локальные напряжения в направлении отрыва в момент зарождения трещины принимают близкие значения при различных значениях критического ЭП.

Приведем значения локальных деформаций в момент трещинообразования:  $\bar{\epsilon}_{11}^{\delta_0} = 1,1 \cdot 10^{-7} \sqrt{м}$ ,  $\bar{\epsilon}_{22}^{\delta_0} = 1,8 \cdot 10^{-4} \sqrt{м}$  для Araldite AV138;  $\bar{\epsilon}_{11}^{\delta_0} = 1,4 \cdot 10^{-7} \sqrt{м}$ ,  $\bar{\epsilon}_{22}^{\delta_0} = 4,2 \cdot 10^{-4} \sqrt{м}$  для Araldite 2015;  $\bar{\epsilon}_{11}^{\delta_0} = 3 \cdot 10^{-7} \sqrt{м}$ ,  $\bar{\epsilon}_{22}^{\delta_0} = 1,8 \cdot 10^{-3} \sqrt{м}$  для Sikaforce 7752.

В момент трещинообразования деформация  $\bar{\epsilon}_{11}^{\delta_0}$  для рассматриваемых адгезивов остается неизменной, однако деформация  $\bar{\epsilon}_{22}^{\delta_0}$  для адгезивов с большей предельной деформацией принимает большее значение.

#### Заключение

Напряженно-деформированное состояние в слое взаимодействия адгезива описывается локальными напряжениями, деформациями и ЭП, которые не являются сингулярными и зависимыми от толщины слоя взаимодействия.

Для фиксированной внешней нагрузки показана сходимость ЭП при уменьшении относительной толщины слоя взаимодействия к величине, которая не зависит от свойств адгезива.

Предложена методика определения критического значения ЭП, соответствующего иницированию трещины в адгезиве, на основе использования максимальной внешней нагрузки из экспериментальных *R*-кривых.

При критической нагрузке иницирования трещины локальная деформация в направлении отрыва существенно (на несколько порядков) превышает локальную деформацию в ортогональном направлении. При этом

локальные напряжения и деформации отрыва вносят основной вклад в формирование ЭП.

## Благодарность

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и правительства Тульской области в рамках научного проекта № 19-41-710001 р\_а

## Acknowledgments

The reported study was funded by RFBR and the government of the Tula region according to the research project № 19-41-710001 r\_a.

## Библиографический список

1. Kanninen M.F., Popelar C.H. *Advanced Fracture Mechanics*. – United Kingdom: Oxford University Press, 1985. – 563 p.
2. Barker D.B., Sanford R.J., Chona R. Determining *K* and related stress-field parameters from displacement fields // *Experimental Mechanics*. – 1985. – Vol. 25, no. 4. – P. 399–407. DOI: 10.1007/BF02321339
3. Locating the crack tip using displacement field data: a comparative study / M. Zanganeh, P. Lopez-Crespo, Y.H. Tai, J.R. Yates // *Strain*. – 2013. – Vol. 49, no. 2. – P. 102–115. DOI: 10.1111/str.12017
4. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // *Journ. Mech. Phys. Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 337–347. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90021-5
5. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // *Journ. Mech. Phys. Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 13–31. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90014-8
6. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // *Journ. Mech. Phys. Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 1–12. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90013-6
7. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Characterization of crack tip stress fields in test specimens using mode mixity parameters // *International Journal of Fracture*. – 2014. – Vol. 185. – P. 49–76. DOI: 10.1007/s10704-013-9898-0
8. Barenblatt G.I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1959. – Vol. 23, no. 3. – P. 622–636. DOI: 10.1016/0021-8928(59)90157-1
9. Kumar N., Rajagopal A., Pandey M. A rate independent cohesive zone model for modeling failure in quasi-brittle materials // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2015. – Vol. 22, no. 8. – P. 681–696. DOI: 10.1080/15376494.2013.855852
10. Experimental characterization of cohesive zone models for thin adhesive layers loaded in mode I mode II, and mixed-mode I/II by the use of a direct method / G. Lélias, E. Paroissien, F. Lachaud, J. Morlier // *International Journal of Solids and Structures*. – 2019. Vol. 158. – P. 90–115. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.005
11. Thanh L.T., Belaya L.A., Lavit I.M. A solution to the problem of elastic half-plane with a cohesive edge crack // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series*. – 2018. – Vol. 973, no. 1. – id. 12020. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012020.
12. Lavit I.M. Stable crack growth in an elastoplastic material // *Strength of Materials*. – 1988. – Vol. 20, no. 7. – P. 854–860. DOI: 10.1007/BF01528695
13. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges / M. Elices, G.V. Guinea, J. Gómez, J. Planas // *Engi-*

- neering *Fracture Mechanics*. – 2002. – Vol. 69, no. 2. – P. 137–163. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00083-2
14. Cui W., Wisnom M.R. A combined stress-based and fracture-mechanics-based model for predicting delamination in composites // *Composites*. – 1993. – Vol. 24, no. 6. – P. 467–474. DOI: 10.1016/0010-4361(93)90016-2
15. Petrossian Z., Wisnom M.R. Prediction of delamination initiation and growth from discontinuous plies using interface elements // *Composites: Part A: Applied Science and Manufacturing*. – 1998. – Vol. 29, no. 5-6. – P. 503–515. DOI: 10.1016/S1359-835X(97)00134-6
16. Feraren P., Jensen H.M. Cohesive zone modelling of interface fracture near flaws in adhesive joints // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2004. – Vol. 71, no. 15. – P. 2125–2142. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2003.12.003
17. Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids // *International Journal of Fracture*. – 2011. – Vol. 171, no. 2. – P. 105–109. DOI: 10.1007/s10704-011-9637-3
18. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // *Изв. АН СССР. МТТ*. – 1968. – № 6. – С. 87–99.
19. Салганик Р.Л., Мищенко А.А., Федотов А.А. Модель трещины Прандтля и ее применение для решения задачи механики контактного взаимодействия // К 75-летию со дня рождения профессора Владимира Марковича Ентова. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. – 180 с.
20. Салганик Р.Л., Мищенко А.А., Федотов А.А. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегающем горизонтальном пласте // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. – 2015. – № 2. – С. 24–33.
21. Макклиток Ф. Пластические аспекты разрушения // *Разрушение*. – М.: Мир, 1975. – Т. 3. – С. 67–262.
22. Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto, V.V. Glagolev, L.V. Glagolev, A.A. Markin // *International Journal of Solids and Structures* // 2020. – Vol. 193–194. – P. 447–454. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039
23. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. – 2019. – Vol. 158. – P. 141–149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
24. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between *J<sub>c</sub>* and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // *International Journal of Fracture*. – 2020. – Vol. 224, no. 2. – P. 277–284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0

25. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R.M. Lopes, R.D.S.G. Campilho, F.J.G.da Silva, T.M.S. Faneco // *Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2016. – Vol. 67. – P. 103–111. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032

26. Fracture toughness determination of adhesive and cured joints in natural fibre composites / R.D.S.G. Campilho, D.C.Moura, G D.J.S.onçalves, J.F.M.G. da Silva, M.D. Banea, L.F.M. da Silva // *Composites Part B: Engineering*. – 2013. – Vol. 50. – P. 120–126. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.01.025

27. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.

28. Panteghini A., Bardella L. Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams subject to severe boundary conditions // *Eur. J. Mech. A-Solid*. – 2017. – Vol. 61. – P. 393–407. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.10.012

29. Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // *Eur. J. Mech. A-Solid*. – 2016. – Vol. 58. – P. 172–186. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.01.015

## References

1. Kanninen M.F., Popelar C.H. *Advanced Fracture Mechanics*. United Kingdom, Oxford University Press, 1985, 563 p.

2. Barker D.B., Sanford R.J., Chona R. Determining K and related stress-field parameters from displacement fields, 1985, *Experimental Mechanics*, 25 (4), pp. 399–407. DOI: 10.1007/BF02321339

3. Zanganeh M., Lopez-Crespo P., Tai Y.H., Yates J.R. Locating the crack tip using displacement field data: a comparative study, 2013, *Strain*, 49 (2), pp. 102–115. DOI: 10.1111/str.12017

4. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip, 1968, *Journ. Mech. Phys. Solids*, 16, pp. 337–347. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90021-5

5. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, 1968, *Journ. Mech. Phys. Solids*, 16, pp. 13–31. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90014-8

6. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, 1968, *Journ. Mech. Phys. Solids*, 16, pp. 1–12. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90013-6

7. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Characterization of crack tip stress fields in test specimens using mode mixity parameters, 2014, *International Journal of Fracture*, 185, pp. 49–76. DOI: 10.1007/s10704-013-9898-0

8. Barenblatt G.I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, 1959, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 23 (3), pp. 622–636. DOI: 10.1016/0021-8928(59)90157-1

9. Kumar N., Rajagopal A., Pandey M. A rate independent cohesive zone model for modeling failure in quasi-brittle materials, 2015, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 22 (8), pp. 681–696. DOI: 10.1080/15376494.2013.855852

10. Lélías G. Paroissien E., Lachaud F., Morlier J. Experimental characterization of cohesive zone models for thin adhesive layers loaded in mode I mode II, and mixed-mode I/II by the use of a direct method, 2019, *International Journal of Solids and Structures*, 158, pp. 90–115. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.005

11. Thanh L.T., Belaya L.A., Lavit I.M. A solution to the problem of elastic half-plane with a cohesive edge crack, 2018, *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series*, 973, 012020. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012020.

30. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // *Composite Structures*. – 2016. – Vol. 137. – P. 140–147. DOI: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2015.11.018

31. Model crack with a scalable linear parameter / V.V. Glagolev, L.V. Glagolev, A.A. Fursaev, A.A. Markin // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 1203. – 2019. – id. 012017. DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012017

32. Zenkevich O.C., Morgan K.J. *Finite Elements and Approximation*. – New York: John Wiley & Sons, 1983. – 328 p.

33. Капустин С.А., Лихачева С.Ю. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов с периодически повторяющейся структурой. – Н. Новгород: Изд-во ННГАСУ, 2012. – 96 с.

34. Belytschko T., Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1999. – Vol. 45, no. 5. – P. 601–620. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990620)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S

12. Lavit I.M. Stable crack growth in an elastoplastic material, 1988, *Strength of Materials*, 20 (7), pp. 854–860. DOI: 10.1007/BF01528695

13. Elices M., Guinea G.V., Gómez J., Planas J. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges, 2002, *Engineering Fracture Mechanics*, 69 (2), pp. 137–163. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00083-2

14. Cui W., Wisnom M.R. A combined stress-based and fracture-mechanics-based model for predicting delamination in composites, 1993, *Composites*, 24 (6), pp. 467–474. DOI: 10.1016/0010-4361(93)90016-2

15. Petrossian Z., Wisnom M.R. Prediction of delamination initiation and growth from discontinuous plies using interface elements, 1998, *Composites: Part A: Applied Science and Manufacturing*, 29 (5-6), pp. 503–515. DOI: 10.1016/S1359-835X(97)00134-6

16. Feraren P., Jensen H. M. Cohesive zone modelling of interface fracture near flaws in adhesive joints, 2004, *Engineering Fracture Mechanics*, 71 (15), pp. 2125–2142. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2003.12.003

17. Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids, 2011, *International Journal of Fracture*, 171 (2), pp. 105–109. DOI: 10.1007/s10704-011-9637-3

18. Entov V. M., Salganik R. L. K modeli hrupkogo razrusheniya Prandtlya [To the Prandtl model of brittle fracture]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1968, No. 6, pp. 87–99.

19. Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Model' treshchiny Prandtlya i ee primeneniye dlya resheniya zadachi mekhaniki kontaktного vzaimodejstviya [Prandtl crack model and its application for solving the problem of contact interaction mechanics]. *Izhevsk, Institut komp'yuternyh issledovanij*, 2012, 180 p.

20. Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Stress state in the vicinity of excavation in deep horizontal bed, 2015, *Journal of Mining Science*, 51 (2), pp. 220–227. DOI: 10.1134/S1062739115020027

21. Makklintok F. Plasticheskie aspekty razrusheniya [Plastic aspects of destruction]. *Razrusheniye T. 3. Moscow, Mir*, 1976, pp. 67–262.

22. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect

explicitly including linear parameters, 2020, *International Journal of Solids and Structures*, 193-194, pp. 447-454. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039

23. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter, 2019, *International Journal of Solids and Structures*, 158, pp. 141-149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002

24. Berto, F., Glagolev, V.V., Markin, A.A. Relationship between  $J_c$  and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite, 2020, *International Journal of Fracture*, 224 (2), pp. 277-284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0

25. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints, 2016, *Journal of Adhesion and Adhesives*, 67, pp. 103-111. DOI: 10.1016/j.jadhadh.2015.12.032

26. Campilho R.D.S.G., Moura D.C., Gonçalves D.J.S., da Silva J.F.M.G., Banea M.D., da Silva L.F.M. Fracture toughness determination of adhesive and co-cured joints in natural fibre composites, 2013, *Composites Part B: Engineering*, 50, pp. 120-126. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.01.025

27. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kruger S. *Plastiny i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, *Fizmatgiz*, 1963, 636 p.

28. Panteghini A., Bardella L. Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams subject to severe

boundary conditions, 2017, *Eur. J. Mech. A-Solid*, 61, pp. 393-407. doi: 10.1016/j.euromechsol.2016.10.012

29. Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions, 2016, *Eur. J. Mech. A-Solid*, 58, pp.172-186. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.01.015

30. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results, 2016, *Composite Structures*, 137, pp.140-147. DOI: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2015.11.018

31. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Fursaev A.A., Markin A.A. Model crack with a scalable linear parameter, 2019, *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 1203, 012017. DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012017

32. Zenkevich O.C., Morgan K.J. *Finite Elements and Approximation*. New York, *John Wiley & Sons*, 1983, 328 p.

33. Kapustin S.A., Lihacheva S.Yu. Modelirovanie processov deformirovaniya i razrusheniya materialov s periodicheski povtoryayushchejsya strukturoj [Modeling the processes of deformation and destruction of materials with a periodically repeating structure]. *N.Novgorod, Izd-vo NNGASU*, 2012, 96 p.

34. Belytschko T., Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, 1999, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5), pp. 601-620 DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990620)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S