



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.04

УДК 539.374

ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ ПО ПЛОСКИМ ТРАЕКТОРИЯМ ДЕФОРМАЦИЙ

В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев, Д.Ю. Фомин

Московский политехнический университет, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 22 апреля 2021 г.
Принята: 15 июля 2021 г.
Опубликована: 22 октября 2021 г.

Ключевые слова:

варианты теорий пластического течения, комбинированное упрочнение, сложное нагружение, плоские траектории деформаций, траектории напряжений, скалярные и векторные свойства.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются варианты теорий пластического течения при комбинированном упрочнении, широко применяемые в практических расчетах конструкций. Проводится сравнительный анализ вариантов теорий при сложном нагружении по плоским траекториям деформаций, охватывая весь спектр траекторий от многозвенных ломаных до криволинейных траекторий постоянной и переменной кривизны. Рассматриваются траектории от средней до большой кривизны. Анализ результатов исследований проводится в векторном пространстве А.А. Ильюшина. Рассматриваются плоские траектории деформаций в виде квадрата, трех окружностей, проходящих через начало координат, а также траектории в виде астроида. Результаты расчетов сопоставляются с результатами экспериментальных исследований по ответным траекториям напряжений, скалярным и векторным свойствам. Рассматриваются варианты теорий: модель изотропного упрочнения; модель Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова (линейное кинематическое и изотропное упрочнения); модель аналогичная модели Оно–Ванга; модель Армстронга–Фредерика–Кадашевича (на этой модели построена модель Коротких); модель Шабоша с тремя эволюционными уравнениями Армстронга–Фредерика–Кадашевича; модель Темиса, построенная на основе инвариантной теории пластичности; модель Бондаря с трехчленной структурой эволюционного уравнения для кинематического упрочнения. Приводятся материальные параметры (функции), замыкающие варианты теорий пластичности. Удовлетворительное соответствие эксперименту по всем траекториям деформаций достигается при расчетах на основе моделей Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Шабоша и Темиса – отличие результатов расчетов и экспериментов не превышает 30 %. Наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря – отличие результатов расчетов и экспериментов по всем траекториям не превышает 10 %.

© ПНИПУ

© Бондарь Валентин Степанович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: tm@mami.ru, [iD: 0000-0002-1047-7211](https://orcid.org/0000-0002-1047-7211)

Абашев Дмитрий Рустамович – к.ф.-м.н., доц., e-mail: tm@mami.ru, [iD: 0000-0002-1626-0662](https://orcid.org/0000-0002-1626-0662)

Фомин Денис Юрьевич – асп., e-mail: tm@mami.ru, [iD: 0000-0001-9520-5145](https://orcid.org/0000-0001-9520-5145)

Valentin S. Bondar – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, e-mail: tm@mami.ru, [iD: 0000-0002-1047-7211](https://orcid.org/0000-0002-1047-7211)

Dmitry R. Abashev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: tm@mami.ru, [iD: 0000-0002-1626-0662](https://orcid.org/0000-0002-1626-0662)

Denis Ju. Fomin – PhD Student, e-mail: tm@mami.ru, [iD: 0000-0001-9520-5145](https://orcid.org/0000-0001-9520-5145)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THEORIES OF PLASTICITY UNDER COMPLEX LOADING ALONG FLAT TRAJECTORIES OF DEFORMATIONS

V.S. Bondar, D.R. Abashev, D.Ju. Fomin

Moscow polytechnical university, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 22 April 2021
Accepted: 15 July 2021
Published: 22 October 2021

Keywords:

variants of the theory of plastic flow, combined hardening, complex loading, plane deformation trajectories, stress trajectories, scalar and vector properties.

ABSTRACT

The paper considers variants of theories of plastic flow with combined hardening, which are widely used in applied calculations of structures. A comparative analysis of the theories under complex loading along flat strain trajectories is carried out and covers the entire range of strain paths from multilink polylines to curved trajectories of constant and variable curvatures. The strain path from medium to large curvatures are considered. The analysis of the research results is carried out in the vector space of A.A. Il'yushin. We consider plane trajectories of deformations in the form of a square, three circles passing the origin of coordinates, and trajectories in an asteroid-like form. The results of the calculations are compared with the results of the experimental studies of the response stress trajectories, scalar and vector properties. Variants of theories are considered: isotropic hardening model; Ishlinsky-Prager-Kadashevich-Novozhilov model (linear kinematic and isotropic hardening); model similar to Ono-Wang's model; the Armstrong-Frederick-Kadashevich model (the Korotkikh model is based on this model); the Shabosh model with three evolutionary Armstrong-Frederick-Kadashevich equations; Themis model based on the invariant theory of plasticity; Bondar model with a three-term structure of the evolutionary equation for kinematic hardening. We give the material parameters (functions) that close the variants of plasticity theories. A satisfactory agreement with the experiment for all deformation trajectories is achieved in calculations based on the models of Ishlinsky-Prager-Kadashevich-Novozhilov, Shabosh and Themis. The difference between the results of calculations and experiments does not exceed 30 %. The best agreement with the experiment is achieved on the basis of the Bondar model with the difference between the results of the calculations and experiments for all trajectories less than 10 %.

© PNRPU

Введение

Развитие теории пластичности и разработка определяющих уравнений описания процессов сложного нагружения идет двумя основными направлениями. К первому направлению относятся различные варианты [1–12] теории упругопластических процессов, базирующиеся на общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [1]. Ко второму направлению относятся различные варианты [13–41] теории пластического течения при комбинированном упрочнении, базирующиеся на концепции микронапряжений, выдвинутой В.В. Новожиловым [16, 19].

В практических расчетах конструкций широкое применение в настоящее время нашли варианты теории пластического течения при комбинированном упрочнении. Они имеют обобщение на неизотермические процессы нагружения, а также процессы накопления повреждений, т.е. позволяют определять ресурс.

Практически ни в одной работе, предлагающей вариант теории, не приводится сравнение с уже имеющимися вариантами и не определяются преимущества того или иного варианта. В настоящей работе предлагается провести сравнительный анализ вариантов теории пластического течения при комбинированном упрочнении, наиболее применяемых в программных комплексах расчета конструкций. Для начала будут рассматриваться процессы сложного нагружения по плоским траекто-

риям деформаций, охватывая весь спектр траекторий от многозвенных ломаных до криволинейных траекторий постоянной и переменной кривизны как средней, так и большой кривизны. Анализ результатов исследований проводится в векторном пространстве А.А. Ильюшина [1, 2].

Рассматриваются варианты теории: модель изотропного упрочнения, модель Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова [13–16] (линейное кинематическое упрочнение + изотропное упрочнение); модель Оно–Ванга [33, 34]; модель Армстронга–Фредерика–Кадашевича [17, 20] (на основе этой модели строится модель Коротких); модель Шабоша [23–25] с тремя эволюционными уравнениями Армстронга–Фредерика–Кадашевича; модель Темиса [35], построенная на основе инвариантной теории пластичности [32]; модель Бондаря [26–31] с трехчленной структурой эволюционного уравнения для кинематического упрочнения.

Получены и приводятся материальные параметры (функции), замыкающие каждый вариант теории пластичности. Исследования процессов сложного нагружения проводятся по плоским траекториям деформаций в виде квадрата, трех окружностей разного радиуса, проходящих через начало координат, а также траектории в виде астроида. Результаты расчетов сопоставляются с результатами экспериментальных исследований [7–9] твердой научной школы под руководством В.Г. Зубчанинова. Сопоставление результатов расчетов

по различным вариантам теории и экспериментов проводится по ответным траекториям напряжений, скалярным и векторным свойствам. В следующих работах предполагается рассмотреть сложные процессы нагружения по пространственным траекториям деформаций, а также процессы нагружения по траекториям напряжений.

1. Варианты теории пластичности

Рассматриваются конструкционные стали, однородные и начально изотропные. В процессе упругопластического деформирования в материале может возникать только пластическая деформационная анизотропия. Рассматриваются малые деформации при температурах, когда нет фазовых превращений, и скоростях деформаций, когда динамическими и реологическими эффектами можно пренебречь.

Рассматриваются наиболее применяемые в практических расчетах варианты теории пластического течения при изотропном, кинематическом (анизотропном) и комбинированном (изотропном и кинематическом) упрочнениях.

Для всех вариантов теорий тензор скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$ представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ и пластической $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ деформаций:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p. \quad (1)$$

Упругие деформации при изменении напряжений следуют обобщенному закону Гука:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} \left[\dot{\sigma}_{ij} - \nu (3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}) \right], \quad (2)$$

где E, ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона; σ_{ij} – тензор напряжений; $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ – среднее напряжение.

Для всех рассматриваемых вариантов теорий принимается поверхность напряжения, разделяющая области упругого и упругопластического состояний. Поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} (s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C_p^2 = 0. \quad (3)$$

Здесь $s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}$ – девиатор активных [15] напряжений; s_{ij} – девиатор напряжений; a_{ij} – девиатор микронапряжений (добавочных напряжений, остаточных микронапряжений [16, 18, 19]) характеризует смещение поверхности нагружения, т.е. направленное (анизотропное) упрочнение. Скаляр $C_p(\epsilon_{u^*}^p)$, зависящий от накопленной пластической деформации, отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения и характеризует изотропное упрочнение.

Для определения скоростей пластической деформации используется ассоциированный с уравнением (3) градиентальный закон течения:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_{u^*}^*} \dot{\epsilon}_{u^*}^p. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_{u^*}^* = \left(\frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^* \right)^{\frac{1}{2}}$ – интенсивность активных напряжений; $\dot{\epsilon}_{u^*}^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}}$ – скорость накопленной пластической деформации.

Для всех рассматриваемых вариантов теории изотропное упрочнение определяется зависимостью радиуса поверхности нагружения от накопленной пластической деформации:

$$C_p = C_p(\epsilon_{u^*}^p). \quad (5)$$

Следует отметить, что для каждого варианта зависимость (5) определяется функцией, соответствующей рассматриваемому варианту.

Рассматриваемые варианты отличаются только эволюционными уравнениями для смещения центра поверхности нагружения. Ниже приводятся эволюционные уравнения для каждого варианта и соответствующие материальные функции конструкционных сталей 9Х2 и 40Х16Н9Г2С, на образцах из которых проводились испытания на сложное нагружение.

Материальные функции для всех представленных моделей определялись с использованием участка диаграммы статического растяжения до деформации 0,1 и диаграммы растяжения после предварительного сжатия до деформации 0,02.

Модель изотропного упрочнения

$$a_{ij} = 0. \quad (6)$$

Данную модель замыкают следующие материальные параметры (функции):

$$E, \nu, C_p(\epsilon_{u^*}^p). \quad (7)$$

Материальные функции конструкционной стали 40Х16Н9Г2С (табл. 1)

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3.$$

Таблица 1

Функция изотропного упрочнения.
Ст. 40Х16Н9Г2С

Table 1

Isotropic hardening function. St. 40X16H9G2C

$\epsilon_{u^*}^p$	0	0,00016	0,00061	0,0011	0,0021	0,0048	0,0071	0,01	0,1
$C_p, \text{ МПа}$	62	144	204	228	256	295	335	350	800

Материальные функции конструкционной стали 9Х2 (табл. 2)

$$E = 2.3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3.$$

Таблица 2

Функция изотропного упрочнения. Ст. 9Х2

Table 2

Isotropic hardening function. St. 9Х2

ε_{u*}^p	0	0,00025	0,00075	0,0015	0,002	0,0055	0,0079	0,01	0,1
C_p , МПа	209	240	270	300	310	370	395	440	940

Модель Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова [13–16]

$$a_{ij} = \frac{2}{3} g \varepsilon_{ij}^p. \quad (8)$$

Данную модель замыкают следующие материальные параметры (функции):

$$E, \nu, g, C_p(\varepsilon_{u*}^p). \quad (9)$$

Материальные функции конструкционной стали 40Х16Н9Г2С (табл. 3)

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3, \quad g = 3350 \text{ МПа}.$$

Таблица 3

Функции изотропного упрочнения. Ст. 40Х16Н9Г2С

Table 3

Isotropic hardening function. St. 40Х16Н9Г2С

ε_{u*}^p	0	0,00023	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	63	151	173	208	247	287	297	324	414

Материальные функции конструкционной стали 9Х2 (табл. 4)

$$E = 2.3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3, \quad g = 5000 \text{ МПа}.$$

Таблица 4

Функция изотропного упрочнения. Ст. 9Х2

Table 4

Isotropic hardening function. St. 9Х2

ε_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
C_p , МПа	209	241	263	282	299	345	357	408	468

Модель Оно–Ванга [33, 34]

$$\dot{a}_{ij} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_{ij}^{(m)}, \quad \dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (10)$$

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)} \sigma_a^{(m)}; \\ 0, \text{ если } a_u^{(m)} \geq \sigma_a^{(m)} \cap a_{ij}^{(m)} s_{ij}^* > 0; \end{cases}$$

$$a_u^{(m)} = \left(\frac{3}{2} a_{ij}^{(m)} a_{ij}^{(m)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Данную модель замыкают следующие материальные параметры (функции):

$$E, \nu, \beta^{(1)}, \sigma_a^{(1)}, \dots, \beta^{(M)}, \sigma_a^{(M)}, C_p(\varepsilon_{u*}^p). \quad (12)$$

Здесь в расчетах принимается $M = 10$.

Материальные функции конструкционной стали 40Х16Н9Г2С (табл. 5)

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3;$$

$$\beta^{(1)} = 10000, \beta^{(2)} = 3400, \beta^{(3)} = 2000, \beta^{(4)} = 1400, \beta^{(5)} = 1050; \\ \beta^{(6)} = 700, \beta^{(7)} = 450, \beta^{(8)} = 2801, \beta^{(9)} = 161, \beta^{(10)} = 90;$$

$$\sigma_a^{(1)} = 1,5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(2)} = 5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(3)} = 7,5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(4)} = 9 \text{ МПа}; \\ \sigma_a^{(5)} = 15 \text{ МПа}, \sigma_a^{(6)} = 26 \text{ МПа}, \sigma_a^{(7)} = 33,5 \text{ МПа}; \\ \sigma_a^{(8)} = 29 \text{ МПа}, \sigma_a^{(9)} = 11,5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(10)} = 41 \text{ МПа}.$$

Таблица 5

Функции изотропного упрочнения. Ст. 40Х16Н9Г2С

Table 5

Isotropic hardening function. St. 40Х16Н9Г2С

ε_{u*}^p	0	0,0002	0,0004	0,008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	62	125	131	137	124	147	157	224	534

Материальные функции конструкционной стали 9Х2 (табл. 6)

$$E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3;$$

$$\beta^{(1)} = 8870, \beta^{(2)} = 1811, \beta^{(3)} = 985, \beta^{(4)} = 666, \beta^{(5)} = 499, \\ \beta^{(6)} = 358, \beta^{(7)} = 240, \beta^{(8)} = 142, \beta^{(9)} = 114, \beta^{(10)} = 82;$$

$$\sigma_a^{(1)} = 1,2 \text{ МПа}, \sigma_a^{(2)} = 8 \text{ МПа}, \sigma_a^{(3)} = 12 \text{ МПа}, \\ \sigma_a^{(4)} = 15 \text{ МПа}, \sigma_a^{(5)} = 19 \text{ МПа}, \sigma_a^{(6)} = 28 \text{ МПа}, \\ \sigma_a^{(7)} = 36 \text{ МПа}, \sigma_a^{(8)} = 24 \text{ МПа}, \sigma_a^{(9)} = 8 \text{ МПа}, \sigma_a^{(10)} = 87 \text{ МПа}.$$

Таблица 6

Функция изотропного упрочнения. Ст. 9Х2

Table 6

Isotropic hardening function. St. 9Х2

ε_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
C_p , МПа	209	229	233	232	211	187	188	255	1120

Модель Армстронга–Фредерика–Кадашевича [17, 20]

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\epsilon}_{ij}^p + g_a a_{ij} \dot{\epsilon}_{u*}^p. \quad (13)$$

Данную модель замыкают следующие материальные параметры (функции):

$$E, \nu, g, g_a, C_p(\epsilon_{u*}^p). \quad (14)$$

Следует отметить, что эволюционное уравнение (13) используется в модели Коротких [21], ниже приведены материальные функции, полученные для модели Коротких [21, 22].

Материальные функции конструкционной стали 40X16H9Г2С (табл. 7)

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3, \quad g = 38250 \text{ МПа}, \quad g_a = -300.$$

Таблица 7

Функции изотропного упрочнения.
Ст. 40X16H9Г2С

Table 7

Isotropic hardening function. St. 40X16H9Г2С

ϵ_{u*}^p	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
$C_p, \text{МПа}$	64	143	160	185	190	201	213	281	586

Материальные функции конструкционной стали 9Х2 (табл. 8)

$$E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3, \quad g = 33750 \text{ МПа}, \quad g_a = -250.$$

Таблица 8

Функция изотропного упрочнения. Ст. 9Х2

Table 8

Isotropic hardening function. St. 9Х2

ϵ_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
$C_p, \text{МПа}$	209	235	239	252	253	261	305	356	1300

Модель Шабша [23–25]

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\epsilon}_{ij}^p + g_a^{(m)} a_{ij}^{(m)} \dot{\epsilon}_{u*}^p; \quad (15)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sum_{m=1}^M \dot{\epsilon}_{ij}^{(m)}. \quad (16)$$

Здесь будет использоваться модель, состоящая из трех эволюционных уравнений, т.е. $M = 3$. Данную модель замыкают следующие материальные параметры (функции):

$$E, \nu, g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}, g_a^{(1)}, g_a^{(2)}, g_a^{(3)}, C_p(\epsilon_{u*}^p). \quad (17)$$

Материальные функции конструкционной стали 40X16H9Г2С (табл. 9)

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3;$$

$$g^{(1)} = 16150 \text{ МПа}, \quad g_a^{(1)} = -147, \quad g^{(2)} = 126300 \text{ МПа};$$

$$g_a^{(2)} = -1570, \quad g^{(3)} = 768650 \text{ МПа}, \quad g_a^{(3)} = -14730.$$

Таблица 9

Функции изотропного упрочнения.
Ст. 40X16H9Г2С

Table 9

Isotropic hardening function. St. 40X16H9Г2С

ϵ_{u*}^p	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
$C_p, \text{МПа}$	91	91,5	92	93	95	112	122	166	477

Материальные функции конструкционной стали 9Х2 (табл. 10)

$$E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3;$$

$$g^{(1)} = 9200 \text{ МПа}, \quad g_a^{(1)} = -10, \quad g^{(2)} = 63\,960 \text{ МПа};$$

$$g_a^{(2)} = -1000, \quad g^{(3)} = 14130 \text{ МПа}, \quad g_a^{(3)} = -100\,000.$$

Таблица 10

Функция изотропного упрочнения. Ст. 9Х2

Table 10

Isotropic hardening function. St. 9Х2

ϵ_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
$C_p, \text{МПа}$	209	228	227	237	240	259	285	266	301

Модель Бондаря [26–31]

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\epsilon}_{ij}^p + \left(\frac{2}{3} g_\epsilon \epsilon_{ij}^p + g_a a_{ij} \right) \dot{\epsilon}_{u*}^p; \quad (18)$$

$$g = E_a + \beta \sigma_a, \quad g_\epsilon = E_a \beta, \quad g_a = -\beta.$$

Данную модель замыкают следующие материальные параметры (функции):

$$E, \nu, E_a, \sigma_a, \beta, C_p(\epsilon_{u*}^p). \quad (19)$$

Материальные функции конструкционной стали 40X16H9Г2С (табл. 11)

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3,$$

$$E_a = 3550 \text{ МПа}, \quad \sigma_a = 140 \text{ МПа}, \quad \beta = 445.$$

Материальные функции конструкционной стали 9Х2 (табл. 12)

$$E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3;$$

$$E_a = 4770 \text{ МПа}, \quad \sigma_a = 160 \text{ МПа}, \quad \beta = 265.$$

Таблица 11

Функции изотропного упрочнения.
Ст. 40X16H9Г2С

Table 11

Isotropic hardening function. St. 40X16H9Г2С

ε_{u*}^p	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	64	137	150	166	153	151	159	190	274

Таблица 12

Функция изотропного упрочнения. Ст. 9Х2

Table 12

Isotropic hardening function. St. 9Х2

ε_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,021
C_p , МПа	227	246	249	248	230	220	230	246	320

Модель Темиса [32, 35]

$$a_{ij} = a_1(\varepsilon_{u*}^p) \varepsilon_{ij}^p + a_2(\varepsilon_{u*}^p) \xi_{ij}; \quad (20)$$

$$\dot{\xi}_{ij} = K(\sigma_u, \varepsilon_{u*}^p) \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (21)$$

Данную модель замыкают следующие материальные функции:

$$E, \nu, a_1(\varepsilon_{u*}^p), a_2(\varepsilon_{u*}^p), K(\sigma_u, \varepsilon_{u*}^p), C_p(\varepsilon_{u*}^p). \quad (22)$$

Материальные функции конструкционных сталей 40X16H9Г2С и 9Х2 приведены в работе [35, 42], расчеты по модели Темиса проводились А.Д. Худяковой [42].

Для проверки полученных материальных параметров (функций) сталей 9Х2 и 40X16H9Г2С были проведены расчеты одноосного растяжения до деформации 10 % для всех вариантов теории и сопоставлены с результатами экспериментов [9]. Получено надежное соответствие расчетов и экспериментов.

2. Векторное представление напряжений и деформаций

Для удобства сопоставления расчетных и экспериментальных результатов рассматривается векторное представление процессов нагружения и деформирования [1, 2]. Компоненты векторов напряжений \mathbf{S} и деформаций $\mathbf{\Xi}$ связаны с компонентами тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} формулами [1, 2]

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} s_{11} \\ \sqrt{2} (s_{22} + s_{11} / 2) \\ \sqrt{2} s_{12} \\ \sqrt{2} s_{13} \\ \sqrt{2} s_{14} \end{Bmatrix}, \quad \begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \\ \sigma_0 &= \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \\ S &= \sqrt{s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_u = \sigma; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\mathbf{\Xi} = \begin{Bmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \\ \Xi_3 \\ \Xi_4 \\ \Xi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} e_{11} \\ \sqrt{2} (e_{22} + e_{11} / 2) \\ \sqrt{2} e_{12} \\ \sqrt{2} e_{13} \\ \sqrt{2} e_{14} \end{Bmatrix}, \quad \begin{aligned} e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0, \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{3} \varepsilon_{ii}, \\ \Xi &= \sqrt{e_{ij} e_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_u. \end{aligned} \quad (24)$$

Длина дуги траектории деформаций определяется выражением

$$s = \int |\dot{\Xi}| dt = \int (\dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij})^{\frac{1}{2}} dt, \quad (25)$$

где $\dot{\Xi}$ – вектор скоростей деформаций; \dot{e}_{ij} – девиатор скоростей деформаций. Векторные и скалярные свойства являются основными характеристиками, изучаемыми при экспериментально-теоретических исследованиях процессов упругопластического деформирования материалов при сложном нагружении. В качестве векторных свойств при сложном нагружении по плоским траекториям деформаций рассматривается отклонение вектора напряжений от касательной к траектории деформаций. Характеристика ориентации определяется углом сближения ϑ ,

$$\vartheta = \arccos \frac{(\mathbf{S} \cdot \dot{\Xi})}{|\mathbf{S}| |\dot{\Xi}|}. \quad (26)$$

В качестве скалярных свойств рассматривается изменение модуля вектора напряжений по длине дуги траектории деформаций:

$$\sigma = \sigma(s). \quad (27)$$

3. Многозвенная ломаная траектория деформаций

Сравнение вариантов теории проводится на многозвенной ломаной траектории деформаций в виде квадрата (рис. 1) со стороной 0,01 на плоскости (Ξ_1, Ξ_3) вектора деформаций $\mathbf{\Xi}$.

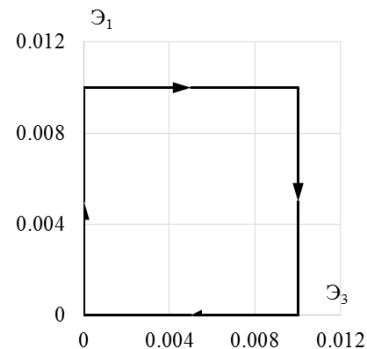


Рис. 1. Траектория деформаций. Квадрат

Fig. 1. Strain path. A square

Исследования проводятся на образцах из конструкционной стали 40X16H9Г2С. Осуществляются один и одна четвертая часть цикла нагружения по этой траектории. Экспериментальные результаты [9] на всех рисунках показаны светлыми кружками. Расчетные результаты показаны сплошными, штриховыми

и пунктирными кривыми. Ответные траектории напряжений показаны на рис. 2, а, 3, а, 4, а. Скалярные и векторные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ и угла сближения ϑ по траектории деформаций приведены на рис. 2, б, 3, б, 4, б и 2, в, 3, в, 4, в соответственно.

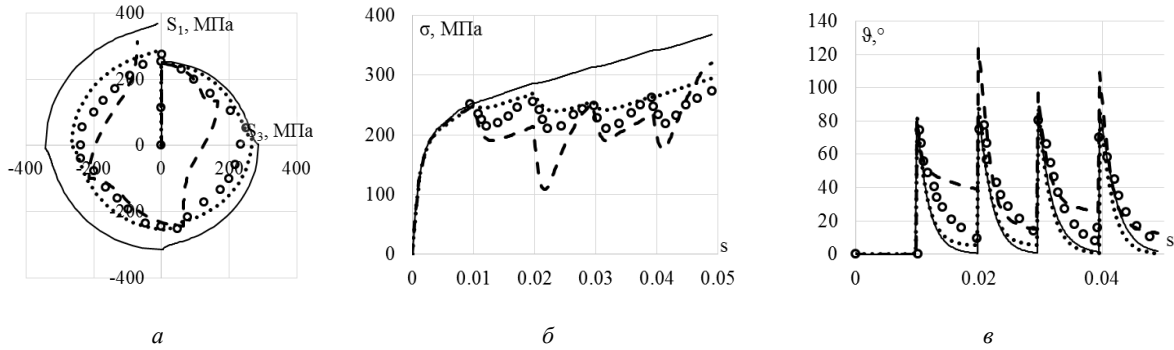


Рис. 2. Траектория напряжений (а); скалярные свойства (б); векторные свойства (в): кружки – эксперимент; сплошная кривая – теория течения при изотропном упрочнении; пунктирная кривая (точки) – модель Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова; штриховая кривая – модель Оно–Ванга

Fig. 2. Stress path (a); scalar properties (b); vector properties (c): circles show the experiment, a solid curve shows the isotropic hardening of the plastic-flow theory, the dotted curve (points) show Ishlinskii-Prager-Kadashevich model, the dashed curve – shows the Ohno-Wang model

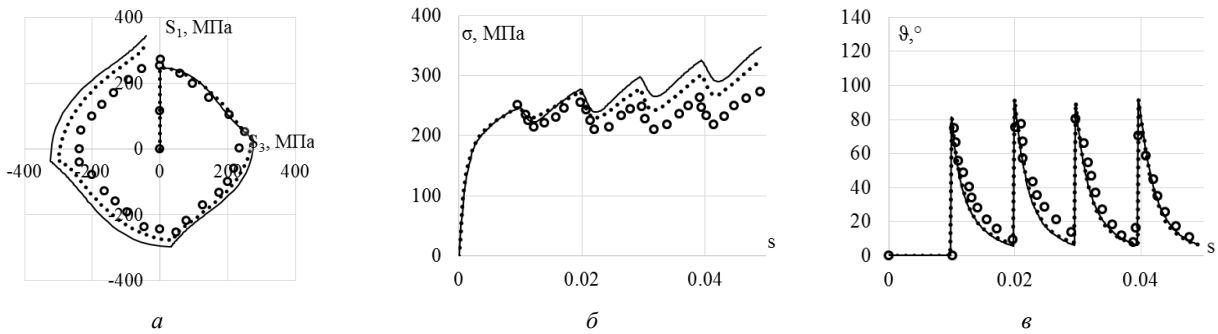


Рис. 3. Траектория напряжений (а); скалярные свойства (б); векторные свойства (в): кружки – эксперимент; сплошная кривая – модель Коротких; пунктирная кривая (точки) – модель Шабоса

Fig. 3. Stress path (a); scalar properties (b); vector properties (c): circles show the experiment, the solid curve is Korotkih model, the dotted curve (points) is the Chaboche model

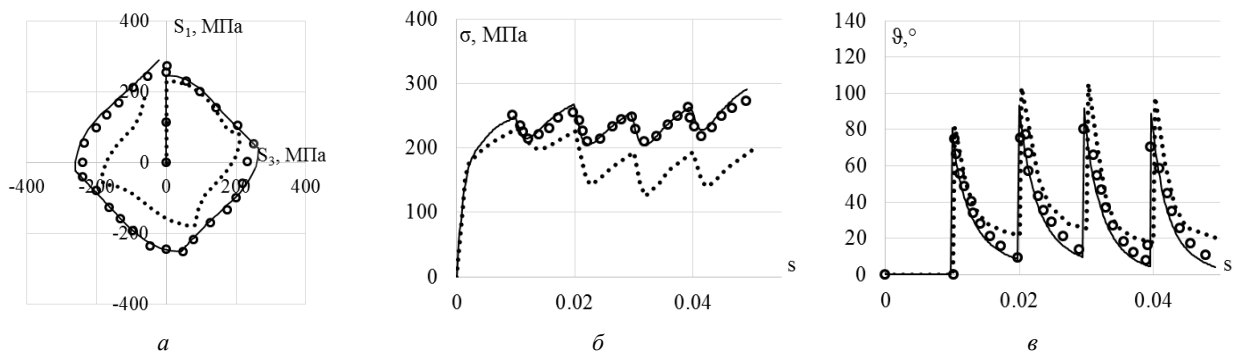


Рис. 4. Траектория напряжений (а); скалярные свойства (б); векторные свойства (в): кружки – эксперимент; сплошная кривая – модель Бондаря; пунктирная кривая (точки) – модель Темиса

Fig. 4. Stress path (a); scalar properties (b); vector properties (c): circles show the experiment, the solid curve shows Bondar model, the dotted curve (points) is Temis model

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам теории и эксперимента показывает:

- по ответной траектории напряжений худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно–Ванга и Темиса; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Коротких и Шабоша; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;
- по скалярным свойствам худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно–Ванга и Темиса; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Коротких и Шабоша; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;
- по векторным свойствам худшие результаты получены на основе модели Оно–Ванга; удовлетворительные – на основе моделей изотропного упрочнения, Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Темиса; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе моделей Коротких, Шабоша и Бондаря.

4. Криволинейная траектория деформаций кусочно-постоянной кривизны

Сравнительный анализ вариантов теорий при сложном нагружении по плоской траектории деформаций кусочно-постоянной кривизны проводится на траекто-

рии деформаций (рис. 5) представляющей собой три окружности с радиусами кривизны 0,0025, 0,005, 0,0075, проходящие через начало координат. Эти окружности относятся к траекториям деформаций большой и средней кривизны. Материал, на котором проводится исследование – конструкционная сталь 9Х2. Экспериментальные результаты [9] на всех рисунках показаны светлыми кружками. Расчетные результаты показаны сплошными, штриховыми и пунктирными кривыми. Ответные траектории напряжений показаны на рис. 6, а, 7, а, 8, а. Скалярные и векторные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ и угла сближения ϑ по траектории деформаций приведены на рис. 6, б, 7, б, 8, б и 6, в, 7, в, 8, в соответственно.

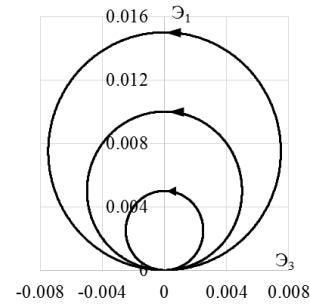


Рис. 5. Траектория деформаций. Окружности

Fig. 5. Strain path. Circles

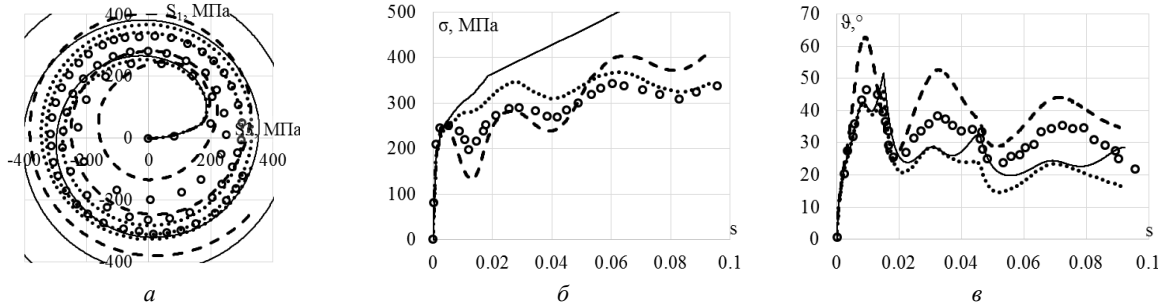


Рис. 6. Траектория напряжений (а); скалярные свойства (б); векторные свойства (в): кружки – эксперимент; сплошная кривая – теория течения при изотропном упрочнении; пунктирная кривая (точки) – модель Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова; штриховая кривая – модель Оно–Ванга

Fig. 6. Stress path (a); scalar properties (b); vector properties (c): circles show the experiment, the solid curve is isotropic hardening of the plastic-flow theory, the dotted curve (points) is Ishlinskii-Prager-Kadashevich model, the dashed curve is Ohno-Wang model

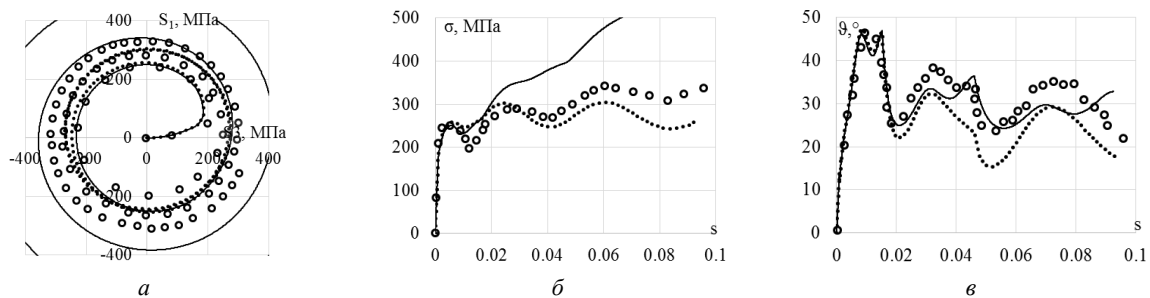


Рис. 7. Траектория напряжений (а); скалярные свойства (б); векторные свойства (в): кружки – эксперимент; сплошная кривая – модель Коротких; пунктирная кривая (точки) – модель Шабоша

Fig. 7. Stress path (a); scalar properties (b); vector properties (c): circles show the experiment, the solid curve is Korotkih model, the dotted curve (points) is Chaboche model

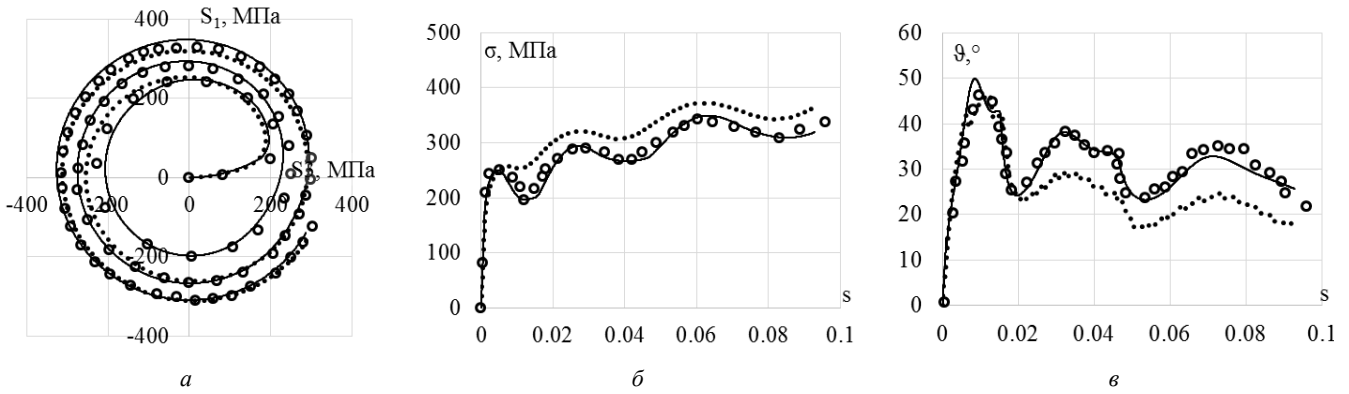


Рис. 8. Траектория напряжений (а); скалярные свойства (б); векторные свойства (в): кружки – эксперимент; сплошная кривая – модель Бондаря; пунктирная кривая (точки) – модель Темиса

Fig. 8. Stress path (a); scalar properties (b); vector properties (c): circles show the experiment, the solid curve is Bondar model, the dotted curve (points) is Temis model

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам теории и эксперимента показывают:

- по ответным траекториям напряжений худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно–Ванга, Коротких; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Шабоша, Темиса; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;

- по скалярным свойствам худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Коротких; удовлетворительные – на основе моделей Оно–Ванга, Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Шабоша, Темиса; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;

- по векторным свойствам удовлетворительные результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно–Ванга, Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Коротких, Шабоша, Темиса; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря.

5. Криволинейная траектория деформаций переменной кривизны

Сравнение вариантов теорий проводится на траектории деформаций переменной кривизны в виде астроида (рис. 9). Материал, на котором проводятся исследования – конструкционная сталь 9Х2. Экспериментальные результаты [9] на всех рисунках показаны светлыми кружками. Расчетные результаты показаны сплошными, штриховыми и пунктирными кривыми. Ответные траектории напряжений показаны на рис. 10, а, 11, а, 12, а. Скалярные и векторные свойства приведены на рис. 10, б, 11, б, 12, б и 10, в, 11, в, 12, в соответственно.

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам теорий и эксперимента показывают:

- по ответным траекториям напряжений худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно–Ванга, Коротких; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Шабоша, Темиса; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;

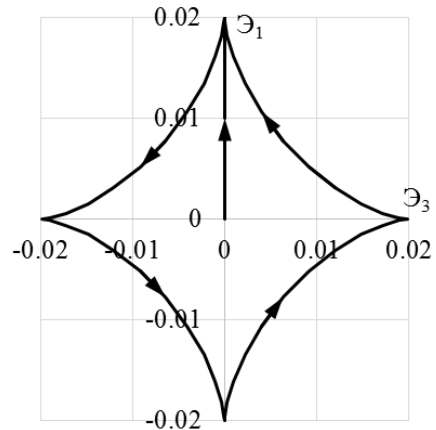


Рис. 9. Траектория деформаций. Астроида

Fig. 9. Strain path. Astroid

- по скалярным свойствам худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно–Ванга, Коротких; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Шабоша, Темиса; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;

- по векторным свойствам удовлетворительные результаты получены на основе всех вариантов теорий при лучшем соответствии эксперименту модели Бондаря.

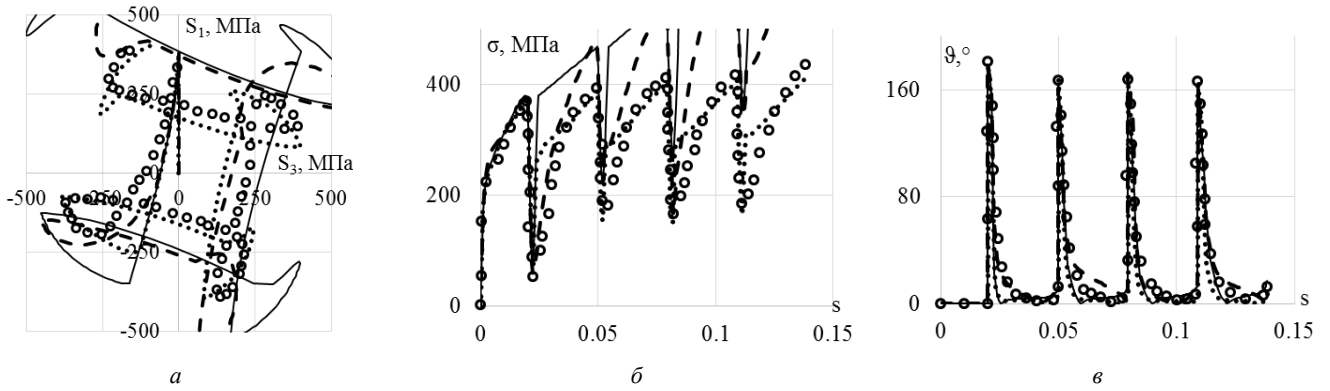


Рис. 10. Траектория напряжений (а); скалярные свойства (б); векторные свойства (в): кружки – эксперимент; сплошная кривая – теория течения при изотропном упрочнении; пунктирная кривая (точки) – модель Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова; штриховая кривая – модель Оно–Ванга

Fig. 10. Stress path (a); scalar properties (b); vector properties (c): circles – experiment, solid curve – isotropic hardening plastic-flow theory, dotted curve (points) – Ishlinskii–Prager–Kadashevich model, dashed curve – Ohno–Wang model

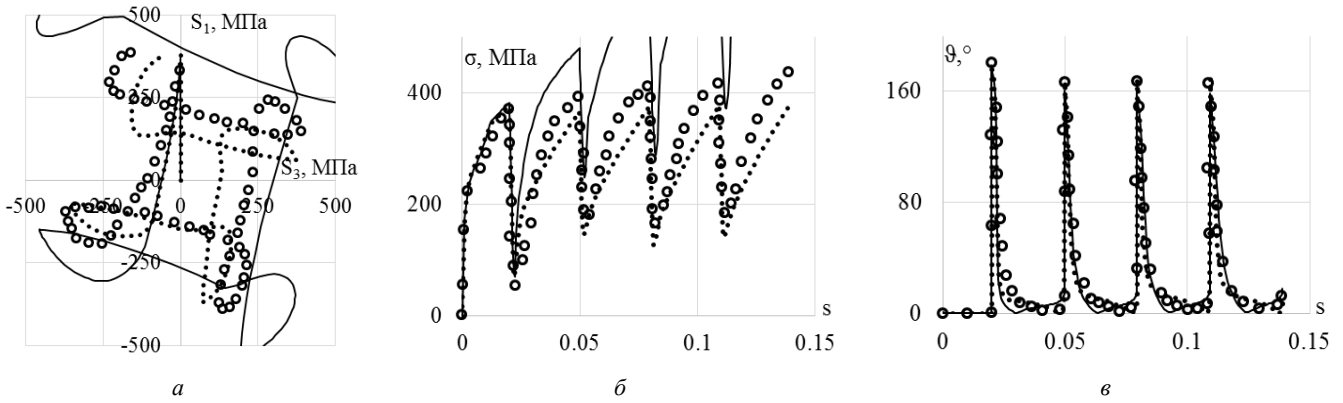


Рис. 11. Траектория напряжений (а); скалярные свойства (б); векторные свойства (в): кружки – эксперимент; сплошная кривая – модель Коротких; пунктирная кривая (точки) – модель Шабоса

Fig. 11. Stress path (a); scalar properties (b); vector properties (c): circles – experiment, solid curve – Korotkih model, dotted curve (points) – Chaboche model

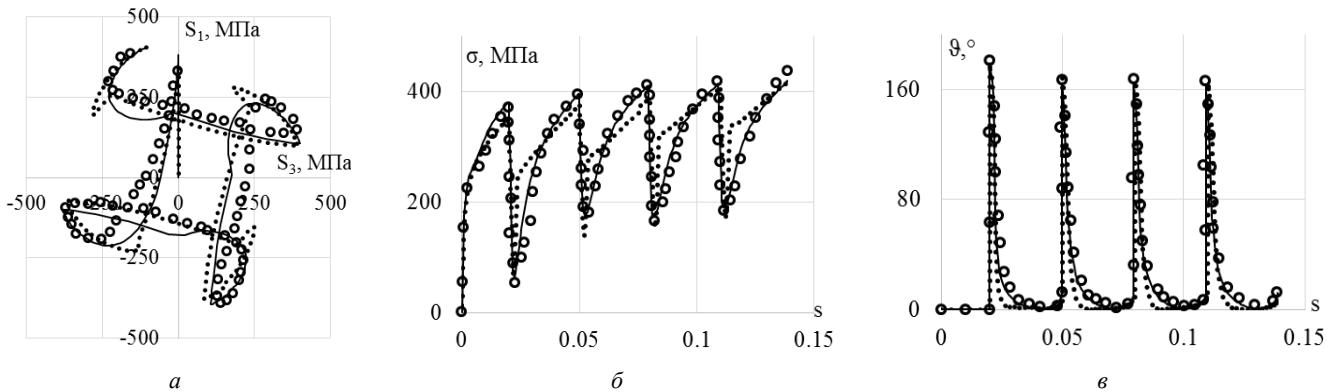


Рис. 12. Траектория напряжений (а); скалярные свойства (б); векторные свойства (в): кружки – эксперимент; сплошная кривая – модель Бондаря; пунктирная кривая (точки) – модель Темиса

Fig. 12. Stress path (a); scalar properties (b); vector properties (c): circles – experiment, solid curve – Bondar model, dotted curve (points) – Temis model

Заключение

Проведены сравнительные исследования различных вариантов теории пластического течения при комбинированном упрочнении, наиболее используемых в практических расчетах. Рассмотрены три основных класса плоских траекторий деформаций – многозвенные ломаные, криволинейные траектории постоянной и переменной кривизны. Криволинейные траектории являлись траекториями деформаций большой и средней кривизны.

Удовлетворительное соответствие эксперименту по всем траекториям достигается при расчетах на основе моделей Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Шабоса и Темиса – отличие результатов расчетов

и экспериментов не превышает 30 %. Модель Коротких может достигать лучших результатов, если учесть разделение процессов монотонных и циклических нагружений. Наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря – отличие результатов расчетов и экспериментов по всем траекториям не превышает 10 %. Следует отметить, что модель пластичности Бондаря замыкается тремя параметрами анизотропного упрочнения и одной функцией изотропного упрочнения, которые достаточно просто определяются из стандартного эксперимента на одноосное растяжение и растяжение после предварительного сжатия. Если есть только кривая одноосного растяжения, то диаграмма растяжения после предварительного сжатия строится на основе принципа Мазинга.

Библиографический список

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
3. Васин Р.А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. Вып. 1. – М.: Изд-во МГУБ 1971. – С. 59–126.
4. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. МДТТ. Т. 21. – М.: ВНИТИ, 1990. – С. 3–75.
5. Малый В.И. О разложении функционала напряжений по малому параметру // Вестник МГУ. Математика и механика. – 1967. – № 2. – С. 73–80.
6. Малый В.И. О проблеме векторных свойств материалов в упругопластических процессах // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14, № 3. – С. 19–27.
7. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности: монография. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.
8. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность: в 2 т. Т. 2. Пластичность. – М.: Физматлит, 2008. – 336 с.
9. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. Экспериментальная пластичность. Процессы сложного формирования. Кн. 1. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.
10. Дао Зуй Бик. Модификация соотношений упругопластических процессов средней кривизны // Вестник МГУ. Математика и механика. – 1981. – № 5. – С. 103–106.
11. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Ч. 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. – 2016. – № 1. – С. 110–135.
12. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Прикладной вариант теории упругопластических процессов // Изв. Тул. гос. ун-та. Естественные науки. – 2011. – Вып. 3. – С. 46–56.
13. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журн. – 1954. – Т. 6, вып. 3. – С. 314–324.
14. Prager W. The theory of plasticity: A Survey of Recent Achievements // Proc. Inst. Mech. Engrs. – London, 1955. – 169.41.
15. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 117, вып. 4. – С. 586–588.
16. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 78–89.
17. Кадашевич Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. – Вып. 6. – С. 39–45.
18. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Об учете микронапряжений в теории пластичности // Инж. Ж. МТТ. – 1968. – № 3. – С. 83–91.
19. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 224 с.
20. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect // CEBG Report No. RD/B/N/ 731. – 1966.
21. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
22. Прикладная теория пластичности / Ф.М. Митенков [и др.]. – М.: Физматлит, 2015. – 284 с.
23. Нелинейная механика материалов / Ж. Бессон [и др.]. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397 с.
24. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.
25. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // Int. J. of Plasticity. – 2012. – Vol. 35. – P. 44–66.
26. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.
27. Бондарь В.С., Абашев Д.Р. Прикладная теория неупругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 147–162. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.14
28. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation and low-high-cycle fatigue of stainless steel 304 in uniaxial stress state / V.S. Bondar, V.V. Dansin, D.Vu. Long, D.D. Nguyen // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2018. – Vol. 25(12). – P. 1009–1017. DOI: 10.1080/15376494.2017.1342882
29. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Петров В.К. Некоторые особенности прогнозирования ресурса материалов и конструкций при циклическом нагружении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 1. – С. 18–26. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.02

30. Бондарь В.С., Абашев Д.Р. Некоторые особенности процессов монотонных и циклических нагружений. Эксперимент и моделирование // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 25–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.03

31. Abashev D.R., Bondar V.S. Refinement of plasticity theory for modeling monotonic and cyclic loading processes // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. – 2020. – Vol. 15.

32. Демьянушко И.В., Темис Ю.М. К построению теорий пластического течения с анизотропным упрочнением для материалов, находящихся под воздействием физических полей // Изв.АН СССР. МТТ. – 1975. – № 5. – С. 111–119.

33. Ohno N., Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions // *Int. Journal of Plasticity*. – 1991. – Vol. 7. – P. 879–891.

34. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior // *International Journal of Plasticity*. – 1993. – Vol. 9. – P. 375–390.

35. Темис Ю.М., Худякова А.Д. Модель неизоотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении // Математическое моделирование и численные методы. – 2017. – № 3. – С. 22–41.

References

1. Il'jushin A.A. *Plastichnost'. Osnovy obshchei matematicheskoi teorii* [Plastic. Foundations of general mathematical theory]. Moscow Izd. AN SSSR, 1963, 271 p.

2. Il'jushin A.A. *Mehanika sploshnoj sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, Publishing house of Moscow State University, 1990, 310 p.

3. Vasin R.A. Nekotorye voprosy svyazi napryazhenij i deformacij pri slozhnom nagruzhении [Some questions of the relationship between stresses and deformations under complex loading]. Moscow, Izd-vo MGUB, *Uprugost' i neuprugost'*, 1971, iss. 1, pp. 59-126.

4. Vasin R.A. *Opredeleyayushchie sootnosheniya teorii plastichnosti* [Constitutive relations of the theory of plasticity]. Moscow, VNIIT, *Itogi nauki i tekhniki. MDTT*, 1990, vol. 21, pp. 3-75.

5. Malyj V.I. O razlozhenii funkcionala napryazhenij po malomu parametru [On the expansion of the stress functional in terms of a small parameter]. *Vestn. MGU. Matem. i mekhanika*, 1967, no. 2, pp. 73-80

6. Malyj V.I. O probleme vektornykh svojstv materialov v uprugoplasticheskikh processah [On the problem of vector properties of materials in elastoplastic processes]. *Prikladnaya mekhanika*, 1978, vol. 14, no. 3, pp. 19-27.

7. Zubchaninov V.G. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti: Monografiya* [Mathematical theory of plasticity: Monograph]. Tver', TGTU, 2002. 300 p.

8. Zubchaninov V.G. *Ustojchivost' i plastichnost'. V 2-h t. T.2. Plastichnost'* [Stability and ductility. In 2 volumes]. Moscow, FIZMATLIT, 2008. 336 p.

9. Zubchaninov V.G., Ohlopkov N.L., Garannikov V.V. *Eksperimental'naya plastichnost'. Processy slozhnogo deformirovaniya. Kniga 1* [Experimental plasticity. Complex deformation processes. Book 1.]. Tver', TGTU, 2003. 172 p.

10. Dao Zuj Bik. *Modifikaciya sootnoshenij uprugoplasticheskikh processov srednej krivizny* [Modification of relations

36. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature // *Int. J. of Plasticity*. – 2009. – Vol. 26(3). – P. 441–465. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.08.005

37. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting // *Int. J. of Plasticity*. – 2009. – Vol. 25. – P. 1560–1587.

38. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting // *Int. J. of Plasticity*. – 2010. – Vol. 26. – P. 711–730.

39. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models // *Int. J. Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1863–1889.

40. Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control // *Int. J. Plasticity*. – 2013. – Vol. 43. – P. 1–19.

41. Taleb L., Cailletaud G., Sai K. Experimental and numerical analysis about the cyclic behavior of the 304L and 316L stainless steels at 350 °C // *Int. J. Plasticity*. – 2014. – Vol. 61. – P. 32–48.

42. Худякова А.Д. Моделирование процессов циклического упругопластического неизоотермического деформирования конструкционных сплавов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020. – 184 с.

of elastoplastic processes of average curvature]. *Vestn. MGU. Matem. i mekhanika*, 1981, no. 5, pp. 103-106.

11. Peleshko V.A. *Prikladnoj i inzhenernoj varianty teorii uprugoplasticheskikh processov aktivnogo slozhnogo nagruzheniya. Chast' 2: Identifikaciya i verifikaciya* [Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 2: Identification and verification], *Izv. RAN. MTT*, 2016, no. 1. pp. 110-135.

12. Bondar V.S., Danshin V.V., Semenov P.V. *Prikladnoj variant teorii uprugoplasticheskikh processov* [Applied version of the theory of elastoplastic processes]. *Izv. Tul'skogo gos. universiteta. Estestvennye nauki*, 2011, iss. 3, pp. 46-56.

13. Ishlinskij A.Ju. *Obshchaya teoriya plastichnosti s lineynym uprochneniem* [General theory of plasticity with linear hardening]. *Ukr. matem. Zhurn*, 1954, vol. 6, iss. 3, pp. 314-324.

14. Prager W. The theory of plasticity: A Survey of Recent Achievements. *London, Proc. Inst. Mech. Engrs*, 1955, 169.41.

15. Kadashevich Ju.I., Novozhilov V.V. *Teoriya plastichnosti, uchityvayushchaya effekt Baushingera* [The theory of plasticity taking into account the Bauschinger effect]. *Dokl. AN SSSR*, 1957, vol. 117, iss. 4, pp. 586-588.

16. Kadashevich Ju.I., Novozhilov V.V. *Teoriya plastichnosti, uchityvayushchaya ostatochnye mikronapryazheniya* [The theory of plasticity taking into account residual microstresses]. *PMM*. 1958, vol. 22, iss. 1. pp. 78-89.

17. Kadashevich Ju.I. *O razlichnykh tenzorno-linejnykh sootnosheniyah v teorii plastichnosti* [On various tensor-linear relations in the theory of plasticity]. *Leningrad, Izd-vo LGU, Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti*, 1967, iss. 6, pp. 39-45.

18. Kadashevich Ju.I., Novozhilov V.V. *Ob uchete mikro-napryazhenij v teorii plastichnosti* [On the account of microstresses in the theory of plasticity]. *Inzh. Zh. MTT*, 1968, no. 3. pp. 83-91.

19. Kadashevich Ju.I., Novozhilov V.V. Mikronapryazheniya v konstrukcionnyh materialah [Microstresses in structural materials]. *Leningrad, Mashinostroenie*, 1990. 224 p.
20. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *CEGB Report No. RD/B/N/ 731*, 1966.
21. Volkov I.A., Korotkih Ju.G. Uravneniya sostojanija vjazkoupругoplasticheskih sred s povrezhdenijami [Equations of state for damaged viscoelastoplastic media]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2008, 424 p.
22. Kadashevich Ju.I., Novozhilov V.V. Mikronapryazheniya v konstrukcionnyh materialah [Applied theory of plasticity]. *Leningrad, Mashinostroenie*, 1990, 224 p.
23. Besson Zh. Nelinejnaya mekhanika materialov [Nonlinear mechanics of materials]. *Saint Petersburg, Izd-vo Politekhn. un-ta*, 2010, 397 p.
24. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1642-1692.
25. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions. *Int. J. of Plasticity*, 2012, vol.35, pp. 44-66.
26. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. *New York: Begell House*, 2013, 194 p.
27. Bondar V.S., Abashev D.R. Applied theory of inelasticity. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 4, pp. 145-160. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.14
28. Bondar V.S., Dansin V.V., Long D. Vu., Nguyen D.D. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation and low-high-cycle fatigue of stainless steel 304 in uniaxial stress state. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2018, vol. 25(12), pp. 1009-1017, DOI: 10.1080/15376494.2017.1342882
29. Bondar V.S., Abashev D.R., Petrov V.K. On Predicting Material and Structural Resources under Cyclic Loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 1, pp. 18-26. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.02
30. Bondar V.S., Abashev D.R. Some features of monotonic and cyclic loadings. Experiment and modeling. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 25-34. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.03
31. Abashev D.R., Bondar V.S. Refinement of plasticity theory for modeling monotonic and cyclic loading processes. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2020.15.225.
32. Dem'yanushko I.V., Temis Ju.M. K postroeniyu teorij plasticheskogo techeniya s anizotropnym uprochneniem dlya materialov, nahodyashchihhsya pod vozdejstviem fizicheskikh polej [On the construction of theories of plastic flow with anisotropic hardening for materials under the influence of physical fields]. *Izv.AN SSSR. MTT*, 1975, no. 5. pp. 111-119.
33. Ohno N., Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions. *Int. Journal of Plasticity* 7, 1991, pp. 879-891.
34. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity*, 1993, vol. 9, pp. 375-390
35. Temis Ju.M., Hudyakova A.D. Model' neizotermicheskogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya konstrukcionnyh materialov pri slozhnom nagruzhении [Model of non-isothermal elastoplastic deformation of structural materials under complex loading]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*, 2017, no. 3, pp. 22-41.
36. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol. 26(3), pp. 441-465. DOI:10.1016/j.ijplas.2009.08.005.
37. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratcheting. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol.25, pp. 1560-1587.
38. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratcheting. *Int. J. of Plasticity*, 2010, vol.26, pp. 711-730.
39. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models. *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, pp.1863-1889.
40. Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control. *Int. J. Plasticity*, 2013, vol.43, pp.1-19.
41. Taleb L., Cailletaud G., Saï K. Experimental and numerical analysis about the cyclic behavior of the 304L and 316L stainless steels at 350 °C. *Int. J. Plasticity*, 2014, vol. 61, pp.32-48.
42. Hudyakova A.D. Modelirovanie processov ciklicheskogo uprugoplasticheskogo neizotermicheskogo deformirovaniya konstrukcionnyh splavov: dis...kandidata fiz.-mat.nauk. *Moscow, izd-vo MGTU im. N.E. Baumana*, 2020. 184 p.