



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.2.03

УДК 539.375

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗДЕЛЕНИЯ КОМПОЗИТА С АДГЕЗИОННЫМ СЛОЕМ

**В.В. Глаголев, А.А. Маркин, А.А. Фурсаев**

Тульский государственный университет, Тула, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 16 марта 2016 г.

Принята: 25 мая 2016 г.

Опубликована: 30 июня 2016 г.

#### Ключевые слова:

композит, подход  
Нейбера–Новожилова,  
характерный размер,  
линейная упругость,  
вариационное уравнение,  
метод конечных элементов

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается модель деформирования композиционного материала с тонким адгезионным слоем. Напряженное состояние слоя предлагается рассматривать на основе связи средних по толщине слоя напряжений и напряжений по границам слоя. Средние деформации слоя выражаются через его граничные перемещения. Использование средних напряжений и деформаций позволяет избежать зависимости напряженно-деформированного состояния слоя от формы его торцевых поверхностей. В рамках малых деформаций получено вариационное условие равновесия тел, соединенных посредством адгезионного слоя. Задача рассматривается в рамках линейной теории упругости. Для сопрягаемых тел законом Гука непосредственно связываются поля деформаций и напряжений. В результате связанная система вариационных уравнений сводится к уравнениям относительно полей перемещений в сопрягаемых телах, в том числе и на границах контакта со слоем. В качестве параметра система вариационных уравнений в перемещениях содержит толщину адгезионного слоя. Существенно, что данная система уравнений не является дискретной, так как поля перемещений полагаются непрерывными. Для получения приближенного решения можно использовать различные аппроксимации перемещений. В частности, применялся метод конечного элемента с квадратичной аппроксимацией полей перемещений для случая плоской деформации. Исследовалось влияние характерного размера конечного элемента на сходимость решения. Установлено, что если отношение грани конечного элемента к толщине слоя равно четырем и более, то имеет место численная сходимость. В силу отсутствия сингулярности напряжений в точках сопряжения адгезионного слоя с телами предлагаемый подход позволяет использовать известные локальные критерии разрушения. Проведен анализ возможных видов разрушения композита как за счет разрушения материала слоя, так и посредством разрыва связей между слоем и смежными материалами.

© ПНИПУ

© **Глаголев Вадим Вадимович** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: [vadim@tsu.tula.ru](mailto:vadim@tsu.tula.ru)  
**Маркин Алексей Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: [markin-nikram@yandex.ru](mailto:markin-nikram@yandex.ru)  
**Фурсаев Артем Александрович** – аспирант, e-mail: [artemkajs@mail.ru](mailto:artemkajs@mail.ru)

**Vadim V. Glagolev** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: [vadim@tsu.tula.ru](mailto:vadim@tsu.tula.ru)  
**Alexey A. Markin** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: [markin-nikram@yandex.ru](mailto:markin-nikram@yandex.ru)  
**Artem A. Fursaev** – Postgraduate student, e-mail: [artemkajs@mail.ru](mailto:artemkajs@mail.ru)

## SEPARATION PROCESS MODELING OF COMPOSITE WITH ADHESIVE LAYER

V.V. Glagolev, A.A. Markin, A.A. Fursaev

Tula State University, Tula, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 16 March 2016

Accepted: 25 May 2016

Published: 30 June 2016

---

#### Keywords:

composite, Neuber–Novozhilov approach, characteristic size, linear elasticity, variational equation, finite element method

### ABSTRACT

The deformation model of a composite with a thin adhesive layer is examined. The consideration of a layer's stress state is based on the relationship between the average stresses by thickness and the stresses on the layer's border. The layer's medium strains are expressed in terms of its boundary displacements. The average stresses and strains are used to avoid the stress-strain state dependence on the shape of end faces. The variational condition for the equilibrium state of two bodies linked through an adhesive layer is obtained within small strains. The problem is considered in the framework of linear theory of elasticity. The Hooke's law relates the strain and stress fields in the matched bodies. As a result, the system of variational equations is reduced to the equations with respect to the displacements fields in the matched bodies including the layer's bounds. The system of variational equations with respect to displacements contains the adhesive layer thickness as a parameter. It is significant that the current equations system is not a discrete one since the displacement fields are supposed to be continuous. Various approximations for displacements may be used to obtain approximate solutions. In particular, the finite element method with a quadratic approximation for displacement fields is used for the case of plane strain. The influence of the characteristic size of a finite element on the convergence of the solution is studied. It is found that the numerical convergence is present when the ratio between the finite element faces and the layer's thickness is four or more. The proposed approach allows to use the well-known local failure criteria under the absence of stress singularity at the points of conjugation of the adhesive layer with the bodies. The analysis of the possible forms of composite destruction due to the destruction of a material layer as well as due to bonds breaking between the layer and adjacent materials is carried out.

© PNRPU

---

## Введение

Моделирование процесса разрушения композиционных материалов, представляющих собой совокупность двух тел, соединенных посредством адгезива конечной толщины, определяется типом нарушения связи между компонентами. Рассматриваются модели адгезионного разрушения в случае, когда адгезив целиком отделяется от материала, или когезионного разрушения по массиву адгезива или связанных им тел. Для адгезионных моделей [1–4], как правило, пренебрегают толщиной адгезива, а его механические свойства сводятся к силам взаимодействия склеенных материалов, которые могут иметь разные механические свойства [5–7]. При когезионном разрушении [8–13] рассматривается процесс зарождения трещины в материале с конкретными механическими свойствами. Модель расслоения композита с одинаковыми физическими свойствами, но с разными прочностными характеристиками рассмотрена в работе [14]. В этом плане представляется перспективной разработка таких моделей, которые бы учитывали как механические свойства материалов композита, так и тип разрушения в зависимости от напряженно-деформированного состояния адгезива и соединенных им тел.

В настоящее время наиболее распространенными являются подходы на основе метода конечных элементов [15, 16]. Недостатком данных подходов при прямом моделировании геометрии связующего компонента является наличие точек сингулярности различных видов [17, 18]. Принимая ту или иную форму окончания связующего слоя, в решении задачи приходим к существенно различным распределениям напряжений, в том числе и сингулярным. Отметим, что в случае малости толщины связующего геометрия его окончания в зоне обрыва соединений является неопределенной и связь соответствующей области с заданной геомет-

рией является не вполне корректной. Таким образом, разработка моделей, в которых напряженно-деформированное состояние (НДС) соответствующего композита не зависит от геометрии окончания адгезионного слоя (АС), является достаточно актуальной.

Считаем, что в предлагаемой модели адгезионный слой и соединяемые им материалы могут иметь разные механические свойства. Толщина адгезива мала по сравнению с соответствующими характеристиками соединяемых тел. Для описания НДС адгезионного слоя применим концепцию слоя взаимодействия, используемую в модели трещиноподобного дефекта [19, 20]. Средние напряжения в слое выражаются через компоненты тензора напряжений на границах АС. Соответствующие граничные напряжения естественным образом формируют граничные условия для сопрягаемых со слоем материалов. Граничные напряжения в данном случае будем ассоциировать с адгезионными силами сцепления и достижение ими критического значения трактовать как адгезионное разрушение. Использование средних по толщине напряжений позволяет отказаться от конкретизации геометрии торца АС. Таким образом, задача определения предельного состояния композиционного материала под воздействием внешней нагрузки сводится к нахождению предела прочности в соответствующих материалах и по границам слоя. По достижении той или иной критериальной характеристики разрушение трактуется либо как адгезионное, либо как когезионное.

## 1. Постановка задачи

На рис. 1 представлено тело, состоящее из трех областей, в общем случае с различными материальными свойствами, где область 3 ассоциируется с клеевой подложкой толщиной  $\delta_0$ , размер которой мал по сравнению с толщинами тел 1 и 2. Процесс нагружения предполагаем квазистатическим и изотермическим. Условие равновесия запишем в вариационной форме:

$$\iint_{S_{1+2+3}} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds = \iint_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + \iint_{S_2} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + \iint_{S_3} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds = \int_L \bar{P} \cdot \delta \bar{u} dl, \quad (1)$$

где  $\bar{P}$  – внешняя нагрузка на контуре  $L$ ;  $\sigma$  – тензор напряжений;  $\varepsilon$  – тензор деформаций;  $\bar{u}$  – поле перемещений.

Так как система из трех тел находится в равновесии, запишем уравнения равновесия для каждого из них:

$$\iint_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds = \int_{L^1} \bar{P} \cdot \delta \bar{u} dl - \int_{L_{FC}} \bar{P}^+ \cdot \delta \bar{u} dl, \quad (2)$$

$$\iint_{S_2} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds = \int_{L^2} \bar{P} \cdot \delta \bar{u} dl - \int_{L_{SN}} \bar{P}^- \cdot \delta \bar{u} dl, \quad (3)$$

$$\iint_{S_3} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds = \int_{L_{CF}} \bar{P}^+ \cdot \delta \bar{u}^+ dl + \int_{L_{NS}} \bar{P}^- \cdot \delta \bar{u}^- dl, \quad (4)$$

где  $\bar{P}^+ = \sigma_{21}^+ \bar{e}_1 + \sigma_{22}^+ \bar{e}_2$ ,  $\bar{P}^- = -\sigma_{21}^- \bar{e}_1 - \sigma_{22}^- \bar{e}_2$  – векторы напряжений, действующие по верхней и нижней границе АС;  $\sigma_{21}^+, \sigma_{22}^+, \sigma_{21}^-, \sigma_{22}^-$  – граничные напряжения АС;  $\bar{u}^+, \bar{u}^-$  – векторы перемещения верхней и нижней границы АС;  $L^1, L^2$  – внешние контуры тел 1 и 2 без учета

границ с  $AC$ . Торцы слоя считаем свободными от напряжений. При этом постулируется жесткое сцепление между границами  $AC$  с областями 1, 2. Кроме того, принимаем, что векторы напряжений на сопряженных границах  $AC$  равны и противоположны векторам напряжений сопряженных границ тела.

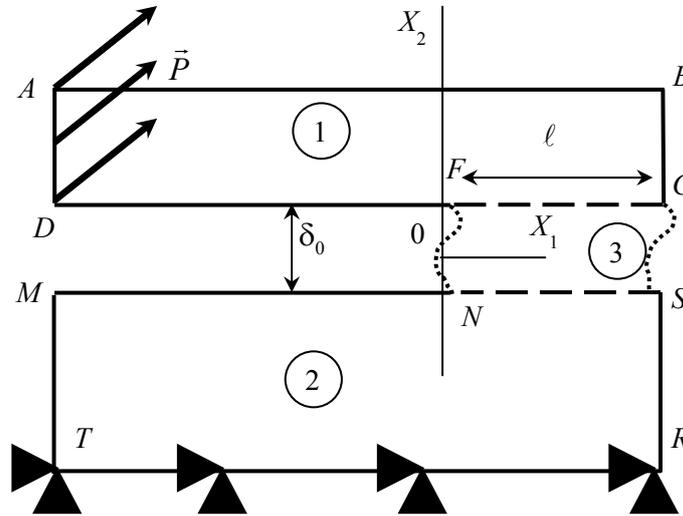


Рис. 1. Нагружение составного тела

Работу внутренних напряжений в  $AC$  выразим посредством средних характеристик НДС, полагая  $\varepsilon(x_1, x_2) = \bar{\varepsilon}(x_1)$ :

$$\iint_{S_3} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds = \delta_0 \int_{x_1^F}^{x_1^C} \bar{\sigma} \cdot \delta \bar{\varepsilon} dx_1 = \delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma} \cdot \delta \bar{\varepsilon} dx_1, \quad (5)$$

где  $\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}$  – соответственно тензоры средних напряжений и деформаций в слое,  $\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2$ ;  $\bar{\sigma}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2$ ;  $\bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2$ ;  $\bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2$ .

Отметим, что в силу симметрии касательных напряжений средние касательные напряжения также симметричны:  $\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \bar{\sigma}_{12}(x_1)$ .

Средние деформации и перемещения определяем через их граничные значения следующим образом [19, 20]:

$$\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \left( \frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \quad \bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = 0,5 \left( \frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right); \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1(x_1)}{\partial x_2} = \frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0}, \quad \frac{\partial \bar{u}_2(x_1)}{\partial x_1} = 0,5 \left( \frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right); \quad (7)$$

$$\bar{u}_1(x_1) = 0,5(u_1^+(x_1) + u_1^-(x_1)), \quad \bar{u}_2(x_1) = 0,5(u_2^+(x_1) + u_2^-(x_1)). \quad (8)$$

Из выражений (7) получим представление средней сдвиговой деформации вдоль слоя:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) &= 0,5 \left( \frac{\partial \bar{u}_2(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1(x_1)}{\partial x_2} \right) = \\ &= 0,5 \left( \frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0,5 \left( \frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Из (4) и (5) с учетом (6) и (9) получаем вариационное условие равновесия AC:

$$\begin{aligned} 0,5\delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \delta \left( \frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right) dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta (u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)) dx_1 + \\ + \delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{21} \delta \left( \frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0,5 \left( \frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right) dx_1 = \\ = \int_{\ell} \sigma_{22}^+ \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \sigma_{21}^+ \delta u_1^+ dx_1 - \int_{\ell} \sigma_{22}^- \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \sigma_{21}^- \delta u_1^- dx_1. \end{aligned} \quad (10)$$

При отсутствии торцевых нагрузок на AC, интегрируя по частям, имеем

$$\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \delta \left( \frac{\partial u_i^{\pm}(x_1)}{\partial x_1} \right) dx_1 = - \int_{\ell} \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \delta u_i^{\pm}(x_1) dx_1; \quad (11)$$

$$\int_{\ell} \bar{\sigma}_{21} \delta \left( \frac{\partial u_i^{\pm}(x_1)}{\partial x_1} \right) dx_1 = - \int_{\ell} \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial x_1} \delta u_i^{\pm}(x_1) dx_1, \quad (12)$$

где  $i = 1, 2$ .

Из (10), с учетом (11) и (12), приравнявая слагаемые при одинаковых вариациях, приходим к представлениям граничных напряжений AC:

$$\sigma_{21}^+ = \bar{\sigma}_{21} - 0,5\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^+ = \bar{\sigma}_{22} - 0,5\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial x_1}, \quad (13)$$

$$\sigma_{21}^- = \bar{\sigma}_{21} + 0,5\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^- = \bar{\sigma}_{22} + 0,5\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial x_1}. \quad (14)$$

Подставив (13) в (2), а (14) в (3) и выполнив преобразования, обратные (11), (12), приходим к вариационным уравнениям равновесия для тела I:

$$\int_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2 dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{21} \delta u_1 dx_1 + 0,5\delta_0 \left( \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{21} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L^1} \bar{P} \cdot \delta \bar{u} dl \quad (15)$$

и тела 2:

$$\int_{S_2} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2 dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{21} \delta u_1 dx_1 + 0,5\delta_0 \left( \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{21} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L^2} \bar{P} \cdot \delta \bar{u} dl. \quad (16)$$

Отметим, что соотношения (15), (16) получены без ограничения на свойства материалов и форму тела.

Уравнения (15), (16) необходимо замкнуть конкретными определяющими соотношениями. Поведение материала при нагружении определяем законом Гука для тела 1:

$$\tilde{\sigma} = 2G_1 \tilde{\varepsilon}; \quad (17)$$

$$p = 3K_1\theta, \quad (18)$$

для тела 2:

$$\tilde{\sigma} = 2G_2 \tilde{\varepsilon}; \quad (19)$$

$$p = 3K_2\theta, \quad (20)$$

где  $\tilde{\sigma}$  – девиатор тензора напряжений;  $\tilde{\varepsilon}$  – девиатор тензора деформаций;  $K_i$  – модуль объемного сжатия;  $G_i$  – модуль сдвига  $i = 1, 2$ ;  $p = \sigma \cdot \mathbf{E}$ .

В материале слоя определяющие соотношения считаем справедливыми для средних по толщине слоя характеристик НДС.

$$\bar{\sigma} = 2G_3 \bar{\varepsilon}; \quad (21)$$

$$\bar{p} = 3K_3\bar{\theta}. \quad (22)$$

В результате подстановки в определяющие соотношения (21) и (22) выражений компонент средних деформаций (6), (9) средние напряжения определяются через граничные перемещения и их производные. В этом случае в уравнении (15) будут присутствовать перемещения границы  $NS$  тела 2 (см. рис. 1), а в уравнении (16) – перемещения границы  $FC$  тела 1 (см. рис. 1). Таким образом, совместное решение системы (15)–(22) сводится к определению поля перемещений  $\vec{u}(x_1, x_2)$  в телах 1 и 2.

После определения полей перемещений в телах 1 и 2, в том числе и по границам со слоем, из (21), (22) находим средние напряжения в слое. Зная распределение средних напряжений вдоль слоя, из уравнений (13), (14) находим граничные напряжения по его границе.

## 2. Метод дискретного решения

Еще раз отметим, что прямое моделирование композитных материалов с явным заданием геометрии торцевой поверхности  $AC$  сопряжено с зависимостью НДС в окрестности торцевой поверхности от условий сопряжения слоя и смежных материалов. В частности, если торцевая поверхность является плоскостью, то модель будет сингулярной. Предлагаемый вариант рассмотрения модели композита за счет введения средних по толщине характеристик НДС универсален в плане независимости НДС от геометрии окончания  $AC$ .

Для численного решения системы (15)–(22) можно использовать различные дискретные методы, обеспечивающие численную сходимость. В частности, будем использовать МКЭ для дискретизации задачи. Существенно, что построение решения формально не накладывает ограничений на размер конечного элемента, который может быть меньше параметра  $\delta_0$ , для обеспечения численной сходимости решения. Однако условия разрушения  $AC$  формулируются для  $\delta$ -элементов слоя размером  $\delta_0 \times \delta_0$  и на их верхней и нижней границах с использованием процедуры осреднения характеристик НДС, полученных в результате решения системы (15)–(22) и (13), (14):

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\delta_0} \int_{x_1^F}^{x_1^F + \delta_0} \bar{\sigma}_{ij} dx_1, \quad \hat{\sigma}_{ij}^+ = \frac{1}{\delta_0} \int_{x_1^F}^{x_1^F + \delta_0} \sigma_{ij}^+ dx_1, \quad \hat{\sigma}_{ij}^- = \frac{1}{\delta_0} \int_{x_1^F}^{x_1^F + \delta_0} \sigma_{ij}^- dx_1. \quad (23)$$

Это является следствием основного физического допущения – разрушение охватывает частицу материала с характерным размером  $\delta_0$  [21, 22]. В качестве критерия разрушения АС будем использовать критерий Кулона, согласно которому разрушение  $\delta$ -элемента происходит при достижении максимальным главным растягивающим усредненным напряжением критического значения:  $\hat{\sigma}^{\max} = \sigma_k$ . Для адгезионного разрушения будем сравнивать граничные напряжения  $\hat{\sigma}_{22}^+$ ,  $\hat{\sigma}_{22}^-$  с адгезионной прочностью на отрыв, а граничные напряжения  $\hat{\sigma}_{21}^+$ ,  $\hat{\sigma}_{21}^-$  – с адгезионной прочностью на сдвиг.

Решение задачи (15)–(22) дает распределение поля перемещений в узловых точках тела  $I$ , в том числе и по границе с АС. После нахождения соответствующего решения возникает задача определения НДС в АС. При решении (15)–(22) используем метод конечного элемента с квадратичным распределением поля перемещений.

### 3. Результаты численного расчета

В качестве примера использования предлагаемой модели рассмотрим композиционный материал (см. рис. 1) в состоянии плоской деформации, состоящий из адгезионного слоя, близкого по характеристикам к эпоксидной смоле с механическими характеристиками:  $G = 1,3 \cdot 10^9$  Па;  $K = 1,7 \cdot 10^9$  Па;  $\sigma_k = 9 \cdot 10^7$  Па – предел прочности; материал  $I$  и 2 соответствует характеристикам алюминиевого сплава Д16Т:  $G = 2,8 \cdot 10^{10}$  Па;  $K = 6 \cdot 10^{10}$  Па;  $\sigma_k = 4,2 \cdot 10^8$  Па. Адгезионную прочность по границе смола–сплав принимаем равной  $\sigma_a = 2,5 \cdot 10^7$  Па на отрыв и сдвиг. Геометрические характеристики образца выбираем следующими:  $AD = 5 \cdot 10^{-3}$  м;  $\delta_0 = FN = 10^{-3}$  м;  $MT = 2 \cdot 10^{-2}$  м;  $AB = 10^{-1}$  м;  $DF = 5 \cdot 10^{-2}$  м. На границе  $AD$  задаем распределенную нагрузку  $\bar{P} = 1$  Па, направленную под углом  $\pi/4$  к оси  $OX_1$ . Граница  $TR$  жестко закреплена от перемещений. Остальная поверхность свободна. В качестве исследуемых параметров задачи будем рассматривать граничные и средние напряжения в адгезионном слое.

На рис. 2 показана вычислительная сходимость решения для отношения максимального главного растягивающего усредненного напряжения на  $\delta$ -элементе АС к соответствующему значению при грани конечного элемента  $\Delta$ , равной параметру  $\delta_0$  в зависимости от размера  $\Delta$  в концевой области слоя относительно параметра  $\delta_0$ .

Как видно из графика (см. рис. 2), результат расчета имеет вычислительную сходимость. Дальнейшие вычисления проводились при характерном размере конечного элемента  $\Delta = \delta_0/4$ .

На рис. 3 показаны распределения напряжений (23) по структурным  $\delta$ -элементам слоя. Все напряжения отнесены к граничному напряжению на первом элементе  $\hat{\sigma}_{22}^{-(1)}$ . Графики рис. 3, а определяют граничные напряжения, где кривая 1 задает напряжение  $\hat{\sigma}_{22}^-$ , кривая 2 –  $\hat{\sigma}_{22}^+$ , кривая 3 –  $\hat{\sigma}_{21}^+$ , кривая 4 –  $\hat{\sigma}_{21}^-$ . На рис. 3, б приведены средние напряжения, где кривая 1 задает напряжение  $\hat{\sigma}_{22}$ , кривая 2 –  $\hat{\sigma}_{11}$ , кривая 3 –  $\hat{\sigma}_{21}$ .

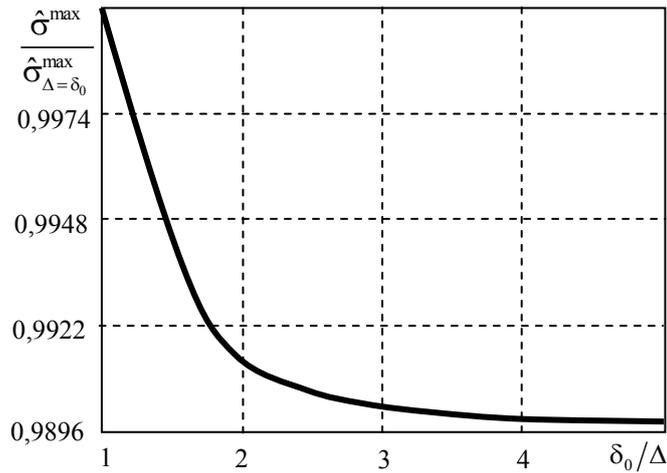


Рис. 2. Сходимость решения

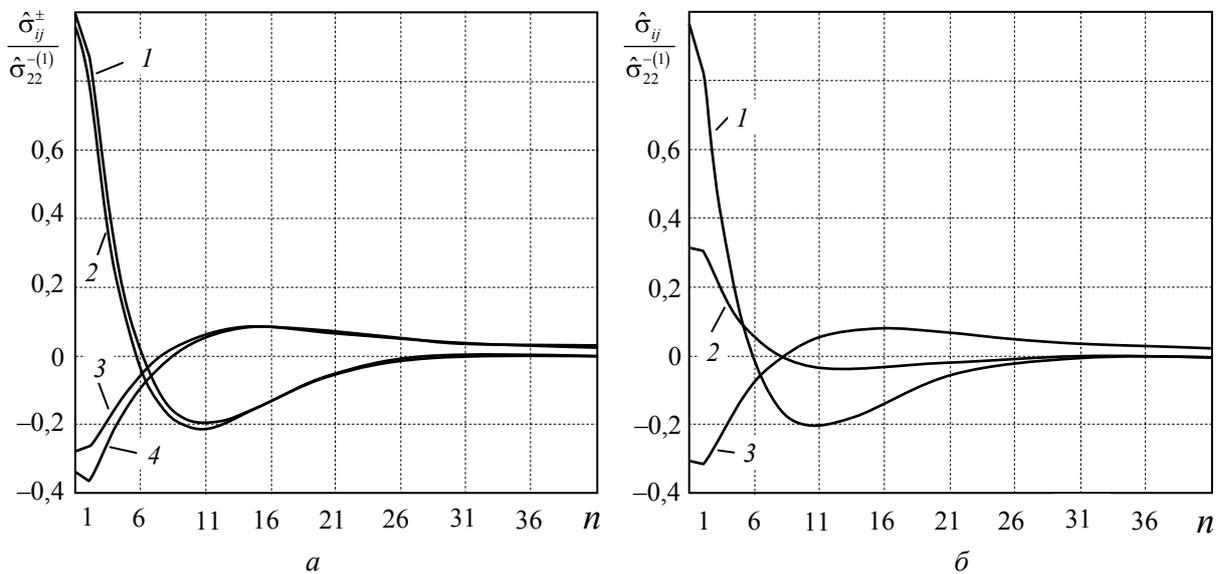


Рис. 3. Распределение напряжений в слое

В результате решения задачи на первом  $\delta$ -элементе АС были получены следующие характеристики:  $\hat{\sigma}_{22}^+ = 6$  Па,  $\hat{\sigma}_{22}^- = 6,3$  Па,  $\hat{\sigma}_{21}^+ = -1,7$  Па,  $\hat{\sigma}_{21}^- = -2,1$  Па,  $\hat{\sigma}^{\max} = 6,9$  Па. Следовательно, разрушение соответствующего композита произойдет при нагрузке  $\bar{P} = 4 \cdot 10^6$  Па посредством адгезионного отслоения по нижней границе слоя в силу достижения предела адгезионной прочности на отрыв. Когезионное разрушение в соответствующих композитах будет наблюдаться в случае, когда адгезионная прочность на отрыв или сдвиг будет приближаться к пределу прочности АС.

### Заключение

Использование предлагаемого подхода позволяет естественным образом учитывать характер разрушения при механических воздействиях на композиты с адгезионным слоем. В этом случае задача сводится к решению вариационного уравнения в рамках тех или иных определяющих соотношений.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-01875) и Министерства образования и науки РФ (госзадание № 467).*

## Библиографический список

1. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Отслоение покрытий под действием термоупругих напряжений (Балочное приближение) // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. – 2007. – Т. 54, № 4. – С. 66–83.
2. Sheinman I., Kardomateas G. Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates // International Journal of Solids and Structures. – 1997. – Vol. 34. – No. 4. – P. 451–459. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00018-2
3. Storakers B., Andersson B. Nonlinear plate theory applied to delamination in composites // Journal of Mechanics and Physics solids. – 1988. – Vol. 36. – No. 6. – P. 689–718. DOI:10.1016/0022-5096(88)90004-X
4. Kulkarni S.V., Frederick D. Propagation of delamination in a layered cylindrical shell // International Journal of Fracture. – 1973. – Vol. 9. – No. 1. – P. 113–115.
5. Evans A.G., Hutchinson J.W. On the mechanics of delamination and spalling on compressed films // International Journal of Solids and Structures. – 1984. – Vol. 20. – No. 5. – P. 455–466. DOI:10.1016/0020-7683(84)90012-X
6. Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости; условия упругой заделки для пластины, эквивалентной слою // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – Т. 50, № 1. – С. 75–95.
7. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
8. Whitcomb J.D. Finite Element Analysis of Instability related Delamination Growth // Journal of Composite materials. – 1981. – Vol. 15. – No. 5 – P. 403–426. DOI: 10.1177/002199838101500502
9. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70. – No. 14. – P. 1741–1987.
10. Williams J.G. On the calculation of energy release rates for cracked laminates // International Journal of Fracture. – 1988. – Vol. 36. – No. 2. – P. 101–119. DOI: 10.1007/BF00017790.
11. Bottega W.J. Structural scale decomposition of energy release rates for delamination propagation // International Journal of Fracture. – 2003. – Vol. 122. – No. 1. – P. 89–100. DOI: 10.1023/B:FRAC.0000005376.59962.f2
12. Кулиев В.Д., Борисова Н.Л. К проблеме разрушения многослойных композитных материалов // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – Т. 26, № 4 – С. 63–71.
13. Yang Q., Cox B.N. Cohesive models for damage evolution in laminated composites // International Journal of Fracture. – 2005. – Vol. 133. – No. 2. – P. 107–137. DOI: 10.1007/s10704-005-4729-6
14. Астапов И.С., Астапов Н.С., Корнев В.М. Модель расслоения композита при поперечном сдвиге // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 149–161.
15. Dávila C.G., Camanho P.P., Turon A. Effective Simulation of delamination in aeronautical structures using shells and cohesive elements // Journal of Aircraft. – 2008. – Vol. 42. – No. 2. – P. 663–672. DOI: 10.2514/1.32832
16. Schmidt P., Edlund U. A finite element method for failure analysis of adhesively bonded structures // Int. J. Adhes. Adhes. – 2011. – Vol. 30. – No. 8. – P. 665–681. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2010.05.012
17. Hildebrand M. Non-linear analysis and optimization of adhesively bonded single lap joints between fibre-reinforced plastics and metals // Int. J. Adhes. Adhes. – 1994. – Vol. 14. – No. 4. – P. 261–267. DOI: 10.1016/0143-7496(94)90039-6
18. He X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints // Int. J. Adhes. Adhes. – 2011. – Vol. 31. – No. 4. – P. 248–264. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006
19. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Stress-Strain State of Elastoplastic Bodies with Crack // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2015. – Vol. 28. – No. 4. – P. 375–383. DOI: 10.1016/S0894-9166(15)30023-9

20. Глаголев В.В., Маркин А.А. Нахождение предела упругого деформирования в концевой области физического разреза при произвольном нагружении его берегов. Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53, № 5. – С. 174–183.

21. Нейбер Г. Концентрация напряжений. – М.: ОГИЗ; Л.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.

22. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. – 1969. – Т. 33, № 2. – С. 212–222.

## References

1. Goldstein R.V., Osipenko N.M. Otsloenie pokrytii pod deistviem termouprugikh napriazhenii (Balochnoe priblizhenie) [Lamination of coatings under thermoelastic stresses (beam approximation)]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvenno-nauchnaia serii*, 2007, vol. 54, no. 4, pp. 66-83.

2. Sheinman I., Kardomateas G. Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, vol. 34, no. 4, pp. 451-459. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00018-2

3. Storakers B., Andersson B. Nonlinear plate theory applied to delamination in composites. *Journal of Mechanics and Physics solids*, 1988, vol. 36, no. 6, pp. 689-718. DOI: 10.1016/0022-5096(88)90004-X

4. Kulkarni S.V., Frederick D. Propagation of delamination in a layered cylindrical shell. *International Journal of Fracture*, 1973, vol. 9, no. 1, pp. 113-115.

5. Evams A.G., Hutchinson J.W. On the mechanics of delamination and spalling on compressed films. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, no 5, pp. 455 – 466. DOI: 10.1016/0020-7683(84)90012-X

6. Ustinov K.B. On separation of a layer from the half-plane: Elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, no. 1, pp. 62-80. DOI: 10.3103/S0025654415010070

7. Fujii T., Dzako M. Mekhanika razrusheniia kompozitsionnykh materialov [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow: Mir. 232 p.

8. Whitcomb J.D. Finite Element Analysis of Instability related Delamination Growth. *Journal of Composite materials*, 1981, vol. 15, no. 5, pp. 403-426. DOI: 10.1177/002199838101500502

9. The special issue: Cohesive models. *Eng. Fract. Mech.*, 2003, vol. 70, no. 14, pp. 1741-1987.

10. Williams J.G. On the calculation of energy release rates for cracked laminates. *International Journal of Fracture*, 1988, vol. 36, no. 2, pp. 101-119. DOI: 10.1007/BF00017790

11. Bottega W.J. Structural scale decomposition of energy release rates for delamination propagation. *International Journal of Fracture*, 2003, vol. 122, no. 1, pp. 89-100. DOI: 10.1023/B:FRAC.0000005376.59962.f2

12. Kuliev V.D., Borisova N.L. K probleme razrusheniia mnogosloinykh kompozitnykh materialov [In the issue of multilayer composite materials]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ia. Iakovleva. Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2015, vol. 26, no. 4, pp. 63-71.

13. Yang, Q., Cox, B.N. Cohesive Models for damage evolution in laminated composites. *International Journal of Fracture*, 2005, vol. 133, no. 2, pp. 107–137. DOI: 10.1007/s10704-005-4729-6

14. Astapov I.S., Astapov N.S., Kornev V.M. Model' rassloeniia kompozita pri poperechnom sdvige [Model of composite exfoliation with transverse shear]. *Composite Mechanics and Design*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 149-161.

15. Dávila C.G., Camanho P.P., Turon A. Effective Simulation of delamination in aeronautical structures using shells and cohesive elements. *Journal of Aircraft*, 2008, vol. 42, no. 2, pp. 663–672. DOI: 10.2514/1.32832

16. Schmidt P., Edlund U. A finite element method for failure analysis of adhesively bonded structures. *Int. J. Adhes. Adhes*, 2011, vol. 30, no. 8, pp. 665–681. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2010.05.012
17. Hildebrand M. Non-linear analysis and optimization of adhesively bonded single lap joints between fibre-reinforced plastics and metals. *Int. J. Adhes. Adhes*, 1994, vol. 14, no. 4, pp. 261–267. DOI: 10.1016/0143-7496(94)90039-6
18. He X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints. *Int. J. Adhes. Adhes*, 2011, vol. 31, no. 4, pp. 248–264. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006
19. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Stress-Strain State of Elastoplastic Bodies with Crack. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2015, vol. 28, no. 4, pp. 375-383. DOI: 10.1016/S0894-9166(15)30023-9
20. Glagolev V.V., Markin A.A. Finding the elastic strain limit at the tip region of a physical cut with arbitrarily loaded faces. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 784-792. DOI: 10.1134/S0021894412050185
21. Neuber H. Kerbspannunglehre: grunglagen fur Genaue Spannungsrechnung, Springer-Verlag, 1937. 154 p.
22. Novozhilov V.V. O neobkhodimom i dostatochnom kriterii khрупkoi prochnosti [Necessary and Sufficient Criteria of Brittle Strength]. *Prikladnaia Matematika Mekhanika*, 1969, vol. 33, no. 2, pp. 212-222.