



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.06

УДК 539.3/.6:531.662:539.4

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ТВЕРДОГО ВЕЩЕСТВА СТАТИЧЕСКИМ РАЗДАВЛИВАНИЕМ

Г.А. Гурьянов, Б.М. Абдеев, С.Р. Байгереев, В.А. Ким, А.Д. Сулейменов

Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан

О СТАТЬЕ

Получена: 1 марта 2021 г.
Принята: 7 июня 2021 г.
Опубликована: 22 октября 2021 г.

Ключевые слова:

контактное давление, потенциальная энергия, сила, напряжение, деформация, перемещение, измельчение, дробление, прочность, жесткость, механическая работа, упругость, конструктивная нелинейность, физическая линейность, твердость.

АННОТАЦИЯ

На сегодняшний день одним из наиболее распространенных видов измельчительного оборудования являются дробилки, принцип действия которых основан на механическом способе разрушения измельчаемого материала (например, валковые, щековые, конусные дробилки и др.). Для обеспечения эффективных параметров функционирования дробильной машины следует еще на этапе её проектирования учитывать зависимость между физико-механическими характеристиками обрабатываемого материала (размер, форма, прочность, хрупкость, однородность и др.) и энергетическими параметрами дробилки (работа и мощность). Существующие теории, описывающие указанную зависимость и базирующиеся на различных классических гипотезах, как правило, дают весьма приближенный результат, который иногда достаточно далек от реальности. Следовательно, возникает необходимость в разработке уточненной теории дробления, способной более точно описывать процесс разрушения материала при механическом воздействии на него рабочих органов машины-измельчителя.

Авторами на основе классических предпосылок механики упругодеформируемой сплошной среды, фундаментальных аналитических зависимостей Герца–Штаермана и объемной энергетической гипотезы Кирпичева–Кика получено оригинальное решение комплексной конструктивно-нелинейной инженерно-технической задачи о статическом контакте сферической модели измельчаемого хрупкого вещества с абсолютно жесткими выпукло-вогнутыми поверхностями цилиндрических валков, предназначенных для крупного и среднего помола. При количественной оценке несущей способности шара использовались известная физико-математическая задача Вебера о напряженном состоянии сферы, нагруженной двумя равными силами, приложенными в полюсах, и критерий прочности Кулона–Мора, который хорошо описывает процесс разрушения широкого класса хрупких однородных материалов. Разработанная теория дробления доведена до расчетных формул и проиллюстрирована характерным численным примером.

© ПНИПУ

© Гурьянов Георгий Александрович – к.т.н., доц., e-mail: gguryanov@mail.ru, ID: [0000-0003-3657-3735](https://orcid.org/0000-0003-3657-3735).

Абдеев Борис Масгутович – к.т.н., доц., e-mail: m.abdeeva@mail.ru, ID: [0000-0003-2867-152X](https://orcid.org/0000-0003-2867-152X).

Байгереев Самат Рахимгалиевич – доктор философии, ст. преп., e-mail: samat.baigereyev@mail.ru, ID: [0000-0002-7773-5457](https://orcid.org/0000-0002-7773-5457).

Ким Вадим Александрович – асп., e-mail: k-v-a@list.ru, ID: [0000-0002-9000-8465](https://orcid.org/0000-0002-9000-8465).

Сулейменов Ансаган Дюсембаевич – асп., e-mail: ansar_muslim_91@mail.ru, ID: [0000-0001-9319-0285](https://orcid.org/0000-0001-9319-0285).

Georgiy A. Guryanov – CSc of Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: gguryanov@mail.ru,

ID: [0000-0003-3657-3735](https://orcid.org/0000-0003-3657-3735).

Boris M. Abdeev – CSc of Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: m.abdeeva@mail.ru,

ID: [0000-0003-2867-152X](https://orcid.org/0000-0003-2867-152X).

Samat R. Baigereyev – PhD, e-mail: samat.baigereyev@mail.ru, ID: [0000-0002-7773-5457](https://orcid.org/0000-0002-7773-5457).

Vadim A. Kim – PhD Student, e-mail: k-v-a@list.ru, ID: [0000-0002-9000-8465](https://orcid.org/0000-0002-9000-8465).

Ansagan D. Suleimenov – PhD Student, e-mail: ansar_muslim_91@mail.ru, ID: [0000-0001-9319-0285](https://orcid.org/0000-0001-9319-0285).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



THE APPLIED MECHANICAL AND MATHEMATICAL MODEL OF GRINDING OF A SOLID PARTICLE BY STATIC CRUSHING

G.A. Guryanov, B.M. Abdeev, S.R. Baigereyev, V.A. Kim, A.D. Suleimenov

D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

ARTICLE INFO

Received: 1 March 2021
Accepted: 7 June 2021
Published: 22 October 2021

Keywords:

contact pressure, potential energy, force, stress, deformation, displacement, grinding, crushing, strength, rigidity, mechanical work, elasticity, constructive nonlinearity, physical linearity, hardness.

ABSTRACT

Now crushers are one of the most common types of crushing equipment using the principle of a mechanical method of material destruction (for example, rollers, jaws, cone crushers, etc.). To provide effective parameters of the crusher, it is necessary to take into account the correlation between the physical and mechanical characteristics of the material (sizes, shapes, strengths, fragility, uniformity, etc.) and the energy parameters of the crusher (operation and power) at the design stage. The existing theories describing the mentioned dependence and relying on different classical hypotheses allow obtaining a very approximate (inaccurate) result. Consequently, it is necessary to develop a detailed theory of crushing capable of an accurate description of the mechanical process of material destructions by working members of the crushers.

Thus, the authors have developed the crushing theory as an original solution of a complex constructively nonlinear engineering and technical problem on the static contact of a spherical model of a comminuted brittle substance with absolutely rigid convex-concave surfaces of cylindrical rolls designed for coarse and medium grinding. The theory is based on the classical assumptions of the mechanics of an elastically deformable continuous medium, the fundamental analytical dependences of Hertz-Shtaerman and the Kirpichev-Kick volumetric energy hypothesis. During the quantitative assessment of the bearing capacity of the ball, we used the well-known physical and mathematical problem of Weber on the stress state of a sphere loaded by two equal forces applied at the poles, and the Kulon-Mor's strength criterion, which describes the process of destruction of a wide class of brittle homogeneous materials. The developed theory of fragmentation has been brought to the design formulas and illustrated with a typical numerical example.

© PNRPU

При измельчении материалов наибольшее применение получили механические способы воздействия, отличающиеся относительной простотой осуществления [1–6]. В идеале правильная организация процесса измельчения и работы измельчителей должна основываться на точных взаимосвязях между характеристиками измельчаемого материала и энергетическими параметрами, характеризующими работу измельчителей, при максимальном их согласовании еще на стадии проектирования.

На сегодняшний день процессы измельчения широко распространены во многих сферах производства (строительной, горнодобывающей, пищевой, химической и т.д.). Например, в горнодобывающей отрасли продукты измельчения используются для обогащения полезных ископаемых, в строительстве – для получения однородных смесей, в химической – для ускорения протекания химических процессов и т.д.

Анализ исследований показывает, что за последнее время именно обобщенному теоретическому описанию процессов дробления не уделялось достаточно внимания и работ, посвященных непосредственно изучению механизма измельчения материала при дроблении, а особенно его теоретическому описанию, не так уж много, как и исследователей, занимающихся этим вопросом. При этом в доступных для изучения теоретических исследованиях имеется сильный уклон в сторону теоретического описания процессов разрушения материалов только в привязке к предлагаемым авторами

исследований усовершенствованиям в конструкции или улучшениям отдельных технических параметров измельчительных машин, как правило, путем некоторой переработки существующих теорий и гипотез измельчения. В то же время общие вопросы теоретического математического описания процессов разрушения материалов, разработки новых теорий (гипотез) измельчения или существенной модернизации существующих с целью большего приближения их к реальности остаются за пределами внимания исследователей, возможно, по причине существенной сложности такой работы. Таким образом, исходя из анализа литературных источников можно предположить, что в теоретических исследованиях процессов измельчения материалов, касающихся разработки новых научных принципов их теоретического описания, образовался определенный застой (или пробел).

При этом анализ результатов исследований, так или иначе касающихся вопросов теоретического описания процессов измельчения, показывает, что в таких работах зачастую игнорируются обобщенные теоретические подходы. Так, например, в качестве нового подхода предлагается параметры дробления, в частности мощность, определять по большей части на основе экспериментов [7–9], например, методом последовательного учета переменных, т.е. достаточно приблизительно, поэтому полученные новые формулы носят эмпирический и полуматематический характер и сильно зависят от типа дробилки и даже от конкретной модели, на которой они

были получены. Либо, как уже отмечалось, методики носят узкоспециализированный характер и привязаны к предлагаемым авторами исследований новым способам организации измельчения [10–13]. Либо авторы определяют напряжения и объем разрушаемого материала, а значит, работу и мощность по приближенным формулам [14–16], например через относительные деформации материала [14, 15], что не отражает реального процесса разрушения и дает, соответственно, весьма далекие от реальности результаты. По поводу последнего заметим, что такой подход к теоретическому описанию в свое время проверялся авторами путем получения подобных зависимостей и последующего расчета по полученным формулам. Результаты расчета были весьма и весьма далеки от реальности, поэтому авторами такой подход был отвергнут и в результате дальнейших исследований предложена модель, которая и представлена в данной работе и результаты расчета по которой существенно более близки к реальности. Кроме того, для определения параметров механических процессов достаточно широко применяется также и метод конечных элементов [17, 18]. Однако результаты расчетов, полученные с помощью компьютерного моделирования, не позволяют всецело учесть физико-механические особенности процесса измельчения.

Важным параметром любых машин для механического измельчения материалов является количество энергии, которое машина затрачивает на измельчение материала от исходного до конечного размера, характеризующее работу и мощность на измельчение. Между механизмом измельчения и затрачиваемой энергией существует взаимосвязь [19–26]. В общем, реальная зависимость между расходом энергии, т.е. работой и мощностью измельчения и размером, формой, взаимным расположением кусков материала, его прочностью, хрупкостью, однородностью и рядом других физико-механических свойств и факторов, довольно сложная и в настоящее время не поддается точному аналитическому описанию [15, 18, 19, 22, 24, 26]. Поэтому на практике для нахождения работы измельчения применяют упрощенные зависимости, основанные на положениях и формулах механики упругодеформируемого твердого тела, которые в целом удовлетворительно описывают процессы измельчения с точки зрения качества. Так, например, для определения работы измельчения при дроблении в подавляющем большинстве случаев применяют теорию или гипотезу Кирпичева–Кика [14, 15, 18, 23], согласно которой работа, необходимая для измельчения, прямо пропорциональна объему измельчаемого материала. При этом возникает необходимость в определении объема разрушаемого материала. В настоящее время в силу практической сложности осуществления этого процесса определение объема разрушаемого материала производится весьма приближенно. Например, объем разрушаемого материала может определяться как разность объемов кусков исходного материала и кусков готового продукта, причем с существен-

ными допущениями [14, 15, 18]. В этом случае результат определения работы и мощности дробления также оказывается очень приближенным, а часто весьма далек от реальности и в последующем требует существенного практического уточнения, чтобы получить удовлетворительную количественную оценку энергоемкости процесса дробления. Еще сложнее обстоит дело с определением затрат энергии и мощности на дробление материалов в новых дробильных машинах, рабочие органы которых отличаются от традиционных по форме или конструкции.

Поэтому в первом приближении для более точной количественной оценки энергоемкости процесса дробления возникает необходимость в разработке такой уточненной, но при этом достаточно общей методики определения объема разрушаемого материала, которая позволит находить этот объем как можно точнее и, по возможности, близко к его реальному значению, а значит, более точно рассчитывать работу и мощность, затрачиваемые на измельчение материала.

В работах [27, 28] предлагается рассматривать объем материала ΔV , разрушаемого в дробилке, как сумму объемов кусков материала, поэтапно разрушаемых в камере дробления по мере погружения куска в камеру при его постепенном измельчении от исходного до конечного размера (на рис. 1 эти объемы условно показаны в виде сегмента с параметрами d_{ci} и h_i), т.е.

$$\Delta V = (V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n)z, \quad (1)$$

где V_i – объем разрушаемого материала для куска заданного размера, m^3 (где $i=1; 2; 3; 4; \dots; n$); n – количество кусков материала по высоте камеры дробления; z – количество кусков материала, помещающихся по ширине камеры дробления.

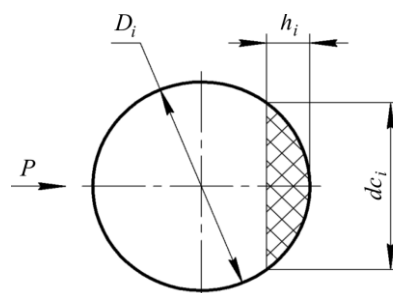


Рис. 1. Схема для определения ΔV

Fig. 1. The scheme for calculation of ΔV

На практике, при проектировании дробильных машин, определив согласно формуле (1) суммарный объем ΔV материала, разрушаемого в дробилке, как сумму объемов V_i , поэтапно разрушаемых последовательными воздействиями рабочего органа, можно затем на основе вышеупомянутой гипотезы Кирпичева–Кика перейти к определению работы и мощности, потребных для измельчения материала от начальной до требуемой крупности, которые часто назначают на основе практического опыта и параметров аналогичных машин.

Методика, основанная на таком подходе, позволяет существенно более точно определять объем измельчаемого материала, а значит, более точно спрогнозировать работу и мощность дробления. Для этого необходимо получить адекватные и несложные в плане практического применения расчетно-теоретические зависимости для определения объемов материалов V_i , разрушающихся при взаимодействии с рабочим органом дробильной машины, для каждого положения куска измельчаемого материала по высоте камеры дробления.

Некоторые исходные предпосылки к расчетно-теоретическому описанию процесса измельчения в его прикладном аспекте, которые можно применить и для решения данной задачи, были сформулированы авторами в работах [29–32].

Ниже на основе доработанных известных подходов и моделей для новой разработанной авторами валковой дробилки с новой формой валков [33] предложен вариант прикладной механико-математической модели, описывающей разрушение куска материала в процессе дробления между выпукло-вогнутыми поверхностями новых валков, позволяющей расчетно-теоретическим путем определять объем разрушаемого куска материала, что в свою очередь позволяет производить расчет процесса измельчения по параметрам затрачиваемой работы и мощности, осуществлять проектирование или подбор дробильного оборудования.

Для получения механико-математической модели разрушения куска материала между выпукло-вогнутыми поверхностями решим конструктивно-нелинейную [34] контактную задачу механики твердого тела [35–37] о статическом взаимодействии деформируемого шара радиусом R , моделирующего измельчаемый материал [38], с абсолютно жесткими цилиндрическими поверхностями выпуклого и вогнутого профилей, моделирующими валки и имеющими одинаковые радиальные размеры $R_b=R$ (рис. 2).

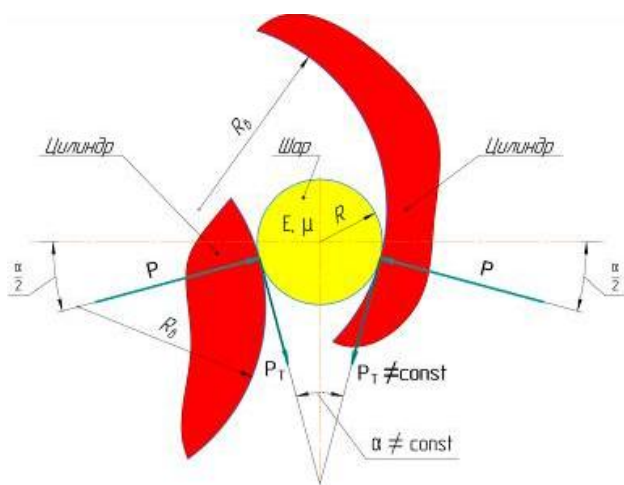


Рис. 2. Расчетно-теоретическая схема механической системы «шар-цилиндр» с переменным углом захвата α [38]

Fig. 2. Calculation and theoretical diagram of the mechanical system "ball-cylinder" with a variable angle of capture α [38]

В основу моделируемого физико-математического процесса положим следующие предпосылки и допущения:

1) измельчаемый материал с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона μ – однородный, сплошной, изотропный и подчиняющийся закону Гука [34, 35, 38], а его прочностные свойства соответствуют хрупкому напряженному состоянию с разными временными сопротивлениями при сжатии μ_{bc} и растяжении $\sigma_{br} \ll \sigma_{bc}$ [35, 39], что характерно, например, для мрамора, гранита, песчаника и т.п. [39,40];

2) силы трения $P_T = \text{const}$, играющие роль механического фактора, удерживающего вращающимися валками разрушаемый камень от выталкивания, не учитываются (рис. 2);

3) пренебрегаем собственным весом G_0 шара по сравнению с усилием дробления $P \ll G_0$ [38];

4) при рассмотрении напряженного состояния разрушаемого материала в процессе дробления учитываются только местные (контактные) деформации, что является обоснованием с общепринятой в настоящее время точки зрения, применительно к сферической модели;

5) в отличие от щековых дробилок, где угол захвата $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, здесь α – переменная величина, изменяющаяся в пределах [38]

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}; \quad (2)$$

6) теоретически при $\alpha_{\max} = 33,4^\circ$ и коэффициенте трения f [41] камня о сталь, равном примерно 0,3 [38], реактивные контактные равнодействующие (рис. 2)

$$P = 0; \quad P_T = f \cdot P = 0, \quad (3)$$

а в случае $\alpha = \alpha_{\min} = 0$ силовой параметр P станет максимальным, $P_m = \text{max}$, и такое граничное (неустойчивое) расположение контактирующих тел, изображенное на рис. 3, пойдет в запас мощности привода, необходимой для дробления материала;

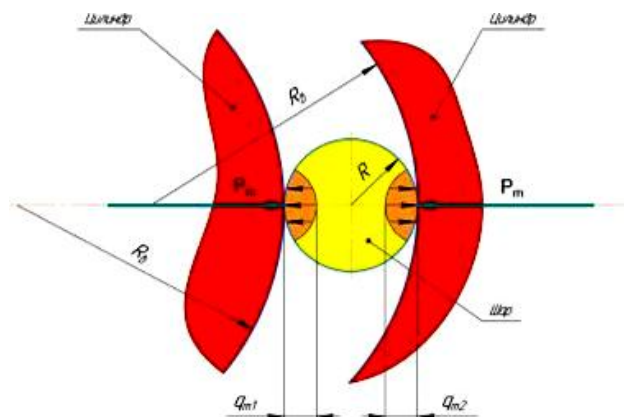


Рис. 3. Расчетная модель взаимодействия деформируемого шара с поверхностями валков при разрушении камня и адекватные наибольшие контактные давления q_{m1}, q_{m2}

Fig. 3. Computational model of the interaction of a deformable ball with the surfaces of the rolls during the destruction of a stone and adequate maximum contact pressures q_{m1}, q_{m2}

7) общая несущая способность шара при его дроблении зависит от величины равных нормальных напряжений

$$\sigma_p = \max > 0; \quad \sigma_c = \min < 0 \quad (4)$$

в центре сферического тела (рис. 3 и 4), которые определяются из решения известной классической задачи теории упругости [42, 43] (формула Вебера, 1952 г.) для сосредоточенных сжимающих сил P_m , действующих согласно рис. 3:

$$\sigma_p = \frac{21P_m}{4\pi \cdot R^2 (7+5\mu)}; \quad \sigma_c = -\frac{3(14+5\cdot\mu)P_m}{2\pi \cdot R^2 (7+5\mu)}; \quad (5)$$

8) с целью математического интерпретирования предельного состояния шара используем критерий прочности Кулона–Мора (рис. 4) в виде равенства [35, 39, 40]

$$\sigma_p - \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}} \sigma_c = \sigma_{вр}. \quad (6)$$

Критерий широко применяется в проектно-технических расчетах для хрупких материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию ($\sigma_{вс} \gg \sigma_{вр}$) (см. предпосылку 1));

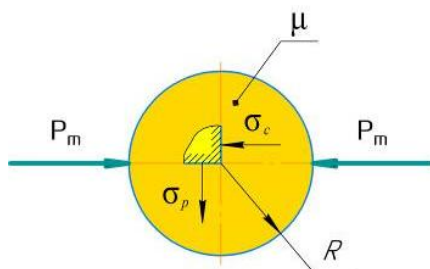


Рис. 4. Схематическое моделирование задачи Вебера [42, 43] о напряженном состоянии сферы радиусом R , нагруженной уравновешенной системой сил, приложенных в полюсах

Fig. 4. Schematic modeling of the Weber problem [42, 43] about the stress state of a sphere of radius R , loaded by a balanced system of forces applied at the poles

9) потенциальную энергию деформации U_K , тождественную механической работе A_K , необходимой для крупного и среднего дробления (измельчения), аппроксимируем экспериментально подтвержденной и проверенной на практике формулой (объемной гипотезой) Кирпичева–Кика [38]

$$U_K = A_K = \frac{\sigma_{вс}^2 \cdot V}{2E}, \quad (7)$$

где V – объем разрушенного вещества, m^3 .

Подставляя напряжения $\sigma_{вс}$, $\sigma_{вр}$ в соответствии с решением (5) в условие несущей способности (6), получаем аналитическую зависимость между экстремальной силой дробления $P_m = \max$ и радиусом R шаровой модели:

$$\frac{21P_m}{4\pi R^2 \cdot (7+5\mu)} + \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}} \left[\frac{3(14+5\mu)P_m}{2\pi \cdot R^2 (7+5\mu)} \right] = \sigma_{вр} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_m = P_m(R) = \frac{2\pi(7+5\mu)\sigma_{вр} \cdot R^2}{3[3,5 + \sigma_{вр} \cdot \sigma_{вс}^{-1}(14+5\mu)]}. \quad (8)$$

На рис. 5 изображен график параболической функции (8), построенной по численным данным табл. 1 для высокопрочного гранита [39, 40, 44] при $\sigma_{вр} = 0,3 \cdot 9,81 = 2,943$ МПа (H/mm^2), $\sigma_{вс} = 26 \cdot 9,81 = 255$ МПа (H/mm^2), когда

$$P_m = P_m(R) = 13,015412R^2. \quad (8')$$

Таблица 1

Результаты расчета P_m по формуле (8') в пределах $0 << R << 70$ мм

Table 1

P_m calculation results by formula (8') within $0 << R << 70$ mm

$R, \text{ мм}$	0	10	20	30	40	50	60	70
$P_m \cdot 10^{-3}, H$	0	1,3015	5,206	11,714	20,325	32,538	46,856	63,776

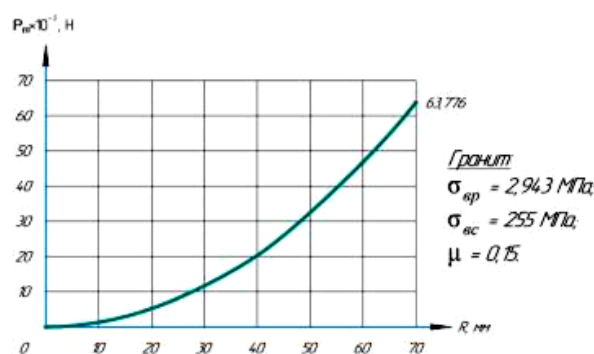


Рис. 5. Графическая иллюстрация функциональной зависимости (8) в численном виде (8')

Fig. 5. Graphic illustration of the functional dependence (8) in the numerical form (8')

Основой последующего математического моделирования являются фундаментальные соотношения Герца–Штаермана [36, 37], описывающие контакт упругодеформируемой сферы радиусом R с абсолютно жестким цилиндром (рис. 6, а), а также взаимодействие физически линейного шара и твердого тела в виде цилиндрического желоба (рис. 6, б).

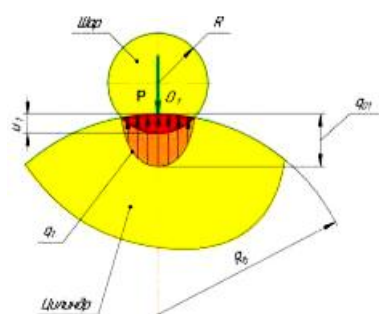
Соответствующие расчетные формулы [46], адаптированные к тематике данной теоретической работы, включают:

- полные эллиптические интегралы $K(\xi)$, $L(\xi)$ [47] соответственно 1-го и 2-го рода в форме Лежандра, а также $D(\xi)$ [46, 47]:

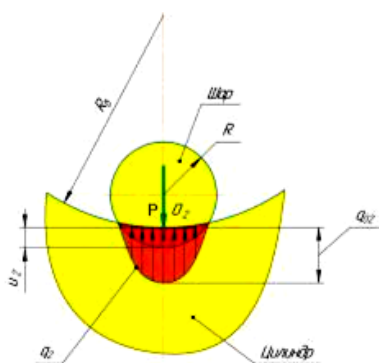
$$K(\xi) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\xi^2 \cdot \sin^2 \varphi}};$$

$$L(\xi) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1-\xi^2 \cdot \sin^2 \varphi)} d\varphi; \quad (9)$$

$$D(\xi) = \frac{1}{\xi^2} [K(\xi) - L(\xi)]; \quad (10)$$



а



б

Рис. 6. Частные случаи осесимметричных контактных задач теории упругости [36, 37, 45, 46] при первоначальном соприкосновении тел в точке

Fig. 6. Particular cases of axisymmetric contact problems of the theory of elasticity [36, 37, 45, 46] at the initial contact of bodies at a point

- модуль или эксцентриситет ξ контурных эллипсов областей контакта ($0 \leq \xi < 1$), определенный из трансцендентного уравнения [46]

$$\frac{A_i}{B_i} = f(\xi) = (1 - \xi^2) \cdot \frac{D(\xi)}{K(\xi) - D(\xi)}, \quad (11)$$

где $i = 1$ – для схемы рис. 6, а; $i = 2$ – для схемы рис. 6, б; A_1, B_1, A_2, B_2 – геометрические характеристики ($A_i \leq B_i$), зависящие от радиусов кривизны R_b, R физико-механических систем, изображенных на рис. 6, а и б, б [39, 46]:

$$A_1 = \frac{1}{2R}; \quad B_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_g} \right); \quad (12)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_g} \right); \quad B_2 = \frac{1}{2R}; \quad (13)$$

- равнодействующие \mathbf{P} функций реактивных распределенных сил q_1, q_2 (см. рис. 2 и б);
- экстремальные контактные давления q_{01}, q_{02} и соответствующие сближения или местные абсолютные деформации (перемещения) U_1, U_2 в точках O_1, O_2 (см. рис. 6):

$$q_{01} = q_{01}(\mathbf{P}) = \frac{n_{p1}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \mathbf{P} \left[\frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_g} \right) \right]^2}; \quad (14)$$

$$U_1 = U_1(\mathbf{P}) = \frac{n_{u1}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{9}{24} \mathbf{P}^2 \left(\frac{1 - \mu^2}{E} \right) \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_g} \right)}; \quad (15)$$

$$q_{02} = q_{02}(\mathbf{P}) = \frac{n_{p2}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \mathbf{P} \left[\frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R_g} \right) \right]^2}; \quad (16)$$

$$U_2 = U_2 \left(\frac{\mathbf{P} A_i}{B_i} \right) = \frac{n_{u2}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{9}{24} \mathbf{P}^2 \left(\frac{1 - \mu^2}{E} \right) \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R_g} \right)}, \quad (17)$$

где n_{pi}, n_{ui} – безразмерные параметры-коэффициенты ($i = 1, 2$) [48],

$$n_{pi} = \left\{ \frac{4}{\pi^2} \left(2 + \frac{B_i}{A_i} + \frac{A_i}{B_i} \right) D(\xi) [K(\xi) - D(\xi)] (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}; \quad (18)$$

$$n_{ui} = K(\xi) \left[\frac{4}{\pi^2} \frac{1}{1 + B_i + A_i^{-1}} \frac{1}{D(\xi)} \right], \quad (19)$$

для вычисления которых можно воспользоваться специальными таблицами в работах [39] и [46] в зависимости от ξ, A_i, B_i , а значения полных эллиптических интегралов (8) имеются в справочнике [47];

- наибольшие сжимающие напряжения $\sigma_{\max 1}, \sigma_{\max 2}$, которые возникают в центре контактных площадок (см. рис. 6), [46]

$$\sigma_{\max 1} = -q_{01}; \quad \sigma_{\max 2} = -q_{02}. \quad (20)$$

Что касается решения трансцендентного уравнения (11), то для удобства его практического применения в конкретных контактных задачах в работе [46] приводится необходимый график, который воспроизводится на рис. 7 с помощью значений эллиптических интегралов [47] и циклических данных [46], задаваясь эксцентриситетом ξ на замкнутом интервале ($0 \leq \xi \leq 1$) (табл. 2) в сочетании с процедурой линейной интерполяции.

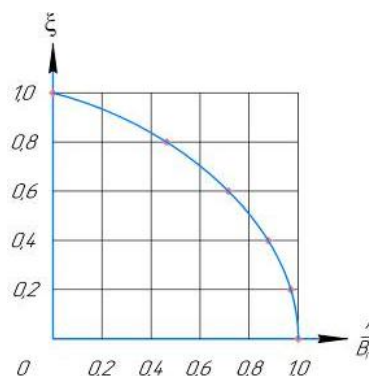


Рис. 7. Решение уравнения (10)

Fig. 7. Solution of Eq. (10)

Таблица 2

Количественная информация о функции (10)

Table 2

Values of function (10)

ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
A_i / B_i	1	0,9698	0,8773	0,7154	0,4636	0

Продолжая общее решение задачи,

• представляем нелинейные зависимости $\mathbf{P} = \mathbf{P}(U_1)$, $\mathbf{P}(U_2)$, используя соотношения (14) и (16):

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(U_1) = \frac{4\sqrt{2}}{3n_{u1}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{E \cdot U_1^{\frac{3}{2}}}{(1-\mu^2) \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_g}\right)^{\frac{1}{2}}}; \quad (21)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(U_2) = \frac{4\sqrt{2}}{3n_{u2}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{E \cdot U_2^{\frac{3}{2}}}{(1-\mu^2) \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_g}\right)^{\frac{1}{2}}}; \quad (22)$$

• выводим формулу энергии местной деформации U_p измельчаемого материала для произвольной величины силы \mathbf{P} в пределах $0 \leq \mathbf{P} \leq \mathbf{P}_{\text{DM}}$, принимая во внимание предпосылку 4) и конструктивно-нелинейную особенность выражений (21), (22) [34, 45]:

$$U_p = \int_0^{U_1} \mathbf{P} \cdot dU_1 + \int_0^{U_2} \mathbf{P} \cdot dU_2. \quad (23)$$

Отсюда с учетом подстановки (21), (22) следует и реализация процедуры интегрирования [47, 48]:

$$U_p = \frac{8\sqrt{2}}{15} \frac{E}{(1-\mu^2)} \left[\frac{U_1^{\frac{5}{2}}}{n_{u1}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_g}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{U_2^{\frac{5}{2}}}{n_{u2}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_g}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (24)$$

Заменяя в (24) перемещения U_1 и U_2 согласно (14), (16) при $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{DM}}$ (см. рис. 3), будем иметь окончательное аналитическое выражение $U_{\text{рд}} = U_{\text{рд}}(\mathbf{P}_{\text{DM}})$, определяющее работу $A_{\text{рд}}(\mathbf{P}_{\text{DM}})$, требуемую для измельчения сферической модели твердого вещества (см. рис. 2) в виде функции $A_{\text{рд}} = A_{\text{рд}}(\mathbf{P}_{\text{DM}})$, представляемой формулой

$$A_{\text{рд}} = U_{\text{рд}} = \frac{8\sqrt{2}}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{5}{6}} \frac{(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{E^{\frac{2}{3}}} \times \left[n_{u1} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_g}\right)^{\frac{1}{3}} + n_{u2} \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R_g}\right)^{\frac{1}{3}} \right] \mathbf{P}_{\text{DM}}^{\frac{5}{3}} \quad (25)$$

в зависимости от силы дробления (8).

Приравнивая правые части энергетических условий (7) и (25), будем иметь формулу, позволяющую вычислять объем материала V , который образовался в процессе дробления шаровой модели:

$$A_{\text{к}} = A_{\text{рд}}, \Rightarrow V = \frac{2E \cdot A_{\text{рд}}}{\sigma_{\text{вс}}^2}. \quad (26)$$

В качестве характерного примера практического использования теоретических соотношений (8), (12), (13), (25), (26), рассмотрим алгоритм расчета основных параметров \mathbf{P}_{DM} , $A_{\text{рд}}$, V , описывающий измельчение частиц из гранита, имеющего физико-механические константы [18, 19, 23]: $\sigma_{\text{вр}} = 2,943$ МПа (Н/мм²), $\sigma_{\text{вс}} = 255$ МПа(Н/мм²), $E = 48060$ МПа(Н/мм²), $\mu = 0,15$ и радиусы поверхностей контакта $R = 70$ мм, $R_g = 133$ мм (см. рис. 2).

1. Усилие разрушения \mathbf{P}_{DM} определяем в соответствии с (8), табл. 1 и графиком на рис. 6:

$$\mathbf{P}_{\text{DM}} = \frac{2 \cdot 3,1416(7+5 \cdot 0,15)2,943 \cdot 70^2}{3[3,5+2,943(255)^{-1}(14+5 \cdot 0,15)]} = 63776 \text{ Н.} \quad (27)$$

2. Безразмерные характеристики A_1 / B_1 , A_2 / B_2 определяем по формулам (12), (13):

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_g}} = \frac{1}{1 + \frac{70}{133}} = 0,6552; \quad (28)$$

$$\frac{A_2}{B_2} = 1 - \frac{R}{R_g} = 1 - \frac{70}{133} = 0,4737. \quad (29)$$

3. Коэффициенты n_{u1} , n_{u2} определяем по справочникам [39] или [46] в зависимости от результатов (28), (29) и с применением линейной интерполяции:

$$n_{u1} = 0,9901; n_{u2} = 0,97. \quad (30)$$

Табличная информация (табл. 3) из источников [39, 46] в сокращенном виде охватывает необходимый диапазон $0,454 \leq A_i / B_i \leq 0,6816$ ($i = 1, 2$), где коэффициенты n_{p1} , n_{p2} , используемые при вычислении максимальных контактных давлений (14), (16) и сжимающих напряжений (20), имеют следующие значения:

$$n_{p1} = 0,9901; n_{p2} = 0,9699 \approx 0,97. \quad (31)$$

Таблица 3

Фрагмент данных (14) [25] при $i = 1$ и $i = 2$

Table 3

Fragment of data (14) [25] with $i = 1$ and $i = 2$

A_i / B_i	ξ^2	n_{pi}	n_{ui}
0,6816	0,400	0,9919	0,9919
0,6384	0,450	0,9890	0,9889
0,5942	0,500	0,9853	0,9852
0,5489	0,550	0,9805	0,9804
0,5022	0,600	0,9746	0,9744
0,4540	0,650	0,9669	0,9667

4. Потенциальная энергия $U_{pd} = A_{pd}$, при которой происходит разрушение твердого вещества (в данном случае гранита), определяется равенством (25) с учетом (27) и (30):

$$U_{pd} = A_{pd} = \frac{8\sqrt{2}}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{5}{6}} \frac{(1-0,15^2)^{\frac{2}{3}}}{(48060)^{\frac{2}{3}}} \times \left[0,9901 \left(\frac{2}{70} + \frac{1}{133}\right)^{\frac{1}{3}} + 0,97 \left(\frac{2}{70} - \frac{1}{133}\right)^{\frac{1}{3}} \right] \times (63776)^{\frac{5}{3}} = 11829,3 \text{ Н} \cdot \text{мм} \approx 11,83 \text{ Дж}. \quad (32)$$

5. Объем измельченного материала V определяется по аналитическому соотношению (26) и результату (32):

$$V = \frac{2 \cdot 48060 \cdot 11829,3}{(255)^2} = 17486 \text{ мм}^3. \quad (33)$$

Дополняем алгоритмический процесс (27)–(33) проверочной количественной оценкой промежуточных механико-геометрических характеристик:

а) наибольшие по модулю сжимающие напряжения $|\sigma_{\max 1}|$, $|\sigma_{\max 2}|$ в точках O_1 , O_2 эллиптических площадок контакта (см. рис. 3 и 6) [36, 37, 45, 46] и местные абсолютные деформации (сближения) U_{M1} , U_{M2} , базирующиеся на цифровой информации (27), (30), (31) и формулах (14)–(17), (20), рассчитываются следующим образом:

$$|\sigma_{\max 1}| = q_{M1} = \frac{\eta_{p1}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} P_{\text{дм}} \left[\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_g} \right) \right]^2} = \frac{0,9901}{3,1416} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 63776 \left[\frac{48060}{1-(0,15)^2} \left(\frac{2}{70} + \frac{1}{133} \right) \right]^2} = 2112,6 \text{ МПа} \left(\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} \right) \gg \sigma_{\text{ср}} = 255 \text{ МПа}; \quad (34)$$

$$|\sigma_{\max 2}| = q_{M2} = \frac{\eta_{p2}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} P_{\text{дм}} \left[\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R_g} \right) \right]^2} = \frac{0,97}{3,1416} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 63776 \left[\frac{48060}{1-(0,15)^2} \left(\frac{2}{70} - \frac{1}{133} \right) \right]^2} = 1444,8 \text{ МПа} \left(\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} \right) \gg \sigma_{\text{ср}} = 255 \text{ МПа}; \quad (35)$$

$$U_{M1} = \frac{\eta_{p1}}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} P_{\text{дм}}^2 \left(\frac{1-\mu^2}{E} \right)^2 \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_g} \right)} = \frac{0,9901}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot 63776^2 \left[\frac{1-(0,15)^2}{48060} \right]^2 \left(\frac{2}{70} + \frac{1}{133} \right)} = 0,255 \text{ мм} \ll R_{\text{min}} = R = 70 \text{ мм}; \quad (36)$$

$$U_{M2} = \frac{\eta_{p2}}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} P_{\text{дм}}^2 \left(\frac{1-\mu^2}{E} \right)^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R_g} \right)} = \frac{0,97}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot 63776^2 \left[\frac{1-(0,15)^2}{48060} \right]^2 \left(\frac{2}{70} - \frac{1}{133} \right)} = 0,209 \text{ мм} \ll R_{\text{min}} = R = 70 \text{ мм}; \quad (37)$$

б) начальный объем V_0 [48] и вес G_0 куска гранита в форме шаровой модели (см. рис. 2) до измельчения при плотности $\gamma_M = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ кг/мм}^3 = 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 9,81 \approx 24,525 \cdot 10^{-6} \text{ Н/мм}^3$ [39] определяется так:

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} 3,1416 \cdot 70^3 = 1436758 \text{ мм}^3; \quad (38)$$

$$G_0 = \gamma \cdot V_0 = 24,525 \cdot 10^{-6} \cdot 1436758 \approx 35,24 \cdot (9,81)^{-1} \approx 3,6 \text{ кг} \ll P_{\text{дм}} = 63776 \text{ Н} = 63776 \text{ Н} \cdot (9,81)^{-1} \approx 6505 \text{ кг}. \quad (39)$$

На основании расчетов (34)–(39) можно констатировать, что усиление неравенства (34)–(37), (39):

- подтверждает физико-математическую корректность использования контактных моделей Герца–Штаермана [36, 37] (см. рис. 6, а, б) для описания процесса измельчения материала;

- доказывает правомерность введения допущения (4), которое предполагает не учитывать влияние на напряженно-деформированное состояние шара его собственного веса G_0 ;

- гарантирует с учетом условий прочности (34) (35) разрушение частицы гранита путем ее раздавливания усилием дробления $P_{\text{дм}} = 63776 \text{ Н}$.

Преимущества данной модели перед другими в том, что она позволяет более точно определять объем разрушаемого материала, в то время как практически все существующие модели делают это довольно приближенно. Опираясь в своей основе на гипотезу Кирпичева–Кика, существующие модели измельчения предлагают находить объем измельчаемого материала на основании достаточно больших допущений и упрощений, что в итоге дает большое отклонение в сторону завышения или занижения определяемой работы и мощности измельчения. Поэтому разрабатываемая модель решает прежде всего задачу более точной оценки объема измельчаемого материала, а значит, и более точного определения затрачиваемой на измельчение мощности. Именно подход с точки зрения механики твердого тела, который ранее для этих целей не использовался, по нашему мнению, может помочь в решении этой задачи.

Данная модель является первым базовым шагом в разработке новой методики нахождения параметров работы дробильных машин, в частности мощности и производительности. Имея модель измельчения одного шарообразного куска материала и возможность определять для него разрушенный объем, можно в дальнейшем

по определенному алгоритму, который в данной работе не приводится, так как относится уже непосредственно к конструкции дробильных машин, распространить этот процесс на измельчение всего материала в камере дробления, а значит, более точно определить объем одновременно измельчаемого материала и мощность привода дробилки и ее производительность.

Общая адекватность предлагаемой модели с точки зрения качественного описания процесса измельчения обусловлена использованием проверенных практикой положений и теорий механики упругодеформируемого твердого тела. В то же время для проверки количественной адекватности предложенной прикладной модели практическим потребностям проектировщиков дробильного оборудования необходима ее экспериментальная проверка с целью уточнения и, если необходимо, определения возможных корректировочных коэффициентов путем проведения испытаний на действующей модели дробилки. Такая проверка целесообразна, если предложенные подходы и итоговая модель будут признаны приемлемыми и адекватными по результатам данной теоретической работы. Поэтому экспериментальная проверка адекватности предлагаемой модели дробления является задачей дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Добронравов С.С., Дронов В.Г. Строительные машины и основы автоматизации: учебник для строительных вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
2. Дорожно-строительные машины и комплексы: учебник для вузов. / В.И. Баловнев [и др.] / под общ. ред. В.И. Баловнева. – Москва-Омск.: Изд-во СибАДИ, 2001. – 528 с.
3. Строительные машины и монтажное оборудование: учебник для студентов вузов по спец. «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование» / В.Д. Мартынов [и др.]. – М.: Машиностроение, 1990. – 352 с.
4. Белецкий Б.Ф. Строительные машины и оборудование: справочное пособие. – Ростов-н/Д: Феникс, 2002. – 592 с.
5. Борщев В.Я. Оборудование для измельчения материалов: дробилки и мельницы: учеб. пособие. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2004. – 91 с.
6. Андреев С.Е., Перов В.А., Зверевич В.В. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 415 с.
7. Марасанов В.М., Дылдин Г.П. Математическое описание процесса дробления в щековой дробилке // Горный журнал. – 2017. – № 8. – С. 82–91.
8. Мишин И.И., Болобов В.И. Определение зависимости потребной мощности щековой дробилки от степени износа дробящих плит // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – СПб., 2019 – № 3. – С. 18–25.
9. An addition to reporting A and b values – The SAG Circuit Specific Energy (SMSE). SMS Testing. – Australia, 2017.
10. Денисов Д.Г. Моделирование процесса измельчения в дробилках ударного действия // Вестник Ивановского государственного энергетического университета имени В.И. Ленина (ИГЭУ). – 2006. – Вып. 2. – С. 17–20.

Проведенные исследования и их анализ позволяют сделать следующие выводы:

1) решена новая фундаментально-прикладная контактная задача теории упругости о статическом силовом взаимодействии сферической модели измельчаемого твердого вещества с недеформируемыми цилиндрическими поверхностями выпуклого и вогнутого валков (см. рис. 2);

2) сформулированный математический алгоритм доведен до простых конечных формул (8), (12), (13), (25), (26), апробированных численным примером разрывающегося шара из гранита;

3) полученные результаты для одиночного измельчаемого шара (см. рис. 2) возможно модифицировать и обобщить применительно к определению мощности привода и производительности реальной дробилки в зависимости от скорости вращения валков;

4) в последующем полученные результаты (механико-математическую модель) возможно распространить и на процессы измельчения между поверхностями другой формы, характерной для измельчителей традиционной конструкции, например между двумя плоскими поверхностями, между двумя выпуклыми поверхностями и др.

11. Федотов П.К. Моделирование процесса разрушения руды в слое частиц под давлением // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2014. – № 4. – С. 71–77.

12. Комиссаров А.П., Лозгачев И.А., Корепанов М.Ю. Энергетическая характеристика щековых дробилок с простым и сложным качанием щеки // Инновационные технологии обогащения минерального и техногенного сырья: материалы науч.-техн. конф., проводимой в рамках VI Уральского горно-промышленного форума / под общ. ред. Е.Ф. Цыпина; отв. ред. Т.Ю. Овчинникова. – Екатеринбург, 2015. – С. 13–26.

13. Лагунова Ю.А., Бруслова О.М. Математическая модель процесса дробления горной породы молотковыми дробилками // Отдельные статьи Горного информационно-аналитического бюллетеня (научно-технического журнала). – 2012. – № 1. – С. 3–6.

14. Григорьевых Д.П., Хохлов Н.И., Петров И.Б. Расчет динамического разрушения в твердых деформируемых телах // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, № 4. – С. 45–58.

15. Ельникова С.П., Газалеева Г.И. Прогнозирование энергии разрушения в конусных дробилках, работающих «в слое» // Обогащение руд. – 2019. – № 5. – С. 3–8.

16. Ельникова С.П. Определение удельных энергозатрат при дроблении «в слое» в конусных дробилках с учетом закономерностей разрушения частиц: дис. ... канд. техн. наук: 25.00.13. – Екатеринбург, 2020. – 137 с.

17. Doudkin M., Kim A., Kim V. Application of fem method for modeling and strength analysis of feed elements of vibroscreen // Lecture Notes in Mechanical Engineering. – 2019. – P. 155–162.

18. Computer modeling application for analysis of stress-strain state of vibroscreen feed elements by finite elements method / M. Doudkin, A. Kim, V. Kim, M. Mlynczak, G. Kustarev // Communications in Computer and Information Science. – 1998. – P. 82–96.

19. Демидов А.Р., Чирков С.Е. Способы измельчения и оценка их эффективности. – М.: ЦИНТИ, 2009. – 49 с.
20. Гийо Р. Проблема измельчения материалов и её развитие. – М.: Стройиздат, 2004. – 112 с.
21. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочностные твёрдых тел. – М.: Металлургия, 1971. – 263 с.
22. Румпф Г. Об основных физических проблемах при измельчении // Труды Европейского совещания по измельчению. – М.: Стройиздат, 1966. – С. 7–40.
23. Бонд Ф.С. Законы дробления // Труды Европейского совещания по измельчению – М.: Стройиздат, 1966. – С. 195–205.
24. Ходаков Г.С. Физика измельчения. – М.: Наука, 1972. – 307 с.
25. Лескин А.Д. Основные закономерности измельчения материалов // Современное измельчительное оборудование: обзор инф. – Вып. 3, сер. 7. Промышленность нерудных и неметаллорудных материалов; ВНИИОСМ. – М., 2008. – С. 2–14.
26. Баловнев В.И. Определение сопротивлений и энергии при измельчении материалов // Строительные и дорожные машины. – 1988. – № 1. – С. 24–25.
27. Гурьянов Г.А., Ким В.А. Определение энергоёмкости процесса дробления в валковой дробилке с выпукло-вогнутой формой валков // Модернизация и научные исследования в транспортном комплексе: материалы междунар. науч.-практ. конф. – Пермь, 2017. – С. 23–25.
28. Гурьянов Г.А., Ким В.А., Васильева О.Ю. Разработка механико-математической модели процесса разрушения твёрдых частиц и определение геометрических параметров выпукло-вогнутых валков // Вестник КазНИТУ. – 2018. – № 3. – С. 486–495.
29. Гурьянов Г.А., Абдеев Б.М., Клименко Е.А. Прикладная модель измельчения твёрдой частицы простой формы ударом о жесткую поверхность // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 1. – С. 110–120.
30. Абдеев Б.М., Байгереев С.Р., Гурьянов Г.А. Обобщенная динамическая теория измельчения частицы твёрдого вещества импульсно-силовым сжатием двумя недеформируемыми шарами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 280–291.
31. Гурьянов Г.А., Абдеев Б.М. Прикладная модель измельчения шарообразной твёрдой частицы прямым ударом о недеформируемую плоскую поверхность // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 1. – С. 32–42.
32. Baigereyev S., Guryanov G. New method for increase in product fineness in stirred mills // Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2019. – Vol. 19, no. 3. – P. 768–778. DOI: 10.1016/j.acme.2019.03.003
33. Разработка новой рациональной формы валков валковых дробилок на основе анализа их рабочих органов / Г.А. Гурьянов [и др.] // Вестник Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева. – 2016. – № 3. – С. 63–70.
34. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
35. Филлин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела. Т. 1. – М.: Наука, 1975. – 832 с.
36. Hertz H.R. Ueber die Berührung fester elastischer. – Leipzig: Korper Gesammelte Werke, 1895.
37. Штаерман И.Ф. Контактная задача теории упругости. – М., Л.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.
38. Дорожные машины: в 2 ч. Ч. 2. Машины для устройства дорожных покрытий / К.А. Артемьев [и др.]. – М.: Машиностроение, 1982. – 396 с.
39. Писаренко П.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1975. – 704 с.
40. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – 856 с.
41. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 596 с.
42. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
43. Weber C. Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften // Zeitschrift für angewandte Mathematic und Mechanik. – 1952. – Vol. 32, no. 6. – 186 p.
44. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1972. – 256 с.
45. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов / пер. с англ. Л.Г. Корнейчука; под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1976. – 672 с.
46. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. II / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман [и др.]; под ред. д.т.н., проф. С.Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1958. – 976 с.
47. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / пер. с англ. И.Г. Арамановича [и др.]; под общ. ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
48. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 608 с.

References

1. Dobronravov S.S., Dronov V.G. Stroitel'nye mashiny i osnovy avtomatizacii: Uchebnik dlja stroitel'nyh vuzov [Construction machines and automation basics]. Moscow, Vysshaya shkola, 2001, 575 p.
2. Balovnev V.I., et al. Dorozhno-stroitel'nye mashiny i komplekсы: Uchebnik dlja vuzov [Road-building machines and complexes: Textbook for universities]. Moscow, Omsk, SibADI, 2001, 528 p.
3. Martynov V.D., et al. Stroitel'nye mashiny i montazhnoe oborudovanie: Uchebnik dlja studentov vuzov po spec. «Podemno-transportnye, stroitel'nye, dorozhnye mashiny i oborudovanie» [Construction machines and assembly equipment: A textbook for university students on specialty “Lifting and transport, construction, road machines and equipment”]. Moscow, Mashinostroenie, 1990, 352 p.
4. Beleckij B.F. Stroitel'nye mashiny i oborudovanie. Spravochnoe posobie [Construction machinery and equipment. Reference manual]. Rostov-na-Donu, Pheniks, 2002, 592 p.
5. Borshhev V.Ja. Oborudovanie dlja izmel'chenija materialov: drobilki i mel'nicy: ucheb. posobie [Equipment for grinding materials: crushers and mills]. Tambov, TGTU, 2004, 91 p.
6. Andreev S.E., Perov V.A., Zverevich V.V. Droblenie, izmel'chenie i grohochenie poleznyh iskopaemyh [Crushing, grinding and screening of minerals]. Moscow, Nedra, 1990, 415 p.
7. Marasanov V.M., Dyldin G.P. Matematicheskoe opisaniye processa drobleniya v shchekovoy drobilke [Mathematical description of the crushing process in a jaw crusher]. Gornyj zhurnal, 2017, pp. 82–91.

8. Mishin I.I., Bolobov V.I. Opredelenie zavisimosti potrebnoj moshchnosti shchekovoj drobilki ot stepeni iznosa drobyashchih plit [Determination of the dependence of the required power of the jaw crusher on the degree of wear of the crushing plates]. *Saint Petersburg, Transportnoe, gornoe i stroitel'noe mashinostroenie: nauka i proizvodstvo*, 2019, pp. 18–25.
9. An addition to reporting A and b values – The SAG Circuit Specific Energy (SMSE). SMS Testing. – Australia, 2017.
10. Denisov D.G. Modelirovanie processa izmel'cheniya v drobilkah udarnogo dejstviya [Modeling the grinding process in impact crushers]. *Vestnik IGEU*, 2006, pp. 17-20.
11. Fedotov P.K. Modelirovanie processa razrusheniya rudy v sloe chastic pod davleniem [Modeling the process of destruction of ore in a layer of particles under pressure]. *Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznyh iskopaemyh*, 2014, pp. 71-77.
12. Komissarov A.P., Lozgachev I.A., Korepanov M.YU. Energeticheskaya karakteristika shchekovyh drobilok s prostym i slozhnym kachaniem shcheki [Energy characteristic of jaw crushers with simple and complex jaw swing]. *Innovacionnye tekhnologii obogashcheniya mineral'nogo i tekhnogennogo syr'ya: materialy nauchno-tehnicheskoy konferencii, provodimoj v ramkah VI Ural'skogo gornopromyshlennogo foruma*, 2015, pp. 13-26.
13. Lagunova YU.A., Brusova O.M. Matematicheskaya model' processa drobleniya gornoj porody molotkovymi drobilkami [Mathematical model of the process of crushing rock with hammer crushers]. *Otdel'nye stat'i Gornogo informacionno-analiticheskogo byulletenya (nauchno-tehnicheskogo zhurnala)*, 2012, pp. 3-6.
14. Grigor'evykh D.P., Hohlov N.I., Petrov I.B. Raschet dinamicheskogo razrusheniya v tverdyh deformiruemykh telah [Calculation of dynamic fracture in solid deformable bodies]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2017, pp. 45-58.
15. El'nikova S.P., Gazaleeva G.I. Prognozirovanie energii razrusheniya v konusnyh drobilkah, rabotayushchih «v sloe» [Prediction of energy of destruction in cone crushers operating "in bed"]. *Obogashchenie rud*, 2019, pp. 3-8.
16. El'nikova S.P. Opredelenie udel'nyh energozatrat pri droblenii «v sloe» v konusnyh drobilkah s uchyotom zakonomernostej razrusheniya chastic [Determination of specific energy consumption during crushing "in a layer" in cone crushers, taking into account the laws of destruction of particles], *Yekaterinburg*, 2020. – 137 s.
17. Doudkin, M., Kim, A., Kim, V. Application of fem method for modeling and strength analysis of feed elements of vibroscreen. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2019, pp. 155-162
18. Doudkin, M., Kim, A., Kim, V., Mlynczak, M., Kustarev, G. Computer modeling application for analysis of stress-strain state of vibroscreen feed elements by finite elements method. *Communications in Computer and Information Science*, 1998, pp. 82-96
19. Demidov A.R., Chirkov S.E. Sposoby izmel'cheniya i ocenka ih jeffektivnosti [Grinding methods and evaluation of their effectiveness]. *Moscow, CINTI*, 2009, 49 p.
20. Gijo R. Problema izmel'cheniya materialov i ejo razvitie [The problem of material grinding and its development]. *Moscow, Strojizdat*, 2004, 112 p.
21. Ekobori T. Fizika i mehanika razrusheniya i prochnosti tvjorjdyh tel [Physics and mechanics of fracture and strength of solids]. *Moscow, Metallurgija*, 1971, 263 p.
22. Rumpf G. Ob osnovnyh fizicheskikh problemah pri izmel'chenii [About the basic physical problems with grinding]. *Trudy Evropejskogo soveshhanija po izmel'cheniju*, Moscow, Strojizdat, 1966, pp.7-40.
23. Bond F.S. Zakony drobleniya [Crushing laws]. *Moscow, Strojizdat, Trudy Evropejskogo soveshhanija po izmel'cheniju*, 1966, pp.195-205.
24. Hodakov G.S. Fizika izmel'cheniya [Grinding physics]. *Moscow, Nauka*, 1972, 307 p.
25. Leskin A.D. Osnovnye zakonomernosti izmel'cheniya materialov [The main regularities of grinding materials]. *Moscow, VNIOSM, Sovremennoe izmel'chitel'noe oborudovanie: Obz. inf. – Vyp. 3, seriia 7. Promyshlennost' nerudnykh i nemetallorudnykh materialov*, 2008, pp. 2-14.
26. Balovnev V.I. Opredelenie soprotivlenij i jenerгии pri izmel'chenii materialov [Determination of resistance and energy when grinding materials]. *Stroitel'nye i dorozhnye mashiny*, 1988, no. 1, pp.24-25.
27. Guryanov G.A., Kim V.A. Opredelenie jenergoemkosti processa drobleniya v valkovoj drobilke s vypuklo-vognutoj formoj valkov [Determination of the energy consumption of the crushing process in a roll crusher with a convex-concave roll shape]. *Nauchnoe izdanie. Modernizacija i nauchnye issledovanija v transportnom komplekse. Materialy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii, Perm'*, 2017, pp. 23-25.
28. Guryanov G.A., Kim V.A., Vasil'eva O.Ju. Razrabotka mehaniko-matematicheskoy modeli processa razrusheniya tverdyh chastic i opredelenie geometricheskikh parametrov vypuklo-vognutyh valkov [Development of a mechanical and mathematical model of the process of destruction of solid particles and determination of the geometric parameters of convex-concave rolls]. *Vestnik KazNITU*, 2018, no.3, pp. 486-495.
29. Guryanov G.A., Abdeev B.M., Klimenko Ye.A. Applied grinding model of a solid particle with a simple shape on impact with a hardsurface. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 1, pp. 110-120. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.10
30. Abdeev B.M., Baigereyev S.R., Guryanov G.A. Generalized dynamic theory of a solid particle grinding by pulse-force compression with two non-deformable balls. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 4, pp. 278-289. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.25
31. Guryanov G.A., Abdeev B.M. The applied model of grinding a spherical solid particle with a direct impact on a non-deformable flat surface. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 32-42. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.03
32. Baigereyev S., Guryanov G. New method for increase in product fineness in stirred mills. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2019, vol. 19, no. 3, pp. 768-778. DOI: 10.1016/j.acme.2019.03.003
33. Guryanov G.A., et al. Razrabotka novoj racional'noj formy valkov valkovykh drobilok na osnove analiza ih rabochih organov [Development of a new rational form of rolls of roller crushers based on the analysis of their working bodies]. *Vestnik Vostochno-Kazahstanskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta im. D. Serikbaeva*, 2016, no. 3, pp. 63-70.
34. Lukash P.A. Osnovy nelinejnoj stroitel'noj mehaniki [Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics]. *Moscow, Strojizdat*, 1978, 204 p.
35. Filin A.P. Prikladnaja mehanika tverdogo deformiruemo-go tela [Applied Mechanics of Rigid Deformable Body]. *Moscow, Nauka*, 1975, 832 p.
36. Hertz H.R. Ueber die Berührung fester elastischer. *Leipzig: Korper Gesammelte Werke*, 1895.
37. Shtaerman I.F. Kontaktnaja zadacha teorii uprugosti [Contact problem of elasticity theory]. *Moscow, Leningrad, Gostehizdat*, 1949, 270 p.

38. Artem'ev K.A., et. al. Dorozhnye mashiny: V 2-h chastjah. Ch. 2. Mashiny dlja ustrojstva dorozhnyh pokrytij [Road vehicles: In 2 parts. Part 2. Machines for the device of road surfaces]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1982, 396 p.
39. Pisarenko P.S., Jakovlev A.P., Matveev V.V. Spravochnik po soprotivleniju materialov [Material Strength Handbook]. *Kiev, Naukova dumka*, 1975, 704 p.
40. Beljaev N.M. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. *Moscow, Nauka*, 1965, 856 p.
41. Voronkov I.M. Kurs teoreticheskoy mehaniki [Theoretical Mechanics Course]. *Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury*, 1961, 596 p.
42. Lur'e A.I. Teorija uprugosti [Elasticity theory]. *Moscow, Nauka*, 1970, 940 p.
43. Weber C. Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften. *Zeitschrift für angewandte Mathematic und Mechanik*, 1952, vol. 32, no. 6, 186 p.
44. Koshkin N.I., Shirkevich M.G. Spravochnik po jelementarnoj fizike [Handbook of elementary physics]. *Moscow, Nauka*, 1972, 256 p.
45. Timoshenko S.P., Gere Dzh. Mehanika materialov [Material mechanics]. *Moscow, Mir*, 1976, 672 p.
46. Ponomarev S.D., Biderman V.L., et al. Raschety na prochnost' v mashinostroenii [Strength calculations in mechanical engineering]. *Moscow, Mashgiz*, 1958, 976 p.
47. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov: Opredelenija, teoremy, formuly [A Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, Formulas]. *Moscow, Nauka*, 1970, 720 p.
48. Bronshtejn I.N., Semendjaev K.A. Spravochnik po matematike dlja inzhenerov i uchashhihsja vuzov [A guide to mathematics for engineers and college students]. *Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury*, 1962, 608 p.