



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.16

УДК 539.3/6

ВЛИЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СЖИМАЕМОСТИ НА КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ОСАДКЕ СЛОЯ МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛИТАМИ

Е.А. Лямина^{1,2}, О.В. Новожилова³

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

² Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

³ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 22 апреля 2021 г.
Принята: 30 июня 2021 г.
Опубликована: 22 октября 2021 г.

Ключевые слова:

модель двойного сдвига, пластическая сжимаемость, сингулярность, коэффициент интенсивности скорости деформации.

АННОТАЦИЯ

При применении ряда жесткопластических моделей решения краевых задач могут быть сингулярными. В частности, некоторые компоненты тензора скорости деформации и квадратичного инварианта тензора скорости деформации могут стремиться к бесконечности вблизи определенных поверхностей. Такое поведение поля скорости положено в основу некоторых моделей для предсказания высокого градиента свойств материала вблизи поверхностей трения в процессах обработки металлов давлением. Коэффициент при главном сингулярном члене в разложении квадратичного инварианта тензора скорости деформации в ряд в окрестности поверхности трения называется коэффициентом интенсивности скорости деформации. Величина второго инварианта тензора скорости деформации вблизи таких поверхностей контролируется этим коэффициентом, который зависит от геометрических параметров краевой задачи и параметров модели материала. В публикуемой работе исследуется влияние пластической сжимаемости материала, подчиняющегося модели двойного сдвига, на величину коэффициента интенсивности скорости деформации при осадке слоя пластического материала между двумя параллельными плитами. Система уравнений, состоящая из уравнения равновесия и определяющих уравнений, является гиперболической. Предполагается, что поверхность контакта плит и деформируемого материала является огибающей одного из семейств характеристик. Получено аналитическое решение краевой задачи в условиях плоскодеформированного состояния. Влияние краевых эффектов вблизи свободной поверхности слоя и вблизи его центра игнорируется. Получена зависимость коэффициента интенсивности скорости деформации от параметров краевой задачи, включая параметр, который контролирует пластическую сжимаемость материала. В случае пластически несжимаемого материала решение совпадает с известным решением.

© ПНИПУ

© Лямина Елена Алексеевна – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: lyamina@inbox.ru, [iD: 0000-0002-7319-8703](https://orcid.org/0000-0002-7319-8703).
Новожилова Ольга Валерьевна – к.ф.-м.н., доц., e-mail: helgam@bk.ru, [iD: 0000-0002-9361-0478](https://orcid.org/0000-0002-9361-0478).

Elena A. Lyamina – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: lyamina@inbox.ru, [iD: 0000-0002-7319-8703](https://orcid.org/0000-0002-7319-8703).

Olga V. Novozhilova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, e-mail: helgam@bk.ru, [iD: 0000-0002-9361-0478](https://orcid.org/0000-0002-9361-0478).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

EFFECT OF PLASTIC COMPRESSIBILITY ON THE STRAIN RATE INTENSITY FACTOR IN COMPRESSION OF A MATERIAL LAYER BETWEEN PARALLEL PLATES

E.A. Lyamina^{1,2}, O.V. Novozhilova³

¹ Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

² Samara National Research University, Samara, Russian Federation

³ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 22 April 2021
Accepted: 30 June 2021
Published: 22 October 2021

Keywords:

double shearing model,
plastic compressibility, singularity,
strain rate intensity factor.

ABSTRACT

Solutions of boundary value problems for several rigid plastic models may be singular. In particular, some components of the strain rate tensor and the quadratic invariant of the strain rate tensor may approach infinity in the vicinity of certain surfaces. Some models for predicting the high gradient of material properties near frictional surfaces in metal forming processes are based on such behavior of the velocity field. The coefficient of the leading singular term in a series expansion of the quadratic invariant of the strain rate tensor in the vicinity of frictional interfaces is called the strain rate intensity factor. The magnitude of the second invariant of the strain rate tensor is controlled by this factor that depends on geometric parameters of the boundary value problem and parameters involved in the material model. The present paper deals with the effect of plastic compressibility of the material that obeys the double shearing model on the strain rate intensity factor in compression of a plastic layer between two parallel plates. The system of equations comprising the equilibrium equations and constitutive equations is hyperbolic. It is assumed that the surface of the contact between the plates and the deforming material is an envelope of characteristics. An analytic solution of the boundary value problem is found under plane strain deformation. End effects near the free surface of the layer and its center are ignored. The dependence of the strain rate intensity factor on parameters of the boundary value problem including the parameter that controls plastic compressibility is found. In case of the plastically incompressible material, the solution coincides with the available solution.

© PNRPU

Течение пластического материала вблизи поверхностей трения значительно отличается от течения в основном объеме. В частности, это следует из исследований процессов обработки металлов давлением [1–7]. В связи с таким различием в течении материала вблизи поверхностей трения возникает значительный градиент свойств материала, что приводит к формированию тонкого слоя материала вблизи поверхности трения, свойства которого могут оказывать положительное влияние на эксплуатационные характеристики изделий [8–16]. Аналогичные результаты получены при исследовании технологических процессов со снятием стружки [9–13]. В [14] отмечается, что при моделировании процессов резанья использование вблизи поверхностей трения тех же определяющих уравнений, что и в основном объеме материала, недопустимо. Это заключение справедливо и для моделирования процессов обработки материалов давлением. В [17, 18] для предсказания формирования микроструктуры материала в тонком слое вблизи поверхности трения в процессах обработки материалов давлением предложен подход, основанный на коэффициенте интенсивности скорости деформации. Коэффициент интенсивности скорости деформации для модели идеально жесткопластического материала введен в [19]. Этот коэффициент контролирует величину эквивалентной скорости пластической деформации вблизи поверхности максимального трения. Результат, полученный

в [19], обобщен на некоторые модели вязкопластических материалов в [20, 21], на модель двойного сдвига в [22] и на модель двойного скольжения и вращения в [23]. Описание модели двойного сдвига, которая используется в настоящей статье, представлено в [13]. Коэффициент интенсивности скорости деформации зависит от параметров краевой задачи и модели материала. Обзор решений для коэффициента интенсивности скорости деформации содержится в [25]. Все эти решения получены для пластически несжимаемых материалов. Целью настоящего исследования является определение влияния пластической сжимаемости на величину коэффициента интенсивности скорости деформации на примере осадки полосы между двумя параллельными плитами в условиях плоскодеформированного состояния. Принимается модель двойного сдвига, учитывающая пластическую сжимаемость материала [26].

Постановка задачи

Рассмотрим слой материала, сжимаемый двумя параллельными плитами в условиях плоскодеформированного состояния (рисунок). Материал подчиняется модели двойного сдвига [26]. Текущую толщину слоя обозначим $2h$, текущую ширину $2L$. Предполагается, что $h \ll L$. Скорость движения каждой плиты равна U . Решение строится для мгновенного напряженно-

деформированного состояния. Краевая задача имеет горизонтальную и вертикальную оси симметрии. Оси декартовой системы координат (x, y) совпадают с этими осями симметрии. В связи с этим достаточно рассмотреть первый квадрант. Приближенное решение, построенное ниже, является обобщением решения Прандтля для сжатия слоя идеально жесткопластического материала между параллельными плитами [27]. В частности, краевые условия при $x=0$ и $x=L$ не могут быть удовлетворены точно. В решении Прандтля эти условия удовлетворяются в интегральном смысле. В рассматриваемом случае такой подход также возможен. Однако эти условия не оказывают никакого влияния на окончательный результат исследования и поэтому не включены в постановку краевой задачи. Остальные краевые условия выполняются точно.

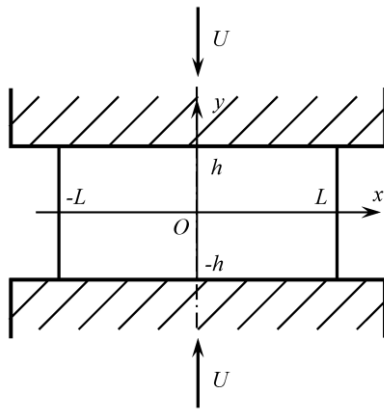


Рис. Геометрическая схема процесса

Fig. Geometry of the process

Компоненты тензора напряжения в декартовой системе координат обозначим σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{xy} . Одно из краевых условий для напряжений следует из симметрии краевой задачи. В частности,

$$\sigma_{xy} = 0 \tag{1}$$

при $y=0$. Второе краевое условия для напряжений должно быть сформулировано при $y=h$. Известно, что уравнения для напряжений при применении модели двойного сдвига являются гиперболическими [26]. Примем, что поверхность $y=h$ совпадает с огибающей семейства характеристик. Проекция вектора скорости на оси декартовой системы координат обозначим u_x и u_y . Одно из краевых условий для скоростей следует из симметрии краевой задачи. В частности,

$$u_y = 0 \tag{2}$$

при $y=0$. Второе краевое условия для скоростей следует из закона движения плит:

$$u_y = -U \tag{3}$$

при $y=h$.

Уравнения модели двойного сдвига включают условие пластичности Кулона–Мора и закон пластического течения. В условиях плоскодеформированного состояния эти уравнения, учитывающие пластическую сжимаемость материала, приведены в [26]. Условие пластичности имеет вид

$$-p \sin \varphi + q = k \cos \varphi. \tag{4}$$

Здесь p – линейный инвариант тензора напряжения; $q > 0$ – квадратичный инвариант тензора напряжения; φ – угол внутреннего трения и k – коэффициент сцепления. Отметим, что в [26] предполагается, что $k=0$. Общий вид условия пластичности Кулона–Мора используется в [13]. Пусть ψ – угол между осью x и максимальным главным напряжением, отсчитываемый от оси против хода часовой стрелки. Тогда компоненты тензора напряжения выражаются как

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + q \cos 2\psi, & \sigma_{yy} &= -p - q \cos 2\psi; \\ \sigma_{xy} &= q \sin 2\psi. \end{aligned} \tag{5}$$

Направление течения материала в первом квадранте (см. рисунок) показывает, что $\sigma_{xy} \leq 0$. В этом случае из (5) следует, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0. \tag{6}$$

Уравнения закона пластического течения имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \cos 2\psi - \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \sin 2\psi + \\ + \sin \varphi \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} + 2 \frac{d\psi}{dt} \right) = 0; \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \Delta. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь d/dt обозначает полную производную по времени, а величина Δ характеризует пластическую сжимаемость материала. Пластически несжимаемый материал получается при $\Delta=0$. В общем случае величина Δ определяется историей деформирования. Однако в публикуемой работе, следуя [26], предполагается, что Δ – постоянная величина. При $\Delta=0$ и $\varphi=0$ уравнения (7) сводятся к уравнениям ассоциированного закона течения.

Уравнения (4), (5) и (7) дополняются уравнениями равновесия в форме

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

Система уравнений (4), (5) и (8) является гиперболической. Уравнения характеристик этой системы имеют вид [13, 26]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\psi \pm \frac{\pi}{4} \pm \frac{\varphi}{2}\right). \quad (9)$$

Таким образом, огибающая характеристик совпадает с поверхностью $y = h$, если $\psi = \pi/4 + \varphi/2$ или $\psi = -\pi/4 - \varphi/2$ при $y = h$. Принимая во внимание (6), краевое условие для напряжений на поверхности плиты записываем в форме

$$\psi = \psi_w \quad (10)$$

при $y = h$, где $\psi_w = -\pi/4 - \varphi/2$.

Общее решение

По аналогии с решениями аналогичных краевых задач [26–30] полагаем, что ψ и u_y не зависят от x . Величина p исключается с помощью (4). В частности,

$$p = \frac{q}{\sin \varphi} - k \operatorname{ctg} \varphi. \quad (11)$$

Тогда уравнения (5) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= q \left(\cos 2\psi - \frac{1}{\sin \varphi} \right) + k \operatorname{ctg} \varphi; \\ \sigma_{yy} &= -q \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \cos 2\psi \right) + k \operatorname{ctg} \varphi, \quad \sigma_{xy} = q \sin 2\psi. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (8) и учитывая, что ψ не зависит от x , найдем

$$\begin{aligned} \left(\cos 2\psi - \frac{1}{\sin \varphi} \right) \frac{\partial q}{\partial x} + \sin 2\psi \frac{\partial q}{\partial y} + 2q \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0; \\ \sin 2\psi \frac{\partial q}{\partial x} - \left(\cos 2\psi + \frac{1}{\sin \varphi} \right) \frac{\partial q}{\partial y} + 2q \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Исключим в этих уравнениях производную $\partial \psi / \partial y$. В результате получим

$$-\sin 2\psi \frac{\partial q}{\partial x} + (\sin \varphi + \cos 2\psi) \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \quad (14)$$

Так как ψ не зависит от x , то общее решение этого уравнения имеет вид

$$q = F(z), \quad z = x + \int \frac{\sin 2\psi}{(\sin \varphi + \cos 2\psi)} dy. \quad (15)$$

Здесь $F(z)$ – произвольная функция своего аргумента. Подставим (15) в первое уравнение системы (13). В результате получим

$$-\frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)} \frac{dF}{dz} + 2F \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (16)$$

Это уравнение может быть представлено в форме

$$\frac{dF}{F dz} = \frac{2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (17)$$

Левая сторона этого уравнения является функцией z , а правая – функцией y . Поэтому уравнение (17) может иметь решение, только если

$$\frac{dF}{F dz} = C, \quad (18)$$

где C – постоянная величина. Общее решение уравнения (18) имеет вид $F = C_0 \exp(Cz)$, где C_0 – постоянная интегрирования. С учетом (15) это решение может быть представлено как

$$F = C_0 \exp \left[C \left(x + \int \frac{\sin 2\psi}{(\sin \varphi + \cos 2\psi)} dy \right) \right]. \quad (19)$$

Из (17) и (18) получаем уравнение для ψ в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{B}{2h(\sin \varphi + \cos 2\psi)}, \quad B = \frac{hC \cos^2 \varphi}{\sin \varphi}. \quad (20)$$

Общее решение этого уравнения имеет форму

$$B \frac{y}{h} = 2\psi \sin \varphi + \sin 2\psi + C_1. \quad (21)$$

Здесь C_1 – постоянная интегрирования. Из (1), (5) и (6) следует, что $\psi = 0$ при $y = 0$. Подставляя это краевое условие в (21), найдем, что $C_1 = 0$. Тогда решение (21) преобразуется к виду

$$B \frac{y}{h} = 2\psi \sin \varphi + \sin 2\psi. \quad (22)$$

Для определения B воспользуемся краевым условием (10). Подставляя его в (21), найдем

$$B = 2\psi_w \sin \varphi + \sin 2\psi_w = -\sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) - \cos \varphi. \quad (23)$$

При вычислении интеграла, входящего в (19), удобно перейти от интегрирования по y к интегрированию по ψ с помощью (20). Тогда, принимая во внимание (15),

$$q = C_0 \exp \left(\frac{x B \sin \varphi}{h \cos^2 \varphi} - \frac{\sin \varphi \cos 2\psi}{\cos^2 \varphi} \right). \quad (24)$$

Здесь необходимо исключить B с использованием (23). Постоянная C_0 не может быть определена без введения краевого условия для напряжений в интегральном виде. Зависимость компонент тензора напряжения от декартовых координат вычисляется из (12) при помощи (22) и (24) в параметрическом виде.

Перейдем к определению поля скорости. По аналогии с решениями аналогичных краевых задач [26–30] примем, что

$$u_y = -\frac{Uy}{h}. \quad (25)$$

Тогда, краевые условия (2) и (3) выполняются. Подставляя (25) во второе уравнение системы (7), получим $\partial u_x / \partial x = \Delta + U/h$. Интегрируя это уравнение, найдем

$$u_x = \left(\Delta + \frac{U}{h} \right) x + \Phi(\psi, h). \quad (26)$$

Здесь функция интегрирования $\Phi(\psi, h)$ не зависит от x . Подставляя (25) и (26) в первое уравнение системы (7) и используя (20) для исключения производной $\partial \psi / \partial y$, получим

$$\frac{B}{2h} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - \left(\Delta + \frac{2U}{h} \right) \sin 2\psi + 2 \sin \varphi \frac{d\psi}{dt} = 0. \quad (27)$$

Вычислим производную $d\psi/dt$. Так как ψ не зависит от x и $dh/dt = -U$, то

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = -U \frac{\partial \psi}{\partial h} + u_y \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (28)$$

Из (22) следует, что

$$B \frac{dy}{h} - B \frac{y}{h^2} dh = 2(\sin \varphi + \cos 2\psi) d\psi. \quad (29)$$

Тогда

$$\frac{\partial \psi}{\partial h} = -\frac{By}{2h^2(\sin \varphi + \cos 2\psi)}. \quad (30)$$

Подставляя (20), (25) и (30) в (28), можно убедиться, что $d\psi/dt = 0$. В этом случае уравнение (27) принимает вид

$$\frac{B}{2h} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - \left(\Delta + \frac{2U}{h} \right) \sin 2\psi = 0. \quad (31)$$

Интегрируя и исключая B с помощью (23), найдем

$$\Phi = \frac{h}{[\sin \varphi(\pi/2 + \varphi) + \cos \varphi]} \left(\Delta + \frac{2U}{h} \right) \cos 2\psi + C_2. \quad (32)$$

Здесь C_2 – постоянная интегрирования. Подставляя (32) в (26), получим

$$u_x = \left(\Delta + \frac{U}{h} \right) x + \frac{h}{[\sin \varphi(\pi/2 + \varphi) + \cos \varphi]} \left(\Delta + \frac{2U}{h} \right) \cos 2\psi + C_2. \quad (33)$$

Уравнения (22), (25) и (33) определяют зависимость проекций вектора скорости от декартовых координат в параметрическом виде. Постоянная C_2 не может быть найдена без введения краевого условия для скоростей в интегральном виде.

Коэффициент интенсивности скорости деформации

Коэффициент интенсивности скорости деформации введен в [19] для случая идеально жесткопластического материала и является коэффициентом при главном сингулярном члене в разложении второго инварианта тензора скорости деформации в ряд в окрестности огибающей семейства характеристик. Это разложение имеет вид

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\xi_{xx}^2 + \xi_{yy}^2 + 2\xi_{xy}^2} = \frac{D}{\sqrt{s}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (34)$$

при $s \rightarrow 0$. Здесь определения для второго инварианта тензора скорости деформации выписано для случая плоской деформации; ξ_{xx} , ξ_{yy} и ξ_{xy} – компоненты тензора скорости деформации; D – коэффициент интенсивности скорости деформации и s – расстояние по нормали от огибающей. Очевидно, что $\eta \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$. Поскольку ξ_{xx} и ξ_{yy} ограничены, то поведение второго инварианта тензора скорости деформации вблизи огибающей полностью контролируется сдвиговой скоростью деформации. Из (20), (23), (25) и (33) находим

$$\xi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{U}{h} \right) \frac{\sin 2\psi}{(\sin \varphi + \cos 2\psi)}. \quad (35)$$

Из (10) следует, что $\sin \varphi + \cos 2\psi = 0$ при $y = h$. Таким образом, $|\xi_{xy}| \rightarrow \infty$ при $y = h$. Вблизи точки $\psi = \psi_w$ сдвиговая скорость деформации представляется выражением

$$\xi_{xy} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{U}{h} \right) \frac{1}{(\psi - \psi_w)} + o\left(\frac{1}{\psi - \psi_w}\right) \quad (36)$$

при $\psi \rightarrow \psi_w$. Уравнение (20) вблизи огибающей $y = h$ (или $\psi = \psi_w$) имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{B}{4h \cos \varphi (\psi - \psi_w)} + o\left(\frac{1}{\psi - \psi_w}\right) \quad (37)$$

при $\psi \rightarrow \psi_w$. Решение этого уравнения, удовлетворяющее краевому условию $\psi = \psi_w$ при $y = h$, имеет форму

$$\psi - \psi_w = \sqrt{\frac{-B}{2h \cos \varphi}} \sqrt{h - y} + o(\sqrt{h - y}) \quad (38)$$

при $y \rightarrow h$. Подставляя (38) в (36) и исключая B при помощи (23), найдем

$$\xi_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{U}{h} \right) \frac{\sqrt{h \cos \varphi}}{\sqrt{\cos \varphi + \sin \varphi(\pi/2 + \varphi)} \sqrt{h - y}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{h - y}}\right) \quad (39)$$

при $y \rightarrow h$. В рассматриваемом случае $h - y = s$. Поэтому, сравнивая (34) и (39), получаем выражение для коэффициента интенсивности скорости деформации в виде

$$D = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{U}{h} \right) \frac{\sqrt{h \cos \varphi}}{\sqrt{\cos \varphi + \sin \varphi (\pi/2 + \varphi)}}. \quad (40)$$

В случае идеально жесткопластического материала ($\Delta = 0$ и $\varphi = 0$) это выражение совпадает с полученным в [25].

Выводы

Объемная пластическая деформация влияет на коэффициент интенсивности скорости деформации. Из (40) и (41) следует, что если материал разрыхляется при пластической деформации ($\Delta > 0$), то коэффициент интенсивности скорости деформации меньше в предположении о пластической несжимаемости материала. Если

Библиографический список

1. Griffiths B.J. Mechanisms of white layer generation with reference to machining and deformation processes // *Trans. ASME J. Trib.* – 1987. – Vol. 109 – P. 525–530. DOI: 10.1115/1.3261495
2. Трунина Т.А., Коковихин Е.А. Формирование мелкодисперсной структуры в поверхностных слоях стали при комбинированной обработке с применением гидропрессования // *Пробл. машиностр. и надежн. машин.* – 2008. – № 2. – С. 71–74.
3. Alexandrov S., Jeng Y.-R., Hwang Y.-M. Generation of a fine grain layer in the vicinity of frictional interfaces in direct extrusion of AZ31 alloy // *ASME J. Manuf. Sci. Eng.* – 2015. – Vol. 137, no. 5 – Paper 051003. DOI: 10.1115/1.4030267
4. Generation of a layer of severe plastic deformation near friction surfaces in upsetting of steel specimens / S. Alexandrov, L. Sidjanin, D. Vilotic, D. Movrin, L. Lang // *Metals.* – 2018. – Vol. 8. – Paper 71. DOI: 10.3390/met8010071
5. Sanabria V., Mueller S., Reimers W. Microstructure evolution of friction boundary layer during extrusion of AA 6060 // *Procedia Eng.* – 2014. – Vol. 81. – P. 586–591. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.10.044
6. Effect of frictional conditions on the generation of fine grain layers in drawing of thin steel wires / A. Stolyarov, M. Polyakova, G. Atangulova, S. Alexandrov, L. Lang // *Metals.* – 2019. – Vol. 9, no. 8. – Article 819. DOI: 10.3390/met9080819
7. Effect of die angle and frictional conditions on fine grain layer generation in multi-pass drawing of high carbon steel wire / A. Stolyarov, M. Polyakova, G. Atangulova, S. Alexandrov // *Metals.* – 2020. – Vol. 10. – Article 1462. DOI: 10.3390/met10111462
8. Griffiths B.J., Furze D.C. Tribological advantages of white layers produced by machining // *ASME Journal of Tribology.* – 1987. – Vol. 109, no. 2. – P. 338–342. DOI: 10.1115/1.3261363
9. Umbrello D., Jawahir I.S. Numerical modeling of the influence of process parameters and workpiece hardness on white layer formation in AISI 52100 steel // *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* – 2009. – Vol. 44. – P. 955–968.
10. Investigations of white layer formation during machining of powder metallurgical Ni-based ME 16 superalloy / S.C. Veldhuis, G.K. Dosbaeva, A. Elfizy, G.S. Fox-Rabinovich, T. Wagg // *J. Mater. Eng. Perform.* – 2010. – Vol. 19. – P. 1031–1036. DOI: 10.1007/s11665-009-9567-7
11. Modeling of white and dark layer formation in hard machining of AISI 52100 bearing steel / D. Umbrello, A.D. Jayal, S. Caruso, O.W. Dillon, I.S. Jawahir // *Mach. Sci. Technol.* – 2010. – Vol. 14. – P. 128–147. DOI: 10.1080/10910340903586525

материал уплотняется ($\Delta < 0$), то объемная пластическая деформация уменьшает коэффициент интенсивности скорости деформации. Таким образом, в соответствии с теорией [17, 18], величина Δ влияет на формирование свойств материала в тонком слое вблизи поверхностей трения.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ-20-79-10340.

Acknowledgments

This work was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 20-79-10340.

12. Cho D.-H., Lee S.-A., Lee Y.-Z. Mechanical properties and wear behavior of the white layer // *Tribol. Lett.* – 2012. – Vol. 45. – P. 123–129. DOI: 10.1007/s11249-011-9869-4
13. Experimental research material characteristics effect on white layers formation in grinding of hardened steel / X. Huang, Z. Zhou, Y. Ren, C. Mao, W. Li // *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* – 2013. – Vol. 66. – P. 1555–1561. DOI: 10.1007/s00170-012-4439-y
14. Jaspers S.P.F.C., Dautzenberg J. Material behaviour in conditions similar to metal cutting: Flow stress in the primary shear zone // *J. Mater. Process. Technol.* – 2002. – Vol. 122. – P. 322–330. DOI: 10.1016/S0924-0136(01)01228-6
15. Kim Y.-T., Ikeda K. Flow behavior of the billet surface layer in porthole die extrusion of aluminum // *Metallurg. Mater. Trans.* – 2000. – Vol. 31A. – P. 1635–1643. DOI: 10.1007/s11661-000-0173-4
16. Choi Y. Influence of a white layer on the performance of hard machined surfaces in rolling contact // *Proc. Inst. Mech. Eng., Part B.* – 2010. – Vol. 224, no. 8. – P. 1207–1215. DOI: 10.1243/09544054JEM1847
17. Гольдштейн Р.В., Александров С.Е. Подход к предсказанию формирования микроструктуры материала вблизи поверхностей трения при развитых пластических деформациях // *Физическая мезомеханика.* – 2014. – Т. 17, № 5. – С. 15–20. DOI: 10.24411/1683-805X-2014-00046
18. Александров С.Е., Гольдштейн Р.В. К построению определяющих уравнений в тонком слое материала вблизи поверхностей трения в процессах обработки материалов давлением // *Докл. РАН.* – 2015. – Т. 460, № 3. – С. 283–285. DOI: 10.7868/S0869565215030093
19. Alexandrov S., Richmond O. Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2001. – Vol. 36, no. 1. – P. 1–11. DOI: 10.1016/S0020-7462(99)00075-X
20. Alexandrov S., Mustafa Y. Quasi-static axially symmetric viscoplastic flows near very rough walls // *Appl. Math. Model.* – 2015. – Vol. 39, no. 15. – P. 4599–4606. DOI: 10.1016/j.apm.2014.12.052
21. Alexandrov S., Mustafa Y. Singular solutions in viscoplasticity under plane strain conditions // *Meccanica.* – 2013. – Vol. 48, no. 9. – P. 2203–2208. DOI: 10.1007/s11012-013-9736-5
22. Александров С.Е., Лямина Е.А. Сингулярные решения при плоском пластическом течении материалов, чувствительных к среднему напряжению // *Докл. РАН.* – 2002. – Т. 383, № 4. – С. 492–495.

23. Wang Y., Alexandrov S., Lyamina E. Solution behavior in the vicinity of characteristic envelopes for the double slip and rotation model // *Appl. Sci.* – 2020. – Vol. 10. – Article 3220. DOI: 10.3390/app10093220

24. Spencer A.J.M. A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions // *J. Mech. Phys. Solids* – 1964. – Vol. 12. – P. 337–351. DOI: 10.1016/0022-5096(64)90029-8

25. Alexandrov S. The strain rate intensity factor and its applications: a review // *Mater. Sci. Forum.* – 2009. – Vol. 623. – P. 1–20. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.623.1

26. Spencer A.J.M. Compression and shear of a layer of granular material // *J. Eng. Math.* – 2005. – Vol. 52. – P. 251–264. DOI: 10.1007/s10665-004-5662-9

References

1. Griffiths B.J. Mechanisms of white layer generation with reference to machining and deformation processes. *Trans. ASME J. Trib.*, 1987, vol. 109, pp. 525-530. DOI: 10.1115/1.3261495

2. Trunina T.A., Kokovikhin E.A. Formation of a finely dispersed structure in steel surface layers under combined processing using hydraulic pressing. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2008, vol. 37, no. 2, pp. 160-162. DOI: 10.3103/S1052618808020118

3. Alexandrov S., Jeng Y.-R., Hwang Y.-M. Generation of a fine grain layer in the vicinity of frictional interfaces in direct extrusion of AZ31 alloy. *ASME J. Manuf. Sci. Eng.*, 2015, vol. 137, no. 5, paper 051003. DOI: 10.1115/1.4030267

4. Alexandrov, S., Sidjanin, L., Vilotic, D., Movrin, D., Lang, L. Generation of a layer of severe plastic deformation near friction surfaces in upsetting of steel specimens, 2018, *Metals*, 8, article 71. DOI: 10.3390/met8010071

5. Sanabria, V. Mueller, S., Reimers, W. Microstructure evolution of friction boundary layer during extrusion of AA 6060, 2014, *Procedia Eng.*, 81, pp. 586–591. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.10.044

6. Stolyarov, A., Polyakova, M., Atangulova, G., Alexandrov, S., Lang, L. Effect of frictional conditions on the generation of fine grain layers in drawing of thin steel wires, 2019, *Metals*, 9(8), article 819. DOI: 10.3390/met9080819

7. Stolyarov, A., Polyakova, M., Atangulova, G., Alexandrov, S. Effect of die angle and frictional conditions on fine grain layer generation in multi-pass drawing of high carbon steel wire, 2020, *Metals*, 10, article 1462. DOI: 10.3390/met10111462

8. Griffiths, B.J., Furze, D.C. Tribological advantages of white layers produced by machining, 1987, *ASME Journal of Tribology*, 109(2), pp. 338-342. doi: 10.1115/1.3261363

9. Umbrello D., Jawahir I.S. Numerical modeling of the influence of process parameters and workpiece hardness on white layer formation in AISI 52100 steel. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2009, vol.44. pp. 955-968.

10. Veldhuis S.C., Dosbaeva G.K., Elfizy A., Fox-Rabinovich G.S., Wagg T. Investigations of white layer formation during machining of powder metallurgical Ni-based ME 16 superalloy, 2010, *J. Mater. Eng. Perform.*, 19, pp.1031-1036. DOI: 10.1007/s11665-009-9567-7

11. Umbrello, D., Jayal, A.D., Caruso, S., Dillon, O.W., Jawahir I.S. Modeling of white and dark layer formation in hard machining of AISI 52100 bearing steel. 2010, *Mach. Sci. Technol.*, 14, pp.128-147. DOI: 10.1080/10910340903586525

12. Cho, D.-H., Lee, S.-A., Lee, Y.-Z. Mechanical properties and wear behavior of the white layer, 2012, *Tribol. Lett.*, 45, pp.123-129. DOI: 10.1007/s11249-011-9869-4

13. Huang, X., Zhou, Z., Ren, Y., Mao, C., Li, W. Experimental research material characteristics effect on white layers formation in grinding of hardened steel, 2013, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 66, pp.1555-1561. DOI: 10.1007/s00170-012-4439-y

14. Jaspers, S.P.F.C., Dautzenberg, J. Material behaviour in conditions similar to metal cutting: Flow stress in the primary

27. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 408 с.

28. Marshall E.A. The compression of a slab of ideal soil between rough plates // *Acta Mech.* – 1967. – Vol. 3. – P. 82–92. DOI: 10.1007/BF01453708

29. Collins I.F., Meguid S.A. On the influence of hardening and anisotropy on the plane-strain compression of thin metal strip// *Trans ASME J. Appl. Mech.* – 1977. – Vol. 44. – P. 271–278. DOI: 10.1115/1.3424037

30. Nepershin R.I. Non-isothermal plane plastic flow of a thin layer compressed by flat rigid dies // *Int. J. Mech. Sciences.* – 1997. – Vol. 39, no. 8. – P. 899–912. DOI:10.1016/S0020-7403(96)00095-1

shear zone, 2002, *J. Mater. Process. Technol.*, 122, pp. 322–330. DOI: 10.1016/S0924-0136(01)01228-6

15. Kim, Y.-T., Ikeda, K. Flow behavior of the billet surface layer in porthole die extrusion of aluminum, 2000, *Metallurg. Mater. Trans.*, 31A, pp. 1635-1643. DOI: 10.1007/s11661-000-0173-4

16. Choi Y., Influence of a white layer on the performance of hard machined surfaces in rolling contact, 2010, *Proc. Inst. Mech. Eng., Part B*, 224(8), pp. 1207-1215. DOI: 10.1243/09544054JEM1847

17. Goldstein, R.V., Alexandrov, S.E. An approach to prediction of microstructure formation near friction surfaces at large plastic strains, 2015, *Phys. Mesomech.*, 18, pp. 223–227. DOI: 10.1134/S1029959915030066

18. Alexandrov, S.E., Goldstein, R.V. On constructing constitutive equations in material thin layer near friction surfaces in material forming processes, 2015, *Dokl. Phys.*, 60, pp. 39-41. DOI: 10.1134/S1028335815010085

19. Alexandrov, S., Richmond, O. Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress, 2001, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 36(1), pp.1-11. DOI: 10.1016/S0020-7462(99)00075-X

20. Alexandrov, S., Mustafa, Y. Quasi-static axially symmetric viscoplastic flows near very rough walls, 2015, *Appl. Math. Model.*, 39(15), pp. 4599-4606. DOI: 10.1016/j.apm.2014.12.052

21. Alexandrov, S., Mustafa, Y. Singular solutions in viscoplasticity under plane strain conditions, 2013, *Meccanica*, 48(9), pp. 2203-2208. DOI: 10.1007/s11012-013-9736-5

22. Alexandrov, S.E., Lyamina, E.A. Singular solutions for plane plastic flow of pressure-dependent materials, 2002, *Dokl. Phys.*, 47, pp. 308–311. DOI: 10.1134/1.1477887

23. Wang, Y., Alexandrov, S., Lyamina, E. Solution behavior in the vicinity of characteristic envelopes for the double slip and rotation model, 2020, *Appl. Sci.*, 10, article 3220. DOI: 10.3390/app10093220

24. Spencer, A.J.M. A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions, 1964, *J. Mech. Phys. Solids*, 12, pp. 337-351. DOI: 10.1016/0022-5096(64)90029-8

25. Alexandrov, S. The strain rate intensity factor and its applications: a review, 2009, *Mater. Sci. Forum.*, 623, pp. 1-20. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.623.1

26. Spencer, A.J.M. Compression and shear of a layer of granular material, 2005, *J. Eng. Math.*, 52, pp. 251–264. DOI: 10.1007/s10665-004-5662-9

27. Hill R. The mathematical theory of plasticity, *Oxford, UK, Clarendon press*, 1950.

28. Marshall, E.A. The compression of a slab of ideal soil between rough plates, 1967, *Acta Mech.*, 3, pp. 82-92. DOI: 10.1007/BF01453708

29. Collins, I.F., Meguid, S.A. On the influence of hardening and anisotropy on the plane-strain compression of thin metal strip. 1977, *Trans ASME J. Appl. Mech.*, 44, pp. 271-278. doi: 10.1115/1.3424037

30. Nepershin R.I. Non-isothermal plane plastic flow of a thin layer compressed by flat rigid dies, 1997, *Int. J. Mech. Sciences*, 39(8), pp. 899-912. DOI:10.1016/S0020-7403(96)00095-1