

Федулов Б.Н., Федоренко А.Н., Антонов Ф.К., Ломакин Е.В. Алгоритм топологической оптимизации конструкции, выполненной из анизотропного материала с учетом параметров ориентации армирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 3. С. 182–189. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.17

Fedulov B.N., Fedorenko A.N., Antonov F.K., Lomakin E.V. Algorithm for Topology Optimization of a Structure Made of Anisotropic Material with Consideration of the Reinforcement Orientation Parameters. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 3, pp. 182-189. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.17



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.17

УДК 531

## АЛГОРИТМ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИИ, ВЫПОЛНЕННОЙ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ПАРАМЕТРОВ ОРИЕНТАЦИИ АРМИРОВАНИЯ

Б.Н. Федулов<sup>1,2</sup>, А.Н. Федоренко<sup>1</sup>, Ф.К. Антонов<sup>3</sup>, Е.В. Ломакин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup>ООО «Анизопринт», Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 9 ноября 2020 г.  
Принята: 9 июля 2021 г.  
Опубликована: 22 октября 2021 г.

#### Ключевые слова:

топологическая оптимизация, анизотропная топологическая оптимизация, выбор ориентации волокна, полимерные композиты, аддитивные технологии, термопластичное связующее, оптимизация армирования.

### АННОТАЦИЯ

Современные методы проектирования включают в себя разнообразные подходы к оптимизации конструкции. Одним из хорошо себя зарекомендовавших методов является топологическая оптимизация. Существуют различные формы реализации такого вида анализа конструкций, но наиболее распространен вариант использования плотности материала как обобщенного параметра. Развитие технологий 3D-печати усиливает интерес к алгоритмам такого типа. При этом, как правило, речь идет о печати металлом или пластиком, что подразумевает изотропию материала. Появление систем печати непрерывным волокном, развитие выкладочных машин, работающих с композитными пленками, позволяет управлять не только позицией материала, но и выбирать локальную ориентацию армирующих элементов. Такие системы требуют развития алгоритмов оптимизации с учетом дополнительных параметров, характеризующих анизотропию материала. Традиционная задача топологической оптимизации в этом случае должна быть прежде всего модифицирована для модели ортотропного материала с ограничениями на величину угла поворота линий армирования вдоль траектории печати. В данной работе предложен вариант такого алгоритма топологической оптимизации, реализованный на основе комплекса конечно-элементного моделирования Abaqus, и рассмотрены примеры решения типовых задач.

© ПНИПУ

© Федулов Борис Никитович – д.ф.-м.н., в.н.с., e-mail: fedulov.b@mail.ru, [iD: 0000-0002-6797-2424](https://orcid.org/0000-0002-6797-2424).

Федоренко Алексей Николаевич – к.т.н., с.н.с., e-mail: alexey.n.fedorenko@gmail.com, [iD: 0000-0002-3260-7531](https://orcid.org/0000-0002-3260-7531).

Антонов Федор Константинович – к.ф.-м.н., дир.

Ломакин Евгений Викторович – д.ф.-м.н., зав. каф., e-mail: evlomakin@yandex.ru, [iD: 0000-0002-8716-5363](https://orcid.org/0000-0002-8716-5363).

Boris N. Fedulov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Research, e-mail: fedulov.b@mail.ru, [iD: 0000-0002-6797-2424](https://orcid.org/0000-0002-6797-2424).

Alexey N. Fedorenko – CSc in Technical Sciences, Senior Research, e-mail: alexey.n.fedorenko@gmail.com, [iD: 0000-0002-3260-7531](https://orcid.org/0000-0002-3260-7531).

Fedor K. Antonov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Director

Evgeny V. Lomakin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department, e-mail: evlomakin@yandex.ru, [iD: 0000-0002-8716-5363](https://orcid.org/0000-0002-8716-5363).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## ALGORITHM FOR TOPOLOGY OPTIMIZATION OF A STRUCTURE MADE OF ANISOTROPIC MATERIAL WITH CONSIDERATION OF THE REINFORCEMENT ORIENTATION PARAMETERS

B.N. Fedulov<sup>1, 2</sup>, A.N. Fedorenko<sup>1</sup>, F.K. Antonov<sup>3</sup>, E.V. Lomakin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Skolkovo institute of science and technology, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

<sup>3</sup>Anisoprint LLC, Moscow, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 9 November 2020

Accepted: 9 July 2021

Published: 22 October 2021

#### Keywords:

topology optimization, anisotropic topology optimization, fiber orientation choice, polymer composites, additive technologies, thermoplastic matrix, reinforcement optimization.

### ABSTRACT

Advanced design methods offer not only a number of methods of modeling structures but also quite profound optimization approaches. The topology optimization is one of such advantageous methods. There are several implementations of this type of structural analysis, but the most common option is to deal with the material density as a generalized parameter. The development of 3D printing technologies increases the interest in algorithms of this type. However, it mostly refers to printing with metal or plastic, which implies the material isotropy. Advances in continuous fiber printing systems and automatic placement machines using composite tapes make it possible for engineers to control not only a material's position, but also to choose the local orientation of reinforcing elements. Such systems require optimization algorithms taking into account additional parameters characterizing the material anisotropy. In this case the traditional problem of the topology optimization should first be modified for the model of an orthotropic material with restrictions on the value of the angle of rotation of the reinforcement lines along the print path. In this paper, an idea of such a topology optimization algorithm is proposed, which is implemented using the Abaqus finite element modeling facilities, and examples of solving typical problems are considered.

© PNRPU

### Введение

В последние годы активно развиваются технологии 3D-печати полимерами с добавлением армирующих компонентов [1–11]. Одним из способов является печать расплавленным термопластичным связующим совместно с непрерывным волокном на основе стекло- или углеволокна, предварительно пропитанным связующим для обеспечения необходимой жесткости. Такое связующее обеспечивает связь между монофиламентами в жгуте волокна, а термопластичная матрица обеспечивает хорошие межслойные механические свойства и высокую ударную вязкость композита [5–6]. Объемное содержание волокна при такой технологии составляет до 30 %. Данный метод является хорошей заменой громоздким и дорогостоящим роботизированным комплексам выкладки в тех случаях, когда требуется изготовить новые детали относительно небольших размеров (детали БПЛА, кронштейны, лопасти) в малом количестве. Среди производителей оборудования для 3D-печати непрерывным волокном стоит выделить компании «Анизопринт» (Россия) и Markforged (США).

По сравнению с выкладочным комплексом головка 3D-принтера способна как плавно изменять направление ориентации волокна, так и достаточно резко повернуть траекторию выкладки. Это позволяет технически реализовывать оптимальные ориентации слоев, которые могут быть определены расчетными методами. Например, реализовать укладки с небольшим варьированием

направления волокна внутри одного слоя для повышения устойчивости композитной панели [12].

С развитием технологии 3D-печати геометрия изделий менее подвержена производственным ограничениям. Это в свою очередь делает актуальной задачу оптимизации геометрической формы изделия в очень разнообразных постановках. Многие исследования при решении таких задач используют подход, известный как топологическая оптимизация. В работах [13–28] предложены общие подходы и алгоритмы решения задачи топологической оптимизации с целью максимизации жесткости изделия (или минимизации энергии упругих деформаций) материала. Численная реализация алгоритмов обычно осуществляется в совокупности с решением задачи деформирования методом конечных элементов.

При рассмотрении анизотропного материала увеличивается количество параметров, входящих в постановку задачи, а также ограничений на них. Наиболее важным из таких параметров является угол, задающий направление печати волокном. Одним из способов является комбинирование топологической оптимизации с дискретным выбором ориентации волокна внутри конечного элемента оптимизируемого объема. В данном направлении можно выделить работы [29–30]. Тем не менее они имеют ряд недостатков: в первой рассматриваются только дискретные произвольные углы ориентации, во второй работе авторы анализируют балочные конструкции; также в обоих случаях рассматриваются

плоские задачи. В предлагаемой работе рассматривается более общий алгоритм поиска оптимального решения, основанный на градиентном методе. Предлагаемый подход наиболее эффективно можно использовать при работе с 3D-печатью композитным материалом, при создании изделий на основе выкладочных машин, а также более абстрактных конструктивных элементов, если их механические свойства можно улучшить анизотропной линейно-упругой моделью материала.

### 1. Постановка задачи оптимизации

Топологическая оптимизация конструкций позволяет выбрать оптимальную геометрию изделия, при этом возможно появление полостей, новых свободных поверхностей, изменение топологии оптимизируемой детали. Для математической постановки оптимизации, следуя [8, 9], предположим, что оптимизируемое тело  $\Omega$  разбито на большое количество малых в сравнении с  $\Omega$  подобластей  $\Omega_n$  (рис. 1). При работе алгоритма в сочетании с методом конечных элементов в качестве  $\Omega_n$  удобно рассматривать пространство, занимаемое самими элементами, используемыми в моделировании. Теперь, если в такой дискретной постановке соотнести каждую подобласть – элементу  $\Omega_n$  параметр  $\rho_n$ , так, что если  $\rho_n = 0$ , то материал в данной области отсутствует, а если  $\rho_n = 1$ , то материал присутствует, задача формализуется в некотором приближении. Степень точности, как и в методе конечных элементов, определяется количеством таких подобластей и соответствующих им параметров  $\rho_n$ . Таким образом, задача оптимизации состоит в выборе такого набора нулей и единиц  $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots \rho_n \dots\}$ , чтобы достичь необходимого оптимума. В расслабленной постановке предполагается, что значения параметров меняются непрерывно в диапазоне  $0 \leq \rho_n \leq 1$ , это позволяет применять градиентные методы оптимизации, а после получения решения по степени близости параметра  $\rho_n$  к 0 или 1 интерпретировать результат для выбора дискретного значения [13–15]. При этом можно положить, что  $\rho_n$  – это функция координат, и если точка среды имеет координаты  $x$  внутри элемента с индексом  $n$ , то  $\rho_n(x) = \rho_n (x \in \Omega_n)$ , в противном случае  $\rho_n(x) = 0 (x \notin \Omega_n)$ .

Определяющие соотношения для материала, свойства которого зависят от параметра  $\rho_n$ , записываются в виде  $\sigma_{ij} = \rho_n^p E_{ijkl}^0 \varepsilon_{ij}$ , где  $p$  – безразмерный параметр, как правило, больший единицы. Тогда можно рассмотреть, например, задачу минимизации энергии деформаций внутри  $\Omega$  по всем  $\rho_n$ :

$$\min_{\rho} \int_{\Omega} E_{ijkl}(\rho) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega, \quad (1)$$

где  $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$ ,  $E_{ijkl} = \rho_n^p E_{ijkl}^0$ ;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора малых деформаций.

Если добавить ограничения на общую массу используемого материала

$$\sum_n \rho_n \Omega_n \leq M_0,$$

и ограничения на параметры

$$0 \leq \rho_i \leq 1,$$

то получим наиболее известную постановку задачи топологической оптимизации [1–28]. Популярность такой задачи объясняется возможностью выразить градиент для целевой функции (1), для любого  $\rho_n$ .

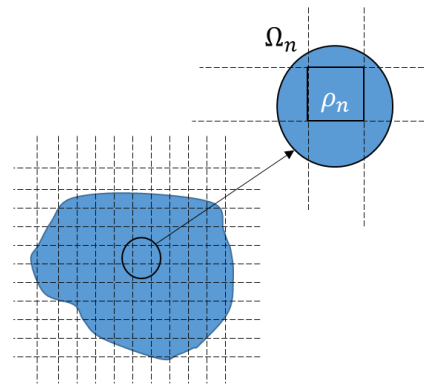


Рис. 1. Разбиение области оптимизации на подобласти

Fig. 1. Dividing the optimization area into sub-areas

$$\frac{\partial}{\partial \rho_n} \left[ \int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega \right] = \frac{p}{\rho_n} \int_{\Omega_n} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega. \quad (2)$$

При этом градиент имеет существенно локальное выражение. В случае нагружения тела сосредоточенной силой минимизация энергии деформации строго эквивалентна максимизации жесткости конструкции, что придает данной задаче понятный физический смысл. Доказательство можно найти, например, в работе [13].

В случае работы с анизотропным материалом и возможностью выбирать наравне с плотностью ориентацию материала необходимо дополнить искомые параметры. Если рассматривать выкладочные машины или системы с печатью непрерывным волокном, то на данный момент достаточно рассмотреть только один угол ориентации  $\alpha$ , указывающий направление выкладываемого волокна.

Таким образом, с учетом ориентации материала или угла направления волокна определяющие соотношения примут следующий вид:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\rho, \alpha) \varepsilon_{ij} = \rho_n^p E_{ijkl}^0(\alpha_n) \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где  $E_{ijkl}^0(\alpha_n)$  – упругие модули анизотропного материала в зависимости от угла ориентации волокна в подоб-

ласти  $\Omega_n$ . Такие формулы широко применяются и известны в теории слоистых композитов. Аналогично параметру плотности примем, что  $\alpha$  – это функция координат  $x$ , такая что  $\alpha_n(x) = \alpha_n(x \in \Omega_n)$ , в противном случае  $\alpha_n(x) = 0(x \notin \Omega_n)$ . Здесь параметр  $\alpha$  можно рассматривать как угол выкладки волокна экструдером или композитной пленки выкладочной машины. В таком случае в качестве конкретного вида линейно-упругих модулей  $E_{ijkl}^0$  имеет смысл рассмотреть трансверсально изотропное тело.

Таким образом, задача оптимизации в случае изменяемого угла ориентации материала будет выглядеть следующим образом:

$$\min_{\rho, \alpha} \int_{\Omega} E_{ijkl}(\rho, \alpha) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega, \quad (4)$$

где  $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$ ,  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ,

$$\sum_n \rho_i \Omega_i \leq M_0, \quad (5)$$

$$0 \leq \rho_i \leq 1.$$

При этом ограничения на величины углов можно не рассматривать в силу периодичности зависимостей модулей от ориентации армирования  $E_{ijkl}(\rho, \alpha) = E_{ijkl}(\rho, \alpha \pm \pi)$ .

## 2. Градиент энергии деформации

Для решения поставленной задачи необходимо получить выражение для градиента целевой функции (4), аналогичное (2). Следуя работам [13, 14], рассмотрим принцип виртуальных работ:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \delta \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial \Omega} \boldsymbol{\tau} \delta \mathbf{v} ds,$$

где  $\mathbf{u}$  – перемещения, отвечающие равновесию;  $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$  – напряжения, полученные при помощи поля перемещений  $\mathbf{u}$ ;  $\mathbf{f}$  – массовая сила;  $\boldsymbol{\tau}$  – поверхностные нагрузки;  $\delta \mathbf{v}$  – произвольное поле перемещений, удовлетворяющее граничным условиям;  $\varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{v})$  – деформации, полученные на поле перемещений  $\delta \mathbf{v}$ .

Теперь можно записать следующие выражения:

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}(\rho, \alpha) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) d\Omega =$$

$$= \left[ \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial \Omega} \boldsymbol{\tau} \mathbf{u} ds \right] +$$

$$+ \left[ \int_{\Omega} \mathbf{f} \delta \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial \Omega} \boldsymbol{\tau} \delta \mathbf{v} ds - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{v}) d\Omega \right],$$

где  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$  – тензор деформаций, полученный на поле перемещений  $\mathbf{u}$ .

Последняя скобка тождественно равна нулю, что делает данное выражение верным. Теперь, дифференцируя по параметру  $\alpha$ , принимая в расчет, что  $\delta \mathbf{v}$  произвольное, но постоянное поле перемещений ( $\partial \delta \mathbf{v} / \partial \alpha = 0$ ), можно получить следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\Omega} E_{ijkl}(\rho, \alpha) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega =$$

$$= \left[ \int_{\Omega} \mathbf{f} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\partial \Omega} \boldsymbol{\tau} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} ds \right] - \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial \alpha} \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{v}) d\Omega.$$

Далее

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial \alpha} = \frac{\partial(\rho^p E_{ijkl}^0(\alpha) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}))}{\partial \alpha} =$$

$$= \frac{\partial(\rho^p E_{ijkl}^0(\alpha))}{\partial \alpha} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + \rho^p E_{ijkl}^0 \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})}{\partial \alpha} =$$

$$= \rho^p \frac{\partial E_{ijkl}^0(\alpha)}{\partial \alpha} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + \rho^p E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} \right).$$

Теперь можем записать

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\Omega} E_{ijkl}(\rho, \alpha) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega = \left[ \int_{\Omega} \mathbf{f} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\partial \Omega} \boldsymbol{\tau} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} ds \right] -$$

$$- \rho^p \int_{\Omega} \frac{\partial E_{ijkl}^0(\alpha)}{\partial \alpha} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{v}) d\Omega.$$

И окончательно, подставляя вместо  $\delta \mathbf{v}$  перемещения, полученные для равновесия  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha}$ , можно заметить, что

$$\left[ \int_{\Omega} \mathbf{f} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\partial \Omega} \boldsymbol{\tau} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} ds \right] - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} \right) d\Omega \equiv 0.$$

Тогда для градиента энергии деформации можно получить следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\Omega} E_{ijkl}(\rho, \alpha) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega = \rho^p \int_{\Omega} \frac{\partial E_{ijkl}^0(\alpha)}{\partial \alpha} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega. \quad (6)$$

Соотношение (6) дополняет соотношение (2) для получения градиентов по всем используемым параметрам.

Далее, используя метод градиентного спуска, можно задавшись начальными параметрами  $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$ ,  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , получать оптимальные решения или, более строго, точки локальных минимумов системы.

## 3. Численная реализация

Имея полный набор градиентов от целевой функции, возможно решать задачу оптимизации методом градиентного спуска.

Для параметра плотности  $\rho$  можно воспользоваться хорошо зарекомендовавшим себя вариантом поиска минимума в задачах топологической оптимизации [13]:

$$\rho_n^{K+1} = \begin{cases} \max\{(1-\zeta)\rho_n^K, \rho_{\min}\} & \text{если } \rho_n^K B_K^n \leq \max\{(1-\zeta)\rho_n^K, \rho_{\min}\}, \\ \min\{(1+\zeta)\rho_n^K, 1\} & \text{если } \min\{(1+\zeta)\rho_n^K, 1\} \leq \rho_n^K B_K^n, \\ \rho_n^K B_K^n & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$B_K = \Lambda_K^{-1} \frac{P}{\rho_n^K} \int_{\Omega_n} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega.$$

Здесь  $\Lambda_K$  – множитель, который выбирается на каждом шаге из условия ограничения массы (6), степень параметра плотности  $\rho$  регулирует контрастность результата, типовое значение 3, параметры  $\eta$  и  $\zeta$  регулируют скорость сходимости, типовые значения 0,5 и 0,2 соответственно.

Для параметра угла ориентации никаких ограничений в нашей задаче нет, поэтому используем классический градиентный метод:

$$\alpha_n^{K+1} = \begin{cases} \alpha_n^K - \alpha^0 & \text{если } \alpha_n^K - A_K \leq \alpha_n^K - \alpha^0, \\ \alpha_n^K + \alpha^0 & \text{если } \alpha_n^K - A_K \geq \alpha_n^K + \alpha^0, \\ \alpha_n^K - A_K & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$A_K = \lambda \left[ (\rho_n^K)^p \int_{\Omega} \frac{\partial E_{ijkl}^0(\alpha)}{\partial \alpha} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} d\Omega \right]^\gamma,$$

где  $\lambda$ ,  $\gamma$  и  $\alpha^0$  – параметры, контролирующие процесс сходимости. Типовые значения параметров  $\lambda = 1$ ,  $\gamma = 0,5$  и  $\alpha^0 = 5^\circ$ .

#### 4. Примеры решения конкретных задач

Предложенные алгоритмы были встроены в систему конечно-элементного анализа Abaqus, что позволяет рассмотреть конкретные примеры анализа.

В качестве первой задачи рассмотрим изгиб консоли. Ограничения по массе выберем 30 % от начальной массы. Свойства материала, получаемые при изготовлении на системах 3D-печати компании «Анизопринт», приведены в таблице.

Механические свойства материала

Material mechanical properties

$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$\nu_{12}$
145	8,34	4,71	0,233

Конкретные значения упругих констант не столь важны для рассматриваемого анализа, важны только относительные величины. При изменении величины нагрузки, масштаба модели и пропорциональном увеличении жесткостей результат анализа не изменится.

На рис. 2 показана схема нагружения и результат оптимизации: распределение параметров плотности  $\rho$  и распределение углов ориентации материала  $\alpha$ . Угол ориентации отсчитывается от нулевого направления, которое схематично обозначено на рисунке и совпадает с ребром оптимизируемого объема. Начальными параметрами  $\rho$  и  $\alpha$  были 0,3 и 0 соответственно для всех элементов анализируемого объема.

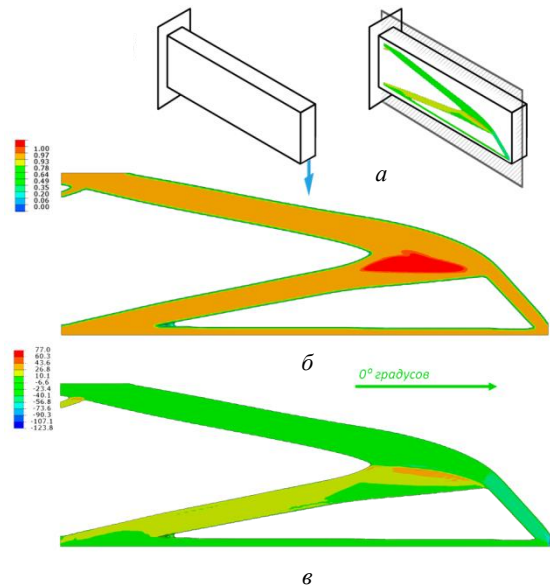


Рис. 2. Изгиб консоли: а – постановка задачи, плоскость выкладки волокна; б – распределение плотностей  $\rho$ ; в – распределение параметров угла ориентации  $\alpha^\circ$

Fig. 2. Bending of the cantilever: a – statement of the problem, a plane of the fiber placement; b – density distribution  $\rho$ , c – distribution of the orientation angle parameters  $\alpha^\circ$

Видно, что значения плотности не везде равны строго единице, это связано с тем, что в анализе используется расслабленная постановка, где параметр может изменяться в пределах  $0 \leq \rho_i \leq 1$ . На рис. 2 скрыт материал, плотность которого меньше  $\rho < 0,3$ . В соответствии с уравнением (3) жесткость материала падает при уменьшении параметра плотности, причем в данном примере параметр  $p=3$ , что снижает жесткость до ~3 % от изначальной.

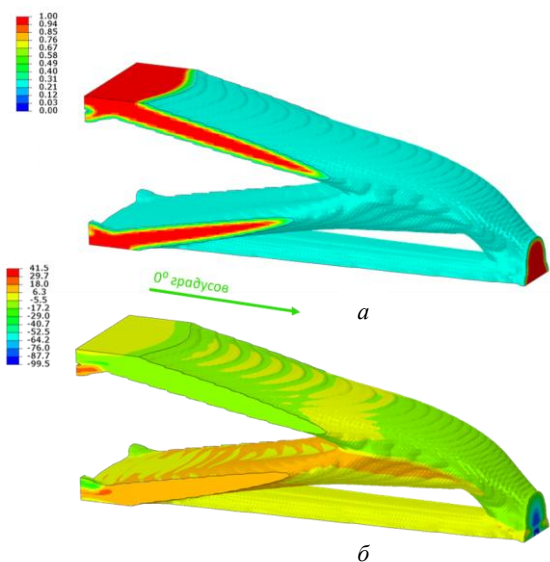


Рис. 3. Изгиб консоли в трехмерной постановке: а – распределение плотностей  $\rho$ ; б – распределение параметров угла ориентации  $\alpha^\circ$

Fig. 3. Bending of the console in a three-dimensional setting a – distribution of densities  $\rho$ ; b – distribution of parameters of the orientation angle  $\alpha^\circ$

На рис. 3 показан результат оптимизации в полной трехмерной постановке. Видно, что общая форма повторяет двумерную задачу, а наибольшая разница проявляется в местах приложения нагрузки и закреплений.

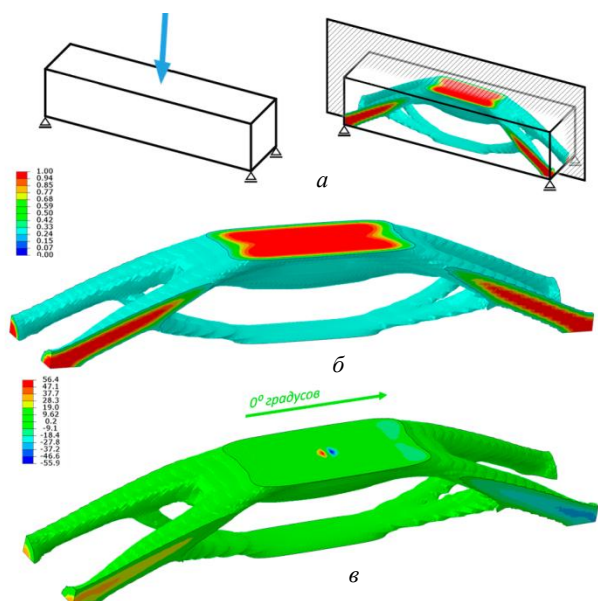


Рис. 4. Изгиб шарнирно опертой балки: *a* – постановка задачи, плоскость выкладки волокна; *b* – распределение плотностей  $\rho$ ; *в* – распределение параметров угла ориентации  $\alpha^\circ$

Fig. 4. Bending of a hingedly supported beam: *a* – the problem statement, the plane of the fiber placement; *b* – density distribution  $\rho$ , *c* – distribution of orientation angle parameters  $\alpha^\circ$

На рис. 4 показан результат оптимизации для нагружения шарнирно опертой балки с центральным приложением сосредоточенной нагрузки.

В качестве ограничения по массе выбрано значение 15 % от изначальной массы. Видно, что конструкция

## Библиографический список

1. Manufacturing and 3D printing of continuous carbon fiber prepreg filament / Q. Hu [et al.] // Journal of Materials Science. – 2018. – Vol. 53, no. 3. – P. 1887–1898.
2. UV-assisted 3D printing of glass and carbon fiber-reinforced dual-cure polymer composites / M. Invernizzi [et al.] // Materials. – 2016. – Vol. 9, no. 7. – 583 p.
3. Build orientation determination for multi-material deposition additive manufacturing with continuous fibers / Y. Zhang [et al.] // Procedia Cirp. – 2016. – Vol. 50, no. 2016. – P. 414–419.
4. 3D printing for continuous fiber reinforced thermoplastic composites: mechanism and performance / Chuncheng Yang, Xiaoyong Tian, Tengfei Liu, Yi Cao, Dichen Li // Rapid Prototyp J. – 2017. – Vol. 23.
5. Development of a two-matrix composite material fabricated by 3D printing / A.V. Azarov [et al.] // Polymer Science, Series D. – 2017. – Vol. 10, no. 1. – P. 87–90.
6. Composite 3D printing for the small size unmanned aerial vehicle structure / A.V. Azarov [et al.] // Composites Part B: Engineering. – 2019. – Vol. 169. – P. 157–163.

имеет явно выраженный трехмерный вид, несмотря на то, что печать производится в плоскости по слоям. Интересен горизонтальный элемент, подкрепляющий основные силовые опоры. Можно сделать вывод, что в оптимальной конструкции задействуется изгибная жесткость материала.

Имеет смысл отметить, что во всех представленных примерах результатом являются воспроизводимые технологически конструкции. Видно, что изменение всех параметров довольно гладкое, но тем не менее перенос геометрии в специализированные программы подготовки к 3D-печати требуют определенной работы конструктора. Таким образом, результаты такого типа оптимизации имеет смысл рассматривать как прообраз конструкции, позволяющий выбрать оптимальную силовую схему изделия.

## Заключение

В работе представлен алгоритм оптимизации конструкций, получаемых посредством технологии 3D-печати с использованием непрерывного волокна. Приведены выражения для градиентов энергии деформации в зависимости от всех используемых параметров, то есть плотностей и углов ориентации материала. Рассмотрены конкретные задачи оптимизации.

## Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (грант № 20-11-20230).

## Acknowledgements

This work was supported by a grant from the Russian Science Foundation (grant no. 20-11-20230).

7. Additively manufactured carbon fiber-reinforced composites: State of the art and perspective / N. van de Werken [et al.] // Additive Manufacturing. – 2020. – Vol. 31. – P. 100962.
8. Novel continuous fiber bi-matrix composite 3D-printing technology / A. Adumitroaie [et al.] // Materials. – 2019. – Vol. 12, no. 18. – P. 3011.
9. 3D printing of optimized composites with variable fiber volume fraction and stiffness using continuous fiber / K. Sugiyama [et al.] // Composites Science and Technology. – 2020. – Vol. 186. – P. 107905.
10. Anisogrid thermoplastic composite lattice structure by innovative out-of-autoclave process / D. Santoro [et al.] // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2020. – Vol. 109, no. 7. – P. 1941–1952.
11. Yasa E., Ersoy K.A. Review on the additive manufacturing of fiber reinforced polymer matrix composite // Proceedings of the 29th Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium. – Austin, TX, USA, 2018. – P. 13–15.
12. Van Campen J.M.J.F., Kassapoglou C., Gürdal Z. Generating realistic laminate fiber angle distributions for optimal vari-

able stiffness laminates // *Composites Part B: Engineering*. – 2012. – Vol. 43, no. 2. – P. 354–360.

13. Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology optimization: theory, methods, and applications*. – Springer Science & Business Media, 2013.

14. Bendsoe M.P., Kikuchi N. *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. – 1988.

15. Bendsøe M.P. *Optimal shape design as a material distribution problem // Structural Optimization*. – 1989. – Vol. 1, no. 4. – P. 193–202.

16. Bendsøe M.P., Sigmund O. *Material interpolation schemes in topology optimization // Archive of Applied Mechanics*. – 1999. – Vol. 69, no. 9-10. – P. 635–654.

17. Sigmund O., Petersson J. *Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima // Structural Optimization*. – 1998. – Vol. 16, no. 1. – P. 68–75.

18. Sigmund O. *A 99 line topology optimization code written in Matlab // Structural and Multidisciplinary Optimization*. – 2001. – Vol. 21, no. 2. – P. 120–127.

19. Sigmund O. *On the design of compliant mechanisms using topology optimization // Journal of Structural Mechanics*. – 1997. – Vol. 25, no. 4. – P. 493–524.

20. Sigmund O., Maute K. *Topology optimization approaches // Structural and Multidisciplinary Optimization*. – 2013. – Vol. 48, no. 6. – P. 1031–1055.

21. Rozvany G.I.N. *A critical review of established methods of structural topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization*. – 2009. – Vol. 37, no. 3. – P. 217–237.

22. Sigmund O., Torquato S. *Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method // Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1997. – Vol. 45, no. 6. – P. 1037–1067.

23. Bourdin B. *Filters in topology optimization // International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2001. – Vol. 50, no. 9. – P. 2143–2158.

24. Duysinx P., Bendsøe M.P. *Topology optimization of continuum structures with local stress constraints // International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1998. – Vol. 43, no. 8. – P. 1453–1478.

25. Bruggi M. *On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization*. – 2008. – Vol. 36, no. 2. – P. 125–141.

26. Fedulov B.N., Fedorenko A.N. *Residual strength estimation of a laminated composite with barely visible impact damage based on topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization*. – 2020. – P. 1–19.

27. Fedulov B.N., Fedorenko A.N., Lomakin E.V. *Evaluation of the residual strength of structures made of composite materials based on a conservative distribution of damage parameters // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – IOP Publishing, 2019. – Vol. 581, no. 1. – P. 012023.

28. Fedulov B., Fedorenko A. *The analysis of the worst-case distribution of the damage in composite material imposed by a low velocity impact // Procedia Structural Integrity*. – 2019. – Vol. 18. – P. 399–405.

29. Stegmann J., Lund E. *Discrete material optimization of general composite shell structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2005. – Vol. 62, no. 14. – P. 2009–2027.

30. Zhou K., Li X. *Topology optimization of structures under multiple load cases using a fiber-reinforced composite material model // Computational Mechanics*. – 2006. – Vol. 38, no. 2. – P. 163–170.

## References

1. Hu Q. et al. *Manufacturing and 3D printing of continuous carbon fiber prepreg filament // Journal of materials science*, 2018, vol. 53, no. 3, pp. 1887-1898.

2. Invernizzi M. et al. *UV-assisted 3D printing of glass and carbon fiber-reinforced dual-cure polymer composites. // Materials*, 2016, vol. 9, no. 7, pp. 583.

3. Zhang Y. et al. *Build orientation determination for multi-material deposition additive manufacturing with continuous fibers. // Procedia Cirp*, 2016, vol. 50, no. 2016, pp. 414-419.

4. Yang Chuncheng, Tian Xiaoyong, Liu Tengfei, Cao Yi, Li Dichen. *3D printing for continuous fiber reinforced thermoplastic composites: mechanism and performance. // Rapid Prototyp J* 2017;23.

5. Azarov A. V. et al. *Development of a two-matrix composite material fabricated by 3D printing. // Polymer Science, Series D*, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 87-90.

6. Azarov A. V. et al. *Composite 3D printing for the small size unmanned aerial vehicle structure. // Composites Part B: Engineering*, 2019, vol. 169, pp. 157-163.

7. van de Werken N. et al. *Additively manufactured carbon fiber-reinforced composites: State of the art and perspective. // Additive Manufacturing*, 2020, vol. 31, pp. 100962.

8. Adumitroaie A. et al. *Novel Continuous Fiber Bi-Matrix Composite 3-D Printing Technology. // Materials*, 2019, vol. 12, no. 18, pp. 3011.

9. Sugiyama K. et al. *3D printing of optimized composites with variable fiber volume fraction and stiffness using continuous fiber. // Composites Science and Technology*, 2020, vol. 186, pp. 107905.

10. Santoro D. et al. *Anisogrid thermoplastic composite lattice structure by innovative out-of-autoclave process. // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2020, vol. 109, no. 7, pp. 1941-1952.

11. Yasa E., Ersoy K. A. *Review on the Additive Manufacturing of Fiber Reinforced Polymer Matrix Composite. // Proceedings of the 29th Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium*, Austin, TX, USA, 2018, pp. 13-15.

12. Van Campen J. M. J. F., Kassapoglou C., Gürdal Z. *Generating realistic laminate fiber angle distributions for optimal variable stiffness laminates. // Composites Part B: Engineering*, 2012, vol. 43, no. 2, pp. 354-360.

13. Bendsoe M. P., Sigmund O. *Topology optimization: theory, methods, and applications*, Springer Science & Business Media, 2013.

14. Bendsoe M.P., Kikuchi N. *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*, 1988.

15. Bendsøe M. P. *Optimal shape design as a material distribution problem. // Structural optimization*, 1989, vol. 1, no. 4, pp. 193-202.

16. Bendsøe M. P., Sigmund O. *Material interpolation schemes in topology optimization. // Archive of applied mechanics*, 1999, vol. 69, no. 9-10, pp. 635-654.

17. Sigmund O., Petersson J. *Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. // Structural optimization*, 1998, vol. 16, no. 1, pp. 68-75.

18. Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab., *Structural and multidisciplinary optimization*, 2001, vol. 21, no. 2, pp. 120-127.
19. Sigmund O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization., *Journal of Structural Mechanics*, 1997, vol. 25, no. 4, pp. 493-524.
20. Sigmund O., Maute K. Topology optimization approaches., *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, vol. 48, no. 6, pp. 1031-1055.
21. Rozvany G. I. N. A critical review of established methods of structural topology optimization., *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, vol. 37, no. 3, pp. 217-237.
22. Sigmund O., Torquato S. Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method., *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1997, vol. 45, no. 6, pp. 1037-1067.
23. Bourdin B. Filters in topology optimization., *International journal for numerical methods in engineering*, 2001, vol. 50, no. 9, pp. 2143-2158.
24. Duysinx P., Bendsøe M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints., *International journal for numerical methods in engineering*, 1998, vol. 43, no. 8, pp. 1453-1478.
25. Bruggi M. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization., *Structural and multidisciplinary optimization*, 2008, vol. 36, no. 2, pp. 125-141.
26. Fedulov B. N., Fedorenko A. N. Residual strength estimation of a laminated composite with barely visible impact damage based on topology optimization., *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, pp. 1-19.
27. Fedulov B. N., Fedorenko A. N., Lomakin E. V. Evaluation of the Residual Strength of Structures Made of Composite Materials Based on a Conservative Distribution of Damage Parameters., *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing, 2019, vol. 581, no. 1, pp. 012023.
28. Fedulov B., Fedorenko A. The analysis of the worst-case distribution of the damage in composite material imposed by a low velocity impact., *Procedia Structural Integrity*, 2019, vol. 18, pp. 399-405.
29. Stegmann J., Lund E. Discrete material optimization of general composite shell structures., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, vol. 62, no. 14, pp. 2009-2027.
30. Zhou K., Li X. Topology optimization of structures under multiple load cases using a fiber-reinforced composite material model., *Computational Mechanics*, 2006, vol. 38, no. 2, pp. 163-170.