



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.2.04

УДК 539.372

НЕОСЕССИММЕТРИЧНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРЕВЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Р.В. Гольдштейн^{1,2}, А.Л. Попов³, В.М. Козинцев¹, Д.А. Челюбеев¹

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

²Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

³Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 22 апреля 2016 г.
Принята: 23 мая 2016 г.
Опубликована: 30 июня 2016

Ключевые слова:

круглая пластина,
потеря устойчивости,
неосесимметричная форма,
экспериментальное
наблюдение,
теоретическая модель

АННОТАЦИЯ

Представлены результаты простых экспериментов, демонстрирующие неосесимметричную краевую потерю устойчивости с разным числом волн по окружности при равномерном нагревании тонких пластиковых круглых пластин, края которых зафиксированы на жёстких кольцах. При этом формы потери устойчивости с большим числом волн по окружности наблюдались для пластин с меньшей толщиной. Для описания такого типа многоволновой потери устойчивости использована классическая модель устойчивости круглой пластины под действием радиальных сжимающих усилий, распределённых по контуру пластины, которая включает в том числе температурное выпучивание пластины. Получена зависимость минимальной критической нагрузки от числа волн по окружности в форме потери устойчивости пластины.

Выполнено сопоставление многоволновой формы потери устойчивости пластины с похожими на неё формами собственных колебаний, локализованными у края пластины. Сопоставление проводилось по положению переходной линии, математически отделяющей область с активной осцилляцией от плато с практически недеформированной центральной областью пластины, смещающейся как жёсткое целое, а также – по расположению экстремумов формы потери устойчивости и формы колебаний относительно центра пластины. По этим же параметрам выполнено сравнение наблюдаемых в эксперименте неосесимметричных форм потери устойчивости пластины с результатами расчётов по теоретической модели при условиях жесткого, шарнирного и упругого закрепления края пластины. В последнем случае показана возможность определения жёсткости опоры исходя из условий совпадения теоретических и экспериментальных значений радиуса переходной линии и радиуса окружности, на которой располагаются экстремумы формы потери устойчивости пластины. Приведенные данные иллюстрируют тенденцию сдвига экстремумов формы потери устойчивости к границе пластины при ослаблении краевых условий.

© ПНИПУ

© Гольдштейн Роберт Вениаминович – член-корреспондент РАН, зав. лабораторией, профессор, e-mail: goldst@ipmnet.ru
Попов Александр Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: popov@ipmnet.ru
Козинцев Виктор Михайлович – кандидат физико-математических наук, e-mail: kozincev@mail.ru
Челюбеев Дмитрий Анатольевич – младший научный сотрудник, e-mail: da--ch@yandex.ru

Robert V. Goldstein – Corresponding Member of the RAS, Head of Laboratory on Mechanics, Professor, e-mail: goldst@ipmnet.ru
Alexander L. Popov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: popov@ipmnet.ru
Viktor M. Kozintsev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, e-mail: kozincev@mail.ru
Dmitry A. Chelyubeev – Junior Researcher, e-mail: da--ch@yandex.ru

NON-AXISYMMETRIC EDGE BUCKLING OF CIRCULAR PLATES WHEN HEATED

R.V. Goldstein^{1,2}, A.L. Popov³, V.M. Kozintsev¹, D.A. Chelyubeev¹

¹Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

³Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 22 April 2016
Accepted: 23 May 2016
Published: 30 June 2016

Keywords:

circular plate, buckling, non-axisymmetric shape, experimental observation, theoretical model

ABSTRACT

The paper presents the results of simple experiments on uniform heating of thin polymeric circular plates which edges are fixed on rigid rings; and the formation of non-axisymmetric buckling with different numbers of waves around the circumference localized near the plates' edges. At the same time, buckling modes with a large number of waves around the circumference are observed for plates with a smaller thickness. The classical model of stability for a circular plate under radial compressive forces distributed on a plate contour is used for non-axisymmetric buckling of this kind. The model also describes the temperature swelling of the plate. It became possible to get the interrelation between the minimum critical load and number of waves around the circumference in the plate buckling mode.

We compared a multiwave form of buckling for the plate with the modes of eigenoscillations similar to it, which are localized at the edge of the plate. The comparison is carried out based on the transitional line position which mathematically separates the area with an active oscillation from the plateau with an almost nondeformed central region of the plate (which is displaced as a rigid body); and also based on the location of the buckling mode extrema and oscillations modes with respect to the plate center. Using the same parameters, we compared non-axisymmetric plate buckling modes (observed in the experiment) with calculation results related to the theoretical model for rigid, hinged and elastic clamping of the plate edge. In the latter case, we show that it is possible to determine the support rigidity based on a good fit of theoretical and experimental values related to the transitional line radius and a circle radius where the plate buckling extrema are located. The given data illustrates a tendency of a shift of buckling extrema to the plate contour when the boundary conditions are weakened.

© PNRPU

Введение

Задача о неосесимметричной потере устойчивости круглой пластины под действием радиальных сжимающих усилий, равномерно распределённых по её контуру, впервые поставлена и решена в работе Дж. Брайена (G. Bryan) 1891 г., в которой при выводе дифференциального уравнения для функции прогиба и граничных условий использован вариационный подход [1]. Там же получено первое критическое значение нагрузки для случая потери устойчивости по форме с одним узловым диаметром. Обзор последующих работ в этом направлении содержится в статье [2], монографии [3] и справочнике [4], где аналогичное исходное уравнение получено из условий равновесия для внутренних силовых факторов пластины. Ряд вопросов устойчивости прямоугольных и круглых пластин, в том числе при температурном воздействии, освещён в [5]. Среди современных работ данного направления отметим работу, посвящённую анализу устойчивости круглых пластин при неравномерной сжимающей нагрузке, распределённой по окружности по косинусоидальному закону $p = p_0 (1 + \eta \cos 2\varphi)$ с изменением параметра η от 0 до 1 (в последнем случае наблюдается переход к балочной форме потери устойчивости) [6]. В [7] исследованы формы потери устойчивости круглой пластины, частично опирающейся на упругое основание. Здесь обнаружена зависимость окружного числа волн в форме потери устойчивости пластины от жёсткости упругого основания.

Эффект перехода от осесимметричной к неосесимметричной форме потери устойчивости круглой пластины с ростом действующего на неё равномерно распределенного давления исследован в [8–10]. Для описания этого эффекта в [8] выведена система уравнений равновесия несимметричных пологих оболочек в больших перемещениях. Решение этой системы отыскивалось методом Бубнова–Галёркина при задании формы потери устойчивости пластины радиусом a в полярных координатах в виде

$$w = (\rho^2 - 1)^2 (A + B\rho^4 \cos m\varphi), \quad \rho = r/a, \quad (1)$$

где A и B – амплитуды осесимметричной и неосесимметричной складчатости формы потери устойчивости пластины; m – заранее неизвестное целое число, определяющее количество складок при обходе пластины по кругу при условии минимума интенсивности нагрузки для заданного уровня прогиба центра пластины. В результате было показано, что при закреплении края пластины, не препятствующего проскальзыванию в окружном и радиальном направлениях, неосесимметричная потеря устойчивости с минимальным значением критической нагрузки происходит по форме, имеющей 8 волн по окружности пластины. В [9] для определения критических нагрузок в неосесимметричных формах потери устойчивости использован метод малого параметра, с помощью которого минимальное значение сжимающей краевой критической нагрузки реализуется на форме, имеющей 6 волн по окружности пластины. Аналогичный метод использован в [10] в более общем случае, когда модуль упругости круглой изотропной пластины зависит от радиальной координаты.

Исходное представление (1) для формы потери устойчивости использовано и в [11] при решении несколько иных уравнений, полученных как частный случай из уравнений для пологой сферической оболочки. Здесь также выведены условия неосесимметричной потери устойчивости пластины, не подкреплённые, правда, расчётным примером.

Доказательство существования несимметричного решения при больших прогибах симметрично нагруженной пластины для конкретного вида нагрузки и нулевого коэффициента Пуассона дано в [12]. Наиболее подробный обзор, охватывающий в целом состояние работ по осесимметричной и неосесимметричной потере устойчивости пластин, содержится в [4], где, в частности, показано, что в тонких пластинах, подверженных изменениям температуры или влажности, возникают локальные сжимающие напряжения, которые способны вызвать продольный изгиб даже в отсутствие поперечной нагрузки.

Среди экспериментальных результатов отметим испытания круглых пластин на устойчивость под действием равномерного давления, также обнаружившие неосесимметричную складчатость вблизи контура пластин [13]. Ниже представлены результаты экспериментов, показывающие краевую потерю устойчивости с большим числом волн по окружности пластины при изменении её температуры. Продемонстрированы возможности согласования классической теоретической модели [1] с наблюдаемыми формами потери устойчивости.

1. Экспериментальное проявление многоволновой краевой потери устойчивости круглой пластины

Для проявления многоволновой краевой потери устойчивости круглой пластины проводился следующий эксперимент. В качестве объекта эксперимента использовались стандартные пластиковые крышки от упаковки пищевых продуктов, изготовленные из полипропилена (модуль упругости $E = 1,15$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$, температура плавления

160 °С) с диаметром плоской части 80 мм. Эти крышки надевались на обод цилиндрического сосуда (такого же диаметра) с кипятком. На части крышек в процессе нагревания образовывались неосесимметричные краевые формы потери устойчивости (рис. 1).

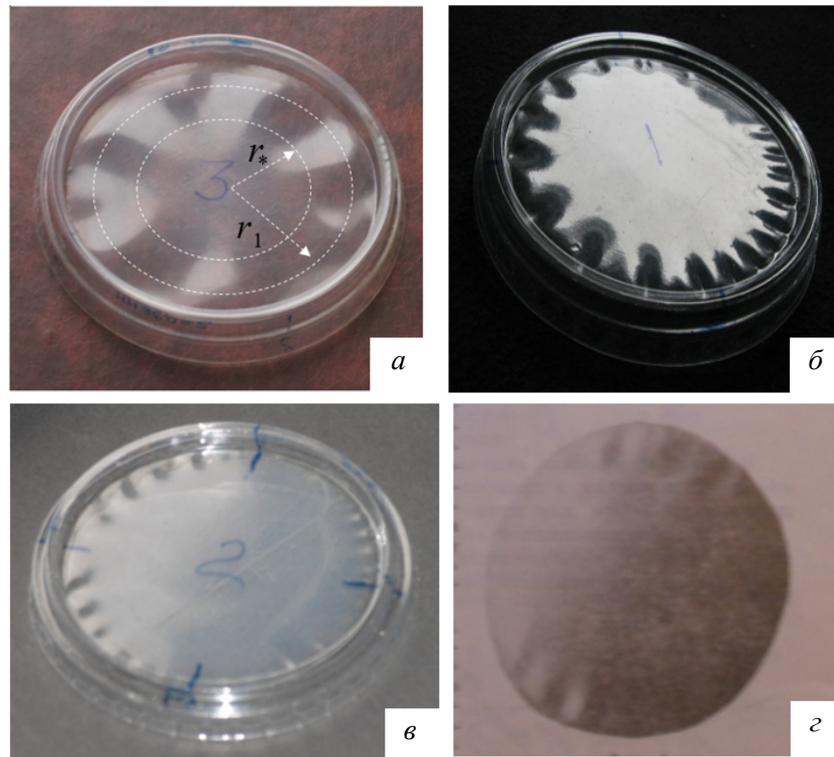


Рис. 1. Фотографии многоволновых форм потери устойчивости круглых пластин: *a* – форма с 8 волнами по окружности (r_1 – радиус окружности, проведенной через экстремумы формы, r_* – радиус переходной линии); *б*, *в* – формы с 20 и 32 волнами по окружности; *г* – форма, воспроизведенная из [8]

В зависимости от толщины пластин, которая изменялась для разных образцов от 0,18 до 0,4 мм, образовывались формы потери устойчивости с разным числом волн по окружности. Как правило, на пластинах минимальной толщины регистрировалась форма с большим числом волн, как на рис. 1, *б*, *в*, где видны формы с 20 и 32 волнами по окружности. Напротив, более толстые пластины теряли устойчивость по формам с 6–8 волнами по окружности (рис. 1, *a*). Для сравнения приведён также пример краевой потери устойчивости пластины из [8] (рис. 1, *г*) под действием равномерной нагрузки, не связанной с температурными деформациями. Отметим, что зарегистрированные формы многоволновой потери устойчивости похожи на формы краевых резонансов у выпуклых границ пластин и оболочек, отделённых от практически недеформированных внутренних областей переходными линиями [14]. Одна из таких линий показана на рис. 1, *a* штриховой окружностью радиусом r_* .

2. Неосесимметричная краевая потеря устойчивости круглой пластины

В качестве исходного уравнения для изучения потери устойчивости круглой пластины под действием нагрузок в её плоскости используется обычно уравнение [3]

$$\frac{D}{h} \Delta^2 w = \sigma_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma_\varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sigma_\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + 2\tau \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (2)$$

в котором через σ_r , σ_φ , τ обозначены соответственно радиальная, окружная и тангенциальная компоненты плоского напряженного состояния пластины, схематично показанные для её элемента на рис. 2 (D , h – цилиндрическая жёсткость и толщина пластины).

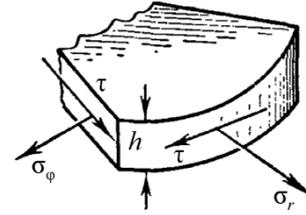


Рис. 2 Компоненты плоского напряженного состояния на элементе пластины толщиной h

При сжатии пластины равномерно распределённой по контуру нагрузкой p возникающее в пластине напряжённое состояние, являясь частным случаем решения задачи Ламе для цилиндра (при отсутствии внутреннего отверстия) [5, 15]

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = -p, \quad \tau = 0, \quad (3)$$

позволяет свести уравнение (2) к линейному операторному уравнению четвёртого порядка [1, 3]

$$\Delta^2 w + \alpha^2 \Delta w = 0, \quad \alpha^2 = \frac{ph}{D}, \quad (4)$$

которое описывает в том числе температурное выпучивание пластины [4] (о связи нагрузки p с температурой см. следующий подраздел).

Общее решение уравнения (4), регулярное в центре пластины, имеет вид [1, 3]

$$w(\rho, \theta) = [c_1 J_m(\xi\rho) + c_2 \rho^m] \cos m\varphi, \quad \rho = r/a, \quad \xi = \alpha a, \quad (5)$$

в котором функция Бесселя $J_m(\xi\rho)$ играет роль осциллирующей по радиусу компоненты, а ρ^m описывает краевой эффект; c_1 , c_2 – постоянные, определяемые из граничных условий на внешнем контуре пластины; $m = 0, 1, 2, \dots$ – число волн в форме потери устойчивости по окружности пластины.

Связь между постоянными c_1 , c_2 и критическое значение нагрузки p находятся при подстановке выражения (5) в граничные условия. Так, в случае защемлённого края пластины $r = a$

$$w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

получим, что значения критической нагрузки

$$p = p_m = \frac{E\xi_m^2}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{a^2}$$

находятся через корни ξ_m уравнения $J_{m+1}(\xi) = 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$ [1, 3].

Форма потери устойчивости при таких граничных условиях с точностью до постоянной имеет вид

$$w_m(r, \theta) = c_1 [J_m(\xi_m \rho) - J_m(\xi_m) \rho^m] \cos m\varphi, \quad (6)$$

где индекс m указывает на принадлежность данной формы выбранному числу волн по окружности пластины. Одна из таких форм ($m = 8$) изображена на рис. 3.

Увеличение минимальной критической нагрузки P с ростом числа волн по окружности в форме потери устойчивости пластины можно проследить по графику рис. 4, где по оси ординат отложено обезразмеренное значение $P = 12 \frac{P a^2}{E h^2} (1 - \nu^2)$.

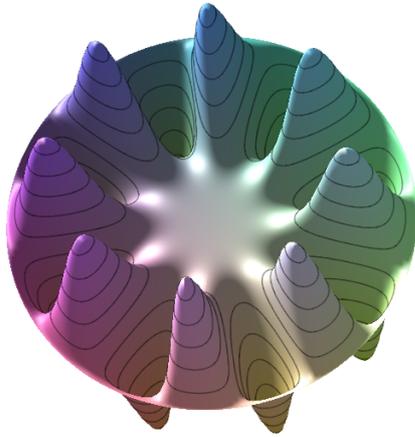


Рис. 3 Расчетная форма потери устойчивости с 8 волнами по окружности пластины

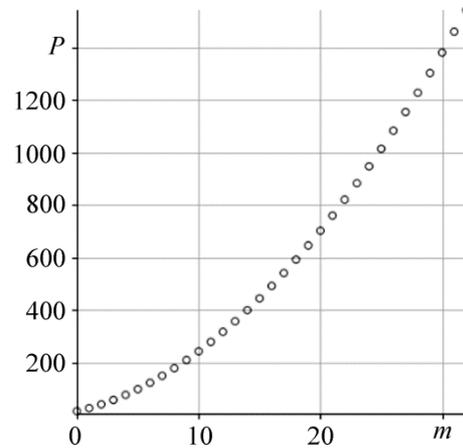


Рис. 4. Зависимость минимальной критической нагрузки P от числа волн m в форме потери устойчивости пластины

Внутренней границей осцилляции формы потери устойчивости является переходная линия $r = r_*$, положение которой определяется из равенства $r_* = am/\xi_m$. При $r < r_*$ функция прогиба пластины в трёхмерном представлении по радиальной и окружной координатам образует плато, что можно заметить как на графике теоретической формы потери устойчивости (рис. 3), так и на результатах визуализации экспериментальных форм потери устойчивости пластины (см. рис. 1).

3. Согласование экспериментов с расчётной моделью

Наблюдаемые в экспериментах формы потери устойчивости качественно совпадают с расчётными формами (5), одна из которых отображена на рис. 3, и при отсутствии начального прогиба – с (1). Более полное согласование может быть достигнуто при совпадении таких характерных признаков, как расположение экстремумов формы потери устойчивости по отношению к центру пластины. Для нахождения этих экстремумов в выражениях (5) берётся производная по r , которая затем приравнивается к нулю. Решение получившегося неявного уравнения даёт координату $r = r_1$ экстремумов расчётной формы потери устойчивости при заданных граничных условиях по краю пластины.

Так, при выбранных выше механических параметрах пластины с толщиной 0,37 мм, условиях жёсткого защемления и восьми волнах в форме потери устойчивости $r_1 \approx 30$ мм; аналогичный расчёт при условиях шарнирного опирания даёт для r_1 значение 33 мм. В то же время измерения на соответствующей экспериментально полученной форме показали, что этот радиус приблизительно равен 32 мм.

Для лучшего согласования результатов эксперимента с расчётной моделью наряду с условиями жёсткого защемления и шарнирного опирания было рассмотрено упругое опирание пластины с заранее неизвестной жёсткостью опоры.

Формулировка условия упругого опирания для круглой пластины сводится к пропорциональности поперечного реактивного усилия [3]:

$$R_r = Q_r + (1/r)(\partial H / \partial \varphi)$$

и прогиба пластины на краю $r = a$:

$$R_r = -cDw,$$

где $Q_r = \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi}$ – поперечная сила; $M_r = D(\kappa_r + \nu \kappa_\varphi)$, $M_\varphi = D(\nu \kappa_r + \kappa_\varphi)$ –

радиальный и окружной изгибающие моменты, $H = D(1-\nu)\chi$ – крутящий момент,

$\kappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$, $\kappa_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$ – кривизны изогнутой поверхности в сечении вдоль диа-

метра и в перпендикулярном направлении; $\chi = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$ – кручение поверхности; c – ко-

эффициент жёсткости опоры.

Кроме того, при $r = a$ ставится условие $M_r = 0$.

Подстановка выражения (5) в эти условия приводит к характеристическому уравнению, из решения которого находится зависимость между параметром критической силы α и коэффициентом жёсткости опоры c . Полагая затем координату экстремумов прогиба совпадающей с экспериментальной, находим значения α и c ; в рассматриваемом примере при $m = 8$ $\alpha = 11,34$ против $12,97$ для жёсткого защемления, а $cD = 26,1$ МПа. При этом радиус окружности, проведенной через экстремумы формы потери устойчивости, увеличился с 30 мм при жестком защемлении края пластины до 32,5 мм – при упругом.

Приведенные данные иллюстрируют тенденцию сдвига экстремумов формы потери устойчивости к границе пластины при ослаблении краевых условий.

Можно также оценить величину сжимающей нагрузки p при описанных выше условиях экспериментов в случае температурного расширения пластины. Для этого достаточно приравнять температурное изменение размеров круглой пластины при её нагревании на T °С к радиальному перемещению, являющемуся решением соответствующей задачи Ламе для сплошной пластины при действии сжимающей нагрузки p в плоскости пластины по её внешнему контуру. В результате

$$p = p_c = \frac{\alpha_t ET}{1-\nu},$$

где α_t – температурный коэффициент линейного расширения материала пластины.

Подобная формула для случая пластины, равномерно нагретой вместе с массивной обоймой, сделанных из материалов, имеющих разные температурные коэффициенты линейного расширения, приведена в [5]. Осесимметричная температурная задача устойчивости круглой пластины при местном нагреве рассмотрена в [16].

Задавшись значением коэффициента температурного расширения полипропилена $\alpha_t = 1,1 \cdot 10^{-4}$ 1/град [17] и температурой $T = 80$ °С, получим для величины температурной сжимающей нагрузки p_c , вызывающей осесимметричный продольный изгиб пластины, значение 12,65 МПа, что намного выше максимального из рассчитанных критических значений этой нагрузки (3,17 МПа при $m = 32$) при многоволновой краевой потере устойчивости пластины (см. рис. 4).

Таким образом, многоволновая краевая потеря устойчивости является естественной реакцией круглой пластины на действие сжимающей нагрузки при нагревании пластины в условиях граничного опирания, стесняющего её свободную деформацию.

Заключение

В работе представлены результаты экспериментов, показывающих возможность неосесимметричной потери устойчивости круглой пластины с большим числом волн, локализованных у края пластины при осесимметричной нагрузке, возникающей в процессе равномерного нагревания пластины. Показано, что с помощью простых аналитических моделей можно добиться достаточно полного описания экспериментально наблюдаемых особенностей эффекта краевого неосесимметричного выпучивания круглой пластины.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований РАН III.4.ОЭ и частичной поддержке РФФИ (проект № 16-08-00469) (А.Л. Попов, В.М. Козинцев, Д.А. Челюбеев).

Библиографический список

1. Bryan G.H. On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, with applications to the 'buckling' of the sides of a ship // Proc. Lond. Math. Soc. – 1891. – Vol. 22. – P. 54–67.
2. Макушин В.М. Критические значения интенсивности радиальных сжимающих сил для круглых тонких пластин // Расчёты на прочность. – М.: Машгиз, 1959. – Вып. 4. – С. 271–298.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
4. Bloom F., Coffin D. Handbook of thin plate buckling and postbuckling. – London – New York – Washington: CRC Press, 2000. – 800 p.
5. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
6. Маневич А.И., Пономаренко Е.А. Устойчивость круглых пластин при неравномерном сжатии // Методы розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць ДНУ. – Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2010. – Вип. 11. – С. 190 – 196.
7. Yu L.H., Wang C.Y. Buckling mosaic of a circular plate on a partial elastic foundation // Struct. Eng. and Mech. – 2010. – Vol. 34. – No. 1. – P. 135–138.
8. Панов Д.Ю., Феодосьев В.И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // ПММ. – 1948. – Т. 12, № 4. – С. 384–406; 1949. – Т. 13, № 1. – С. 116.
9. Cheo L.S., Reiss E.L. Unsymmetric wrinkling of circular plates // Quart. Appl. Math. – 1973. – Vol. 31. – No. 1. – P. 75–91.
10. Бауэр С.М., Воронкова Е.Б., Романова А.А. О потере устойчивости осесимметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2012. – Вып. 1. – С. 80–85.
11. Григолюк Э.И. Устойчивость сферической оболочки при конечных прогибах и несимметричной деформации // Изв. АН СССР. Механ. и машиностр. – 1960. – № 6. – С. 68–73.
12. Морозов Н.Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, нагруженной симметричной нагрузкой // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 2. – С. 126–129.
13. Imani K., Showkati H., Ghanbari T. Ghazijahani. Bending experiments on reinforced circular thin plates under uniform pressure // J. Constr. Steel Research. – 2013. – Vol. 80. – P. 308–316.
14. Попов А.Л., Чернышев Г.Н. Механика звукоизлучения пластин и оболочек. – М.: Физматлит, 1994. – 208 с.

15. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Физматлит, 1974. – 560 с.
16. Балабух Л.И., Шаповалов Л.А. Некоторые задачи устойчивости круглых пластин при неоднородном напряжённом состоянии // МТТ. – 1966. – № 5. – С. 60–69.
17. Физические величины: справочник / А.П. Бабичев, Н.А. Бабичев, А.М. Братковский [и др.]; под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

References

1. Bryan G.H. On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, with applications to the 'buckling' of the sides of a ship. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1891, vol. 22, pp. 54-67.
2. Makushin V.M. Kriticheskie znacheniiia intensivnosti radial'nykh szhimaiushchikh sil dlia kruglykh tonkikh plastin [The critical values of the intensity of the longitudinal compressive forces for round thin plates]. *Raschety na prochnost'*. Moscow: Mashgiz, 1959, vol. 4, pp. 271-298.
3. Volmir A.S. Ustoichivost' deformiruemykh sistem [The stability of deformable systems]. Moscow: Nauka, 1967. 984 p.
4. Bloom F., Coffin D. Handbook of Thin Plate Buckling and Postbuckling. London – New York – Washington: CRC Press, 2000. 800 p.
5. Alfutov N. A., Balmont V., Evseev E. Stability of Elastic Structures. Springer, 2000, 338 p.
6. Manevich A.I., Ponomarenko E.A. The stability of circular plates with uneven compression. *Methods for solving applied problems of solid mechanics. Proceedings of the DNU*. Dnepropetrovsk: IMA-press, 2010, vol. 11, pp. 190–196.
7. Yu L.H., Wang C.Y. Buckling mosaic of a circular plate on a partial elastic foundation. *Struct. Eng. and Mech.*, 2010, vol. 34, no. 1, pp. 135–138.
8. Panov D.Yu., Feodosyev V.I. O ravnesii i potere ustoichivosti pologikh obolochek pri bol'shikh progibakh [On balance, and loss of stability of shallow shells under large deflections] *J. Appl. Math. Mech.* 1948, vol. 12, no. 4, pp. 384–406; 1949, vol. 13, no. 1. P. 116.
9. Cheo L.S., Reiss E.L. Unsymmetric wrinkling of circular plates. *Quart. Appl. Math.*, 1973, vol. 31, no. 1, p. 75-91.
10. Bauer S.M., Voronkova E.B., Romanova A.A. O potere ustoichivosti osesimmetrichnykh form ravnesiia kruglykh plastin pod deistviem normal'nogo davleniia [On the unsymmetric buckling of circular plates under normal pressure]. *Vestnik Sankt-Petersburgskogo universiteta*. Seriya. 1, 2012, iss. 1, pp. 80-85.
11. Grigolyuk E.I. Ustoichivost' sfericheskoi obolochki pri konechnykh progibakh i nesimmetrichnoi deformatsii [Stability of a spherical shell at the end deflections and asymmetric deformation] *Izvestiia Akademii nauk USSR. Mekhanika i mashinostroenie*. 1960, no. 6. P. 68-73.
12. Morozov N.F. K voprosu o sushchestvovanii nesimmetrichnogo resheniia v zadache o bol'shikh progibakh krugloi plastiny, zagruzhennoi simmetrichnoi nagruzki [On the question of the existence of asymmetric solutions to the problem of large deflections of a circular plate with a symmetric load]. *Izvestiia vusov. Matematika*, 1961, no. 2, pp. 126-129.
13. Imani K., Showkati H., Ghanbari T. Ghazijahani. Bending experiments on reinforced circular thin plates under uniform pressure. *J. Constr. steel research*, 2013, vol. 80, p. 308-316.
14. Popov A.L., Chernyshev G.N. Mekhanika zvukoizlucheniia plastin i obolochek [The mechanics of sound radiation of plates and shells]. Moscow: Fizmatlit, 1994, 208 p.
15. Feodosyev V.I. Soprotivlenie materialov [Advanced Stress and Stability Analysis]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 421 p.
16. Balabukh L.I., Shapovalov L.A. Nekotorye zadachi ustoichivosti kruglykh plastin pri neodnorodnom napriazhennom sostoianii [Some stability problems of circular plates with nonuniform stress state]. *Mechanics of Solids*, 1966, no. 5, pp. 60-69.
17. Grigoriev I.S., Meilikhov E.Z., Radzig A.A. Handbook of Physical Quantities. – London – New York – Washington: CRC Press, 1996. 1568 p.