

Багмутов В.П., Захаров И.Н., Денисевич Д.С. Особенности решения технологических задач механики неоднородных металлических тел со структурой, трансформирующейся в ходе термосилового нагружения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 1. – С. 5–25. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.01

Bagmutov V.P., Zakharov I.N., Denisevich D.S. Features of solving technological problems in mechanics of bodies with non-uniform metal structure transformed in thermo-force loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 1. Pp. 5-25. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.01



**ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА**

**№ 1, 2016**

**PNRPU MECHANICS BULLETIN**

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.1.01

УДК 539.319 – 539.377

## **ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ НЕОДНОРОДНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ СО СТРУКТУРОЙ, ТРАНСФОРМИРУЮЩЕЙСЯ В ХОДЕ ТЕРМОСИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ**

**В.П. Багмутов, И.Н. Захаров, Д.С. Денисевич**

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 23 сентября 2015 г.  
Принята: 25 января 2016 г.  
Опубликована: 30 марта 2016 г.

#### *Ключевые слова:*

связанные задачи, термоупругопластичность, трансформация структуры, структурная неоднородность, интенсивные воздействия

### АННОТАЦИЯ

В статье предложено решение с единых позиций актуальной для механики, материаловедения и смежных наук проблемы поверхностного упрочнения металлического тела в условиях высокоэнергетических технологических воздействий. На примере импульсной электромеханической обработки (ЭМО) изложены постановка и анализ системы связанных задач формирования структуры и механических свойств обрабатываемого тела.

Приведен алгоритм решения задачи термоупругопластичности с учетом изменения при ЭМО термо-структурного состояния металла, динамических, механических эффектов и трансформации поверхностей деформирования в пространстве интенсивности напряжений, деформаций и температуры. Рассмотрена необходимость постановки и решения специфических материаловедческих задач структурообразования, базирующихся на существующих эмпирических соотношениях.

Предложена процедура согласования шагов временных сеток численного решения для корректного анализа разноскоростных взаимосвязанных процессов для теплового, структурного и механического приближений.

Исследованы сходимость и устойчивость предложенного численного метода решения технологической задачи для ЭМО стали и адекватность результатов анализа известным решениям. Особое внимание уделено вопросам влияния связанности процессов и учета инерционных эффектов в условиях динамически изменяющихся тепловых, структурных и напряженно-деформационных полей в процессе ЭМО.

Приведены примеры расчета распределения возникающих структурных областей и упруго-пластических деформаций и напряжений при ЭМО стальных тел, моделируемых полубесконечными областями с однородной структурой и в виде неоднородной двухслойной композиции, соответствующей образцам с упрочненным поверхностным слоем. Сопоставление полученных результатов позволило выявить и описать тонкие эффекты в распределении напряжений и деформаций в неоднородных телах при трансформации структуры в процессе ЭМО.

© ПНИПУ

© **Багмутов Вячеслав Петрович** – доктор технических наук, профессор, e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru)  
**Захаров Игорь Николаевич** – доктор технических наук, доцент, e-mail: [zaxap@mail.ru](mailto:zaxap@mail.ru)  
**Денисевич Денис Сергеевич** – аспирант, e-mail: [adven148@ya.ru](mailto:adven148@ya.ru)

**Vjacheslav P. Bagmutov** – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru)  
**Igor N. Zakharov** – Doctor of Technical Sciences, Assistant Professor, e-mail: [zaxap@mail.ru](mailto:zaxap@mail.ru)  
**Denis S. Denisevich** – Postgraduate Student, e-mail: [adven148@ya.ru](mailto:adven148@ya.ru)

## FEATURES OF SOLVING TECHNOLOGICAL PROBLEMS IN MECHANICS OF BODIES WITH NON-UNIFORM METAL STRUCTURE TRANSFORMED IN THERMO-FORCE LOADING

V.P. Bagmutov, I.N. Zakharov, D.S. Denisevich

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 23 September 2015  
Accepted: 25 January 2016  
Published: 30 March 2016

#### Keywords:

coupled problems,  
thermo-elasto-plasticity,  
structural heterogeneity,  
intensive exposure

### ABSTRACT

Solution for the actual problems of mechanics, materials science and related sciences of formation of the metal body in high-technological processes was proposed. The paper is related to using pulsed electro-mechanical treatment (EMT) as an example of analysis of production and related problems of structure formation and mechanical properties of the treated body.

The algorithm for solving the thermo-elasto-plasticity problem taking into account changes in the thermo-structural state of metal, dynamic, mechanical effects and surface deformation changes in the space of intensity of stresses, strains and temperature was developed. The necessity of formulating and solving specific problems of material science of structure, based on existing empirical correlations was shown.

The procedure of time grid confirming the correct numerical solution of various-related thermal, structural and mechanical processes was offered.

The convergence, stability and adequacy of the proposed numerical method for solving the technological problems for EMT of steels were developed. Particular attention is paid to the problem of physical processes connectivity and inertial effects in a dynamically changing thermal, structural and stress-strain fields during EMT.

Calculation examples of the structural areas and elasto-plastic stress distribution during EMT of steel bodies simulated by semi-infinite regions with a homogeneous structure and a non-uniform two-layer composition of the sample with hardened surface layer were shown. Comparison of the results has allowed identifying and describing the effects in the stress-strain distribution in inhomogeneous bodies with the transforming structure during EMT.

© PNRPU

---

## Введение

Создание изделий для современной техники с повышенным уровнем механических и служебных свойств инициирует обращение к особому классу связанных задач механики деформируемого твердого тела, ориентированных на описание процессов формирования существенно неоднородной структуры при высокоэнергетических термомеханических воздействиях [1]. Актуальность данной проблемы подтверждается многочисленными публикациями с анализом ее различных аспектов в области сварки [2], литья [3], термической обработки [4], поверхностного упрочнения [5] и т. д.

Однако решение таких задач с единых позиций осложнено необходимостью учета непрерывных и быстротекущих трансформаций структуры, свойств, высоко градиентных напряженно-деформированных состояний (НДС), эффектами динамики (с анализом необходимости учета инерционных членов при записи разрешающих уравнений) и связанности процессов, сложностью согласования временных сеток на различных этапах и масштабах решения тепловой, механической и структурной задач. Кроме того, требуется обращение к специфическим соотношениям вычислительного материаловедения при установлении связей между термонапряженным состоянием в точках тела и образующейся в них структурой.

В работе рассматриваются особенности единой постановки и решения связанных задач на примере электромеханической обработки (ЭМО) стали.

## 1. Постановка задачи

Решение указанной связанной технологической задачи определения НДС неоднородного тела базируется на совместном рассмотрении нескольких групп основных уравнений, соответствующих трем базовым моделям системы. Первую группу составляют уравнения движения и гиперболическое уравнение теплопроводности, соответствующие задаче термоупругопластичности при интенсивном термосиловом нагружении:

$$\Phi_1 T_{,t} + \tau_{rel} \Phi_2 T_{,tt} = \text{div}(k_T \text{grad}T) + f_{\text{дин}} - \beta \alpha T (\varepsilon_{kk,t} + \tau_{rel} \varepsilon_{kk,tt}), \quad (1)$$

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \varepsilon_{kk,i} - \beta (\alpha \Delta T_{,i} + \Delta_{,i}) - \sigma_{ij,j}^p = \rho u_{i,tt} \quad (i, j = 1 \dots 3), \quad (2)$$

где  $T$  – текущая температура;  $t$  – время;  $k_T$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – коэффициент теплоемкости;  $\rho$  – плотность;  $\tau_{rel}$  – время релаксации теплового потока;  $f_{\text{дин}} = f + \tau_{rel} f_{,t}$ ;  $f$  – мощность внутренних источников тепла;  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе;  $\beta = 3\lambda + 2\mu$ ;  $\varepsilon_{kk}$  – первый инвариант тензора деформаций (относительное изменение объема);  $\Phi_1 = c\rho - L \Psi_{,T} + \tau_{rel} \beta \alpha \varepsilon_{kk,t}$ ;  $\Phi_2 = c\rho - L \Psi_{,TT}$ ;  $L$  – энтальпия фазового перехода;  $\Psi$  – массовая доля новой фазы при фазовом переходе;  $u_i$  – компоненты перемещения;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа;  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения;  $\Delta T = T - T_0$  – изменение температуры тела относительно начальной величины  $T_0$ ;  $\Delta$  – относительное изменение размеров при структурном превращении;  $\sigma_{ij}^p$  – дополнительные напряжения (по методу дополнительных деформаций). Для компактности записи уравнений (1), (2) запятая перед нижним индексом означает частную производную по соответствующей переменной.

Особенность формирования системы связанных технологических задач заключается в необходимости анализа диаграмм состояния структур металлического сплава, подвергнутого ЭМО, для определения физико-механических характеристик фаз в данной точке в данный момент времени. Для этого система (1), (2) дополняется условиями формирования металлографических структур стали на основе существующих зависимостей [1, 6] критических температур  $T_{\text{кр}}$  и скоростей их изменения  $T_{,t}^{\text{кр}}$  от текущего химического состава стали, определяющих форму строения металла в каждой точке тела:

$$\left. \begin{aligned} T_{\text{кр}} &= T_{\text{кр}}(C, Cr, Mn, Si, Ni, Mo, \dots), \\ T_{,t}^{\text{кр}} &= T_{,t}^{\text{кр}}(T, T_{\text{кр}}, T_{\text{min}}, \tau_{\text{min}}), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $T_{\text{min}}, \tau_{\text{min}}$  – температура и время минимальной устойчивости аустенита.

Конкретизация зависимостей (3) для сталей различных классов дается в специальной материаловедческой литературе [1, 6–8], например:

для температуры  $A_{c3}$  конца аустенитного превращения (в °C) [7]

$$\begin{aligned} A_{c3} &= 883,49 - 275,89C + 90,91C^2 - 12,26Cr + 16,45CCr - \\ &- 29,96CMn + 8,49Mo - 10,8CMo - 25,56Ni + \\ &+ 1,45MnNi + 0,76Ni^2 + 13,53Si - 3,47MnSi; \end{aligned}$$

для температуры  $M_n$  начала мартенситного превращения [8]

$$M_n = 561 - 474C - 33Mn - 17Ni - 17Cr - 21Mo$$

и т.д.

Кроме членов, учитывающих взаимное влияние термомеханических процессов ( $\varepsilon_{kk,t}$  – в (1) и  $\alpha\Delta T_i$  – в (2)), система (1), (2) включает компоненты, определяющие величину дополнительных деформаций ( $\Delta_{,i}$ ) и скрытую теплоту ( $L\Psi_T$ ) при фазовых переходах. При этом условия (3) дополняются специфическими факторами связанности, устанавливающими смещение критических температур стали в зависимости от скорости нагрева  $T_{,t}^H$  и компонент  $\sigma_{ij}$  тензора напряжений ( $\Delta T_{кр}'$  и  $\Delta T_{кр}''$  соответственно).

$$\Delta T_{кр}' = \Delta T_{кр}'(T_{,t}^H), \quad \Delta T_{кр}'' = \Delta T_{кр}''(\sigma_{ij}). \quad (4)$$

Как и в случае (3), соотношения (4) задаются для каждой из критических точек данной марки стали на стадии нагрева и охлаждения, например:

для точки  $A_{c1}$  углеродистой стали, согласно [9]

$$\Delta T_n = (Ma_0^2 T_{,t}^H / D)^{1/3,25},$$

где  $\Delta T_n$  – изменение температуры начала превращения, °C;  $a_0$  – структурный параметр, равный половине среднестатистического расстояния между зародышами аустенита, см;  $D$  – коэффициент диффузии углерода в аустените, см<sup>2</sup>/с;  $M = 0,075K^2 (12\Delta/\alpha)^{0,25}$  – константа материала;  $K$  – коэффициент, имеющий размерность температуры (для углеродистых сталей  $K = 230$  °C);

для мартенситной точки  $\Delta M_n$  [6, 10]

$$\Delta M_n = A\sigma_0 + BJ_2^{1/2},$$

где  $\sigma_0$  – октаэдрические нормальные напряжения;  $J_2$  – второй инвариант тензора девиатора напряжений;  $A, B$  – эмпирические коэффициенты.

На рис. 1 показана схема взаимодействия связанных задач механики, теплофизики и материаловедения в системе моделей неоднородного тела в условиях нестационарных термосиловых и структурных полей, применительно к технологии поверхностного упрочнения материалов ЭМО.

Выделены три группы базовых моделей, соответствующих системе разрешающих соотношений (1)–(3), а также группа моделей текущего состояния тела (МТС). Последняя включает модели конфигурации, физико-механических свойств формирующегося неоднородного тела и оценки его НДС (например, модели изменения геометрии образующихся структурных зон и внешних контактных поверхностей с уточнением граничных условий связанных задач в ходе деформации; изменение тепловых и механических характеристик материала при фазовых превращениях и т.д.). В силу обширности, разнородности и частного характера моделей описание группы МТС вынесено за рамки данной статьи.

Отмечены факторы связанности рассматриваемых задач, задаваемые соответствующими членами основных уравнений.

Для базовых моделей показаны дополнительные модули: 1) согласования расчетных временных шагов ( $\Delta t'$ ,  $\Delta t''$ ,  $\Delta t'''$ ) при анализе рассматриваемых разноскоростных процес-

сов; 2) учета динамических эффектов, связанных с инерционными членами в уравнениях (1)–(3) (включая изменение  $\tau_{\min}$  в локальных областях неоднородности аустенита, полученного с быстрого нагрева).

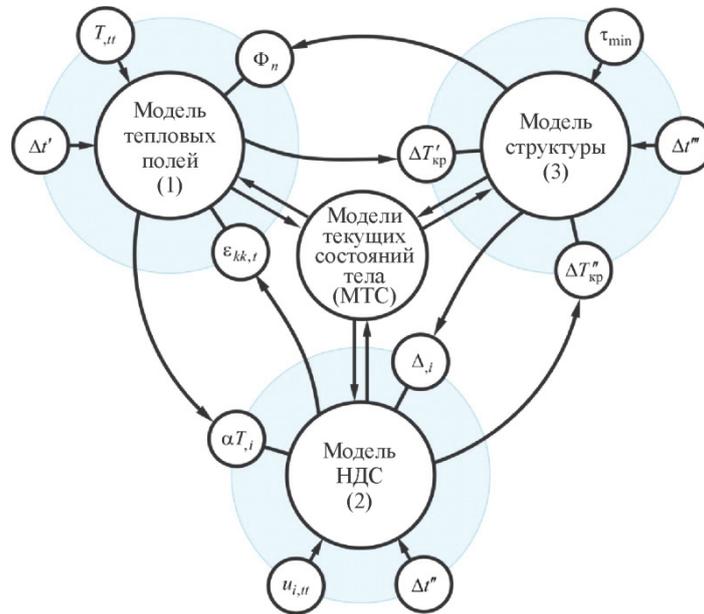


Рис. 1. Система связанных задач формирования структуры и свойств материалов при высокоэнергетических технологических воздействиях

Начальные и граничные условия для системы (1), (2) задаются применительно к импульсной (переменным током) ЭМО стальной детали твердосплавным инструментом в форме ролика [11], моделируемой расчетной областью в виде полупространства с подобластями (зонами) с различающимися физико-механическими характеристиками (рис. 2). Границы данных зон соответствуют областям металла с разной структурой, формирующейся в ходе термосилового нагружения (например, при ЭМО – фрагментам со структурой закалки, отпуска и исходного состояния; зоны 1–3 на рис. 2). Их текущее положение устанавливается на каждом расчетном шаге из решения рассматриваемой связанной задачи (1)–(4).

Принимается гипотеза о недеформированном, ненагруженном состоянии тела в начальный момент времени: напряжения и деформации отсутствуют; температуры одинаковы по объему тела и равны начальной температуре технологической системы. Начальные скорости изменения температуры, с учетом синусоидального закона изменения модуля  $q$  вектора плотности теплового потока при нагреве металла переменным электрическим током, равны нулю. Скорости деформации в начальный момент времени также равны нулю в случае обработки материала инструментом в виде свободно вращающегося ролика, движущегося по поверхности вдоль координатной оси  $Ox$  с линейной скоростью  $v$ :

$$\left. \begin{aligned} u_i^0 = 0, \quad \varepsilon_{ij}^0 = 0, \quad \sigma_{ij}^0 = 0, \quad T^0 = T_{cr}, \\ T_{,t}^0 = 0, \quad u_{i,t}^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

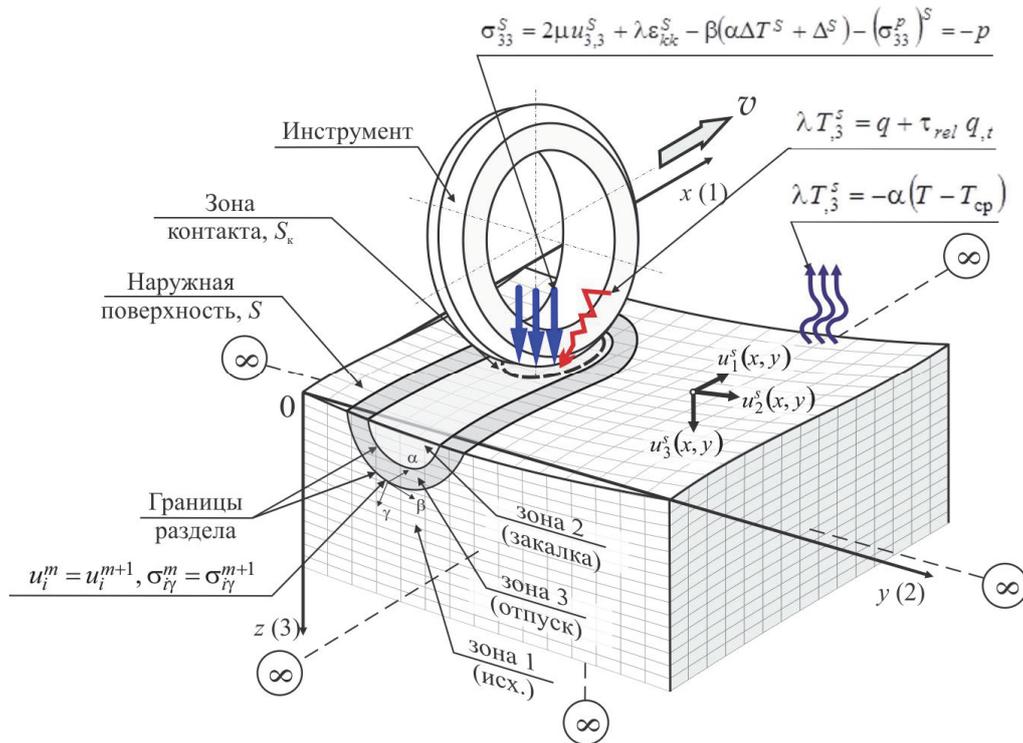


Рис. 2. Расчетная схема неоднородного тела и граничные условия при контактном температурно-силовом воздействии (в ходе ЭМО стали)

В случае невращающегося или приторможенного (проскальзывающего) инструмента в точках его контакта с деталью должны быть заданы соответствующие начальные скорости вдоль направления движения (например,  $u_{1,t}^0 = v$ ).

На внешней границе  $S$  устанавливаются поверхностные нагрузки, перемещения и тепловые потоки, моделирующие условия нагружения и контакта материала (с инструментом и оснасткой) при его обработке.

При этом в подвижной области контакта  $S_k$  обеспечивается соответствие (см. рис. 2): 1) нормальных к поверхности напряжений – действующему давлению  $p$  инструмента на обрабатываемую деталь (остальные напряжения считаются равными нулю); 2) перемещений – профилю инструмента (считая его в первом приближении абсолютно жестким) в точках соприкосновения рабочих поверхностей; 3) плотности теплового потока – удельной мощности импульсного источника  $q$ , действующего в области  $S_k$  при пропускании электрического тока через зону контакта «инструмент–деталь» в ходе ЭМО (6). Необходимо отметить, что конфигурация зоны контакта  $S_k$  заранее неизвестна и устанавливается из итерационной процедуры на основе альтернирующего метода Шварца [12, 13] при поочередном задании на поверхностях контакта векторов перемещений и поверхностных сил с учетом движения зоны контакта и термоструктурных деформаций. В этом случае область  $S_k$  является фактором кинематической связанности задач, от которого зависят плотность теплового потока и давление в зоне контакта, дополняя схему физической связанности (см. рис. 1).

За пределами зоны контакта  $S_k$  наружная поверхность тела охлаждается за счет теплоотдачи во внешнюю среду (с температурой  $T_{cp}$ ) и остается свободной от напряжений.

На границе  $m$  и  $(m + 1)$ -й структурных областей задаются условия совместности перемещений и поперечных (к поверхности раздела заданной в локальной системе координат  $\alpha\beta\gamma$  с нормалью  $\gamma$  в данной точке (см. рис. 2) нормальных и касательных напряжений, на бесконечности – равенство перемещений и напряжений нулю.

Перечисленные граничные условия записаны в виде системы

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{33}^S &= 2\mu u_{3,3}^S + \lambda \varepsilon_{kk}^S - \beta(\alpha \Delta T^S + \Delta^S) - (\sigma_{33}^p)^S = -p, \quad (S \in S_\kappa), \\ u_i^S &= u_i^S(x, y), \quad \lambda_T T_{,3}^S = q + \tau_{rel} q_{,t}, \quad (S \in S_\kappa), \\ \sigma_{ij}^S &= 0, \quad \lambda_T T_{,3}^S = -\alpha_T (T - T_{cp}), \quad (S \notin S_\kappa), \\ u_i^m &= u_i^{m+1}, \quad \sigma_{i\gamma}^m = \sigma_{i\gamma}^{m+1}, \quad i \in \{\alpha, \beta, \gamma\}, \\ u_i^\infty &= 0, \quad \sigma_{ij}^\infty = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Физические соотношения записываются в рамках метода дополнительных деформаций с использованием соотношений теории пластического течения, в предположении изотропного упрочнения, отсутствия эффекта Баушингера и существования единой обобщенной многомерной поверхности неизотермического деформирования металла с трансформирующейся структурой [14, 15], представленной на рис. 3,  $a$  набором поверхностей для различных  $\Psi$ . Приращение полной деформации представляется в виде суммы приращений упругих  $d\varepsilon_{ij}^e$ , температурных  $d\varepsilon_{ij}^T$ , структурных  $d\varepsilon_{ij}^\Delta$  и дополнительных деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$ , описывающих поведение при пластичности в условиях изменяющихся напряжений, температуры и структуры металла:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^\Delta + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (7)$$

Приращения упругих деформаций определяются законом Гука:

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} [(1 + \nu) d\sigma_{ij} - 3\nu \delta_{ij} d\sigma], \quad (8)$$

для остальных параметров используются следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^T &= \delta_{ij} \sum_{k=1}^n \left( d\Psi_k \int_0^T \alpha_k dT + \Psi_k \alpha_k dT \right), \\ d\varepsilon_{ij}^\Delta &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \delta_{ij} \Delta_k d\Psi_k, \\ d\varepsilon_{ij}^p &= \frac{3}{2} (E_\kappa^{-1} - E^{-1}) (d\sigma_i - d\Omega_n) \frac{s_{ij}}{\sigma_i}, \quad (n=1, 2), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $\sigma$  – среднее напряжение;  $s_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений;  $E = E(T, \Psi)$  – модуль упругости;  $E_\kappa = E_\kappa(\sigma_i, T, \Psi)$  – касательный модуль;  $\sigma_T = \sigma_T(\varepsilon_i^p, T, \Psi)$  – мгновенный предел текучести, соответствующий интенсивности накопленной пластической деформации  $\varepsilon_i^p$ , температуре  $T$  и содержанию  $\Psi$  исследуемой фазы;  $d\Omega_1 = \sigma_{T,T} dT$ ,  $d\Omega_2 = \sigma_{T,\Psi} d\Psi$  – изменение мгновенного предела текучести с измене-

нием температуры и фазовых превращений материала;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\alpha_k$  – коэффициент теплового расширения;  $\Delta_k$  – удельное изменение объема  $k$ -й фазы при превращении.

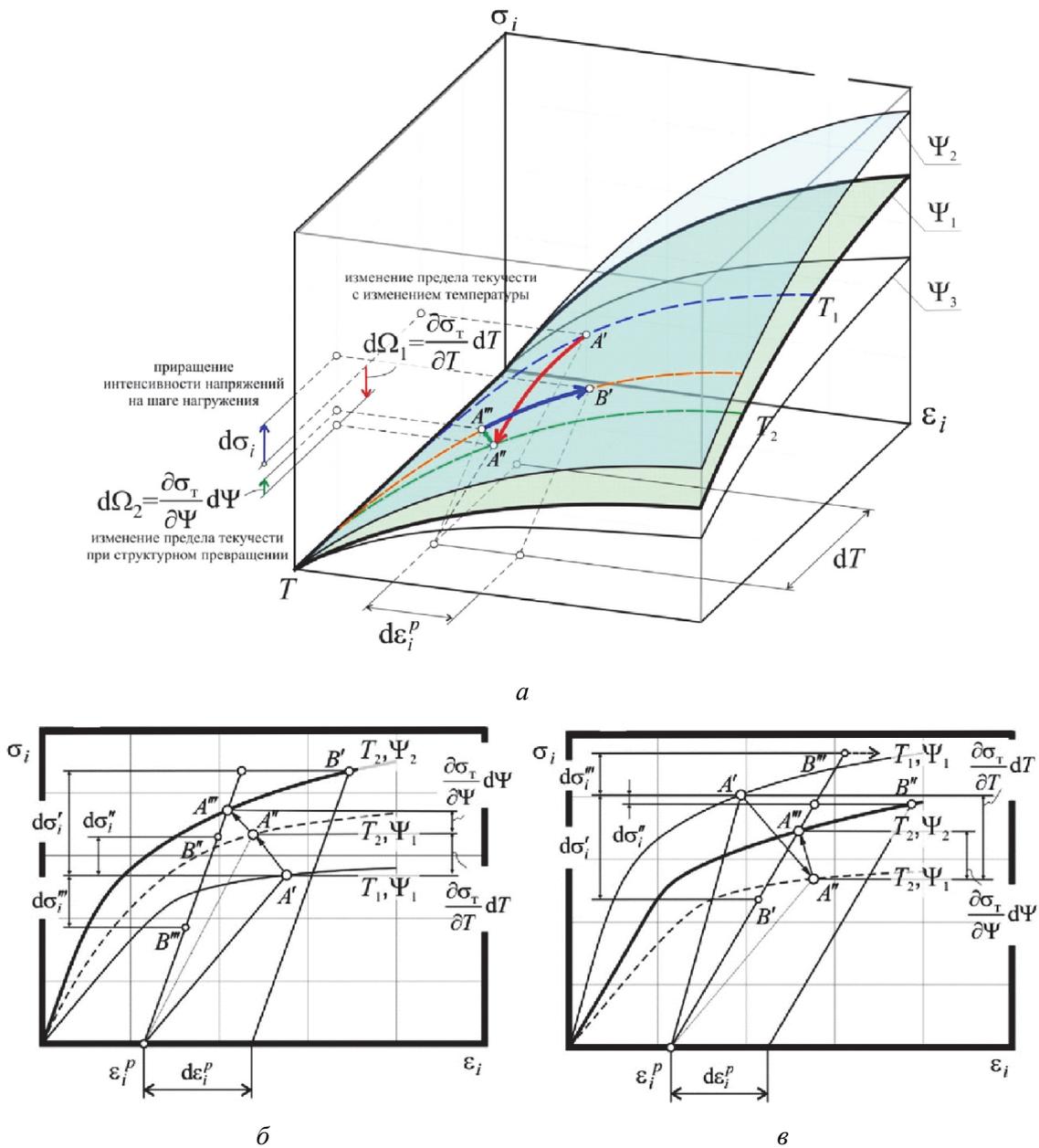


Рис. 3. Анализ условий приращения пластических деформаций на основе семейства поверхностей пластического деформирования ( $A'$  – исходное состояние материала на данном этапе нагружения,  $A''$  – после изменения температуры при неизменном структурном состоянии,  $A'''$  – после изменения температуры и структуры материала):  $a$  – общая схема;  $б$  – при нагреве ( $B'$  – нагружение,  $B''$ ,  $B'''$  – разгрузка);  $в$  – при охлаждении ( $B''$ ,  $B'''$  – нагружение,  $B'$  – разгрузка)

Зависимости диаграмм деформирования и механических свойств ( $E$ ,  $E_k$ ,  $\sigma_T$ ) сталей в различных структурных состояниях от температуры принимаются на основе эмпирических данных и их аппроксимаций, приведенных в работах [4, 16, 17].

Например, согласно [16] для модуля Юнга и предела текучести аустенита

$$E(T) = 2,15 \cdot 10^5 - 87,2T, \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_{\tau_A} = 25,3\sqrt{902 - T} - 104.$$

Для определения доли новых образующихся фаз  $\Psi$  также используются эмпирические зависимости, обобщающие на различные структурные состояния уравнение Колмогорова–Джонсона–Метла–Аврами [16]. Неизотермический характер исследуемых процессов учитывается на основе правила аддитивности Шайля [18].

## 2. Процедура решения задачи

Алгоритм анализа системы рассматриваемых задач в целом соответствует схеме их взаимодействия (см. рис. 1). Система уравнений (1)–(9) решается методом конечных разностей на основе равномерной по каждому направлению разностной сетки с аппроксимацией второго порядка. Применяются как явная (для быстротекущих процессов в микромасштабных областях), так и неявная (для макромасштабных процессов) двух- и трехслойные конечно-разностные схемы, обоснование и сравнительный анализ которых частично (для тепловой задачи) рассмотрены в [19]. При решении используются итерационные процедуры переменных направлений. Устойчивость указанных схем проверяется по известным условиям [20], а также по результатам серии вычислительных экспериментов, приведенным ниже.

Основной особенностью рассматриваемого класса задач является необходимость описания на каждом временном шаге нового состояния неоднородного тела, вызванного перестройкой его структуры в ходе термо-силового нагружения. В этом случае из совместного анализа зависимостей типа (3), (4) и действующих полей напряжений и температур, найденных из (1), (2), устанавливаются текущие положения границ областей структурной неоднородности. Для каждой области из банка данных задаются параметры диаграммы деформирования, теплофизические характеристики, а также возникающие структурные деформации, соответствующие изменению удельного объема металла при фазовых переходах. Далее, согласно (9) вычисляются приращения деформаций  $d\varepsilon_{ij}^e$ ,  $d\varepsilon_{ij}^T$ ,  $d\varepsilon_{ij}^A$  для текущего приближения.

При расчете  $d\varepsilon_{ij}^p$  процедура метода дополнительных деформаций обобщается на случай семейства поверхностей неизотермического пластического деформирования при различных структурных состояниях (см. рис. 3).

В зависимости от соотношения между величинами приращений мгновенного предела текучести  $d\Omega_1$ ,  $d\Omega_2$  и интенсивности напряжений  $d\sigma_i$  в ходе последовательных приближений устанавливается положение точки, изображающей траекторию нагружения и разгрузки материала на множестве поверхностей деформирования, соответствующих текущему сочетанию НДС, температуры и структурных параметров (см. рис. 3). Для установленного таким образом механического состояния в данной точке материала вычисляется приращение пластической деформации  $d\varepsilon_{ij}^p$  (согласно (9)) относительно предыдущего расчетного шага.

Нагружению материала может соответствовать как увеличение интенсивности напряжений – в случаях, если  $d\sigma_i$  больше, чем приращение мгновенного предела текучести

за счет упрочнения материала при его охлаждении или фазовом переходе (точка  $B'$  на рис. 3, а, б), так и их снижение, когда изменение свойств металла приводит к уменьшению мгновенного предела текучести на величину, превышающую  $d\sigma_i$  (точка  $B''$  на рис. 3, в). Разгрузка соответствует активному снижению напряжений на величину  $d\sigma_i$  большую, чем падение мгновенного предела текучести при разупрочнении (точка  $B'$  на рис. 3, в). Повышение механических характеристик материала также может сопровождаться разгрузкой, если приращение интенсивности напряжений меньше приращения предела текучести (точка  $B''$  на рис. 3, б).

Для повышения точности каждый из этапов нагружения разбивается на достаточно малые расчетные шаги. Это относится как к постепенному приложению действующих активных нагрузок, так и к дифференциации шага временной сетки.

При решении связанной задачи возникает необходимость согласования вычислительных процедур с различными шагами по времени в рамках различных методов, используемых при анализе рассматриваемых разноскоростных процессов (например, полный цикл обработки ЭМО поверхности цилиндрической детали, соответствующий одному ее обороту в шпинделе станка, составляет около 4,5 с; длительность одного электрического импульса при обработке переменным током – 0,01 с; стадия нагрева (нагружения) до максимальной температуры – 0,0075 с; время выдержки на мартенсит заковки – 0,5 с, на сорбит – 3,5 с и т. д.). Базовый шаг вычислений, определяемый из условий работоспособности численной схемы (устойчивости, допустимой погрешности счета, накопленной ошибки и т.д.), может уточняться в зависимости от требуемой точности для различных приближений – термического, механического, структурного (рис. 4).

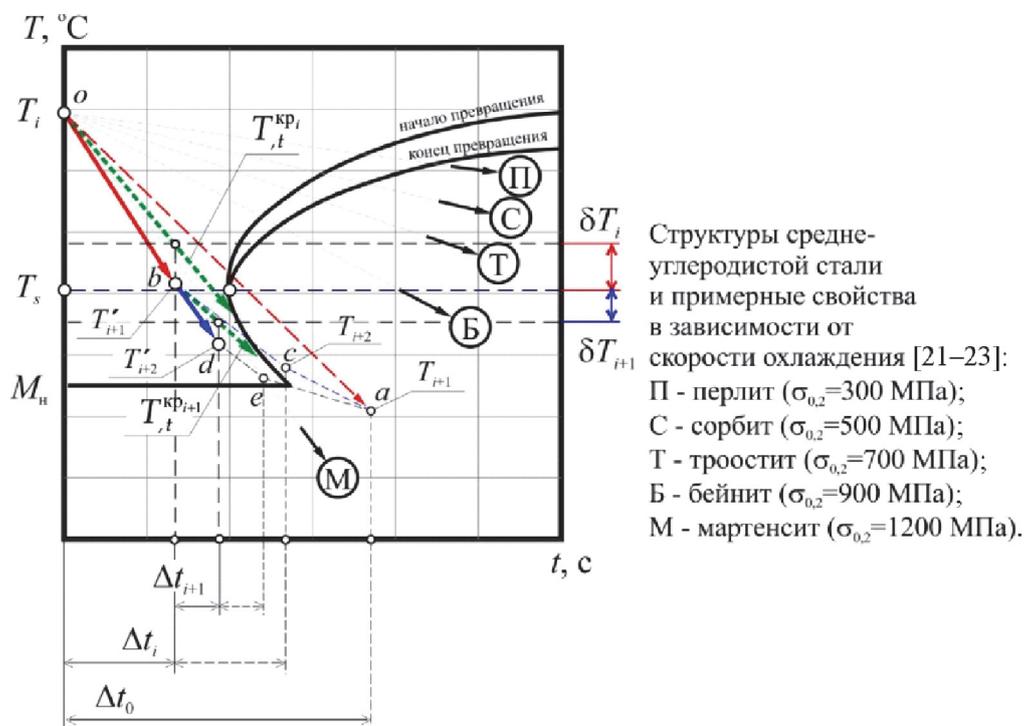


Рис. 4. Схема коррекции шагов временной сетки при совместном анализе разноскоростных процессов (термоструктурная задача) в области критических значений по термокинетической диаграмме ( $T'_{i+1}, T'_{i+2}$  – уточненные значения температуры на  $i+1$  и  $i+2$  итерациях;  $\sigma_{0.2}$  – условный предел текучести материала в текущем структурном состоянии [21–23])

На рис. 4 для примера показана схема коррекции расчетной траектории охлаждения (от прямой  $oa$  при базовом шаге по времени  $\Delta t_0$  до ломаной  $obde$  с уточненными шагами  $\Delta t_i$ ,  $\Delta t_{i+1}$  и т.д.) в момент структурного (мартенситного) превращения в стали для уточнения расчетных величин температуры ( $T_{i+1}$  и  $T_{i+2}$  в  $i+1$  и  $i+2$  итерациях) относительно целевого значения  $T_s$  в критической точке (определяемого по термокинетической диаграмме распада аустенита) (см. рис. 4). В этом случае скорректированная величина шага временной сетки для ближайших итераций находится в зависимости от заданной погрешности размеров структурных зон и условия равенства текущей расчетной скорости охлаждения и критической скорости закалки для рассматриваемого структурного превращения в данный момент времени:

$$\Delta t_i = [T_i - (T_s + \varphi \delta T_i)] / T_{,i}^{кр},$$

$$\delta T_i = \xi \cdot \Delta h_{\min} \cdot \text{grad } T_i,$$

где  $T_{,i}^{кр}$  – критическая скорость изменения температуры на  $i$  итерации;  $\varphi = N - 2k + 1$  ( $N$  – число дополнительных временных шагов, принятых для уточнения решения;  $k$  – номер текущего шага);  $\text{grad } T_i$  – модуль температурного градиента;  $\Delta h_{\min}$  – минимальный размер конечно-разностной ячейки;  $\xi$  – допустимая относительная погрешность определения размера структурной зоны ( $\pm \xi \Delta h_{\min}$ , в первом приближении  $\xi = 0,5$ ).

Таким образом, расчетный временной шаг, уточненный на каждой итерации решения связанной задачи, обеспечивает рациональное (по вычислительным затратам) описание высокоскоростных эффектов вблизи характерных точек при контролируемом уровне погрешности (траектория  $ob-bd-de-ea$ , рис. 4). При этом расчет с фиксированным (для одной из задач) шагом может приводить к заметным погрешностям при анализе сопряженных процессов (например, на рис. 4 траектории  $oa$  при шаге  $\Delta t_0$  или  $ob-bc-ca$  при  $\Delta t_i$ , приводящие к ошибкам в определении размеров и составе формирующихся структурных зон).

### 3. Сходимость и устойчивость метода. Адекватность модели

Устойчивость решения по Адамару проверялась на основе известной процедуры многократного пересчета с вариацией в широком диапазоне параметров сетки, граничных условий, свойств материала с установлением степени отклонения полученных результатов (табл. 1 и рис. 5).

Как видно из табл. 1, при изменении количества узлов сетки в 3–8 раз (с соответствующим измельчением или увеличением шагов) значения максимальной температуры изменяются не более чем на 5 %, модуль температурного градиента – не более чем на 2 %, величины максимальных линейных деформаций (по оси  $Oz$  на рис. 2) – на 30–40 %, интенсивности напряжений – 15–20 % и т. д. Увеличение удельной мощности теплового источника  $q$  от 5 до 50 % сопровождается пропорциональным повышением температуры от 3 до 34 %, модуля градиента – от 5 до 50 %, деформаций – от 8 до 80 %, интенсивности напряжений – от 4 до 45 %. Указанные величины отклонений являются максимальными из достигнутых в различных точках расчетной области, при этом качественный характер полученных закономерностей не изменяется во всем диапазоне изменения параметров задачи (см. рис. 5).

Таблица 1

Изменение максимальных расчетных значений температуры ( $T$ ), модуля температурного градиента ( $\text{grad } T$ ), осевой деформации ( $\epsilon_{33}$ ) и интенсивности напряжений ( $\sigma_i$ ) в зоне обработки при ЭМО в зависимости от количества узлов сетки и удельной мощности ( $q$ ) теплового источника

№	Параметры решения	$T$	$\text{grad } T$	$\epsilon_{33}$	$\sigma_i$
1	100x100x50 = 500000 узлов $q = 5,82 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2$	1720 °C	4284 °C/м	0,285 %	1888 МПа
2	50x50x25 = 62500 узлов $q = 5,82 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2$	+3,8 %	-1,1 %	-36 %	-19 %
3	125x125x100 = 1562500 узлов $q = 5,82 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2$	-2,3 %	+0,2 %	+29 %	+17 %
4	100x100x50 = 500000 узлов $q = 6,11 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2 (+5 \%)$	+3,0 %	+5,0 %	+7,8 %	+4,3 %
5	100x100x50 = 500000 узлов $q = 7,28 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2 (+25 \%)$	+15,8 %	+25,3 %	+39,6 %	+21,9 %
6	100x100x50 = 500000 узлов $q = 8,73 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2 (+50 \%)$	+33,5 %	+50,9 %	+81,9 %	+45,3 %

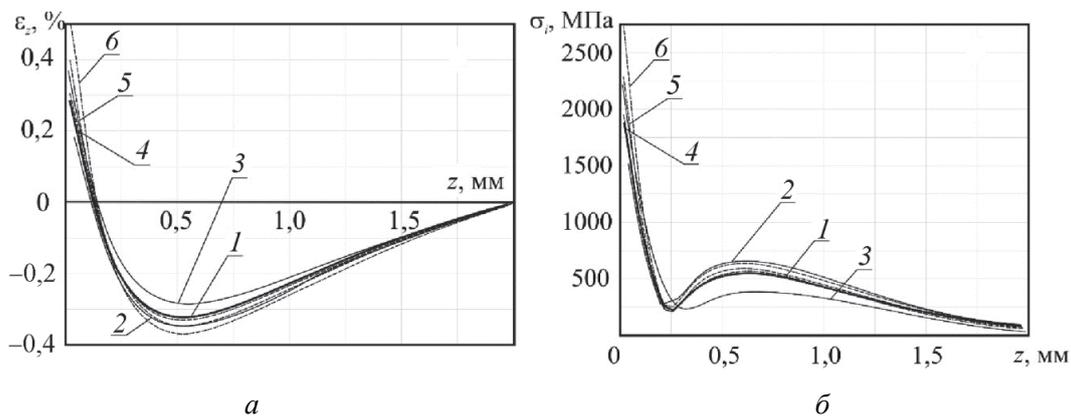


Рис. 5. Изменение расчетных максимальных линейных деформаций (вдоль оси  $Oz$  образца) и интенсивности напряжений по глубине поверхностного слоя стального образца при ЭМО для различных параметров сетки и мощности источника (обозначения кривых 1–6 соответствуют данным табл. 1)

Адекватность разработанных моделей проверялась на основе сопоставления результатов решения тестовых задач при помощи различных методов. В частности, ниже приводятся данные такого анализа для задачи о напряжениях в бесконечном однородном цилиндре при термоупругих деформациях (рис. 6, а) и в неоднородном цилиндре с упрочненным поверхностным слоем при термоупругопластических деформациях (рис. 6, б). В первом случае (см. рис. 6, а) результаты, полученные по разработанной модели, сопоставляются с известным [24] аналитическим решением задачи и численным (МКЭ) решением на базе *Ansys*, во втором (см. рис. 6, б) – сопоставление проводится с результатами расчетов по численно-аналитической модели, приведенной в [25]. Взаимное отклонение результатов решения указанных задач по различным методикам не превышает 5 % (рис. 6).

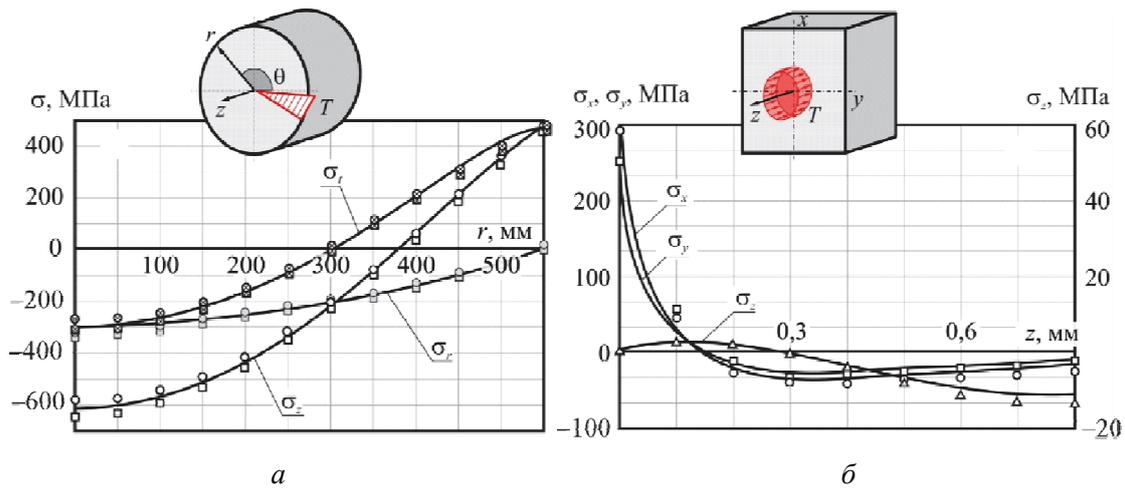


Рис. 6. Сопоставление расчетных напряжений, полученных разными методами: *a* – цилиндр с линейным по радиусу распределением температуры (линия – аналитический расчет, кружки – МКЭ *Ansys*, квадраты – рассматриваемая модель); *б* – полупространство с равномерным распределением температуры в эллиптической области (линия – численно-аналитический расчет [25], точки – рассматриваемая модель)

#### 4. Влияние связанности и инерции

Для оценки необходимости учета эффектов связанности при записи и анализе основных уравнений термоупругости (1), (2) проведены тестовые расчеты по определению скоростей изменения температуры и деформаций (рис. 7, *a*) в исследуемой расчетной области (неоднородное полупространство) при характерном для ЭМО импульсном температурно-силовом воздействии (при действии на поверхность материала движущегося эллипсоидного штампа и импульсного теплового источника). Показаны приведенные к максимальным значениям величины ( $f_i/f_i^{\max}$ ) температуры ( $i = 1$ ;  $T^{\max} = 1640$  °C), скорости нагрева/охлаждения ( $i = 2$ ;  $T_{,t}^{\max} = 4,5 \cdot 10^5$  °C/c), объемной деформации ( $i = 3$ ;  $\varepsilon_{kk}^{\max} = 0,0275$ ) и скорости ее изменения ( $i = 4$ ;  $\varepsilon_{kk,t}^{\max} = 8,6$  с<sup>-1</sup>) в фиксированной точке на поверхности тела.

При рассматриваемых воздействиях указанные величины изменяются по подобным закономерностям с некоторым опережением во времени процессов деформации над процессами изменения температуры за счет механического действия движущегося штампа (рис. 7, *a*).

На основе полученных данных вычисляются параметры связанности, определяющие влияние тепловых источников при деформации на распределение температуры и соотношение скоростей деформаций и температур. Согласно [24, 26] связанность будет малой, если указанные безразмерные параметры (обозначенные как  $\omega$  и  $\nu$ ) удовлетворяют следующим соотношениям

$$\omega = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 T^0}{\rho c (\lambda + 2\mu)} \ll 1, \quad (10)$$

$$\nu = \frac{\varepsilon_{kk,t}}{3\alpha T_t} \ll \frac{\lambda + 2\mu/3}{(\lambda + 2\mu)\omega}. \quad (11)$$

На рис. 7, б показан характер изменения  $\omega$  и  $\nu$  в различные моменты времени протекания характерного для ЭМО термосилового нагружения (при действии на поверхность материала движущегося эллипсоидного штампа и импульсного теплового источника). Для установления диапазона возможных значений параметров в (10), (11) принято равенство начальной температуры  $T^0$  текущему значению  $T$  в данный момент времени согласно рис. 7, а. Рассчитанные для различных  $T$  максимальные величины параметра  $\omega$  (соответствующие физико-механическим характеристикам стали) не превышают 0,08 (кривая 1, рис. 7, б), что удовлетворяет условию (7).

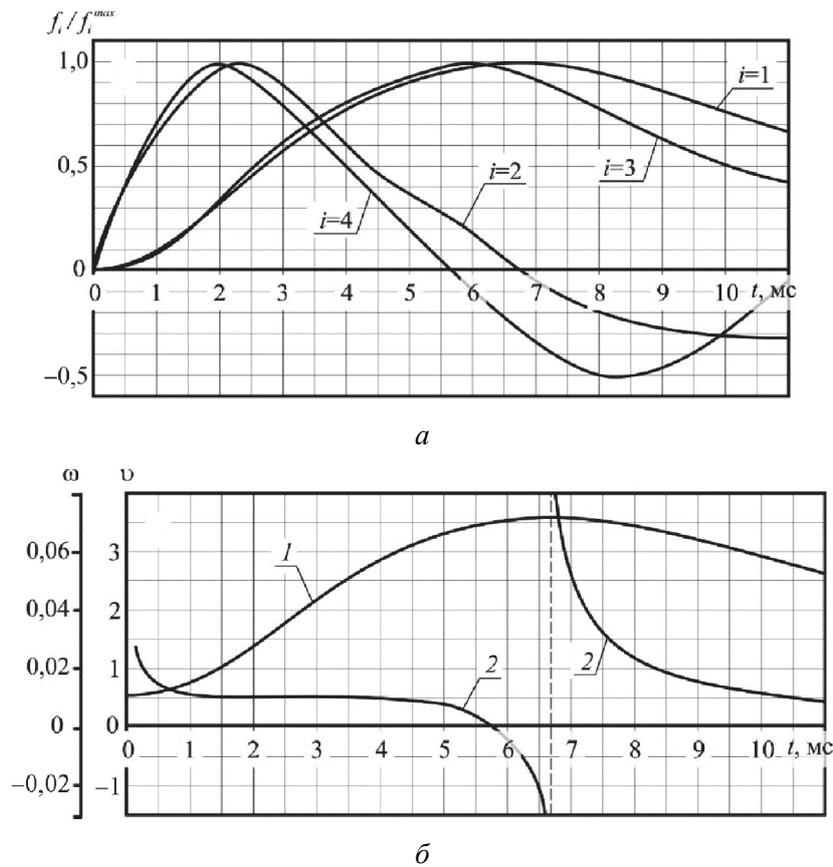


Рис. 7. Изменение относительных расчетных величин (а) температуры ( $i = 1$ ), скорости нагрева / охлаждения ( $i = 2$ ), объемной деформации ( $i = 3$ ) и скорости ее изменения ( $i = 4$ ), а также (б) безразмерных параметров  $\omega$  (кривая 1) и  $\nu$  (кривая 2) в центре пятна контакта за время одного теплового импульса (полупериод электрического тока)

Параметр  $\nu$  (кривая 2, рис. 7, б) принимает значения от 1,5 до 0,5 на интервалах наибольших скоростей деформации и температуры (0–6 и 8–10 мс; рис. 7, б), резко увеличиваясь при околонулевых скоростях теплового поля (в интервале 6–8 мс; рис. 7, б). При этом правая часть неравенства (11) за время одного температурного импульса меняется от 55 до 8, превышая текущие значения  $\nu$  на большей части исследуемого интервала. Это означает, что скорости изменения температур и деформаций являются величинами одного порядка и дают возможность с учетом малости дополнительных слагаемых, оцениваемых параметром  $\omega$  в условии (10), пренебречь членами связанности в уравнении теплопроводности.

Как показали дополнительные расчеты, проведенные авторами [19], учет инерционных членов в уравнениях (1), (2) в исследуемом случае (при ЭМО металлов и покрытий) дает поправку в значениях температур и напряжений менее 1 %, при этом время расчета возрастает более чем на 20 % по каждому из этапов решения.

## 5. Результаты расчета

Далее приводятся результаты расчета напряжений при ЭМО стального образца с учетом образующейся структурной неоднородности и упруго-пластических деформаций.

Решение задачи искалось при следующих исходных данных: размеры расчетной области – параллелепипед размерами  $5 \times 5 \times 1$  мм, выделенный из полупространства (на сетке  $100 \times 100 \times 50$  узлов); толщина поверхностного слоя (покрытия) – 0,15 мм; материал – сталь 45 нормализованная и закаленная; скорость обработки (движения источника) – 5 м/мин; размеры зоны воздействия (большая и малая полуоси эллипса) –  $1,4 \times 0,9$  мм; ток (амплитуда) – 400 А, плотность тока –  $404 \text{ А/мм}^2$ , частота – 50 Гц; напряжение – 3 В; плотность теплового потока –  $5,8 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2$ ; деформирующее усилие в зоне обработки – 1000 Н.

Получены расчетные картины формирования упрочненных фрагментов в поверхностном слое закаленной стали 45 в различные моменты времени в ходе ЭМО (рис. 8). Иллюстрируется образование отдельных упрочненных фрагментов, соответствующих единичному тепловому импульсу электрического тока. Показано постепенное продвижение зоны разупрочнения (составленной из продуктов высокоскоростного отпуска исходной мартенситной структуры) в поверхностном слое на глубину около 1 мм (зона 3 на рис. 2) и формирование закаленной зоны на глубину до 0,2 мм с образованием регулярной дискретной структуры (зона 2 на рис. 2).

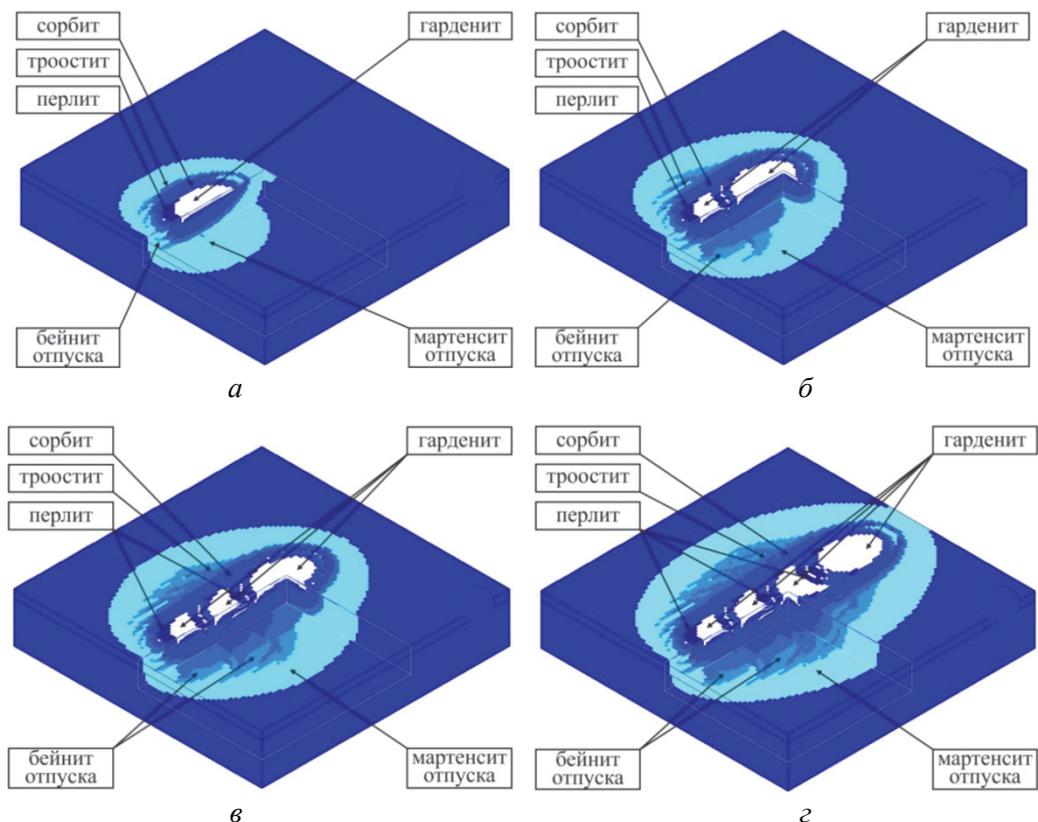


Рис. 8. Расчетные картины формирования неоднородной структуры деформируемого тела на примере технологии упрочнения поверхностного слоя стали 45 в ходе ЭМО в различные моменты времени от начала процесса: *a* – 7,5 мс; *б* – 17,5 мс; *в* – 27,5 мс; *г* – 37,5 мс

Для сравнения на рис. 9, *а* показана фотография, полученная на растровом электронном микроскопе, двух соседних упрочненных в ходе ЭМО фрагментов («белый слой») и зоны отпуска между ними и в исходном материале (закаленная сталь 45), а на рис. 9, *б* – их сопоставление с соответствующими расчетными картинками структуры упрочненного трека.

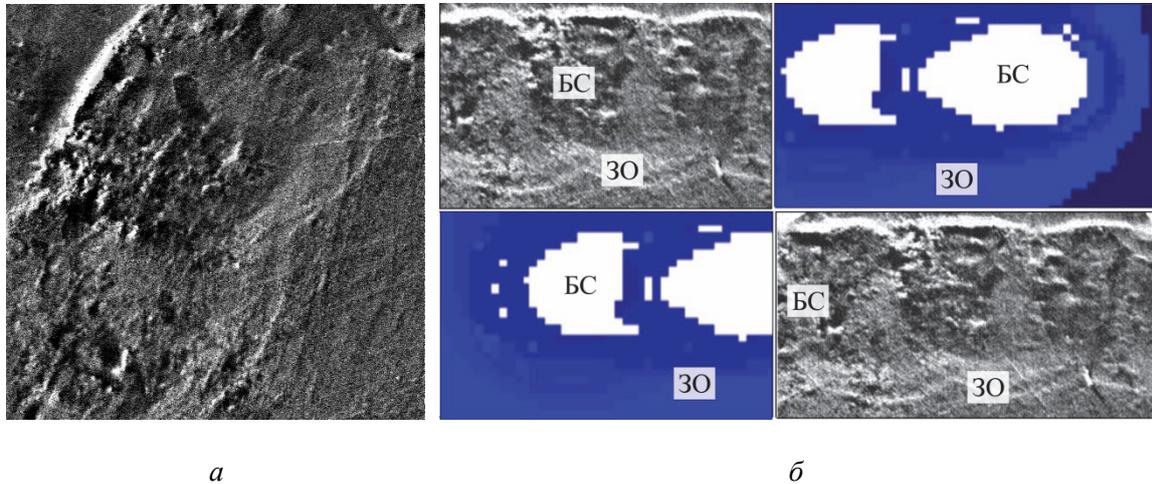


Рис. 9. Фрагменты белого слоя (*а*) после ЭМО поверхности закаленной стали 45 ( $\times 400$ ) и сопоставление (*б*) расчетных и экспериментальных данных о распределении структур в упрочненном треке (БС – белый слой; ЗО – зона отпуска)

На рис. 10 показаны расчетные картины распределения интенсивности напряжений (в абсолютных и относительных (к пределу текучести  $\sigma_T$ ) единицах) в объеме поверхностного слоя материала в ходе ЭМО для момента времени, соответствующего максимуму теплового потока (7,5 мс). Сопоставляются результаты решения термоупругопластической задачи для однородного тела (рис. 10, *а, в*) и для двухслойной композиции, моделирующей в первом приближении материал со сплошным (без учета отдельных фрагментов, треков и зон отпуска) (см. рис. 2) упрочненным поверхностным слоем (рис. 10, *б, г*).

В объеме материала в ходе ЭМО формируется сложное НДС. В зоне обработки под действием контактной нагрузки возникают высокие сжимающие напряжения, максимальная интенсивность  $\sigma_i$  которых на поверхности тела достигает 300–400 МПа для однородного тела и около 700 МПа – для неоднородного материала с упрочненным слоем на поверхности. При этом для инструмента в форме эллипсоидного штампа наибольшая интенсивность достигается на периферии зоны контакта (тогда как для равномерно распределенной нагрузки – в центре данной зоны). По мере удаления от области контакта интенсивность напряжений снижается (до 1,5–2 раз на глубине 0,15 мм, соответствующей границе упрочненного слоя с исходным материалом), а с достижением предела текучести  $\sigma_T$  в данной точке упругопластические деформации распространяются на соседние области (прежде всего – по глубине материала), где уровень  $\sigma_i$  также приближается к  $\sigma_T$ .

Формирование тонкого высокопрочного поверхностного слоя в ходе контактного температурно-силового воздействия приводит к перераспределению напряжений в неоднородном теле – упрочненная поверхность воспринимает наибольшие напряжения и деформации, разгружая подложку. На границе слоя и подложки уровень  $\sigma_i$  также несколько выше интенсивности напряжений в однородном теле на соответствующей глубине (0,15 мм) от поверхности (см. рис. 10, кривые 3 и 4).

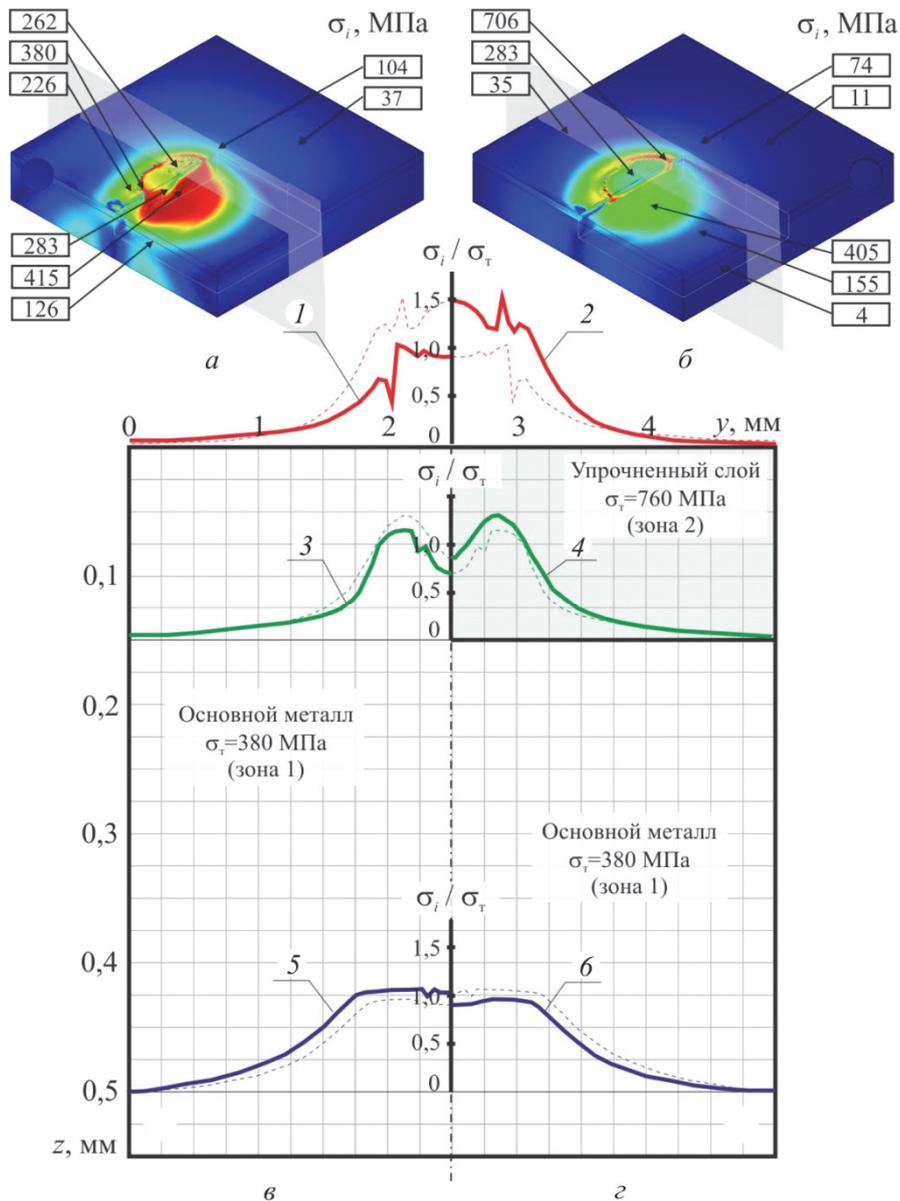


Рис. 10. Распределение интенсивностей напряжений в объеме расчетной области (а, б) и их относительных (к пределу текучести  $\sigma_T$ ) величин (в, з) в поперечном сечении через центр зоны контакта инструмента и детали для однородного (а, в; кривые 1, 3, 5) и неоднородного тела (б, з; кривые 2, 4, б): 1, 2 – на глубине  $z = 0$  мм; 3, 4 –  $z = 0,15$  мм; 5, 6 –  $z = 0,5$  мм

Расчеты, проведенные в рамках разработанной модели, позволили определить картины распределения температурных, фазовых и суммарных остаточных напряжений по глубине упрочненного ЭМО слоя (рис. 11). Анализ полученных зависимостей подтвердил, что формирование величины и знака остаточных напряжений в приповерхностных областях происходит в соответствии с двумя «конкурирующими» механизмами. При этом термические напряжения играют определяющую роль при высоких температурах на стадии нагрева, а также на начальном этапе охлаждения и приводят к формированию на поверхности материала растягивающих остаточных напряжений. Фазовые напряжения начинают сказываться при охлаждении в более низком интервале температур, соответствующих мартенситному превращению, и являются причиной возникновения в упрочненном слое сжимающих остаточных напряжений.

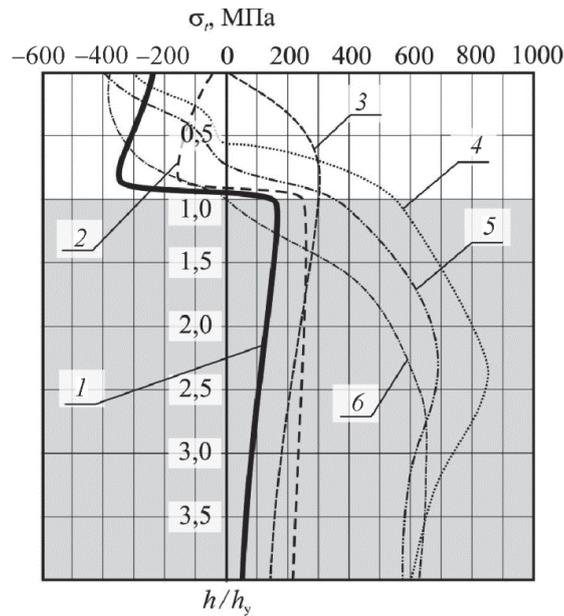


Рис. 11. Сопоставление расчетных (линия 1) и экспериментальных (линия 2 – И.И. Колпакас; 3 – М.С. Нерубай, А.П. Овчинников; 4, 5, 6 – Б.М. Аскинази) данных о распределении окружных остаточных напряжений по сечению материала после ЭМО (глубина упрочненного слоя – 0,2 мм)

Сопоставление (см. рис. 11) полученных теоретических результатов с экспериментальными данными (Б.М. Аскинази [27], А.Г. Григорьянца, И.И. Колпакаса [28], М.С. Нерубая [29] и др.) свидетельствует о достигнутом согласовании по характеру распределения напряжений по сечению материала.

## Выводы

1. Показано, что при решении рассматриваемого класса связанных технологических задач необходимо систему основных уравнений механики термоупругопластических деформаций дополнить специфическими соотношениями вычислительного материаловедения, устанавливающими связь между термо-напряженным состоянием в точке тела и образующейся в ней структурой.

2. Обоснованы важность и необходимость согласования шагов временных сеток для каждой из рассматриваемых связанных задач (тепловой, механической, структурной) для повышения точности описания формирующегося состояния тела.

3. Проведенный анализ решения задач (на основе известных условий оценки связанности и инерционных эффектов) в приложении к технологии поверхностного упрочнения импульсной ЭМО позволил ввести корректные упрощения в тепловой задаче (на базе параболического уравнения теплопроводности) и в описании тонких эффектов влияния деформаций на тепловыделение.

4. С учетом описанных особенностей разработан итерационный алгоритм численного описания прямых и обратных связей между тепловой, упругопластической задачами и процессами структурообразования.

5. На основе сопоставительного анализа собственных и известных расчетных и экспериментальных результатов выявлены особенности распределения полей напряжений и деформаций в телах с трансформирующейся структурой и показана существенная роль неоднородности строения в формировании конечного состояния изделия.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 14-08-00837 а, № 14-01-97028 *p\_поволжье\_a*, а также в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России № 2014/16.

## Библиографический список

1. Исупова И.Л., Трусков П.В. Обзор математических моделей для описания фазовых превращений в сталях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 157–191.
2. Prakash J., Tewari S.P., Srivastava B.K. Nucleation, Graingrowth, Solidification and Residual Stress Relaxation Under Stationary and Vibratory Welding Condition – A Review // Int. J. Engg. Techsci. – 2010. – No. 1 (1). – P. 1–17.
3. Тихомиров М.Д. Основы моделирования литейных процессов. Важные особенности систем моделирования // Литейное производство. – 2004. – № 5. – С. 24–30.
4. Покровский А.М. Расчет НДС в цельнокованных и биметаллических прокатных валках при термической обработке // Изв. вузов. Машиностроение. – 2012. – № 4. – С. 35–41.
5. Багмутов В.П., Захаров И.Н. Моделирование структурных превращений при электрохимической обработке стали // Физика и химия обработки материалов. – 2002. – № 4. – С. 29–32.
6. Şimşir C., Gür C.H. Mathematical Framework for Simulation of Thermal Processing of Materials: Application to Steel Quenching // Turkish J. Eng. Env. Sci. – 2008. – No. 32. – P. 85–100.
7. Lusk M.T., Lee Y.K. A global material model for simulating the transformation kinetics of low alloy steels // Proceedings of the 7th international seminar of the international IFHT. – Budapest, 1999. – 273 p.
8. Andrews K.W. Empirical formulae for the calculation of some transformation temperatures // Journal of the iron and steel institute. – 1965. – Vol. 203. – P. 721–727.
9. Физические основы электротермического упрочнения стали / В.Н. Гриднев, Ю.Я. Мешков, С.П. Ошкадеров, В.И. Трефилов. – Киев: Наук. дум., 1973. – 436 с.
10. Inoue T., Wang Z.G. Coupling between Stress, Temperature, and Metallic Structures During Processes Involving Phase-Transformations // Mater. Sci. Technol. – 1985. – No. 1. – 845 p.
11. Электрохимическая обработка: технологические и физические основы, свойства, реализация / В.П. Багмутов, С.Н. Паршев, Н.Г. Дудкина, И.Н. Захаров. – Новосибирск: Наука, 2003. – 318 с.
12. Schwarz H.A. Gesammelte mathematische Abhandlungen. Zweiter Band. – Berlin: Springer, 1890. – 396 s.
13. Станкевич И.В., Яковлев М.Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2011. – Спец. вып. Прикладная математика. – С. 134–141.
14. Термопрочность деталей машин / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, И.В. Демьянушко [и др.]; под ред. И.А. Биргера и Б.Ф. Шорра. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с.
15. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. – М.: Наука, 1981. – 141 с.
16. Вафин Р.К., Покровский А.М., Лешковцев В.Г. Прочность термообрабатываемых прокатных валков. – М.: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана, 2004. – 264 с.
17. Атлас диаграмм растяжения при высоких температурах, кривых ползучести и длительной прочности сталей и сплавов для двигателей / И.П. Булыгин, П.Т. Власова, А.Т. Горбодей [и др.]. – М.: Оборонгиз, 1954. – 174 с.
18. Scheil E. Anlaufzeit Der Austenitumwandlung // Archives Eisenhüttenwes. – 1935. – No. 8(12). – P. 565–567.
19. Багмутов В.П., Захаров И.Н. Моделирование тепловых процессов при поверхностной обработке неоднородных металлических тел высокотемпературным движущимся импульсным источником // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 5–16.
20. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

21. Гуляев А.П. *Металловедение*. – М.: Металлургия, 1977. – 648 с.
22. *Термическая обработка в машиностроении: справочник* / под ред. Ю.М. Лахтина, А.Г. Рахштадта. – М.: Машиностроение, 1980. – 783 с.
23. Багмутов В.П., Захаров И.Н. Моделирование механического поведения образца, поверхностно-упрочненного обработкой концентрированными потоками энергии // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. – 2000. – Т. 66, № 7. – С. 52–58.
24. Боли Б., Уэйнер Дж. *Теория температурных напряжений*. – М.: Мир, 1964. – 518 с.
25. Багмутов В.П., Захаров И.Н. Математическое моделирование нестационарных процессов формирования высокоградиентных структурно-фазовых и напряженно-деформированных состояний при получении и обработке материалов // *Изв. вузов. Черная металлургия*. – 2005. – № 2. – С. 19–25.
26. Коваленко А.Д. *Основы термоупругости*. – Киев: Наук. дум., 1970. – 308 с.
27. Аскинази Б.М. *Упрочнение и восстановление деталей машин электромеханической обработкой*. – М.: Машиностроение, 1989. – 200 с.
28. Калпокас И.И. Влияние режимов электромеханического упрочнения на остаточные напряжения и усталостную прочность: дис. ... канд. техн. наук. – Каунас: КПИ, 1974.
29. Нерубай М.С., Овчинников А.П. Формирование остаточных напряжений при комбинированном электромеханическом и ультразвуковом упрочнении // *Поверхностное упрочнение деталей машин и инструментов: межвуз. сб. науч. тр.* – Куйбышев: КПТИ, 1976. – С. 71–73.

## References

1. Isupova I.L., Trusov P.V. *Obzor matematicheskikh modelei dlia opisaniia fazovykh prevrashchenii v staliakh* [Review of mathematical models for phase transformations in steels]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2013, no 3, pp. 157-191.
2. Prakash J., Tewari S.P., Srivastava B.K. Nucleation, Graingrowth, Solidification and Residual Stress Relaxation Under Stationary and Vibratory Welding Condition – A Review. *Int. J. Engg. Techsci.*, 2010, no. 1 (1), pp. 1-17.
3. Tikhomirov M.D. *Osnovy modelirovaniia liteinykh protsessov. Vazhnye osobennosti sistem modelirovaniia* [Basics of simulation of casting processes. Important features of modeling systems]. *Liteinoe proizvodstvo*, 2004, no 5, pp. 24-30.
4. Pokrovskii A.M. *Raschet NDS v tsel'nokovanykh i bimetallicheskikh prokatnykh valkakh pri termicheskoi obrabotke* [Calculation of stress-strain state in the solid-forged and bimetallic rolling rolls during heat treatment]. *Izvestiia vuzov. Mashinostroenie*, 2012, no. 4, pp. 35-41.
5. Bagmutov V.P., Zakharov I.N. *Modelirovanie strukturnykh prevrashchenii pri elektromekhanicheskoi obrabotke stali* [Simulation of structural transformations in electrochemical processing of steel]. *Fizika i khimiia obrabotki materialov*, 2002, no. 4, pp. 29-32.
6. Şimşir C., Gür C.H. *Mathematical Framework for Simulation of Thermal Processing of Materials: Application to Steel Quenching*. *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 2008, no. 32, pp. 85-100.
7. Lusk M.T., Lee Y.K. *A global material model for simulating the transformation kinetics of low alloy steels*. *Proceedings of the 7th international seminar of the international IFHT. Budapest*, 1999. 273 p.
8. Andrews K.W. *Empirical formulae for the calculation of some transformation temperatures*. *Journal of the iron and steel institute*, 1965, vol. 203, pp. 721-727.
9. Gridnev V.N., Meshkov Iu.Ia., Oshkaderov S.P., Trefilov V.I. *Fizicheskie osnovy elektrotermicheskogo uprochneniia stali* [Physical basis of the electro-hardening steel]. *Kiev: Naukova dumka*, 1973. 436 p.
10. Inoue T., Wang Z.G. *Coupling between Stress, Temperature, and Metallic Structures During Processes Involving Phase-Transformations*. *Mater. Sci. Technol.*, 1985, no. 1, 845 p.
11. Bagmutov V.P., Parshev S.N., Dudkina N.G., Zakharov I.N. *Elektromekhanicheskaia obrabotka: tekhnologicheskie i fizicheskie osnovy, svoistva, realizatsiia* [Electro-mechanical treatment: the technological and physical fundamentals, properties, realization]. *Novosibirsk: Nauka*, 2003. 318 p.

12. Schwarz H.A. Gesammelte mathematische Abhandlungen. Zweiter Band. Berlin: Springer, 1890. 396 p.

13. Stankevich I.V., Iakovlev M.E., Si Tu Khtet Razrabotka algoritma kontaktnogo vzaimodeistviia na osnove al'terniruiushchego metoda Shvartsa [Development of algorithm of contact interaction on the basis of the Schwarz alternating method]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki*, 2011, spetsialnyi vypusk. Prikladnaia matematika, pp. 134-141.

14. Birger I.A., Shorr B.F., Dem'ianushko I.V. [et al.] Termoprochnost' detalei mashin [The thermal resistance of machine parts]. Eds. I.A. Birger, B.F. Shorr. Moscow: Mashinostroenie, 1975. 455 p.

15. Mavliutov R.R. Kontsentratsiia napriazhenii v elementakh aviatsionnykh konstruksii [Stress concentration in the elements of aircraft structures]. Moscow: Nauka, 1981. 141 p.

16. Vafin R.K., Pokrovskii A.M., Leshkovtsev V.G. Prochnost' termoobrabatyvaemykh prokatnykh valkov [The strength of heat treatable rolls]. *Moskovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet im. N.E. Baumana*, 2004. 264 p.

17. Bulygin I.P., Vlasova P.T., Gorbodei A.T. i dr. Atlas diagramm rastiazheniia pri vysokikh temperaturakh, krivykh polzuchesti i dlitel'noi prochnosti stalei i splavov dlia dvigatelei [Atlas diagrams of stretching at elevated temperatures, creep curves and creep rupture of steels and alloys for engines]. Moscow: Oborongiz. 1954. 174 p.

18. Scheil E. Anlaufzeit Der Austenitumwandlung. *Archives Eisenhüttenwes.* 1935, no. 8(12), pp. 565-567.

19. Bagmutov V.P., Zakharov I.N. Modelirovanie teplovykh protsessov pri poverkhnostnoi obrabotke neodnorodnykh metallicheskih tel vysokotemperaturnym dvizhushchimsia impul'snym istochnikom [Modelling of thermal processes in the surface treatment of non-homogeneous metallic bodies moving high-pulse source]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 5-16.

20. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Vychislitel'naia teploperedacha [Computational Heat Transfer]. Moscow: Editorial URSS, 2003. 784 p.

21. Guliaev A.P. Metallovedenie [Metallurgical]. Moscow: Metallurgiiia, 1977. 648 p.

22. Termicheskaia obrabotka v mashinostroenii: Spravochnik [Heat treatment in mechanical engineering: Directory]. Eds. Iu.M. Lakhtin, A.G. Rakhshadt. Moscow: Mashinostroenie, 1980. 783 p.

23. Bagmutov V.P., Zakharov I.N. Modelirovanie mekhanicheskogo povedeniia obraztsa, poverkhnostno uprochnennogo obrabotkoi kontsentrirovannymi potokami energii [Modelling of the mechanical behavior of the sample surface hardening processing of the concentrated streams of energy]. *Zavodskaiia laboratoriia. Diagnostika materialov*, 2000, vol. 66, no. 7, pp. 52-58.

24. Boli B., Ueiner Dzh. Teoriia temperaturnykh napriazhenii [The theory of thermal stress]. Moscow: Mir, 1964. 518 p.

25. Bagmutov V.P., Zakharov I.N. Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnykh protsessov formirovaniia vysokogradientnykh strukturno-fazovykh i napriazhenno-deformirovannykh sostoianii pri poluchenii i obrabotke materialov [Mathematical modeling of non-stationary processes of formation of high-gradient structural phase and the stress-strain states in the preparation and processing of materials]. *Izvestiia vuzov. Chernaia metallurgiiia*, 2005, no. 2, pp. 19-25.

26. Kovalenko A.D. Osnovy termouprugosti [Fundamentals of thermoelasticity]. Kiev: Naukova dumka, 1970. 308 p.

27. Askinazi B.M. Uprochnenie i vosstanovlenie detalei mashin elektromekhanicheskoi obrabotkoi [Hardening and restoration of details of electromechanical processing machines]. Moscow: Mashinostroenie, 1989. 200 p.

28. Kalpokas I.I. Vliianie rezhimov elektromekhanicheskogo uprochneniia na ostatochnye napriazheniia i ustalostnuiu prochnost' [Effect of electromechanical hardening on residual stresses and fatigue strength]. Thesis of doctor's degree dissertation. nauk. Kaunas, 1974.

29. Nerubai M.S., Ovchinnikov A.P. Formirovanie ostatochnykh napriazhenii pri kombinirovannom elektromekhanicheskom i ul'trazvukovom uprochnenii [Formation of residual stresses in combined electromechanical and ultrasonic hardening] *Poverkhnostnoe uprochnenie detalei mashin i instrumentov*. Kuibyshev, 1976, pp. 71-73.