

Каменев И.В., Семенов А.А. Обоснование использования метода конструктивной анизотропии при расчете пологих оболочек двойкой кривизны, ослабленных вырезами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 2. – С. 54–68. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.05

Kamenev I.V., Semenov A.A. Rationale of the use of the constructive anisotropy method in the calculation of shallow shells of double curvature, weakened holes. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 2. Pp. 54–68. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.05



**ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА**

**№ 2, 2016**

**PNRPU MECHANICS BULLETIN**

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.2.05

УДК 539.3

## **ОБОСНОВАНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА КОНСТРУКТИВНОЙ АНИЗОТРОПИИ ПРИ РАСЧЕТЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЙКОЙ КРИВИЗНЫ, ОСЛАБЛЕННЫХ ВЫРЕЗАМИ**

**И.В. Каменев, А.А. Семенов**

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,  
Санкт-Петербург, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 4 марта 2016 г.

Принята: 27 мая 2016 г.

Опубликована: 30 июня 2016 г.

#### *Ключевые слова:*

оболочка, устойчивость, вырезы, ослабленные вырезами оболочки, перфорированные оболочки, математическая модель, метод Ритца, метод конструктивной анизотропии, Maple, критические нагрузки

### АННОТАЦИЯ

Приводится геометрически нелинейная математическая модель деформирования изотропных пологих оболочек двойкой кривизны, ослабленных вырезами. Модель основывается на гипотезах теории оболочек Кирхгофа–Лява и представлена в виде геометрических соотношений, физических соотношений и функционала полной потенциальной энергии. Также приводятся выражения для усилий и моментов.

Рассмотрено два способа введения вырезов: дискретно и методом конструктивной анизотропии, который позволяет наиболее точно «размазать» нулевую жесткость вырезов по полю оболочки.

Для минимизации функционала применяется метод Ритца, что сводит задачу к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом Ньютона. Алгоритм реализован в среде аналитических вычислений Maple 2015.

Проводится анализ устойчивости пологих оболочечных конструкций двойкой кривизны, выполненных из стали, при действии на них внешней равномерно распределенной поперечной нагрузки и шарнирно-неподвижном способе закрепления контура оболочки. Расчеты производились при наличии разного числа вырезов, при этом фиксировался коэффициент отношения общей площади вырезов к площади оболочки. Таким образом, при увеличении числа вырезов уменьшался их размер. Распределение вырезов по оболочке делалось двумя разными способами.

Для всех исследованных конструкций приводятся значения критических нагрузок потери устойчивости. Проводится сравнение значений, полученных при дискретном введении вырезов и методом конструктивной анизотропии. Для нескольких вариантов конструкций показаны графики «нагрузка – прогиб». Для одного варианта оболочки, ослабленной большим числом вырезов, приводятся поля прогибов до и после потери устойчивости, цветом также показана интенсивность напряжений.

На основании полученных данных показано, что при увеличении числа вырезов дискретность их ввода теряется и становится возможным использование специально разработанного метода конструктивной анизотропии. Таким образом, сделано обоснование использования данного метода при расчете устойчивости пологих оболочек, ослабленных большим числом вырезов.

© ПНИПУ

© **Каменев Иван Владимирович** – студент, e-mail: [ivankam447@rambler.ru](mailto:ivankam447@rambler.ru)

**Семенов Алексей Александрович** – кандидат технических наук, доцент, e-mail: [sw.semenov@gmail.com](mailto:sw.semenov@gmail.com)

**Ivan V. Kamenev** – Student, e-mail: [ivankam447@rambler.ru](mailto:ivankam447@rambler.ru)

**Alexey A. Semenov** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: [sw.semenov@gmail.com](mailto:sw.semenov@gmail.com)

## RATIONALE OF THE USE OF THE CONSTRUCTIVE ANISOTROPY METHOD IN THE CALCULATION OF SHALLOW SHELLS OF DOUBLE CURVATURE, WEAKENED HOLES

I.V. Kamenev, A.A Semenov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering,  
Saint Petersburg, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 04 March 2016  
Accepted: 27 May 2016  
Published: 30 June 2016

#### Keywords:

shell, stability, holes, shell weakened by holes, perforated shell, mathematical model, Ritz method, the constructive anisotropy method, Maple, critical loads

### ABSTRACT

The paper presents the geometrically nonlinear mathematical model of deformation related to isotropic shallow shells with double curvature weakened by holes. The model is based on the hypotheses of Kirchhoff-Love theory of shells which is presented in the form of geometric and physical relationships and the functional of the total potential energy of deformation. Expressions for the forces and moments are also provided.

We consider two methods of introducing holes: discrete and constructive anisotropy methods, which allow the most accurate "smudge" zero stiffness of holes through the shell field.

Ritz method is used to minimize the functional; it reduces the problem to solving a system of nonlinear algebraic equations, which is solved by Newton's method. The algorithm is implemented in the medium 2015 Maple analytical calculations.

The stability analysis of shallow shell structure with double curvature, made of steel, is performed when exposed to an external uniformly distributed lateral load using hinged-fixed method to place the shell contour. Calculations are carried out in for different numbers of holes, with a fixed ratio of the total area of holes to the shell area. Thus, on increasing the number of holes, their sizes decreased. Hole distribution along the shell is made in two different ways.

The critical loads of buckling are given for all designs. We compare the values obtained with the discrete introduction of holes and those of the method of constructive anisotropy. For several variants of designs, the "load – deflection" graphs are shown. For one embodiment of the shell weakened by a large number of holes, we provide a deflection field before and after buckling; the intensity of the stress is also highlighted with colors.

Based on the data, it is shown that the increase in the number of holes results in the loss of discreteness of their input; hence, it becomes possible to use a specially developed method of constructive anisotropy which justifies the use of this method in calculating the stability of shallow shells weakened by a large number of holes.

© PNRPU

---

### Введение

Оболочечные конструкции широко применяются в различных областях техники, и их исследование важно для большого числа различных прикладных задач [1–3]. Например, оболочки, ослабленные по технологическим причинам большим числом вырезов (перфорированные оболочки), часто применяются в машиностроении и строительстве [4]. Такие конструкции подвергаются воздействию на них различных нагрузок [5, 6], в связи с этим возникает необходимость исследования их устойчивости. По сравнению с другими видами оболочечных конструкций перфорированным оболочкам посвящено сравнительно мало публикаций [4–16], и их исследование является достаточно актуальной задачей. Обзорных работ в данной области также немного [17–19].

Основная сложность при исследовании оболочек, ослабленных вырезами, состоит в необходимости решения задачи для многосвязной области. Для некоторых простых случаев возможно, применяя аппарат конформных отображений, свести исходную задачу к задаче для односвязной области.

Если рассматривать оболочки, ослабленные вырезами, как оболочки ступенчато-переменной толщины [20], то в дискретно расположенных местах жесткость оболочки

принимается нулевой. При этом на границе вырезов, как показано в работе [20], выполняются краевые условия свободного края, которые выполняются тем точнее, чем точнее решается сама краевая задача для таких конструкций. Главное преимущество такого подхода состоит в том, что область интегрирования уравнений равновесия становится односвязной.

Существуют различные математические модели и алгоритмы исследования ослабленных вырезами оболочек. Так, в основе модели могут быть использованы уравнения в смешанной форме [4] или функционал полной потенциальной энергии [13]. В работах [6, 14, 15] исследование проводится на основе метода конечных элементов, а в работах [12, 13] – с применением метода Ритца.

Перфорированные оболочки могут быть выполнены как из изотропных [4, 10, 11, 14], так и ортотропных материалов [6, 11].

В работе [4] рассматриваются статические и динамические задачи для пологих оболочек, перфорированных большим числом вырезов различной формы. Получены аналитические решения на основе сочетания асимптотического подхода и метода гомогенизации.

В работе [15] проводится сравнительный анализ результатов расчета тонких упругих оболочек с вырезами с использованием моментной схемы конечных элементов и программных комплексов «ЛИРА» и SCAD. На примере пологих изотропных панелей показано влияние различных ослаблений на процесс нелинейного деформирования и потерю устойчивости.

В работе [6] методом конечных элементов исследована устойчивость густо перфорированных цилиндрических оболочек под действием внешнего давления. Задача решена на основе теории оболочек с использованием конструктивно ортотропной модели. Получены коэффициенты снижения жесткости при различных значениях пористости. Проведено сравнение численно полученных результатов с аналитическими оценками Э.И. Григольюка и Л.А. Фильштинского [8]. Проведено исследование устойчивости упругой цилиндрической перфорированной оболочки под действием внешнего давления для двух вариантов граничных условий. Получены значения критических нагрузок и соответствующие им формы потери устойчивости в зависимости от длины оболочки и степени перфорации.

## 1. Постановка задачи

Целью данной работы является анализ устойчивости перфорированных пологих оболочек двоякой кривизны и обоснование использования при проведении таких расчетов метода конструктивной анизотропии.

## 2. Вид рассматриваемых конструкций

Будем рассматривать пологие оболочки прямоугольного плана, ослабленные вырезами, в геометрически нелинейной постановке в рамках теории оболочек Кирхгофа–Лява.

Параметры Ляме и параметры кривизны пологой оболочки соответственно:

$$A = 1, \quad B = 1, \quad k_x = \frac{1}{R_1}, \quad k_y = \frac{1}{R_2}.$$

Оболочка по контуру закреплена шарнирно-неподвижно, находится под действием равномерно-распределенной поперечной нагрузки  $q$  и ослаблена большим числом сквозных вырезов со сторонами, параллельными сторонам оболочки (рис. 1).

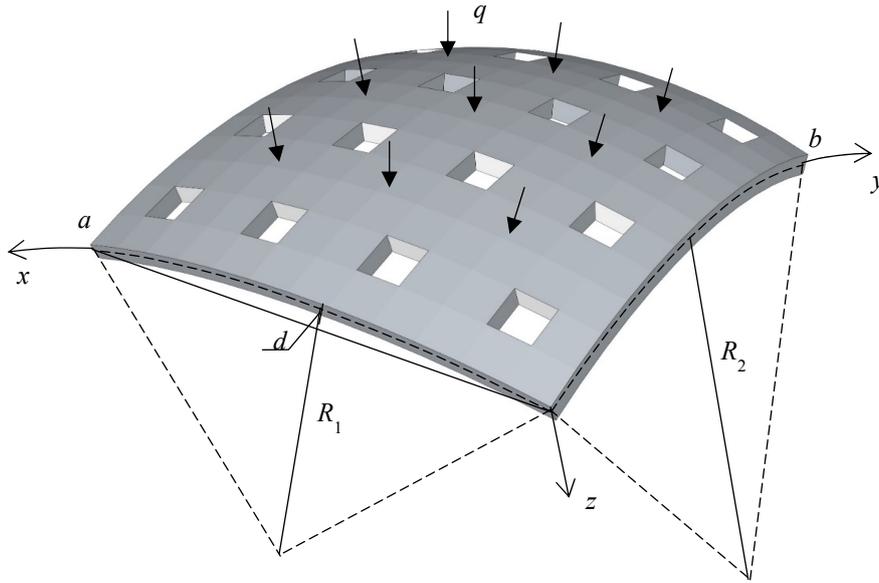


Рис. 1. Схематичное изображение полой перфорированной оболочки

### 3. Математическая модель

Математическая модель деформирования полой оболочки, ослабленной вырезами, состоит из трех групп соотношений:

- 1) геометрических соотношений;
- 2) физических соотношений;
- 3) функционала полной потенциальной энергии.

Геометрические соотношения в срединной поверхности оболочки, связывающие перемещения и деформации, имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - k_x W + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} - k_y W + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y},$$

где  $U(x, y), V(x, y), W(x, y)$  – перемещения точки срединной поверхности оболочки вдоль осей  $x, y, z$  соответственно.

В слое, отстоящем на  $z$  от срединной поверхности оболочки, деформации принимают вид

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где  $\chi_1, \chi_2$  – функции изменения кривизн;  $\chi_{12}$  – функция изменения кручения,

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Физические соотношения – связь напряжений и деформаций – принимают вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^z.$$

Здесь  $E, \mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Места расположения вырезов оболочки можно задать функцией

$$H(x, y) = -\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n h \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i),$$

где  $h$  – толщина оболочки; индексы  $i$  и  $j$  указывают номер  $(i, j)$  прямоугольного в плане выреза, стороны которого параллельны осям  $x$  и  $y$ ;  $n, m$  – количество вырезов вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $\bar{\delta}(x-x_j), \bar{\delta}(y-y_i)$  – единичные столбчатые функции, которые представляют собой разности двух единичных функций  $\bar{\delta}(x-x_j) = U(x-a_j) - U(x-b_j)$ ;  $\bar{\delta}(y-y_i) = U(y-c_i) - U(y-d_i)$ . Эти функции равны единице при  $a_j \leq x \leq b_j, c_i \leq y \leq d_i$ , а в остальных точках поверхности оболочки равны нулю. Здесь  $a_j = x_j - \frac{r_j}{2}, b_j = x_j + \frac{r_j}{2}; c_i = y_i - \frac{r_i}{2}, d_i = y_i + \frac{r_i}{2}; r_j, r_i$  – ширина вырезов в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно. Таким образом, толщина оболочки в точке  $(x, y)$  будет равна  $h + H(x, y)$ .

Учитывать наличие вырезов будем двумя способами: дискретно и методом конструктивной анизотропии [13]. В зависимости от этого выражения для усилий и моментов будут иметь разный вид.

Интегрируя напряжения по  $z$  в пределах от  $-\frac{h}{2}$  до  $\frac{h}{2} + H(x, y)$ , получим вначале усилия и моменты, приходящиеся на единицу длины сечения и приведенные к срединной поверхности оболочки, при дискретном вводе вырезов:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2+H} \sigma_x dz = \frac{E}{1-\mu^2} (h + \bar{F}) (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y); & M_x &= \int_{-h/2}^{h/2+H} z \sigma_x dz = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1 + \mu \chi_2); \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2+H} \sigma_y dz = \frac{E}{1-\mu^2} (h + \bar{F}) (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x); & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2+H} z \sigma_y dz = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2 + \mu \chi_1); \\ N_{xy} &= N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2+H} \tau_{xy} dz = \frac{E}{2(1+\mu)} (h + \bar{F}) \gamma_{xy}; & M_{xy} &= M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2+H} z \tau_{xy} dz = \frac{E}{(1+\mu)} \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12}, \end{aligned}$$

где  $\bar{F}, \bar{J}$  – жесткостные параметры вырезов,

$$\bar{F} = -h \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i); \quad \bar{J} = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i).$$

При использовании метода конструктивной анизотропии усилия и моменты, приходящиеся на единицу длины сечения и приведенные к срединной поверхности оболочки, примут вид [13]

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2+H} \sigma_x dz = \frac{E}{1-\mu^2} (h + F_p) (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y); & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2+H} \sigma_y dz = \frac{E}{1-\mu^2} (h + F_p) (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x); \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2+H} z \sigma_x dz = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{h^3}{12} + J_p \right) (\chi_1 + \mu \chi_2); & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2+H} z \sigma_y dz = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{h^3}{12} + J_p \right) (\chi_2 + \mu \chi_1); \end{aligned}$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2+H} \tau_{xy} dz = \frac{E}{2(1+\mu)} (h + F_p) \gamma_{xy}; \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2+H} z \tau_{xy} dz = \frac{E}{(1+\mu)} \left( \frac{h^3}{12} + J_p \right) \chi_{12},$$

где

$$F_p = -h A_p; \quad J_p = -\frac{h^3}{12} A_p; \quad A_p = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{r_i r_j}{ab}.$$

Функционал полной потенциальной энергии рассматриваемой оболочки будет иметь вид [21]

$$E_p = \int_0^a \int_0^b \left[ N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} - 2qW \right] dx dy.$$

При дискретном введении вырезов более подробно функционал можно записать в виде

$$E_p = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left[ (h + \bar{F}) (\varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \bar{\mu} \gamma_{xy}^2) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2 + 2\bar{\mu} \chi_{12}^2) - \frac{2(1-\mu^2)qW}{E} \right] dx dy, \quad (1)$$

где  $\bar{\mu} = \frac{1-\mu}{2}$ .

А при введении вырезов методом конструктивной анизотропии он запишется следующим образом:

$$E_p = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left[ (h + F_p) (\varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \bar{\mu} \gamma_{xy}^2) + \left( \frac{h^3}{12} + J_p \right) (\chi_1^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2 + 2\bar{\mu} \chi_{12}^2) - \frac{2(1-\mu^2)qW}{E} \right] dx dy. \quad (2)$$

#### 4. Алгоритм

Для минимизации функционала полной потенциальной энергии применяется метод Ритца, при этом искомые функции  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$  аппроксимируются в виде

$$U(x, y) = \sum_{I=1}^N U(I) Z1(I); \quad V(x, y) = \sum_{I=1}^N V(I) Z2(I); \quad W(x, y) = \sum_{I=1}^N W(I) Z3(I),$$

где  $U(I)$ ,  $V(I)$ ,  $W(I)$  – неизвестные числовые параметры;  $Z1(I)$ – $Z3(I)$  – различные сочетания аппроксимирующих функций  $X1(I)$ – $X3(I)$ ,  $Y1(I)$ – $Y3(I)$ , удовлетворяющих краевым условиям при шарнирно-неподвижном закреплении контура, в качестве которых можно использовать тригонометрические функции

$$X1(k) = \sin \frac{2k\pi x}{a}, \quad X2(k) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{a}, \quad X3(k) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{a};$$

$$Y1(l) = \sin \frac{(2l-1)\pi y}{b}, \quad Y2(l) = \sin \frac{2l\pi y}{b}, \quad Y3(l) = \sin \frac{(2l-1)\pi y}{b}.$$

В соответствии с методом Ритца разложения искомых функций подставляются в функционал (1) или (2), находятся производные по неизвестным числовым параметрам, которые затем приравняются к нулю. В результате получается система нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом Ньютона.

Также после перехода к безразмерным параметрам [22] для решения полученной системы можно применить метод продолжения решения по наилучшему параметру [23].

В качестве критерия оценки прочности принят критерий Мизеса:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_T,$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести материала;  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений.

Данный алгоритм был реализован в среде аналитических вычислений Maple 2015.

## 5. Результаты расчетов

Рассматривались три тонкие пологие оболочки, квадратные в плане, входные параметры которых заданы в табл. 1. Рассматриваемые конструкции были ослаблены сквозными вырезами и находились под воздействием равномерно-распределенной поперечной нагрузки  $q$ . Оболочки выполнены из стали с модулем упругости  $E = 210000$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$ ,  $\sigma_T = 428$  МПа. Контур конструкции закреплялся шарнирно-неподвижно. Расчеты проводились при удержании  $N = 16$  членов разложения искомых функций в методе Ритца.

Таблица 1

Входные параметры рассматриваемых вариантов оболочек

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Линейный размер $a$ , м	5,4	10,8	54
Главный радиус кривизны $R$ , м	20,25	40,5	135,9
Толщина оболочки $h$ , м	0,09	0,09	0,09

Распределение вырезов по оболочке проводилось двумя способами. В случае I (рис. 2, а) оболочка в плане разбивается на участки, число которых равно числу вырезов. Центр участка считается центром соответствующего выреза. Абсцисса  $i$ -го выреза вдоль оси  $x$  имеет вид  $\frac{a}{2m}(2i-1)$ , а ордината  $j$ -го выреза вдоль оси  $y$  –

$$\frac{a}{2n}(2j-1).$$

В случае II вырезы распределяются по оболочке равномерно (рис. 2, б). Абсцисса центра  $i$ -го выреза вдоль оси  $x$  имеет вид  $i\left(\frac{a-r \cdot m}{m+1}+r\right)-\frac{r}{2}$ , а ордината  $j$ -го выреза

$$\text{вдоль оси } y \text{ равна } j\left(\frac{a-r \cdot n}{n+1}+r\right)-\frac{r}{2}.$$

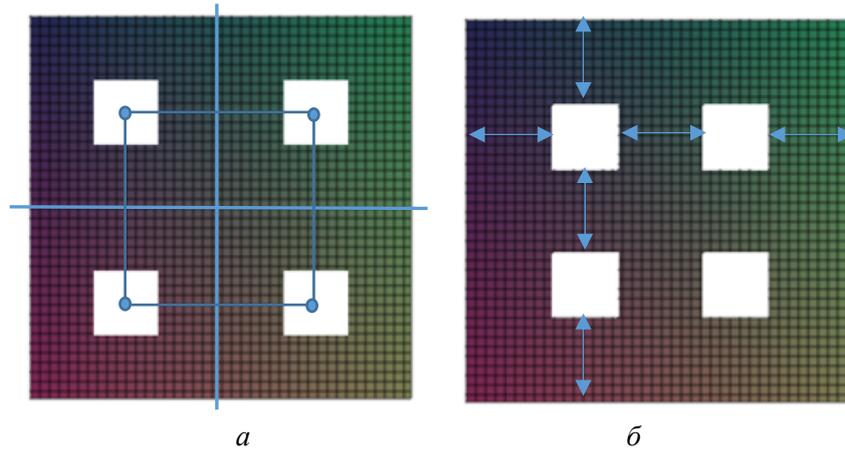


Рис. 2. Схема распределения 4 вырезов по оболочке

Цель исследования – подтвердить сходимость метода конструктивной анизотропии. Предполагается, что сходимость происходит при большом числе вырезов. Покажем это следующим образом. Сначала фиксируется коэффициент относительной площади вырезов  $A_p$ , после чего увеличивается число вырезов. Расчеты проводились для числа вырезов  $\geq 4$ , притом рассматриваются только такие наборы вырезов, которые не содержат вырез в центре конструкции, так как анализ прогибов проводился в точке  $x = y = \frac{a}{2}$ .

На всех графиках будем обозначать кривую, полученную с использованием метода конструктивной анизотропии, как  $A_p$ , а кривые, полученные путем дискретного ввода вырезов, как I и II для способов распределения вырезов I и II соответственно.

Для оболочки варианта 1 был принят коэффициент  $A_p = \frac{1}{9}$ . На рис. 2 показаны распределения вырезов по оболочке для способов I и II при 4 вырезах, а на рис. 3 – соответствующие кривые «нагрузка–прогиб». На рис. 4 представлены распределения 24 вырезов по оболочке (слева способ I, справа – II), а на рис. 5 – соответствующие кривые «нагрузка – прогиб».

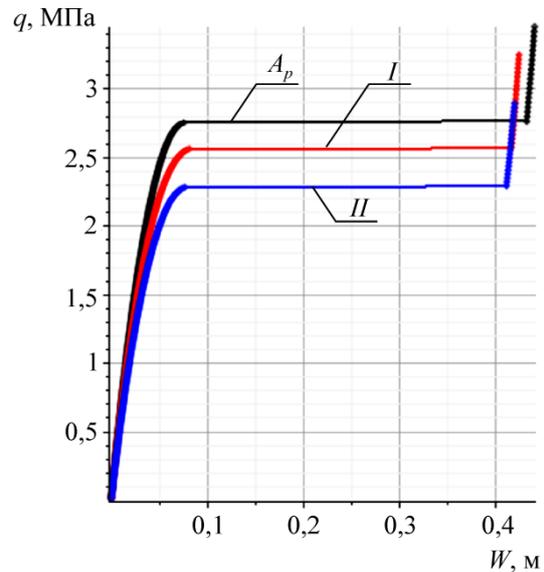


Рис. 3. Кривые «нагрузка–прогиб» для оболочки варианта 1 при 4 вырезах

Результаты расчетов для оболочки варианта 1 при разном числе вырезов сведены в табл. 2. В первом столбце находится общее число вырезов  $M = 2 \left[ \frac{m \cdot n}{2} \right]$ , где квадратные скобки обозначают целочисленное деление; во втором – относительный размер выреза  $\frac{r}{a}$ ; в третьем – критическая нагрузка потери устойчивости  $q_{kr}^{Ap}$ , полученная методом

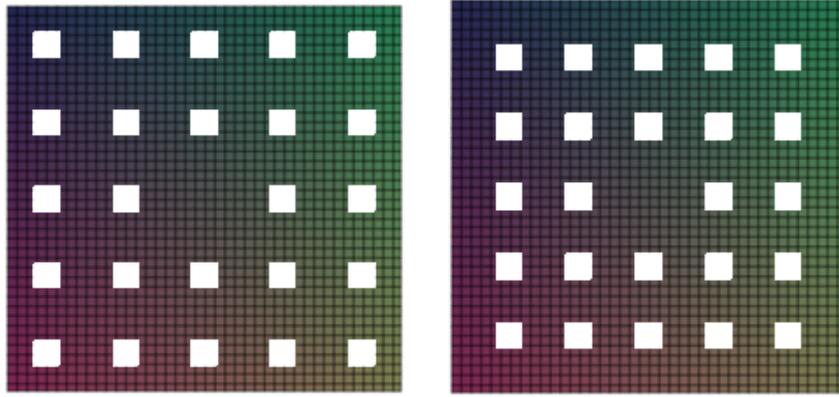


Рис. 4. Схема распределения вырезов при  $M = 24$

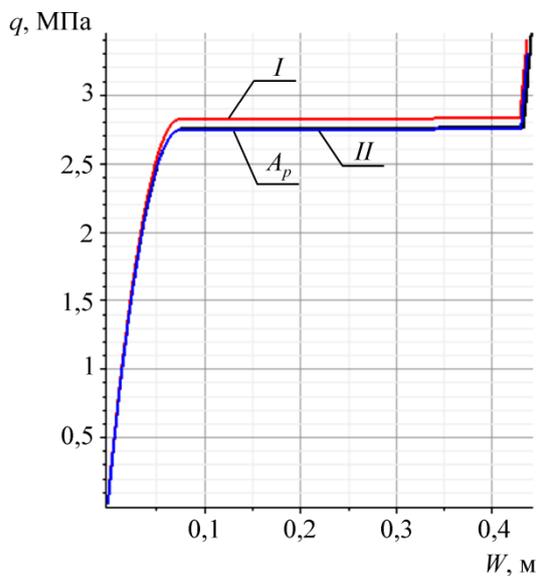


Рис. 5. Кривые «нагрузка–прогиб» для оболочки варианта 1 при 24 вырезах

конструктивной анизотропии; в четвертом и пятом – критические нагрузки потери устойчивости  $q_{kr}^I$  и  $q_{kr}^{II}$ , полученные путем дискретного ввода вырезов по способам их распределения I и II соответственно; в шестом и седьмом –  $\Delta q_{kr}^I = \frac{q_{kr}^I}{q_{kr}^{Ap}}$  и  $\Delta q_{kr}^{II} = \frac{q_{kr}^{II}}{q_{kr}^{Ap}}$ . Если  $\Delta q_{kr}^I$  и  $\Delta q_{kr}^{II}$  попадают в интервал  $[0,95; 1,05]$ , то считаем, что метод конструктивной анизотропии сходится к дискретному вводу вырезов.

На рис. 6 показан график зависимости относительной критической нагрузки потери устойчивости  $\Delta q_{kr}$  от общего числа вырезов  $M$  для способов распределения вырезов I и II.

Таблица 2

Результаты для оболочки варианта 1 при  $A_p = \frac{1}{9}$

$M$	$\frac{r}{a}$	Критические нагрузки потери устойчивости			$\Delta q_{kr}^I$	$\Delta q_{kr}^{II}$
		$q_{kr}^{Ap}$ , МПа	$q_{kr}^I$ , МПа	$q_{kr}^{II}$ , МПа		
4	0,1667	2,7599	2,5699	2,2899	0,9312	0,8297
6	0,1361		2,5799	2,3899	0,9348	0,8659
8	0,1179		2,8799	2,6499	1,0435	0,9601
12	0,0960		2,6200	2,5400	0,9493	0,9203
16	0,0833		2,6399	2,6299	0,9565	0,9529
20	0,0745		2,7299	2,6700	0,9891	0,9674
24	0,0680		2,8299	2,7499	1,0254	0,9964
36	0,0555		2,7599	2,7100	1,000	0,9819
48	0,0481		2,7899	2,7399	1,0109	0,9927
64	0,0417		2,7859	2,7478	1,0094	0,9956

На основании рис. 6 и данных в табл. 2 можно сделать вывод, что метод конструктивной анизотропии для оболочки варианта 1 сходится при числе вырезов  $M \geq 16$ .

В табл. 3 показаны аналогичные данные для оболочки варианта 2, а на рис. 7 – график зависимости относительной критической нагрузки от общего числа вырезов для способов распределения вырезов I и II.

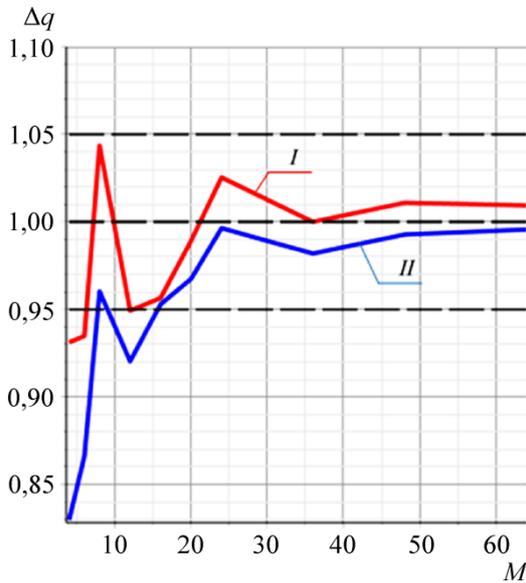


Рис. 6. График зависимости относительной критической нагрузки потери устойчивости от числа вырезов для оболочки варианта 1

$$\text{при } A_p = \frac{1}{9}$$

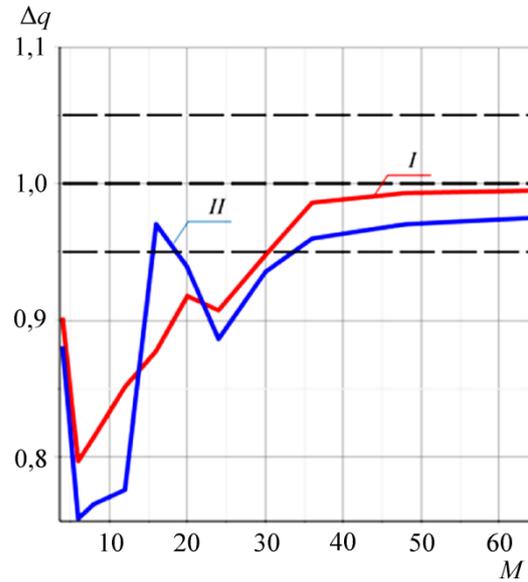


Рис. 7. График зависимости относительной критической нагрузки потери устойчивости от числа вырезов для оболочки варианта 2

$$\text{при } A_p = \frac{4}{25}$$

Таблица 3

Результаты для оболочки варианта 2 при  $A_p = \frac{4}{25}$

M	$\frac{r}{a}$	Критические нагрузки потери устойчивости			$\Delta q_{kr}^I$	$\Delta q_{kr}^{II}$
		$q_{kr}^{A_p}$ , МПа	$q_{kr}^I$ , МПа	$q_{kr}^{II}$ , МПа		
4	0,2000	0,7138	0,6438	0,6288	0,9019	0,8809
6	0,1633		0,5688	0,5388	0,7968	0,7548
8	0,1414		0,5813	0,5463	0,8144	0,7653
12	0,1155		0,6075	0,5538	0,8511	0,7758
16	0,1000		0,6263	0,6925	0,8774	0,9702
20	0,0894		0,6550	0,6700	0,9177	0,9387
24	0,0816		0,6475	0,6325	0,9072	0,8862
30	0,0730		0,6763	0,6675	0,9475	0,9352
36	0,0667		0,7038	0,6850	0,9860	0,9597
48	0,0577		0,7088	0,6925	0,9930	0,9702
64	0,0500		0,7100	0,6957	0,9947	0,9748

Как видно из графика (см. рис. 7) и табл. 3, метод конструктивной анизотропии для оболочки варианта 2 сходится при  $M \geq 36$ .

Пользуясь полученными данными, предположим, что для оболочки варианта 3 метод конструктивной анизотропии сойдется уже при  $M = 36$ .

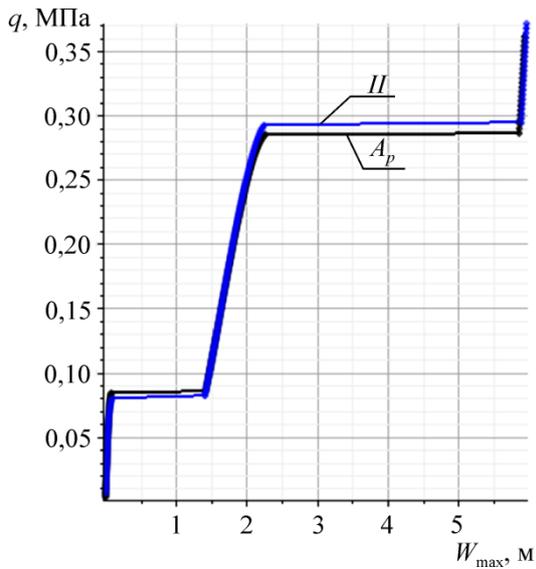


Рис. 8. Кривая «нагрузка – наибольший прогиб» для варианта оболочки 3 при способе введения вырезов II

На рис. 8 показан график «нагрузка – наибольший прогиб» для оболочки варианта 3 при способе задания вырезов II. При этом  $\Delta q_{kr}^{II} = 0,9728$ , то есть метод конструктивной анизотропии здесь также сходится.

Также интерес могут представлять поля прогибов и напряжений рассматриваемых конструкций. На рис. 9, 10 показаны состояния конструкции для оболочки варианта 3 при  $M = 36$  до и после местной потери устойчивости. Цветом показана интенсивность напряжений  $\sigma_i$ . Часто при отображении оболочки с наложенным полем прогибов, особенно до потери устойчивости, значения прогибов настолько малы, что их достаточно трудно заметить.

Тем не менее даже малозаметные изменения в конструкции могут нести в себе важную информацию о ее состоянии. В связи с этим значения прогиба умножаются на масштабирующий коэффициент  $k_m = 2$ .

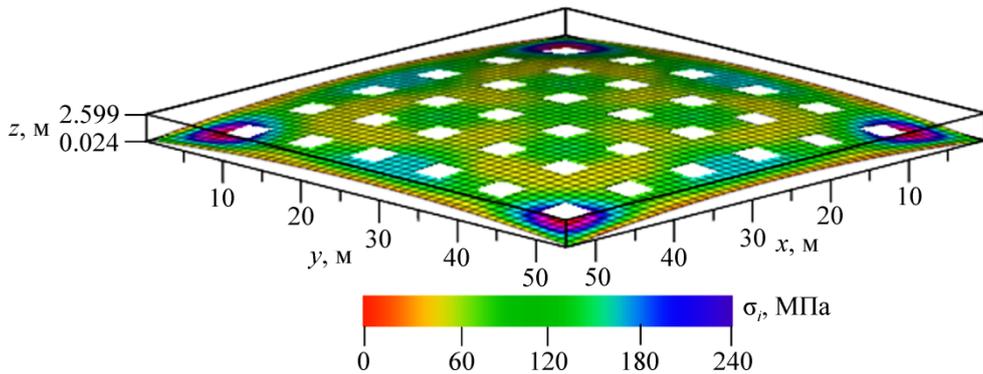


Рис. 9. Вариант оболочки 3 до потери устойчивости

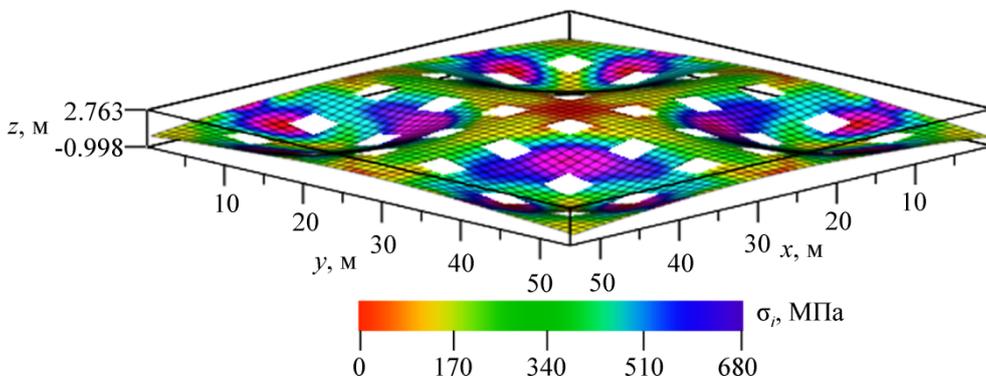


Рис. 10. Вариант оболочки 3 после потери устойчивости

Из данных на рис. 10 видно, что интенсивность напряжений превышает значения предела текучести  $\sigma_T = 428$  МПа. Таким образом, потеря прочности происходит во время местной потери устойчивости.

## Заключение

В ходе исследования были рассмотрены две математические модели деформирования пологих оболочек, ослабленных вырезами. В первой модели вырезы вводятся дискретно с помощью единичных столбчатых функций, задающих места расположения вырезов. Во второй модели используется метод конструктивной анизотропии, позволяющий «размазать» нулевую жесткость вырезов по полю оболочки.

Использование математической модели оболочки ступенчато-переменной толщины, когда область интегрирования является односвязной, не вызывает в дальнейшем существенных трудностей при проведении расчетов.

Были исследованы три варианта оболочек при разном числе вырезов. В результате было продемонстрировано, что при увеличении числа вырезов дискретность их ввода теряется и становится возможным использование метода конструктивной анизотропии. При способе задания вырезов I потеря устойчивости наступает позднее, чем при способе задания вырезов II.

Критерием использования метода конструктивной анизотропии для оболочек, ослабленных вырезами, являются два фактора: отношение общей площади вырезов к площади оболочки ( $A_p$ ) и отношение ширины выреза к линейному размеру оболочки ( $r/a$ ). При  $A_p = 0,111$  решение, полученное по методу конструктивной анизотропии, практически совпадает с решением, полученным при дискретном введении вырезов при  $r/a \leq 0,083$ . При  $A_p = 0,16$  должно выполняться условие  $r/a \leq 0,067$ . Таким образом, чем меньше  $A_p$ , тем больше может быть  $r/a$ , но не превосходить 0,09.

*Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № 3801.*

## Библиографический список

1. Elastic Buckling Analysis of Ring and Stringer-stiffened Cylindrical Shells under General Pressure and Axial Compression via the Ritz Method / G. Arani, A. Loghman, A.A. Mosallaie Barzoki, R. Kolahchi // Journal of Solid Mechanics. – 2010. – Vol. 2. – No. 4. – P. 332–347.
2. Vibration analysis of ring-stiffened conical–cylindrical–spherical shells based on a modified variational approach / Y. Qu, S. Wu, Y. Chen, H. Hua // International Journal of Mechanical Sciences. – 2013. – Vol. 69. – P. 72–84. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026
3. A semi-analytical model for local post-buckling analysis of stringer- and frame-stiffened cylindrical panels / P. Buermann, R. Rolfes, J. Tessmer, M. Schagerl // Thin-Walled Structures. 2006. – Vol. 44. – P. 102–114. DOI: 10.1016/j.tws.2005.08.010
4. Kalamkarov A.L., Andrianov I.V., Weichert D. Asymptotic analysis of perforated shallow shells // International Journal of Engineering Science. – 2012. – Vol. 53. – P. 1–18. DOI:10.1016/j.ijengsci.2011.12.005.
5. Buckling Optimization of Perforated Curved Shells / Wang D. [et al.] // Materials Science Forum. – 2012. – Vol. 697–698. – P. 614–617. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.697-698.614

6. Numerical modeling of perforated shells stability / A.A. Antipov, A.A. Artemyeva, V.G. Bazhenov, M.N. Zhestkov, A.I. Kibec // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2015. – No. 1. – P. 21–30. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.1.02
7. Ghergu M., Griso G., Miara B. Homogenization of thin piezoelectric perforated shells // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 2007. – Vol. 41. – P. 875–895. DOI: 10.1051/m2an:2007046
8. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
9. Fazilati J., Ovesy H.R. Finite strip dynamic instability analysis of perforated cylindrical shell panels // Composite Structures. – 2012. – Vol. 94. – P. 1259–1264. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.11.008
10. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Elastoplastic state of flexible cylindrical shells with two circular holes // International Applied Mechanics. – 2004. – Vol. 40. – No. 10. – P. 1152–1156. DOI: 10.1007/s10778-005-0022-7
11. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with Reinforced Holes and Rigid Inclusions // International Applied Mechanics. – 2013. – Vol. 49. – No. 6. – P. 685–692. DOI: 10.1007/s10778-013-0602-x
12. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. – М.: Машиностроение, 1981. – 191 с.
13. Карпов В.В., Игнатьев О.В., Сальников А.Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. – М.: АСВ; СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. архит.-строит. ун-та, 2002. – 420 с.
14. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры. – М.: ЛИБРОКОМ, 2012. – 329 с.
15. Соловей Н.А., Кривенко О.П., Малыгина О.А. Конечноэлементные модели исследования нелинейного деформирования оболочек ступенчато-переменной толщины с отверстиями, каналами и выемками // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – № 1(53). – С. 56–69. DOI: 10.5862/MCE.53.6
16. Eccher G., Rasmussen K.J.R., Zandonini R. Geometric nonlinear isoparametric spline finite strip analysis of perforated thin-walled structures // Thin-Walled Structures. – 2009. – Vol. 47. – P. 219–232. DOI: 10.1016/j.tws.2008.05.013
17. Guz' A.N., Ashmarin Yu.A. Stability of a shell, weakened by holes (review) // Soviet Applied Mechanics. – 1973. – Vol. 9. – Iss. 4. – P. 349–358. DOI: 10.1007/BF00882643
18. Preobrazhenskii I.N. Stability of thin-walled shells with holes (survey). Part 1 // Strength of Materials. – 1982. – Vol. 14. – Iss. 1. – P. 23–35. DOI: 10.1007/BF00769180
19. Preobrazhenskii I.N. Stability of thin shells with cutouts (review). Part 2 // Strength of Materials. – 1982. – Vol. 14. – Iss. 2. – P. 218–225. DOI: 10.1007/BF00769060
20. Ильин В.П., Карпов В.В. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. – Л.: Стройиздат. Ленигр. отд-ние, 1986. – 168 с.
21. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч.1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. – М.: Физматлит, 2010. – 288 с.
22. Карпов В.В., Семенов А.А. Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 3. – С. 74–94. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.07
23. Kuznetsov E.B. Continuation of solutions in multiparameter approximation of curves and surfaces // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2012. – Vol. 52. – No. 8. – P. 1149–1162. DOI: 10.1134/S0965542512080076

## References

1. Arani G., Loghman A., Mosallaie Barzoki A.A., Kolahchi R. Elastic Buckling Analysis of Ring and Stringer-stiffened Cylindrical Shells under General Pressure and Axial Compression via the Ritz Method. *Journal of Solid Mechanics*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 332-347.
2. Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua H. Vibration analysis of ring-stiffened conical–cylindrical–spherical shells based on a modified variational approach. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, vol. 69, pp. 72-84. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026
3. Buermann P., Rolfes R., Tessmer J., Schagerl M. A semi-analytical model for local post-buckling analysis of stringer- and frame-stiffened cylindrical panels. *Thin-Walled Structures*, 2006, vol. 44, pp. 102-114. DOI: 10.1016/j.tws.2005.08.010
4. Kalamkarov A.L., Andrianov I.V., Weichert D. Asymptotic analysis of perforated shallow shells. *International Journal of Engineering Science*, 2012, vol. 53, pp. 1-18. DOI:10.1016/j.ijengsci.2011.12.005.
5. Buckling Optimization of Perforated Curved Shells / Wang D. [et al.]. *Materials Science Forum*, 2012, vol. 697-698, pp. 614-617. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.697-698.614
6. Antipov A.A., Artemyeva A.A., Bazhenov V.G., Zhestkov M.N., Kibec A.I. Numerical modeling of perforated shells stability. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 21-30. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.1.02
7. Ghergu M., Griso G., Miara B. Homogenization of thin piezoelectric perforated shells. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2007, vol. 41, pp. 875-895. DOI: 10.1051/m2an:2007046
8. Grigoliuk E.I., Fil'shtinskii L.A. Perforirovannye plastiny i obolochki [Perforated plate and shell]. Moscow: Nauka, 1970, 556 p.
9. Fazilati J., Ovesy H.R. Finite strip dynamic instability analysis of perforated cylindrical shell panels. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, pp. 1259-1264. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.11.008
10. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Elastoplastic state of flexible cylindrical shells with two circular holes. *International Applied Mechanics*, 2004, vol. 40, no. 10, pp. 1152-1156. DOI: 10.1007/s10778-005-0022-7
11. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with Reinforced Holes and Rigid Inclusions. *International Applied Mechanics*, 2013, vol. 49, no. 6, pp. 685-692. DOI: 10.1007/s10778-013-0602-x
12. Preobrazhenskii I.N. Ustoichivost' i kolebaniia plastinok i obolochek s otverstiiami [Stability and oscillations of plates and shells with holes]. Moscow: Mashinostroenie, 1981. 191 p.
13. Karpov V.V., Ignat'ev O.V., Sal'nikov A.Iu. Nelineinye matematicheskie modeli deformirovaniia obolochek peremennoi tolshchiny i algoritmy ikh issledovaniia [Nonlinear mathematical models of deformation of shells of variable thickness and algorithms for their research]. Moscow: ASV; Sankt-Petersburgskii gosudarstvennyi arkhitekturno-stroitel'nyi universitet, 2002. 420 p.
14. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. Nelineinoe deformirovanie i ustoichivost' uprugikh obolochek neodnorodnoi struktury [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure]. Moscow: LIBROKOM, 2012, 329 p.
15. Solovei N.A., Krivenko O.P., Malygina O.A. Konechnoelementnye modeli issledovaniia nelineinogo deformirovaniia obolochek stupenchato-peremennoi tolshchiny s otverstiiami, kanalami i vyemkami [Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities]. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal*, 2015, no. 1 (53), pp. 56-69. DOI: 10.5862/MCE.53.6
16. Eccher G., Rasmussen K.J.R., Zandonini R. Geometric nonlinear isoparametric spline finite strip analysis of perforated thin-walled structures. *Thin-Walled Structures*, 2009, vol. 47, pp. 219-232. DOI: 10.1016/j.tws.2008.05.013
17. Guz' A.N., Ashmarin Yu.A. Stability of a shell, weakened by holes (review). *Soviet Applied Mechanics*, 1973, vol. 9, iss. 4, pp. 349-358. DOI: 10.1007/BF00882643

18. Preobrazhenskii I.N. Stability of thin-walled shells with holes (survey). Part 1. *Strength of Materials*, 1982, vol. 14, iss. 1, pp. 23-35. DOI: 10.1007/BF00769180
19. Preobrazhenskii I.N. Stability of thin shells with cutouts (review). Part 2. *Strength of Materials*, 1982, vol. 14, iss. 2, pp. 218-225. DOI: 10.1007/BF00769060
20. Il'in V.P., Karpov V.V. Ustoichivost' rebristykh obolochek pri bol'shikh peremeshcheniiakh [Stability of reinforced shells in the case of large displacements]. Saint-Petersburg: Stroiizdat, 1986. 168 p.
21. Karpov V.V. Prochnost' i ustoichivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniia. Ch.1: Modeli i algoritmy issledovaniia prochnosti i ustoichivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniia [The strength and stability of reinforced shells of revolution. In two parts. Part 1. Models and algorithms of research of the strength and stability of supported shells of revolution]. Moscow: Fizmatlit, 2010. 288 p.
22. Karpov V.V., Semenov A.A. Bezrazmernye parametry v teorii podkreplennykh obolochek [Dimensionless parameters in the theory of reinforced shells]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 3, pp. 74-94. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.07
23. Kuznetsov E.B. Continuation of solutions in multiparameter approximation of curves and surfaces. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 8, pp. 1149-1162. DOI: 10.1134/S0965542512080076