

Данилин А.Н., Кузнецова Е.Л., Курдюмов Н.Н., Рабинский Л.Н., Тарасов С.С. О модификации модели Бук–Вена для описания гистерезиса нестационарных процессов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 187–199. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.11

Danilin A.N., Kuznetsova E.L., Kurdyumov N.N., Rabinsky L.N., Tarasov S.S. A modified Bouc-Wen model to describe the hysteresis of non-stationary processes. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 4. Pp. 187-199. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.11



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.11

УДК 539.3:534.1

О МОДИФИКАЦИИ МОДЕЛИ БУК–ВЕНА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ГИСТЕРЕЗИСА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

**А.Н. Данилин^{1,2}, Е.Л. Кузнецова², Н.Н. Курдюмов^{2,1},
Л.Н. Рабинский², С.С. Тарасов²**

¹Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

²Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 20 июля 2016 г.
Принята: 02 ноября 2016 г.
Опубликована: 30 декабря 2016 г.

Ключевые слова:

гистерезис, модели диссипации, модели трения, феноменологические модели, модель Бук-Вена, идентификация параметров.

АННОТАЦИЯ

Рассмотрен ряд известных феноменологических моделей, которые применяются для описания разнообразных по природе гистерезисных эффектов. В этом случае система рассматривается как «черный ящик» с известными из эксперимента значениями входных и выходных параметров. Взаимосвязи между ними устанавливаются на основе математических зависимостей, параметры которых идентифицируются с использованием экспериментальных данных.

Среди феноменологических моделей отмечаются модель Бук-Вена и её аналоги, которые успешно применяются в различных научно-технических областях благодаря возможности аналитического описания разнообразных по форме гистерезисных петель нестационарных процессов. Сформулированы условия, которым должна удовлетворять модель Бук-Вена. Основными являются адекватность математической модели физическому процессу и её устойчивость.

Для описания гистерезиса предлагается модель, в соответствии с которой силовые и кинематические параметры связываются специальным дифференциальным уравнением первого порядка. В отличие от модели Бук-Вена правая часть этого уравнения подбирается в виде полинома от двух переменных, определяющих траекторию гистерезиса на диаграмме процесса. Указывается, что такое представление обеспечивает асимптотическое приближение решения к кривым объемлющего (включающего) гистерезисного цикла. Этот цикл образуется кривыми прямого и обратного процессов (процессов «нагрузки-разгрузки»), которые строятся по экспериментальным данным для максимально возможных или допустимых интервалов изменения параметров в условиях установившегося процесса. Коэффициенты в правой части определяются по экспериментальным данным для объемлющего гистерезисного цикла в условиях установившихся колебаний. Для этого строится аппроксимация кривых объемлющего цикла с использованием методов минимизации невязки аналитического представления к

© Данилин Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: andanilin@yandex.ru
Кузнецова Елена Львовна – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: vida_ku@mail.ru
Курдюмов Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: nick.n.kurdyumov@gmail.com
Рабинский Лев Наумович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: f9_dec@mai.ru
Тарасов Сергей Сергеевич – кандидат технических наук, инженер, e-mail: f9_dec@mai.ru

Alexandr N. Danilin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: andanilin@yandex.ru
Elena L. Kuznetsova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: vida_ku@mail.ru
Nickolai N. Kurdyumov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: nick.n.kurdyumov@gmail.com
Lev N. Rabinsky – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: f9_dec@mai.ru
Sergey S. Tarasov – PhD in Technical Sciences, Engineer, e-mail: f9_dec@mai.ru

множеству экспериментальных точек. Предлагаемый метод позволяет одним дифференциальным уравнением описать траекторию гистерезиса с произвольной точкой старта внутри области объемлющего цикла.

© ПНИПУ

A MODIFIED BOUC-WEN MODEL TO DESCRIBE THE HYSTERESIS OF NON-STATIONARY PROCESSES

A.N. Danilin^{1,2}, E.L. Kuznetsova², N.N. Kurdumov^{2,1}, L.N. Rabinsky², S.S. Tarasov²

¹Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

²Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 July 2016
Accepted: 02 November 2016
Published: 30 December 2016

Keywords:

hysteresis, models of dissipation, the models of friction, phenomenological models, the Bouc-Wen model, identification of parameters.

ABSTRACT

A number of known phenomenological models are considered, which are used to describe a variety of hysteresis effects in nature. In this case, the system is considered as a "black box" with known experimental values of input and output parameters. Correlations between them are established by mathematical functions, whose parameters are identified using experimental data.

Among the phenomenological models there are marked the Bouc-Wen model and its analogs that have been successfully used in various scientific and technical fields due to the possibility of the analytical description of various hysteresis loops of non-stationary processes. The conditions are formulated which must be satisfied by the Bouc-Wen model. The main ones are the model adequacy of the physical process and stability.

To describe the hysteresis, a mathematical model is suggested, according to which the force and kinematic parameters are bound by a special differential equation of the first order. In contrast to the Bouc-Wen model, the right side of this equation is chosen in the form of a polynomial of two variables determining the trajectory of a hysteresis in the process diagram. It is stated that this presentation provides the asymptotic approximation of the solution to the curves of the comprehending (including) hysteresis cycle. This cycle is formed by curves of direct and reverse processes ("loading-unloading" processes), which are based on experimental data for the maximum possible or permissible intervals of parameter changes during the steady vibrations. Coefficients in the right part are determined from experimental data for the comprehending hysteresis cycle under conditions of steady-state oscillations. Approximation curves of the comprehending cycle are constructed using the methods of minimizing the discrepancy of analytical representations to the number of experimental points. The proposed approach allows by one differential equation to describe the trajectory of hysteresis with a random starting point within the area of the comprehending cycle.

© PNRPU

Введение

Особенности гистерезиса (форма петлеобразных траекторий, асимптотическое поведение или симметрия прямого и обратного процессов и др.) определяются природой процесса [1–11]. Поэтому для математического описания гистерезиса авторы, как правило, предлагают модели, опираясь на конкретные представления о физическом явлении. Однако, несмотря на специфику моделей, ряд из них может претендовать на определённую общность, выходящую за область специализированного исследования.

Феноменологический подход является весьма эффективным инструментом к созданию обобщенных математических моделей. В современной литературе имеется достаточно большое число примеров, демонстрирующих «миграцию» идеи метода из одной области исследования в другую. Это свидетельствует не только о «глубине» математических моделей, но и, в большей степени, об общих чертах различных по природе гистерезисных процессов. Поэтому представляется целесообразным кратко остановиться на нескольких известных феноменологических моделях, которые успешно применяются для описания гистерезиса в различных областях науки и техники.

В динамике сложных механических систем, составные элементы которых взаимодействуют друг с другом силами различной природы, построение теоретических моделей с идентификацией их параметров представляет собой непростую задачу. В таких случаях механическую систему можно рассматривать как «черный ящик» с известными из эксперимента значениями входных и выходных параметров. Взаимосвязи между этими параметрами устанавливаются на основе феноменологических моделей, параметры которых идентифицируются с использованием экспериментальных данных [12–14].

В этом направлении особое место занимают модели, которые строятся с использованием спектральных разложений по релейным нелинейностям. Такой подход был предложен в 1935 г. немецким физиком Ф. Прейзахом в работах по магнетизму [15–17], в которых процесс намагничивания рассматривается как статистический результат перемагничивания отдельных элементарных областей (доменов). Считается, что каждая такая область может находиться только в состоянии насыщения с направлением намагниченности вдоль или против действия внешнего поля. Соответственно этому намагниченность каждой области описывается с помощью функций-переключателей, определяющих петлю гистерезиса в виде прямоугольника. Важной составляющей модели Ф. Прейзаха является функция распределения ориентаций доменов, с помощью которой определяются значения намагниченности в произвольном поле.

В настоящее время идеи Ф. Прейзаха превращены в строгий математический аппарат и существенно развиты в работах М.А. Красносельского, А.В. Покровского и их последователей [18]. Схожие феноменологические представления предложены и развиваются в различных областях механики и физики [19–22]. Однако для идентификации параметров таких моделей часто требуются сложные экспериментальные исследования и интерпретации полученных данных.

В 1967 г. Бук предложил способ решения задачи о вынужденных колебаниях механической системы с гистерезисом зависимости восстанавливающей силы от перемещения [23]. Траектория гистерезиса описывалась с помощью нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, для которого идентификация коэффициентов осуществлялась с использованием опорных экспериментальных данных. В 1971 г. Бук представил модель гистерезиса уже для абстрактной физической системы, рассматривая её как «чёрный ящик» с известными данными на её входе и выходе [24]. В 1976 г. и далее модель была обобщена в работах Вена [25, 26], и с тех пор она известна как модель Бук–Вена [12].

1. Модель Бук–Вена

В настоящее время дифференциальная модель Бук–Вена привлекает повышенный интерес благодаря возможности аналитического описания разнообразных по форме гистерезисных петель, возникающих в различных системах с демпфированием [27]. В частности, модель успешно была использована для моделирования гистерезиса пьезоэлектрических элементов [28], магнитореологических амортизаторов [29], деревянных соединений [30], изоляции фундаментов зданий и сооружений [31] и пр. В современной литературе модель Бук–Вена используется, как правило, в рамках подхода «черного ящика» [12, 32].

Рассмотрим систему с гистерезисом, преобразующую входной сигнал q , зависящий от времени t , в сигнал f на выходе. В соответствии с моделью Бук–Вена отображение $q(t) \rightarrow f(q(t))$ устанавливается с использованием нелинейного обыкновенного диффе-

ренциального уравнения, в состав которого входят функции-переключатели направления процесса. Общей формой записи модели Бук–Вена является дифференциальная связь между входным и выходным сигналами в виде [32]

$$\frac{df}{dt} = g\left(q, f, \operatorname{sgn}\left(\frac{dq}{dt}\right)\right) \frac{dq}{dt}, \quad (1)$$

где g – выбранная кусочно-гладкая функция, идентификация которой осуществляется по экспериментальным данным опорного сигнала.

Уравнение (1) включается в общую систему уравнений динамики системы, содержащих $q(t)$ и $f(q(t))$ в качестве неизвестных функций. Классическим примером использования (1) является уравнение Бук–Вена [25, 26], описывающее динамику механической системы с гистерезисом диссипации энергии. Для одномерного осциллятора эти уравнения имеют вид [33, 34]

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + c\dot{x} + kx + \alpha z - f_0 &= p(t), \\ \dot{z} &= \delta\dot{x} - \beta\dot{x}|z|^n - \gamma z|\dot{x}||z|^{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь сумма $c\dot{x} + kx + \alpha z - f_0$ представляет собой силу демпфирования $f(x(t))$, где c – коэффициент вязкого демпфирования; k – коэффициент жесткости; z – переменная, описывающая гистерезисную траекторию; f_0 – постоянная составляющая f . Значения c , k , α , f_0 , β , γ , δ и n идентифицируются по экспериментальным данным. В литературе описаны различные модификации и усложнения (2), позволяющие описывать с определённой точностью гистерезис разнообразных по природе физических процессов [12, 27–37].

В результате интегрирования уравнений динамики и (1) строится зависимость $f(q(t))$, определяющая кусочно-гладкую непрерывную траекторию гистерезиса. Значения q , когда $dq/dt = 0$, формируют последовательность точек q_k , где k – порядковый номер при возрастании t от начала развития процесса. При переходе через эти точки производная dq/dt последовательно меняет знак и происходит смена ветви гистерезисного процесса, как это показано на рис. 1. Жирные стрелки во втором и четвертом квадрантах показывают соответственно прямое и обратное направления гистерезисного процесса, соответствующие росту или убыванию $q(t)$, когда $dq/dt > 0$ или $dq/dt < 0$.

Применение методов идентификации позволяет определить параметры модели так, чтобы ошибка (расхождение) между выходными данными, полученными из эксперимента, и вычислениями по алгоритмам модели была достаточно мала. Расчёты осуществляют для заданного (опорного) входного сигнала. После этого модель используется для моделирования гистерезиса при других входных сигналах. Однако известны примеры, когда найденные параметры модели Бук–Вена не обеспечивают соответствие результатов вычислений данным, полученным из экспериментов для иных входных сигналов. Такие примеры говорят о неоднозначности идентификации, которая может приводить к неустойчивости модели относительно входного сигнала.

В литературе сформулированы условия, которым должна удовлетворять модель Бук–Вена [12, 32–34]. Основными являются адекватность математической модели физическому процессу и её устойчивость. Модель считается устойчивой по входу, если из ограни-

ченности сигнала на входе системы следует ограниченность сигнала на её выходе при любых начальных условиях (bounded input, bounded output (BIBO) stability). Условия устойчивости накладывают ограничения на диапазоны изменения параметров модели. Однако выбор параметров из области устойчивости не всегда обеспечивает адекватность модели Бук–Вена реальному физическому процессу. Математические конструкции модели, подобные (2), также не всегда гарантирует такую адекватность.

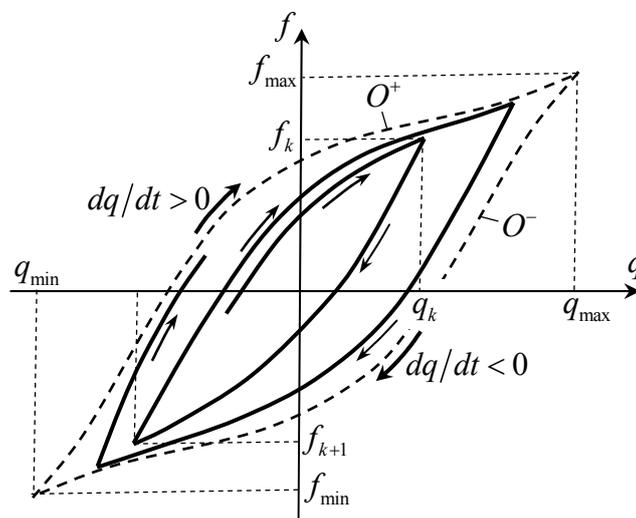


Рис. 1. Гистерезисная траектория внутри объемлющего цикла
 Fig. 1. Hysteresis trajectory inside the surrounding cycle

Настоящая статья является развитием кинематического подхода, предложенного в работах [35–37]. В соответствии с этим подходом физическая связь между параметрами системы, описывающими процесс гистерезиса, устанавливается с использованием дифференциального уравнения (1) с правой частью в виде полинома от двух переменных q и f . Неизвестные коэффициенты полинома определяются по экспериментальным данным для кривых объемлющего цикла, область которого содержит любую возможную траекторию гистерезиса. На рис. 1 объемлющий цикл показан двумя пунктирными кривыми O^- и O^+ , соответствующими прямому и обратному процессам.

Вычислительные эксперименты показали, что предложенная модель обладает асимптотической устойчивостью и позволяет описывать сложные гистерезисные траектории адекватно реальному процессу.

2. Свойства гистерезисного процесса

Как известно, для динамических систем с гистерезисом зависимости между силовыми и кинематическими параметрами имеют циклический характер. На диаграммах гистерезиса траектория каждого цикла имеет форму петли, которая образуется двумя кривыми (ветвями), соответствующими росту или убыванию параметра процесса $q(t)$. Начальная точка каждой ветви определяется предысторией нестационарного процесса. Она может находиться в любой точке пространства изменений исследуемых параметров. В условиях неустановившихся колебаний гистерезисные петли могут быть замкнутыми и незамкнутыми, отличаться друг от друга как по форме, так и относительно расположению. Опыты показывают, что для широкого круга гистерезисных систем однотипные ветви локальных циклов асимптотически приближаются к соответствующим кривым объемлющего цикла при монотонном изменении параметра процесса.

В настоящей работе для описания подобных гистерезисных процессов в рамках дифференциального подхода в виде (1) используется физическая модель, удовлетворяющая нижеследующим свойствам.

Свойство 1. Считается, что любая физически возможная траектория гистерезиса принадлежит области объемлющего цикла, который строится по экспериментальным данным для максимально допустимого диапазона изменения параметра процесса $q_{\min} \leq q(t) \leq q_{\max}$.

Свойство 2. Гистерезисный процесс рассматривается как частотно-независимый. В этом случае гистерезисные кривые объемлющего цикла можно получить на основе квазистатических испытаний.

Свойство 3. Считается, что все локальные кривые прямых процессов асимптотически подобны кривой O^+ , так же как и все локальные кривые обратных процессов асимптотически подобны O^- . Это означает, что при монотонном изменении параметра q каждая локальная кривая стремится к соответствующей кривой объемлющего цикла. Например, на рис. 1 кривая с начальной точкой (q_k, f_k) стремится с уменьшением q к кривой O^- , кривая с начальной точкой (q_{k+1}, f_{k+1}) стремится с возрастанием q к кривой O^+ и т.д. Причём все локальные кривые, продолженные при $q \rightarrow q_{\min}$ или $q \rightarrow q_{\max}$, сходятся в точках (q_{\min}, f_{\min}) и (q_{\max}, f_{\max}) согласно направлению процесса.

Предлагаемый подход заключается в использовании обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в виде (1), устанавливающего зависимость $f(q(t))$ для каждой ветви гистерезисной траектории. Правая часть уравнения $g(q, f)$ подбирается из класса функций, обеспечивающих асимптотическое приближение решения к соответствующим кривым O^+ или O^- объемлющего цикла. В этом случае удаётся описать бесконечное множество ветвей прямого и обратного процессов, имеющих разные точки «старта», но приближающиеся к кривым O^+ или O^- в зависимости от направления процесса.

3. Дифференциальное уравнение гистерезиса

Для моделирования ветвей гистерезисной траектории используется обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с правой частью в виде полинома от двух переменных q и f :

$$\frac{df}{dq} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} q^{i-1} f^{j-1}. \quad (3)$$

Коэффициенты C_{ij} в (3) определяются методами приближения с использованием экспериментальных данных для двух кривых (ветвей) объемлющего цикла. Поэтому матрица $\|C_{ij}\|$ имеет два набора значений. Будем обозначать их соответственно как $\|C_{ij}^+\|$ и $\|C_{ij}^-\|$. Выбор между ними осуществляется по правилу

$$C_{ij} = \begin{cases} C_{ij}^+, & dq/dt \geq 0, \\ C_{ij}^-, & dq/dt < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Уравнение (3) должно быть присоединено к уравнениям движения системы для интегрирования по времени при заданных начальных условиях. Для этого производная df/dq преобразуется к виду $df/dq = (df/dt) \cdot (dq/dt)^{-1}$ и подставляется в левую часть (3). Последующее умножение на dq/dt приводит к дифференциальному соотношению

$$\frac{df}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} q^{i-1} f^{j-1}, \quad (5)$$

которым дополняются уравнения движения системы. Знак dq/dt определяет направление гистерезисного процесса, а также набор констант в соответствии с (4).

В силу (4) прямой и обратный процессы описываются разными уравнениями. В точках q_k , когда $dq/dt = 0$, происходит смена одного уравнения на другое, однако непрерывность $q(t)$ не нарушается. Эта смена чередуется в процессе интегрирования по времени.

Уравнения (5), (4) можно объединить, если воспользоваться функцией-переключателем $\text{sgn}(v)$, где $v = \dot{q} = dq/dt$ – скорость. Тогда вместо (5) и (4) можно записать одно уравнение

$$\frac{df}{dt} = \frac{v}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m [(1 + \text{sgn } v) C_{ij}^+ + (1 - \text{sgn } v) C_{ij}^-] q^{i-1} f^{j-1}, \quad (6)$$

которым моделируются как прямой, так и обратный процессы. Уравнение (6) является частной формой записи уравнения (1).

Во многих случаях можно считать, что прямой и обратный процессы протекают одинаково, т.е. отличаются лишь направлением изменения параметра процесса $q(t)$. В этом случае кривые объемлющего цикла симметричны относительно начала координат, как показано на рис. 2. На диаграмме произвольной точке k с координатами (q_k, f_k) кривой прямого процесса отвечает точка \tilde{k} с координатами $(-q_k, -f_k)$ кривой обратного процесса и наоборот.

Следовательно, обратный процесс описывается уравнением прямого процесса

$$\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{q}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} \tilde{q}^{i-1} \tilde{f}^{j-1} \quad (7)$$

с переменными $\tilde{q} = -q$, $\tilde{f} = -f$. Обратный переход к q и M вместо (7) даёт

$$\frac{df}{dq} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} (-1)^{i+j} q^{i-1} f^{j-1}. \quad (8)$$

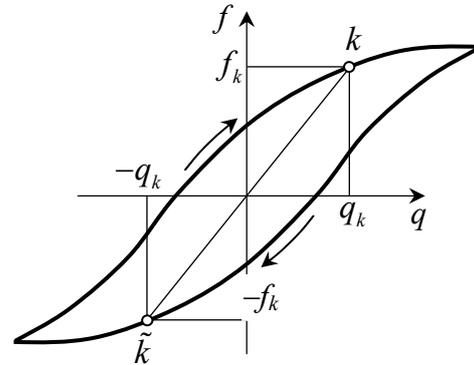


Рис. 2. Ветви цикла, симметричные относительно начала координат
Fig. 2. Cycle branches symmetrical with regard to the origin

Уравнения прямого (3) и обратного (8) процессов можно объединить и записать аналогично (6) в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \left[1 + \operatorname{sgn} \nu + (1 - \operatorname{sgn} \nu)(-1)^{i+j} \right] C_{ij} q^{i-1} f^{j-1}. \quad (9)$$

Способ определения коэффициентов C_{ij} описан в работах [11, 35]. Идентификация коэффициентов осуществляется с использованием только экспериментальных данных, соответствующих кривым прямого и обратного процессов объемлющего цикла для установившегося процесса. Таким образом, решается проблема выбора опорной гистерезисной траектории для идентификации параметров модели. Вычислительные эксперименты показали асимптотическую устойчивость модели и её адекватность реальным процессам со сложной формой кривых объемлющего цикла [11, 35–37].

В качестве примера на рис. 4 показаны результаты моделирования переходного процесса колебаний гасителя маятникового типа (рис. 3) при внешнем гармоническом воздействии с амплитудой $\Phi = 0,3$ рад. Конструкция демпферного узла гасителя состоит из одного или нескольких ведущих дисков 1, одного или нескольких ведомых дисков 2, скрепленных с маятником. Диски имеют центральную ось, позволяющую им вращаться друг относительно друга. Диски имеют специальные профильные углубления, между которыми помещаются и частично зажимаются эластомерные элементы 3, контактирующие с ведущими и ведомыми дисками. Движение конструкции через систему креплений передаётся к ведущим дискам гасителя. В силу инерционности маятника происходит прокручивание ведущих дисков относительно ведомых. При этом происходят перемещения эластомерных элементов по каналам, образуемым криволинейными углублениями на поверхностях дисков. При этом перемещение шариков сопровождается их значительным деформированием и трением о поверхности каналов, что является причиной гистерезиса. Подробные описания эксперимента, вариантов конструкции и способа идентификации параметров модели изложены в работах [14, 35].

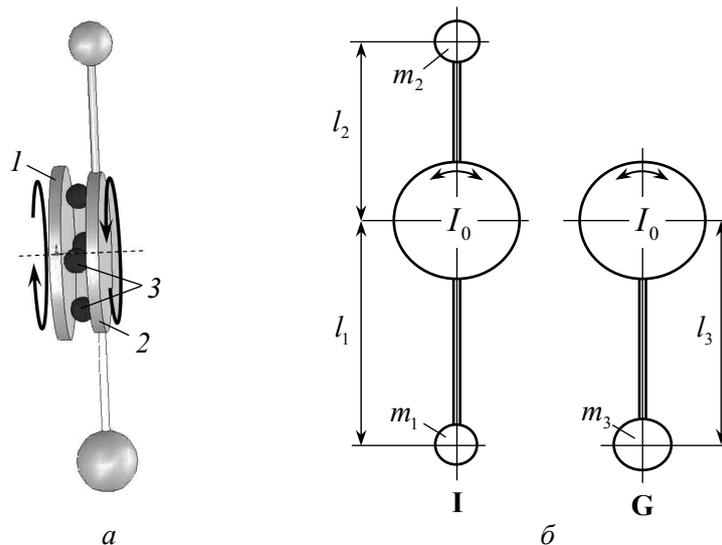


Рис. 3. Гасители колебаний маятникового типа: а – схема работы; б – варианты конструкции (I – инерционный, G – гравитационный)

Fig. 3. Pendulum-type vibration suppressors: a – operational scheme; b – structure variants (I is inertial and G is gravitational ones)

Траектории на рис. 4 отвечают соответственно колебаниям «инерциального» гасителя при внешнем гармоническом воздействии с частотой $f = 0,2$ Гц (рис. 4, а) и колебаниям «гравитационного» гасителя при воздействии с частотой $f = 0,8$ Гц (рис. 4, б). Красным цветом отмечены кривые прямого и обратного процессов объемлющего цикла, в пределах которого строится траектория гистерезиса.

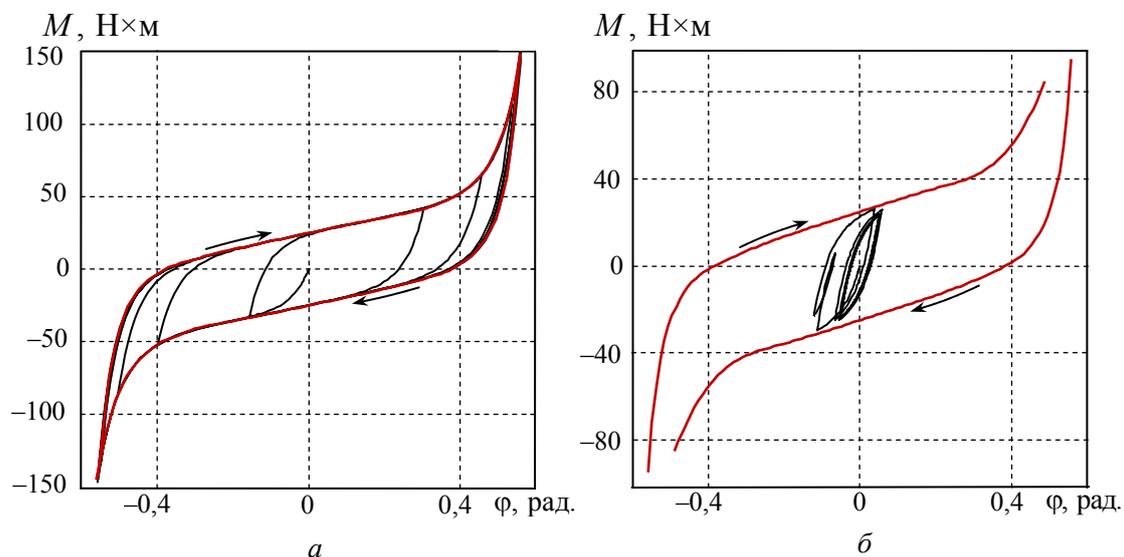


Рис. 4. Гистерезис зависимостей момента сопротивления M от угла поворота φ штанги гасителя колебаний маятникового типа

Fig. 4. Hysteresis of dependences between modulus of resistance M and angle of rotation φ of the rod of pendulum-type vibration suppressor

Заключение

В работе развивается кинематический подход, предложенный ранее авторами для описания гистерезиса различных нестационарных процессов. Определена связь подхода с известным методом Бук–Вена. Так же как и модель Бук–Вена, математическая модель строится на основе обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Однако в отличие от модели Бук–Вена правая часть этого уравнения выбирается в виде полинома от двух переменных – параметра гистерезисного процесса, зависящего от времени, и функции этого параметра. Такими переменными являются, например, перемещение (угол поворота) и соответствующая ему сила (момент). Коэффициенты полиномиального представления отыскиваются в результате аналитической аппроксимации кривых объемлющего (включающего) цикла в условиях установившихся колебаний. Предполагается, что такое представление обеспечивает асимптотическую устойчивость решения, это подтверждается численными экспериментами и сравнениями с экспериментальными данными, опубликованными авторами ранее. Полиномиальные коэффициенты правой части определяются методами приближения, минимизируя невязку аналитического представления к множеству значений, полученных в экспериментах. Использование кривых объемлющего цикла позволяет преодолеть две проблемы, свойственные подходу Бук–Вена. Одна из них связана с однозначным выбором опорного сигнала (опорных кривых) для идентификации параметров модели, вторая – с адекватностью модели реальному процессу.

Предложенная модель физических зависимостей гистерезисного типа является аналитической, что является важным для её включения в модели, описывающих нелинейное поведение механических и иных систем.

Разработанный подход может быть использован при решении различных задач о нестационарных колебаниях различных конструкций и механизмов с гистерезисным характером рассеяния энергии. Подход может оказаться полезным и при решении иных задач механики, в том числе об упругопластическом циклическом деформировании различных материалов и конструкций.

Работа выполнена в Московском авиационном институте при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (коды проектов МК-6737.2015.8 и МК-7072.2016.8).

Библиографический список

1. Mayergoyz I.D. Mathematical models of hysteresis and their applications: 2nd edn. (Electromagnetism). – Amsterdam: Elsevier, Academic Press, 2003. – 498 p.
2. Bertotti G. Hysteresis in magnetism: for physicists, materials scientists, and engineers, Part 2. – Boston: Elsevier, Academic Press, 1998. – 558 p.
3. Rieger M.O. Young measure solutions for nonconvex elastodynamics // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. – 2003. – Vol. 34. – No. 6. – P. 1380–1398. DOI: 10.1137/S0036141001392141
4. Rieger M.O. A model for hysteresis in mechanics using local minimizers of Young measures // *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. – 2005. – Vol. 63. – P. 403–414. DOI 10.1007/3-7643-7384-9_39
5. Mielke A. *Analysis of energetic models for rate-independent materials* // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Beijing, China*. – 2002. – Vol. 3. – P. 817–828.
6. Mielke A., Roubíček T. A rate-independent model for inelastic behavior of shape-memory alloys // *Multiscale Modeling and Simulation*. – 2003. – Vol. 1. – No. 4. – P. 571–597. DOI:10.1137/S1540345903422860
7. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // *Известия РАН. МТТ*. – 2014. – № 1. – С. 37–53.
8. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // *Известия РАН. МТТ*. – 2015. – № 2. – С. 78–95.
9. The investigation on the nonlinearity of plasticine-like magnetorheological material under oscillatory shear rheometry / X. Gong, Ya. Xu, S. Xuan, C. Guo, L. Zong // *Journal of Rheology*. – 2012. – Vol. 56. – No. 6. – P. 1375–1391.
10. Large amplitude oscillatory shear rheology for nonlinear viscoelasticity in hectorite suspensions containing poly(ethylene glycol) / Z. Tong, W.X. Sun, Y.R. Yang, T. Wang, X.X. Liu, C.Y. Wang // *Polymer*. – 2011. – Vol. 52. – No. 6. – P. 1402–1409.
11. Danilin A.N., Yanovsky Yu.G., Semenov N.A., Shalashilin A.D. Kinematic model of the rheological behavior of non-Newtonian fluids in conditions of nonstationary cyclic loading // *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. – 2012. – Vol. 3. – No. 4. – P. 1–15.
12. Visintin A. *Differential Models of hysteresis (Applied Mathematical Sciences)*. – Berlin: Springer, 1994. – 418 p.
13. Nová I., Zemánek I. Analytical model with flexible parameters for dynamic hysteresis loops modeling // *Journal of Electrical Engineering*. – 2010. – Vol. 61. – No. 7. – P. 46–49.

14. Danilin A.N., Shalashilin V.I. A method to identify hysteresis by an example of an antigalloping device // *International Applied Mechanics*. – 2010. – Vol.46. – No. 5. – P. 588–595.
15. Preisach F. Über die magnetische Nachwirkung // *Zeitschrift für Physik*. – 1935. – P. 277–302.
16. Preisach modeling of magnetization changes in steel / S.F.H. Parker, C.A. Faunce, P.J. Grundy, M.G. Maylin, J.L.C. Ludlow, R. Lane // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 1995. – Vol. 145. – P. 51–56.
17. Torre E.D. A Preisach model for accommodation // *IEEE Transactions on Magnetics*. – 1994. – Vol. 30. – No. 5. – P. 2701–2707.
18. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 271 с.
19. Smith R. Smart material systems: model development. – Philadelphia: SIAM, 2005. – 525 p.
20. Leenen R. The modeling and identification of an hysteretic system. The wire-rope as a nonlinear shock vibration isolator // *Eindhoven University of Technology: Dept. Mechanical Engineering*. – DCT 2002.72, 2002.
21. Rosensweig R.E. *Ferrohydrodynamics*. – New York: Dover Publications, Inc., 2014. – 348 p.
22. Berkovski B., Bashtovoy V. *Magnetic Fluids and Applications*. – New York: Begell House Inc. Publishers, 1996. – 350 p.
23. Bouc R. Forced vibrations of a mechanical system with hysteresis // *Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, Czechoslovakia, 1967*. – P. 315–321.
24. Bouc R. Modèle mathématique d’hystérésis (A mathematical model for hysteresis) // *Acustica*. – 1971. – Vol. 21. – P. 16–25.
25. Wen Y.K. Method for random vibration of hysteretic systems // *Journal of the Engineering Mechanics Division*. – 1976. – Vol. 102 (EM2). – P. 246–263.
26. Wen Y.K. Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation // *Journal of Applied Mechanics*. – 1980. – Vol. 47. – P. 150–154.
27. Development of adaptive modeling techniques for non-linear hysteretic systems / A.W. Smyth, S.F. Masri, E.B. Kosmatopoulos, A.G. Chassiakos, T.K. Caughey // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2002. – Vol. 37. – P. 1435–1451.
28. Low T., Guo W. Modelling of a three-layer piezoelectric bimorph beam with hysteresis // *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*. – 1995. – Vol. 4. – No. 4. – P. 230–237.
29. Yoshioka H., Ramallo J.C., Spencer Jr. B.F. “Smart” base isolation strategies employing magnetorheological dampers // *Journal of Engineering Mechanics*. – 2002. – Vol. 128. – No. 5. – P. 540–551.
30. Foliente G.C. Hysteresis modelling of wood joints and structural systems // *ASCE Journal of Structural Engineering*. – 1995. – Vol. 121. – No. 6. – P. 1013–1022.
31. Nagarajaiah S., Xiaohong S. Response of base-isolated USC hospital building in Northridge earthquake // *ASCE Journal of Structural Engineering*. – 2000. – Vol. 126. – No. 10. – P. 1177–1186.
32. Ismail M., Ikhouane F., Rodellar J. The hysteresis Bouc-Wen model, a survey // *Archives of Computational Methods in Engineering*. – 2009. – Vol. 16. – P. 161–188.
33. Ikhouane F., Mañosa V., Rodellar J. Dynamic properties of the hysteretic Bouc-Wen model // *Systems & Control Letters*. – 2007. – Vol. 56. – P. 197–205.
34. Ikhouane F., Rodellar J. On the hysteretic Bouc-Wen model // *Nonlinear Dynamics*. – 2005. – Vol. 42. – P. 63–78.
35. Данилин А.Н., Кузнецова Е.Л., Рабинский Л.Н. Модель гистерезиса энергорассеяния при колебаниях механических систем // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2014. – № 4. – С. 45–67.
36. Danilin A.N., Vinogradov A.A., Lilien J.-L. Kinematic model for hysteretic dissipation of vibration energy for Torsional Damper and Detuner // *Proceedings of 7th International Symposium on Cable Dynamics, Vienna (Austria), 10–13 December 2007*. – 2007. – P. 247–253.
37. Виноградов А.А., Данилин А.Н., Рабинский Л.Н. Деформирование многослойных проводочных конструкций спирального типа. Математическое моделирование, примеры использования / под ред. А.Н. Данилина. – М.: Изд-во Моск. авиац. ин-та, 2014. – 168 с.

References

1. Mayergoyz I.D. Mathematical models of hysteresis and their applications: 2nd edn. (Electromagnetism). Amsterdam: Elsevier, Academic Press, 2003, 498 p.
2. Bertotti G. Hysteresis in magnetism: for physicists, materials scientists, and engineers, Ch. 2. – Boston: Elsevier, Academic Press, 1998, 558 p.
3. Rieger M.O. Young measure solutions for nonconvex elastodynamics. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2003, vol.34, no. 6, pp.1380-1398, DOI: 10.1137/S0036141001392141.
4. Rieger M.O. A model for hysteresis in mechanics using local minimizers of Young measures. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, 2005, vol.63, pp. 403-414. DOI:10.1007/3-7643-7384-9_39.
5. Mielke A. *Analysis of energetic models for rate-independent materials, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing, China)*, 2002, vol. 3, pp. 817-828.
6. Mielke A., Roubíček T. A rate-independent model for inelastic behavior of shape-memory alloys. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2003, vol. 1, no. 4, pp. 571-597, DOI: 10.1137/S1540345903422860.
7. Mishustin I.V., Movchan A.A. Modelirovanie fazovykh i strukturnykh prevrashhenij v splavah s pamjat'ju formy, proishodjashhij pod dejstviem nemonotonno menjajushhijhsja naprjazhenij [Modeling of phase and structural transformations in shape memory alloys under the action of non-monotonic stresses]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2014, no 1, pp. 37-53. DOI: 10.3103/S002565441401004X.
8. Mishustin I.V., Movchan A.A. Analog teorii plasticheskogo techenija dlja opisaniija deformacii martensitnoj neuprugosti v splavah s pamjat'ju formy. [Analog of plastic flow theory to describe the deformation of the martensite inelasticity in shape memory alloys]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2015, no. 2, pp. 78-95. DOI: 10.3103/S0025654415020077.
9. Gong X., Xu Ya., Xuan S., Guo C., Zong L. The investigation on the nonlinearity of plasticine-like magnetorheological material under oscillatory shear rheometry. *Journal of Rheology*, 2012, vol. 56, no 6, pp.1375-1391. DOI: 10.1007/s13367-014-0015-3.
10. Tong Z., Sun W.X., Yang Y.R., Wang T., Liu X.X., Wang C.Y. Large amplitude oscillatory shear rheology for nonlinear viscoelasticity in hectorite suspensions containing poly(ethylene glycol). *Polymer*, 2011, vol.52, no. 6, pp.1402–1409. DOI: 10.1016/j.polymer.2011.01.048.
11. Danilin A.N., Yanovsky Yu.G., Semenov N.A., Shalashilin A.D. Kinematic model of the rheological behavior of non-Newtonian fluids in conditions of nonstationary cyclic loading. *Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal*, 2012, vol. 3, no. 4, pp. 1-15. DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v3.i4.30.
12. Visintin A. *Differential Models of hysteresis (Applied Mathematical Sciences)*. – Berlin: Springer, 1994, 418 p.
13. Nová I., Zemánek I. Analytical model with flexible parameters for dynamic hysteresis loops modeling. *Journal of Electrical Engineering*, 2010, vol. 61, no. 7, pp. 46-49, available at: http://iris.elf.stuba.sk/JEEEC/data/pdf/7s_110-14.pdf (accessed 17 July 2016).
14. Danilin A.N., Shalashilin V.I. A method to identify hysteresis by an example of an antialloping device. *International Applied Mechanics*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 588-595. DOI: 10.1007/s10778-010-0345-x.
15. Preisach F. Über die magnetische Nachwirkung. *Zeitschrift für Physik*, 1935, pp. 277-302.
16. Parker S.F.H., Faunce C.A., Grundy P.J., Maylin M.G., Ludlow J.L.C., Lane R. Preisach modeling of magnetization changes in steel. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1995, vol. 145, pp. 51-56. DOI: 0.1016/0304-8853(94)01617-8.
17. Torre E.D. A Preisach model for accommodation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1994, vol.30, no. 5, pp. 2701-2707. DOI: 10.1109/20.312509
18. Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. *Sistemy s gisterezisom [Systems with hysteresis]*. – Moscow: Nauka, 1983, 271 p.
19. Smith R. *Smart material systems: model development*. Philadelphia: SIAM, 2005. 525 p.

20. Leenen R. The modeling and identification of an hysteretic system. The wire-rope as a nonlinear shock vibration isolator. Eindhoven University of Technology. Dept. Mechanical Engineering. 2002, DCT 2002.72.
21. Rosensweig R.E. Ferrohydrodynamics. New York: Dover Publications, Inc., 2014. 348 p.
22. Berkovski B., Bashtovoy V. Magnetic Fluids and Applications., New York: Begell House Inc. Publishers, 1996, 350 p.
23. Bouc R. Forced vibrations of a mechanical system with hysteresis. Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillations. Prague, 1967, pp. 315-321.
24. Bouc R. Modèle mathématique d'hystérésis (A mathematical model for hysteresis). *Acustica*, 1971, vol. 21, pp.16-25.
25. Wen Y.K. Method for random vibration of hysteretic systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1976, vol. 102 (EM2), pp.246-263, available at: https://www.researchgate.net/publication/246813253_Method_for_Random_Vibration_of_Hysteretic_System (accessed 17 July 2016).
26. Wen Y.K. Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, vol. 47, pp. 150-154. DOI:10.1115/1.3153594
27. Smyth A.W., Masri S.F., Kosmatopoulos E.B., Chassiakos A.G., Caughey T.K. Development of adaptive modeling techniques for non-linear hysteretic systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, vol.37, pp.1435-1451. DOI:10.1016/S0020-7462(02)00031-8
28. Low T., Guo W. Modelling of a three-layer piezoelectric bimorph beam with hysteresis. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 1995, vol. 4, no. 4, pp. 230-237. DOI:10.1109/84.475550
29. Yoshioka H., Ramallo J.C., Spencer Jr. B.F. “Smart” base isolation strategies employing magnetorheological dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, vol.128, no.5, pp. 540-551. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:5(540)
30. Foliente G.C. Hysteresis modelling of wood joints and structural systems. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 1995, vol. 121, no. 6, pp.1013-1022. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9445(1995)121:6(1013)
31. Nagarajaiah S., Xiaohong S. Response of base-isolated USC hospital building in Northridge earthquake. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 2000, vol. 126, no. 10, pp. 1177-1186. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9445(2000)126:10(1177)
32. Ismail M., Ikhouane F., Rodellar J. The hysteresis Bouc-Wen model, a survey. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2009, vol. 16, pp. 161-188, available at: <http://link.springer.com/article/10.1007/s11831-009-9031-8> (accessed 18 July 2016).
33. Ikhouane F., Mañosa V., Rodellar J. Dynamic properties of the hysteretic Bouc-Wen model. *Systems & Control Letters*, 2007, vol. 56, pp. 197-205. DOI:10.1016/j.sysconle.2006.09.001
34. Ikhouane F., Rodellar J. On the hysteretic Bouc-Wen model. *Nonlinear Dynamics*, 2005, vol.42, pp.63-78, available at: <http://link.springer.com/article/10.1007/s11071-005-0069-3> (accessed 18 July 2016).
35. Danilin A.N., Kuznecova E.L., Rabinskij L.N. Model' gisterezisa jenergorassejaniija pri kolebanijah mehanicheskikh system. [Modeling hysteresis of energy dissipation at vibration of mechanical systems]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 4, pp. 45-67. DOI:10.15593/perm.mech/2014.4.02
36. Danilin A.N., Vinogradov A.A., Lilien J.-L. Kinematic model for hysteretic dissipation of vibration energy for torsional damper and detuner. *Proceedings of 7th International Symposium on Cable Dynamics. Vienna (Austria)*, 10-13 December, 2007, pp. 247-253.
37. Vinogradov A.A., Danilin A.N., Rabinskii L.N. Deformirovanie mnogoslownykh provolochnykh konstruktsii spiral'nogo tipa. Matematicheskoe modelirovanie, primery ispol'zovaniia.[The deformation of multi-layer wire structures. Mathematical modeling, application examples]. Moskovskii aviatsionnyi institut, 2014, 168 p.