



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.03

УДК 539.3

## СОВМЕСТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПЛАСТИН В РАМКАХ МОДЕЛЕЙ КИРХГОФА И ТИМОШЕНКО

И.В. Богачев

Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук  
им. И.И. Воровича, Ростов-на-Дону, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 29 апреля 2021 г.  
Принята: 10 ноября 2021 г.  
Опубликована: 30 декабря 2021 г.

#### Ключевые слова:

функционально-градиентный материал, круглая пластина, модель Кирхгофа, модель Тимошенко, обратная задача, идентификация, цилиндрическая жесткость, плотность, проекционный метод, акустический метод.

### АННОТАЦИЯ

Представлены модели деформирования функционально-градиентных круглых пластин в рамках гипотез Кирхгофа и Тимошенко. На основе ранее полученных с помощью вариационного принципа Гамильтона – Остроградского уравнений колебаний и граничных условий выписаны постановки задач в цилиндрической системе координат, учитывающие переменность функций цилиндрической жесткости и плотности по радиальной координате, что позволяет рассматривать пластины из функционально-градиентных материалов. Пластины считались жестко заземленными по краю, рассматривался случай установившихся колебаний, вызванных нагрузкой, приложенной к поверхности. Построена схема решения прямых задач расчета колебаний пластин, основанная на методе Галеркина. С ее помощью был проведен анализ влияния функций цилиндрической жесткости и плотности на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ, акустический отклик), который выявил, что обе функции существенно влияют на АЧХ, причем наибольшее влияние наблюдается в окрестности резонансных частот. Результаты анализа позволили сформулировать постановки новых обратных задач совместной идентификации функций цилиндрической жесткости и плотности неоднородной круглой пластины по дополнительной информации об акустическом отклике для обеих гипотез. Для их решения построена специальная проекционная методика, основанная на разложении неизвестных функции механических характеристик, а также динамических величин (функций прогиба и угла поворота нормали) по некоторым системам линейно независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям. Коэффициенты этих разложений определяются из решения специальных систем линейных и нелинейных уравнений, полученных из сформулированных слабых постановок обеих задач. В результате удалось провести совместную идентификацию искомых характеристик в заданных классах функций. Результаты идентификации проиллюстрированы набором вычислительных экспериментов для различных функций.

© ПНИПУ

© Богачев Иван Викторович – к.ф.-м.н., н.с., e-mail: bogachev89@yandex.ru, iD: 0000-0002-4725-5102.

Ivan V. Bogachev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: bogachev89@yandex.ru, iD: 0000-0002-4725-5102.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# SIMULTANEOUS IDENTIFICATION OF MECHANICAL PROPERTIES OF FUNCTIONALLY GRADED PLATES UNDER THE KIRCHHOFF AND TYMOSHENKO MODELS

I.V. Bogachev

Southern Federal University, Institute of mathematics, mechanics and computer science of I.I. Vorovich, Rostov-on-Don, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 29 April 2021  
Accepted: 10 November 2021  
Published: 30 December 2021

### Keywords:

functional gradient material, round plate, Kirchhoff model, Timoshenko model, inverse problem, identification, cylindrical stiffness, density, projection method, acoustic method.

## ABSTRACT

The paper presents models of deformation of functional-gradient round plates in the framework of the hypotheses of Kirchhoff and Timoshenko. Based on the equations of oscillations and boundary conditions obtained earlier using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, the formulations of problems in a cylindrical coordinate system are written, taking into account the variability of the functions of cylindrical stiffness and density along the radial coordinate. The plates were considered rigidly clamped along the edge. The case of steady-state vibrations caused by a load applied to the surface was considered. A scheme for solving direct problems calculating vibrations of plates based on the Galerkin method is constructed. An analysis of the influence of the functions of cylindrical stiffness and density on the amplitude-frequency characteristics (AFC, acoustic response) was carried out, which revealed that both functions significantly affect the AFC, and the greatest influence is observed in the vicinity of resonant frequencies. The results of the analysis made it possible to formulate new inverse problems of simultaneous identification of the functions of cylindrical stiffness and density of an inhomogeneous circular plate using additional information about the acoustic response for both hypotheses. To solve them, a special projection technique was built, based on the expansion of unknown functions of mechanical characteristics, as well as dynamic quantities (functions of deflection and angle of rotation of the normal) in terms of some systems of linearly independent functions that satisfy the boundary conditions. The coefficients of these expansions are determined from the solution of special systems of linear and nonlinear equations obtained from the formulated weak statements of both problems. As a result, it is possible to identify the desired characteristics in the given classes of functions. The identification results are illustrated with a set of computational experiments for various functions.

© PNRPU

## Введение

Одним из актуальных направлений современной механики является изучение новых функционально-градиентных материалов, механические характеристики которых являются функциями пространственных координат и могут значительно изменяться по объему тела. При этом весьма актуальными являются обратные задачи [1] идентификации свойств таких материалов, в том числе упругих модулей и плотности. Их точное определение важно для проверки соответствия их значений заданным на этапе проектирования, а также с целью текущей эксплуатационной диагностики. Для решения подобных задач необходима разработка новых эффективных методов неразрушающего контроля, достаточно точных и простых в практической реализации.

В настоящее время предложено множество классических и неклассических моделей, описывающих деформирование пластинчатых конструкций [2], основанных на различных гипотезах. Работы [3–5] посвящены обзору и сравнению моделей пластин (в рамках гипотез Кирхгофа, Тимошенко – Рейсснера и др.). В исследовании [3] проведено сравнение моделей в рамках гипотез Тимошенко – Рейсснера и Кирхгофа, а также этих моделей с уравнениями трехмерной теории упругости. В результате описаны области применимости каждой из моделей: теория Кирхгофа для пластин является пер-

вым асимптотическим приближением для изотропного материала, теория Тимошенко – Рейсснера, учитывающая сдвиг, в изотропном случае несущественно уточняет теорию Кирхгофа, однако для ортотропных материалов при относительно малом модуле поперечного сдвига ее уточнение является существенным. В статье [6] получены асимптотические точные решения задач о колебаниях прямоугольных толстых пластин. Работа [7] посвящена разработке упрощенной модели клеевого соединения двуслойной пластины, позволяющей аналитически определять напряженное состояние в клеевом соединении для произвольных наборов касательных нагрузок на боковых сторонах.

В области построения схем идентификации характеристик пластинчатых конструкций также стоит отметить ряд работ, вышедших в последнее время. По-прежнему актуальными являются работы по идентификации свойств пластин с однородными и кусочно-однородными свойствами. В статье [8] представлен метод идентификации материальных констант многослойной композитной пластины на основе решения задачи оптимизации с целевой функцией, связывающей экспериментальные и расчетные собственные частоты. В работе [9] предложен метод определения изгибной жесткости ортотропной пластины на основе методики определения распределения внешних сил, действующих на конструкцию. Для решения обратной некорректной за-

дачи построена процедура регуляризации, позволяющая преодолеть высокую чувствительность к зашумлению входных данных. В работе [10] представлена схема идентификации характеристик круглой многослойной пластины, основанная на преобразовании Гильберта. Статья [11] посвящена определению свойств тонких вязкоупругих пластинчатых конструкций. Идентификация проводилась на основе акустического отклика, при этом сначала производился подбор модели, описывающей вязкоупругие свойства, а затем и определение параметров этой модели. В качестве объектов исследования рассматривались алюминиевые пластины с вязкоупругим демпфирующим покрытием. В работе [12] рассмотрена иная обратная задача – о необходимости определения характера и величины нагрузки, приложенной к пластине кавитатора. Ввиду специфики предметной области рассматривались нестационарные гидродинамические нагрузки, действующие на колеблющуюся пластину в двумерном потоке. Для расчетов использовались модификации метода граничных элементов.

Стоит отметить работы, посвященные моделированию неоднородных пластин, в частности функционально-градиентных (ФГ) [13]. В статье [14] представлено достаточно обширное исследование свободных колебаний и динамической устойчивости ФГ-пластин. Рассмотрены различные виды смесей исходных материалов, из которых изготовлены ФГ-пластины, и влияние их распределения по объему тела на динамические характеристики. В работах [15, 16] также представлено моделирование колебаний функционально-градиентных пластин. Моделирование производится в конечно-элементных пакетах, в частности ANSYS. Проведено исследование влияния законов изменения свойств пластин на их динамические характеристики – прогиб и амплитудно-частотные характеристики. В случае трехслойной композитной пластины из вязкоупругого функционально-градиентного материала в статье [17] анализируется специальный метод расчета колебаний на основе метода Фурье – Ритца. Получены решения в виде собственных частот и собственных форм для различных типов нагрузки и граничных условий.

Достаточно большое количество статей посвящено идентификации дефектов в пластинчатых конструкциях. В работе [18] представлена методика ультразвукового мониторинга тонкостенных пластинчатых конструкций бегущими волнами с целью обнаружения и оценки размеров и местоположений скрытых дефектов, основанная на модели переизлучения волн, разработанной с помощью полуаналитического подхода. В статье [19] предложен метод идентификации дефектов в пластинах с помощью новой методики измерения деформации в поперечном направлении. Деформация считывается четырьмя тензодатчиками, и разность их показаний используется в качестве критерия обнаружения дефектов. Разработанная методика оказалась чувствительной, в том числе и к малым дефектам. В работе [20] представлен метод ультра-

звуковой идентификации двумерных дефектов в пластинах. Полученный экспериментальным путем сигнал сравнивается с модельным, в результате чего удастся идентифицировать местоположение дефекта. В статье [21] представлены результаты экспериментов для алюминиевых и многослойных композитных пластин. Работа посвящена анализу задачи идентификации трещины в функционально-градиентной пластине при анализе свободных колебаний. Пластина считалась неоднородной по толщине с экспоненциальным законом распределения свойств. На основе вейвлет-анализа колебательной моды удавалось локализовать местоположение трещины, метод хорошо проявил себя даже для зашумленных входных данных. В другой статье [22] представлен метод идентификации трещин в пластинах на основе использования нейронных сетей и алгоритма Джая. Алгоритм позволил из анализа изменения модуля Юнга в пластине определять местоположение и размер трещин. Идентификации повреждений в пластинчатых конструкциях также посвящена работа [23]. В ней представлен более эффективный относительно классических – вероятностный подход по расположению датчиков, считывающих информацию об амплитудах на поверхности пластины. Разработанный подход применяется для поврежденных многослойных конструкций из армированного углеродным волокном полимера. Статья [24] посвящена другому случаю обратных задач выявления дефектов в пластинах, в котором неопределенными также являются граничные условия. Как и в предыдущей работе, использован вероятностный подход для подбора наиболее подходящих граничных условий и последующей идентификации повреждений. В данной работе представлено развитие ранее проведенных исследований [25–27] по идентификации характеристик неоднородных упругих круглых пластин в рамках гипотез Кирхгофа [25] и Тимошенко [27]. В исследовании [25] представлено решение обратной задачи идентификации функции цилиндрической жесткости неоднородной круглой пластины в рамках гипотез Кирхгофа. Для решения построен итерационный подход с использованием метода регуляризации Тихонова. Разработанный подход для случая вязкоупругой пластины развит в статье [26]. В работе [27] подобная задача в упругом случае рассмотрена для гипотез Тимошенко. Однако в этих исследованиях плотность считалась известной и постоянной, что, вообще говоря, для многих классов функционально-градиентных материалов не выполняется. Сформулированные в рамках данного исследования две новые постановки обратных задач заключаются в одновременной идентификации функций цилиндрической жесткости и плотности при анализе установившихся колебаний круглой неоднородной по радиальной координате функционально-градиентной пластины в рамках гипотез Кирхгофа и Тимошенко. На основе вычислительных экспериментов по расчету колебаний пластин выявлено существенное влияние обеих искомым функций на амплитудно-частотные характеристики, что позволило в качестве входной информации для обратных задач ис-

пользовать акустический отклик в некоторой точке пластины в заданном наборе частот. Для обеих постановок выведены слабые постановки задач, на основе которых построена обобщенная проекционная методика решения обратных задач, общая схема которой впервые была представлена в работе [28]. Ввиду наибольшей практической значимости задачи идентификации уровня и характера монотонности законов изменений жесткости и плотности пластины, которые в реальных объектах чаще всего являются монотонными функциями, идентификация искомых функций проводилась в классе линейных функций. Это позволило значительно облегчить вычислительную схему и увеличить скорость выполнения расчетов, в результате чего построенная методика позволяет проводить идентификацию на порядок быстрее, чем разработанные ранее итерационные подходы [25–27, 29] на основе метода Тихонова [30, 31]. Результаты идентификации с использованием разработанной методики проиллюстрированы наборами вычислительных экспериментов.

### 1. Постановка задач

Рассмотрим установившиеся изгибные осесимметричные колебания круглой пластины радиуса  $R$  толщины  $h$ , находящейся под действием нагрузки  $q(r)$ , с переменными по радиальной координате цилиндрической жесткостью и плотностью в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Ранее в работе [25] на основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского [32] была получена постановка задачи для неоднородной круглой пластины в рамках гипотез Кирхгофа ( $u_r = -z \partial w / \partial r$ ,  $u_\varphi = 0$ ,  $u_z = w$ , где  $w$  – функция прогиба пластины). Запишем ее в безразмерном виде для случая переменной плотности:

$$\begin{aligned} & (D(r)rw''(r, \kappa))'' - \left(\frac{D(r)w'(r, \kappa)}{r}\right)' - \\ & - \nu(D(r)w''(r, \kappa))' + \nu(D(r)w'(r, \kappa))'' - \\ & - \kappa^4 \rho(r)rw(r, \kappa) - Qq(r)r = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} w(1) = w'(1) = 0, \\ w'(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $D(r) = \frac{E(r)h^3}{12(1-\nu^2)}$  – функция безразмерной цилиндрической жесткости пластины,  $E(r)$  – модуль Юнга,  $\nu = \text{const}$  – коэффициент Пуассона,  $\rho(r)$  – функция безразмерной плотности,  $\kappa$  – безразмерный параметр, характеризующий частоту колебаний,  $Q$  – безразмерный коэффициент, характеризующий уровень нагружения. Краевые условия соответствуют жесткой заделке края пластины [33], к ним добавлено условие симметричности прогиба относительно центра ввиду симметрии по окружной координате.

В случае использования гипотез Тимошенко ( $u_r = z\theta$ ,  $u_\varphi = 0$ ,  $u_z = w$ ) с учетом симметрии по окружной координате в рассмотрение добавляется  $\theta_r$  – функция угла поворота нормали вдоль оси радиальной координаты. В работе [27] в этом случае были выведены уравнения колебаний и граничные условия, которые ниже записаны для случая переменной плотности:

$$\begin{aligned} & 6k(1-\nu)D(r)(\theta - w') - \\ & - \frac{\varepsilon^2}{r} \left( \left( D(r)r \left( \theta' + \frac{\nu}{r} \theta \right) \right)' - D \left( \frac{1}{r} \theta + \nu \theta' \right) \right) - \\ & - \frac{\kappa^2}{12} \rho(r)\theta = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} & 6k(1-\nu)(D(r)r(\theta - w'))' - \\ & - \frac{\kappa^2}{\varepsilon^2} \rho(r)rw + Qr q(r) = 0, \\ & w(1, \kappa) = 0, \quad \theta(1, \kappa) = 0, \\ & w'(0, \kappa) = 0, \quad \theta(0, \kappa) = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь введены дополнительные безразмерные параметры:  $\varepsilon = h/R$ , характеризующий отношение толщины пластины к ее радиусу, а также  $k$  – коэффициент распределения касательных напряжений из теории Тимошенко – Миндлина [3].

Для обеих постановок задач (1.1)–(1.2) и (1.3)–(1.4) постановка **обратных задач** заключается в определении набора функций  $D(r)$  и  $\rho(r)$ , а также соответствующей им функции прогиба  $w(r, \kappa)$ , по дополнительной информации об акустическом отклике, в частности функции прогиба в некоторой точке  $r = r_0$  в заданном частотном диапазоне:

$$w(r_0, \kappa) = f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (1.5)$$

**Примечание.** Данные постановки обратных задач являются существенно нелинейными и учитывают характерную для функционально-градиентных материалов особенность, заключающуюся в том, что не только функция цилиндрической жесткости  $D(r)$ , но и функция плотности  $\rho(r)$  является неизвестной.

Для построения проекционной методики решения сформулированных обратных задач, общая схема которой представлена в [28], запишем слабую постановку задачи (1.1)–(1.2), спроектировав ее на функцию возможного поля прогиба  $w_1(r, \kappa)$  и воспользовавшись граничными условиями:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (D(r)rw''w_1 - D(r)w'w_1'/r - \\ & - \nu D(r)w''w_1 + \nu D(r)w'w_1') dr - \\ & - \kappa^4 \int_0^1 r \rho(r)w w_1 dr = k \int_0^1 r q w_1 dr. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для задачи (1.3)–(1.4) слабая постановка, для которой дополнительно введена функция возможного поля угла поворота нормали  $\theta_1(\xi, \kappa)$ , будет иметь вид:

$$\int_0^1 \left[ \left[ 6k(1-\nu)D(r)\theta_1 + \frac{\varepsilon^2 \nu}{r^2} D(r)r\theta_1' + \frac{D(r)\theta_1}{r} - \frac{\kappa^2}{12} \rho(r)\theta_1 \right] \theta + \left[ \frac{\varepsilon^2}{r} D(r)r\theta_1' + D(r)\nu\theta_1 \right] \theta' - \left[ 6k(1-\nu)D(r)\theta_1 \right] w' \right] r dr = 0, \tag{1.7}$$

$$\int_0^1 \left[ \left[ 6k(1-\nu)D(r)r w_1' \right] \theta + \left[ \frac{\kappa^2}{\varepsilon^2} r \rho(r) w_1 \right] w - \left[ 6k(1-\nu)D(r)r w_1' \right] w' \right] r dr = \int_0^1 Q r^2 q w_1 dr.$$

**2. Исследование влияния функций цилиндрической жесткости и плотности на амплитудно-частотные характеристики**

Решение прямых задач о расчете амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) для известных функций цилиндрической жесткости и плотности производилось с помощью метода Галеркина [34, 35], в рамках которого функции прогиба для обеих задач и функция угла поворота нормали (для гипотез Тимошенко) определялись в виде линейных комбинаций базисных функций, удовлетворяющих соответственно граничным условиям (1.2) и (1.4), а коэффициенты разложений определялись

из условий ортогональности невязки выбранным базисным функциям. Построенная схема решения прямых задач была протестирована на модельных примерах и показала высокую точность.

Для каждой исследуемой задачи проведено по два набора вычислительных экспериментов. В первом наборе при фиксированной функции плотности представлены результаты расчета АЧХ в окрестности первого резонанса для различных значений уровня  $\tau = 0,05; 0,1; 0,5; 1$  безразмерной функции цилиндрической жесткости  $D(r) = \tau(1 - 0,5r)$ . Во втором наборе экспериментов, наоборот, АЧХ рассчитывались для различных уровней  $\tau = 0,05; 0,1; 0,5; 1$  безразмерной функции плотности  $\rho(r) = \tau(1 - 0,5r)$ , при фиксированной цилиндрической жесткости. Результаты двух наборов экспериментов для постановки (1.1)–(1.2) для гипотез Кирхгофа соответственно представлены на рис. 1 (а, б), а для постановки (1.3)–(1.4) в рамках гипотез Тимошенко – на рис. 2 (а, б).

Полученные результаты показывают, что значения обеих функций – и жесткости и плотности – достаточно сильно влияют на АЧХ, следовательно, в данном случае АЧХ является информативной для построения схем идентификации искомых функций. При этом отметим, что для обеих задач при увеличении уровня жесткости значения резонансных частот сдвигаются вправо (увеличиваются), а при увеличении уровня плотности – сдвигаются влево (уменьшаются).

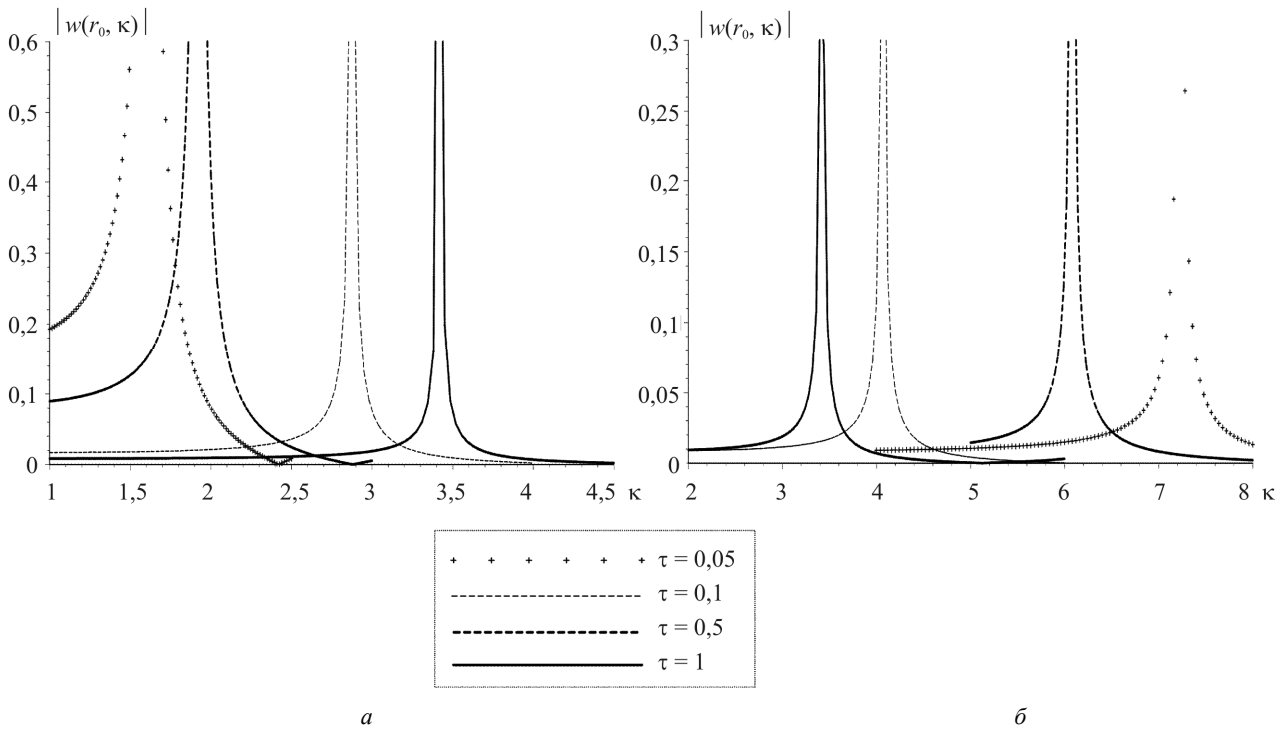


Рис. 1. Анализ влияния уровней жесткости (а) и плотности (б) на АЧХ неоднородной круглой пластины для гипотез Кирхгофа

Fig. 1. Analysis of the influence of the levels of stiffness (a) and density (b) on the frequency response of an inhomogeneous circular plate for Kirchhoff's hypotheses

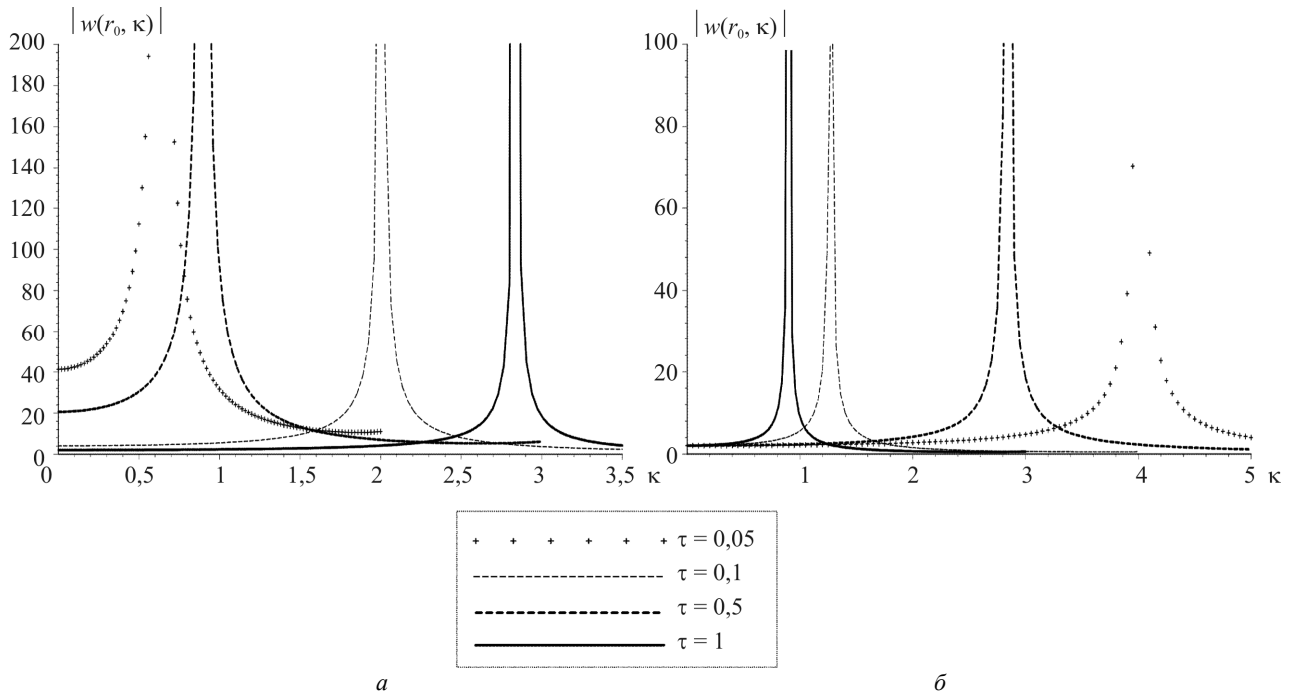


Рис. 2. Анализ влияния уровней жесткости (а) и плотности (б) на АЧХ неоднородной круглой пластины для гипотез Тимошенко  
 Fig. 2. Analysis of the influence of the levels of stiffness (a) and density (b) on the frequency response of an inhomogeneous circular plate for Timoshenko's hypotheses

### 3. Описание проекционной методики

Представим схему проекционной методики решения обратных задач для первой постановки (1.6). Введем  $\varphi_n$  и  $\psi_m$  – системы линейно независимых функций, причем функции  $\varphi_n$  удовлетворяют условиям (1.2). Решение сформулированной обратной задачи (1.2)–(1.6) будем искать в виде:

$$w(r, \kappa) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i, \quad D(r) = \sum_{j=1}^M C_j^D \psi_j, \quad \rho(r) = \sum_{j=1}^M C_j^p \psi_j, \quad (3.1)$$

где  $C_j^D$  и  $C_j^p$  – произвольные постоянные, а коэффициенты  $a_i$  зависят от частоты колебаний  $\kappa$ .

При подстановке представлений (3.1) в соотношение (1.6) и выборе в качестве функции  $w_1 = \varphi_n$ , ввиду линейности его левой части по переменным  $w$  и  $w_1$ , получим систему  $N$  линейных уравнений относительно коэффициентов  $a_i(\kappa)$ , общий вид которой представлен ниже:

$$\sum_{i=1}^N a_i A_{in}(C_j^D, C_j^p, \kappa) = k \int_0^1 r q \varphi_n dr, \quad n = 1..N, \quad j = 1..M, \quad (3.2)$$

где  $A_{in}(C_j^{(1)}, C_j^{(2)}, \kappa)$  – квадратичные формы относительно коэффициентов  $C_j^D$  и  $C_j^p$ .

После решения линейной системы (3.2) получаются выражения для коэффициентов  $a_i(\kappa)$ , записанные относительно  $C_j^D$  и  $C_j^p$ ,  $j = 1..M$ . Они используются в (3.1) для выражения функции прогиба  $w(r, \kappa, C_j^D, C_j^p)$ , которая должна удовлетворять дополнительному условию (1.5) обратных задач. Для набора частотных параметров

$\kappa_m (m = 1..2M)$  из условия (1.5) получаем систему из  $2M$  нелинейных уравнений порядка  $4M$  относительно набора из  $2M$  коэффициентов  $C_j^D, C_j^p, j = 1..M$ :

$$w(r_0, \kappa, C_j^D, C_j^p) = f(\kappa_m), \quad j = 1..M, \quad m = 1..2M. \quad (3.3)$$

Из решения системы (3.3) вычисляются коэффициенты  $C_j^D, C_j^p, j = 1..M$ , которые определяют искомые функции  $D(r)$  и  $\rho(r)$  согласно представлению (3.1).

Для второй постановки (1.7) в рамках гипотез Тимошенко проекционная методика решения обратной задачи описывается аналогично. В выражение (3.1) добавляется разложение функции угла поворота нормали  $\theta(r, \kappa) = \sum_{i=1}^N b_i \gamma_i$ , а система (3.2) записывается в виде  $2N$  линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (a_i A_{in}^{11}(C_j^D, C_j^p, \kappa) + b_i A_{in}^{12}(C_j^D, C_j^p, \kappa)) &= 0, \quad n = 1..N, \\ \sum_{i=1}^N (a_i A_{in}^{21}(C_j^D, C_j^p, \kappa) + b_i B_{in}^{22}(C_j^D, C_j^p, \kappa)) &= \\ &= \int_0^1 Q r^2 q \varphi_n dr, \quad n = 1..N, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $A_{in}^{qs}(C_j^{(1)}, C_j^{(2)}, \kappa)$  – квадратичные формы относительно коэффициентов  $C_j^D$  и  $C_j^p$ .

После определения коэффициентов  $a_i(\kappa)$  и  $b_i(\kappa)$ , так же, как и для первой постановки, коэффициенты разложений  $C_j^D$  и  $C_j^p$ ,  $j = 1..M$  искомых функций  $D(r)$  и  $\rho(r)$  определяются из системы нелинейных уравнений вида (3.3).

#### 4. Вычислительные эксперименты

В данном разделе представлены результаты вычислительных экспериментов по решению обратных задач идентификации неизвестных функций жесткости  $D(r)$  и  $\rho(r)$  в обеих постановках – для гипотез Кирхгофа и Тимошенко. Коэффициент Пуассона полагался равным  $\nu = 0,3$ , соответствующий ему безразмерный коэффициент распределения касательных напряжений  $k = 0,86$  [3].

В представлениях (3.1) в качестве функций  $\varphi_n(r)$  и  $\gamma_n(r)$  выбирались функции  $\varphi_n(r) = (1 - r^2)^2 r^{2(n-1)}$  и  $\gamma_n(r) = \sin(n\pi r)$ ,  $n = 1..N$  соответственно, в качестве  $\psi_m(r)$  – функции  $\psi_m(r) = r^{m-1}$ ,  $m = 1..M$ . Параметр  $N$ , характеризующий количество функций  $\varphi_n$  и  $\gamma_n$ , выбирался равным  $N = 5$ . Как уже отмечалось ранее, основной задачей в данной работе являлось построение максимально эффективного и экономичного с точки зрения быстродействия алгоритма, позволяющего определять уровень и характер монотонности искомым функций, что наиболее важно на практике. В связи с этим для минимизации порядка решаемых на втором шаге систем нелинейных уравнений восстановление искомым функций производилось в классе линейных функций, то есть  $M = 2$ . В ходе экспериментов было выявлено, что наиболее благоприятным для

процедуры реконструкции является частотный диапазон до первой резонансной частоты (не включая ее).

На всех рисунках далее сплошной линией отмечены графики точных решений, а точками – восстановленных функций.

**Пример 1.** Для проверки построенной схемы рассмотрим модельный пример восстановления линейных функций  $D(r) = 1 - 0,5r$  и  $\rho(r) = 0,25 + 0,125r$ . На рис. 3 представлен результат восстановления функции цилиндрической жесткости ( $a$ ) и плотности ( $\bar{\rho}$ ) для гипотез Кирхгофа, а на рис. 4 – результат восстановления тех же законов изменения цилиндрической жесткости ( $a$ ) и плотности ( $\bar{\rho}$ ) для гипотез Тимошенко. В обоих случаях функции восстановились точно, что свидетельствует о работоспособности предложенной схемы идентификации.

**Пример 2.** Рассмотрен случай восстановления убывающей и возрастающей квадратичных функций  $D(r) = 1 - 0,5r^2$  и  $\rho(r) = 0,25 + 0,125r^2$  в классе линейных. На рис. 5 представлен результат восстановления функции цилиндрической жесткости ( $a$ ) и плотности ( $\bar{\rho}$ ) для гипотез Кирхгофа, а на рис. 6, ( $a, \bar{\rho}$ ) – результат восстановления для гипотез Тимошенко. В первом случае погрешность не превосходит соответственно 7 и 5 %, во втором – 9 и 7,5 %. Данный уровень погрешности для подобного рода вычислительных схем является достаточно приемлемым.

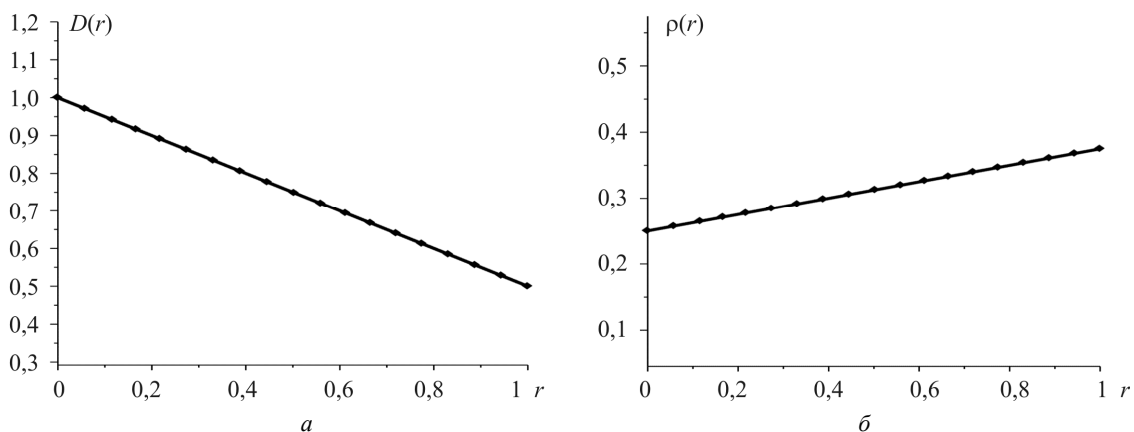


Рис. 3. Результат восстановления линейных функций жесткости ( $a$ ) и плотности ( $\bar{\rho}$ ) неоднородной круглой пластины для гипотез Кирхгофа  
 Fig. 3. The result of restoring linear stiffness functions ( $a$ ) and density ( $\bar{\rho}$ ) of an inhomogeneous circular plate for Kirchhoff's hypotheses

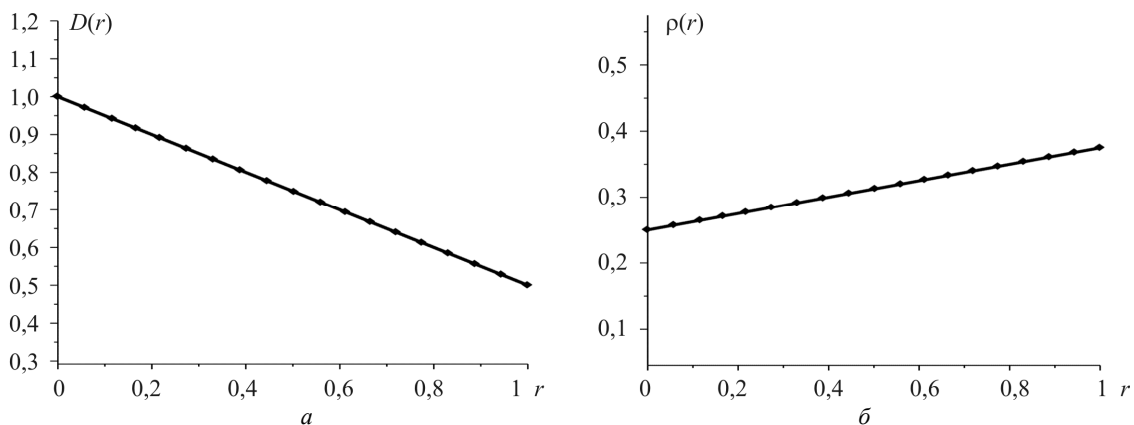


Рис. 4. Результат восстановления линейных функций жесткости ( $a$ ) и плотности ( $\bar{\rho}$ ) неоднородной круглой пластины для гипотез Тимошенко

Fig. 4. The result of restoring linear stiffness functions ( $a$ ) and density ( $\bar{\rho}$ ) of an inhomogeneous circular plate for Timoshenko's hypotheses

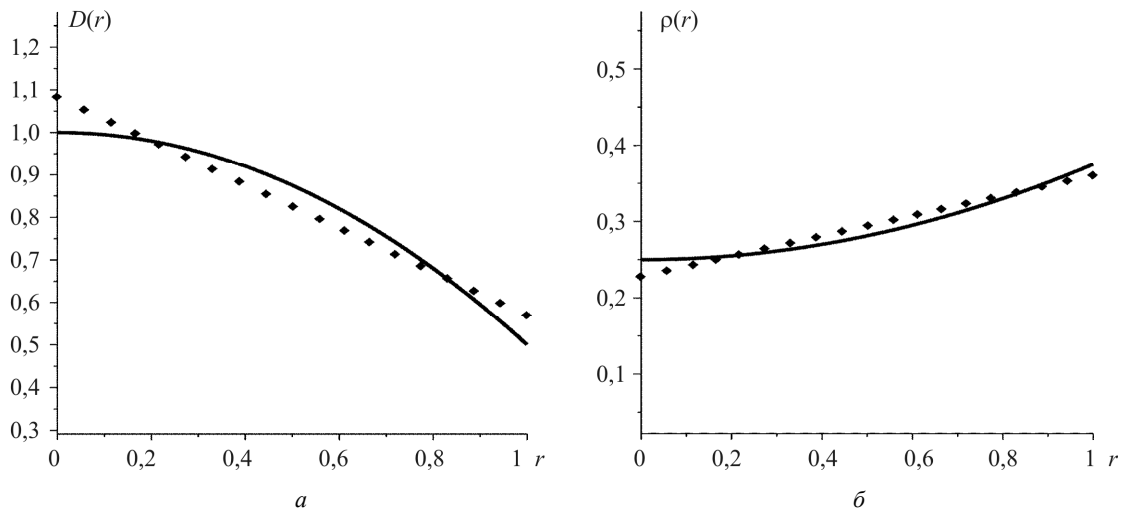


Рис. 5. Результат восстановления квадратичных функций жесткости ( $a$ ) и плотности ( $\bar{\rho}$ ) неоднородной круглой пластины для гипотез Кирхгофа

Fig. 5. The result of restoring quadratic stiffness functions ( $a$ ) and density ( $\bar{\rho}$ ) of an inhomogeneous circular plate for Kirchhoff's hypotheses

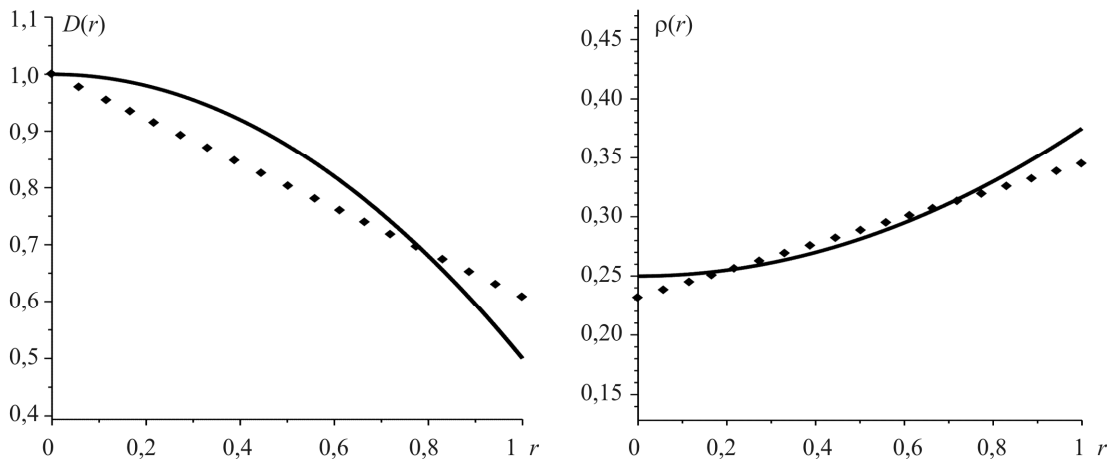


Рис. 6. Результат восстановления квадратичных функций жесткости ( $a$ ) и плотности ( $\bar{\rho}$ ) неоднородной круглой пластины для гипотез Тимошенко

Fig. 6. The result of restoring quadratic stiffness functions ( $a$ ) and density ( $\bar{\rho}$ ) of an inhomogeneous circular plate for Timoshenko's hypotheses

**Заключение**

Для обеих задач о колебаниях неоднородных пластин в рамках гипотез Кирхгофа и Тимошенко выявлено существенное влияние и функции цилиндрической жесткости и плотности на амплитудно-частотные характеристики в окрестности резонансных частот. Результаты, полученные в процессе проведения вы-

числительных экспериментов, показывают, что предложенная для решения задач идентификации функций цилиндрической жесткости и плотности неоднородных пластин проекционная методика может быть достаточно эффективной для определения уровня и характера монотонности искомых характеристик, что является наиболее существенной информацией при решении практических задач.

**Библиографический список**

1. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. – М.: Физматлит, 2019. – 272 с.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.
3. Товстик П.Е. Неклассические модели балок, пластин и оболочек // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т 8, вып. 3. – С. 72–85.
4. Товстик П.Е., Товстик Т.П. Двухмерная модель пластины из анизотропного неоднородного материала // Известия Рос-

- сийской Академии Наук. Механика твердого тела. – 2017. – № 2. – С. 32–45.
5. Endo M. Study on an alternative deformation concept for the Timoshenko beam and Mindlin plate models // International Journal of Engineering Science. – 2015. – Vol. 7. – P. 32–46.
6. Papkov S.O. New analytical solutions for vibration problem of thick plates // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2019. – № 4. – P. 145–156.



7. Kurennov S.S., Barakhov K.P. The Stressed state of the double-layer rectangular plate under shift. The simplified two-dimensional model // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2019. – № 3. – P. 166–174.

8. Lopes H., Dos Santos A., Katunin A. Identification of material properties of a laminated plate from measurements of natural frequencies and modal rotations // Procedia Structural Integrity. – 2019. – Vol. 17. – P. 971–978.

9. Identification of the flexural stiffness parameters of an orthotropic plate from the local dynamic equilibrium without a priori knowledge of the principal directions / F. Ablitzer, C. Pezerat, B. Lascoup, J. Brocaill // J. Sound and Vibration. – 2017. – Vol. 404. – P. 31–46.

10. Yuan T.-C., Yang J., Chen L. Experimental identification of hardening and softening nonlinearity in circular laminated plates // International Journal of Non-linear Mechanics. – 2017. – Vol. 95. – P. 296–306.

11. Grosso P., De Felice A., Sorrentino S. A method for the experimental identification of equivalent viscoelastic models from vibration of thin plates // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2021. – Vol. 153. – P. 107527.

12. Tehrani M.A., Firouz-Abadi R.D. An efficient system identification approach to estimate unsteady loads on cavitator plates // Ocean Engineering. – 2020. – Vol. 207. – P. 107444.

13. Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials // Materials Science and Engineering: A. – 2003. – Vol. 362. – P. 81–106.

14. Loja M., Barbosa J.I. In-plane functionally graded plates: A study on the free vibration and dynamic instability behaviours // Composite Structures. – 2020. – Vol. 237. – P. 111905.

15. Deepak S.A., Shetty R.A. Static and free vibration analysis of functionally graded rectangular plates using ANSYS // Materials Today: Proceedings. – 2021. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.12.761

16. Vinh P.V., Huy L.Q. Finite element analysis of functionally graded sandwich plates with porosity via a new hyperbolic shear deformation theory // Defence Technology. – 2021. DOI: 10.1016/j.dt.2021.03.006

17. A modified Fourier – Ritz solution for vibration and damping analysis of sandwich plates with viscoelastic and functionally graded materials / Y. Chuanmeng, J. Guoyong, Y. Xinmao, L. Zhigang // International Journal of Mechanical Sciences. – 2016. – Vol. 106. – P. 1–18.

18. Локализация неоднородностей в упругой пластине методом обращения волн / А.А. Еремин, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, Р. Ламмерини // Акустический журнал. – 2017. – Т. 63, № 5. – С. 523–531.

19. Damage identification in a plate structure based on a cross-direction strain measurement method / H. Cui, H. Du, F. Zhao, M. Hong // Measurement. – 2020. – Vol. 158. – P. 107714.

20. Damage identification for plate-like structures using ultrasonic guided wave based on improved MUSIC method / H. Zuo,

Z. Yang, C. Xu, S. Tian, X. Chen // Composite Structures. – 2018. – Vol. 203. – P. 164–171.

21. Free vibration and damage identification of cracked functionally graded plates / L.F. Zhu, L.L. Ke, Y. Xiang, X.Q. Zhu // Composite Structures. – 2020. – Vol. 250. – P. 112517.

22. Improved ANN technique combined with Jaya algorithm for crack identification in plates using XIGA and experimental analysis / S. Khatir, D. Bouchicha, C. Le Thanh, H. Tran-Ngoc, T.N. Nguyen, M. Abdel-Wahab // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2020. – Vol. 107. – P. 102554.

23. Huang T., Schröder K.-U. A Bayesian probabilistic approach for damage identification in plate structures using responses at vibration nodes // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2020. – Vol. 146. – P. 106998.

24. Damage identification in plates under uncertain boundary conditions / G. Silva, D.A. Castello, L. Borges, J.P. Kaipio // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2020. – Vol. 144. – P. 106884.

25. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Reconstruction of the stiffness of an inhomogeneous elastic plate // Acoustical physics. – 2016. – Vol. 62, № 3. – P. 377–382.

26. Идентификация неоднородных свойств вязкоупругой круглой пластины / Т.А. Аникина, И.В. Богачев, А.О. Ватульян, В.В. Дударев // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2016. – № 2. – С. 10–18.

27. Идентификация свойств неоднородной пластины в рамках модели Тимошенко / И.В. Богачев, А.О. Ватульян, В.В. Дударев, П.А. Лапина, Р.Д. Недин // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т. 17, вып. 4. – С. 419–430.

28. Vatulyan A.O., Bogachev I.V. The projection method for identification of the characteristics of inhomogeneous solid // Doklady Physics. – 2018. – Vol. 63, № 2. – P. 82–85.

29. Vatulyan A.O., Yavruyan O.V., Bogachev I.V. Identification of the inhomogeneous cylindrical waveguide properties // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2018. – № 4. – P. 33–46. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.03

30. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

31. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989. – 128 с.

32. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Изд-во МГУ, 1970. – 512 с.

33. Truesdell C.A. A first course in rational continuum mechanics. – Baltimore. Maryland: The John Hopkins University, 1972. – 417 p.

34. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.

35. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

## References

1. Vatulyan A.O. Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki. [Coefficient inverse problems of mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2019, 272 p.

2. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. Plastinki i obolochki. [Plates and shells]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 635 p.

3. Tovstik P.E. Neklassicheskie modeli balok, plastin i obolochek [Non-classical models of beams, plates and shells]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin Saratov University. Series Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2008, vol. 8, no. 3, pp. 72-85.

4. Tovstik P.E., Tovstik T.P. Dvuhmernaya model' plastiny iz anizotropnogo neodnorodnogo materiala [A two-dimensional model of a plate made of an anisotropic inhomogeneous material]. *Izvestiya Rossijskoj Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela – Bulletin of the Russian Academy of Sciences*, 2017, no. 2, pp. 32-45.

5. Endo M. Study on an alternative deformation concept for the Timoshenko beam and Mindlin plate models. *International Journal of Engineering Science*, 2015, vol. 7, pp. 32-46.

6. Papkov S.O. New analytical solutions for vibration problem of thick plates. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 145-156.

7. Kurennov S.S., Barakhov K.P. The Stressed state of the double-layer rectangular plate under shift. The simplified two-dimensional model. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 3, pp. 166-174.
8. Lopes H., Dos Santos A., Katunin A. Identification of material properties of a laminated plate from measurements of natural frequencies and modal rotations. *Procedia Structural Integrity*, 2019, vol. 17, pp. 971-978.
9. Ablitzer F., Pezerat C., Lascoup B., Brocaïl J. Identification of the flexural stiffness parameters of an orthotropic plate from the local dynamic equilibrium without a priori knowledge of the principal directions. *J. Sound and Vibration*, 2017, vol. 404, pp. 31-46.
10. Yuan T.-C., Yang J., Chen L. Experimental identification of hardening and softening nonlinearity in circular laminated plates. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2017, vol. 95, pp. 296-306.
11. Grosso P., De Felice A., Sorrentino S. A method for the experimental identification of equivalent viscoelastic models from vibration of thin plates. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, vol. 153, pp. 107527.
12. Tehrani M.A., Firouz-Abadi R.D. An efficient system identification approach to estimate unsteady loads on cavitator plates. *Ocean Engineering*, 2020, vol. 207, pp. 107444.
13. Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 2003, vol. 362, pp. 81-106.
14. Loja M., Barbosa J.I. In-plane functionally graded plates: A study on the free vibration and dynamic instability behaviours. *Composite Structures*, 2020, vol. 237, pp. 111905.
15. Deepak S.A., Shetty R.A. Static and free vibration analysis of functionally graded rectangular plates using ANSYS. *Materials Today: Proceedings*, 2021, DOI: 10.1016/j.matpr.2020.12.761
16. Vinh P.V., Huy L.Q. Finite element analysis of functionally graded sandwich plates with porosity via a new hyperbolic shear deformation theory. *Defence Technology*, 2021, DOI: 10.1016/j.dt.2021.03.006
17. Chuanmeng Y., Guoyong J., Xinmao Y., Zhigang L. A modified Fourier – Ritz solution for vibration and damping analysis of sandwich plates with viscoelastic and functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, vol. 106, pp. 1-18.
18. A.A. Eremin, E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, R. Lammering, Localization of inhomogeneities in an elastic plate using the time reversal method. *Acoustical Physics*, 2017, vol. 63, pp. 562-569.
19. Cui H., Du H., Zhao F., Hong M. Damage identification in a plate structure based on a cross-direction strain measurement method. *Measurement*, 2020, vol. 158, pp. 107714.
20. Zuo H., Yang Z., Xu C., Tian S., Chen X. Damage identification for plate-like structures using ultrasonic guided wave based on improved MUSIC method. *Composite Structures*, 2018, vol. 203, pp. 164-171.
21. Zhu L.F., KeL.L., Xiang Y., Zhu X.Q. Free vibration and damage identification of cracked functionally graded plates. *Composite Structures*, 2020, vol. 250, pp. 112517.
22. Khatir S., Boutchicha D., Le Thanh C., Tran-Ngoc H., Nguyen T.N., Abdel-Wahab M. Improved ANN technique combined with Jaya algorithm for crack identification in plates using XIGA and experimental analysis. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, vol. 107, pp. 102554.
23. Huang T., Schröder K.-U. A Bayesian probabilistic approach for damage identification in plate structures using responses at vibration nodes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, vol. 146, pp. 106998.
24. Silva G., Castello D.A., Borges L., Kaipio J.P. Damage identification in plates under uncertain boundary conditions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, vol. 144, pp. 106884.
25. Bogachev I.V., Vatul'yan A.O., Yavruyan O.V. Reconstruction of the stiffness of an inhomogeneous elastic plate. *Acoustical physics*, 2016, vol. 62, no 3, pp. 377-382.
26. Anikina T.A., Bogachev I.V., Vatul'yan A.O., Dudarev V.V. Identifikaciya neodnorodnyh svoystv vyzkoupругoj krugloj plastiny [Identification of inhomogeneous properties of a viscoelastic circular plate]. *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov CHES – Ecological Bulletin of the BSEC Scientific Centers*, 2016, no. 2, pp. 10-18.
27. Bogachev I.V., Vatul'yan A.O., Dudarev V.V., Lapina P.A., Nedin R.D. Identifikaciya svoystv neodnorodnoj plastiny v ramkah modeli Timoshenko [Identification of the properties of an inhomogeneous plate in the framework of the Timoshenko model]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin Saratov University. Series Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 419-430.
28. Vatul'yan A.O., Bogachev I.V. The projection method for identification of the characteristics of inhomogeneous solid. *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, no. 2, pp. 82-85.
29. Vatul'yan A.O., Yavruyan O.V., Bogachev I.V. Identification of the inhomogeneous cylindrical waveguide properties. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no 4, pp. 33-46.
30. Tihonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*. [Methods of ill-posed problems solving]. Moscow, Nauka, 1986, 288 p.
31. Bakushinskij A.B., Goncharskij A.V. *Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Iterative methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1989, 128 p.
32. Mihlin S.G. *Variacionnye metody v matematicheskoj fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow, MGU, 1970, 512 p.
33. Truesdell C.A. *A first course in rational continuum mechanics*. Baltimore. Maryland: The John Hopkins University, 1972, 417 p.
34. Fletcher K. *Chislennye metody na osnove metoda Galerkina* [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moscow, Mir, 1988, 352 p.
35. Kalitkin N.N. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka, 2005, 512 p.

**Финансирование. Благодарность.** Работа выполнена при финансовой поддержке внутреннего гранта Южного федерального университета № ВнГр-07/2020-04-ИМ (Министерство науки и высшего образования Российской Федерации). Автор выражает благодарность профессору А.О. Ватульяна за важное участие в исследовании

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Funding. Acknowledgments.** This work was supported by the internal grant of the Southern Federal University No. VnGr-07/2020-04-IM (Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation). The author thanks Professor Vatul'yan A.O. for their important participation in the study».

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.