



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.04

УДК 539.4

## ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ С УЧЕТОМ РАДИУСА КРИВИЗНЫ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Н.В. Бойченко

Институт энергетики и перспективных технологий  
Казанского научного центра РАН, Казань, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 26 июня 2021 г.  
Принята: 15 декабря 2021 г.  
Опубликована: 30 декабря 2021 г.

#### Ключевые слова:

радиус кривизны вершины трещины, поля напряженно-деформированного состояния, HRR-модель, градиентная пластичность.

### АННОТАЦИЯ

Представлен численный анализ влияния радиуса кривизны вершины трещины и пластических свойств материала на поля напряжений в вершине трещины на основе градиентной теории пластичности с учетом механизмов деформирования и классической теории пластичности. В работе использована MSG-теория пластичности (упрощенная теория градиентной пластичности на основе традиционного механизма деформирования). Объектом исследования являлась прямоугольная пластина с односторонним надрезом с широким диапазоном значений радиуса кривизны вершины трещины. Исследования проводились для пяти значений радиуса вершины трещины  $\rho = 0$  (математический разрез);  $\rho = 25$  нм,  $\rho = 30$  нм,  $\rho = 60$  нм и  $\rho = 100$  нм. Для каждого значения радиуса вершины трещины показатель деформационного упрочнения варьировался от условий развитой пластичности при  $N = 0,075$  до состояния, близкого к упругости при  $N = 0,4$ . Расчеты по градиентной теории пластичности выполнены для двух значений Тейлоровского параметра структуры материала  $l = 1$  и  $10$  мкм. Показано, что область влияния конечного радиуса кривизны вершины трещины зависит от пластических свойств и Тейлоровского масштаба структуры материала. В результате проведенного исследования установлены границы локальных областей, в которых реализуется влияние радиуса кривизны вершины трещины для условий градиентной и классической пластичности. Установлены размеры зоны доминантности градиентной теории пластичности и представлены их аппроксимационные зависимости. Дана оценка влиянию пластических свойств и параметра Тейлора структуры материала на поля напряжений в области вершины трещины для условий градиентной пластичности.

© ПНИПУ

© Бойченко Наталья Валерьевна – к.т.н., с.н.с., e-mail: [nataboi@yandex.ru](mailto:nataboi@yandex.ru), [ID: 0000-0002-5959-470X](https://orcid.org/0000-0002-5959-470X).

Natalia V. Boychenko – CSc in Technical Sciences, Senior Researcher, e-mail: [nataboi@yandex.ru](mailto:nataboi@yandex.ru), [ID: 0000-0002-5959-470X](https://orcid.org/0000-0002-5959-470X).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# CRACK ROOT RADIUS EFFECT ON STRESS FIELDS UNDER NONLINEAR

N.V. Boychenko

Institute of Power Engineering and Advanced Technologies  
FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 26 June 2021  
Accepted: 15 December 2021  
Published: 30 December 2021

### Keywords:

crack root radius, stress-strain fields, HRR-fields, strain gradient plasticity.

## ABSTRACT

The influence of crack root radius and plastic material properties on the crack tip fields was evaluated by strain gradient plasticity theory, and classical plasticity theory. A conventional mechanism-based strain gradient (CMSG) plasticity theory was used in the study. The stress fields in single edge tension specimen are investigated numerically for a wide range of the crack tip radius variations. Five values of the crack tip curvature radius  $\rho = 0$  (mathematical notch);  $\rho = 25$  nm,  $\rho = 30$  nm,  $\rho = 60$  nm and  $\rho = 100$  nm were investigated. The strain hardening exponent varied from  $N = 0.075$  to  $N = 0.4$ . A stress analysis by CMSG plasticity was performed for two values of the Taylor's length parameter  $l = 1\mu\text{m}$  and  $l = 10\mu\text{m}$ . The boundaries of the local areas, where the influence of the crack tip radius is realized were determined for both HRR and CMSG plasticity. The sizes of the dominance area of the strain gradient plasticity were established and their approximation equations were presented. The influence of the plastic properties and the Taylor's length scale parameter on the stress fields in the vicinity of the crack tip was estimated for the strain gradient plasticity.

© PNRPU

## Введение

Оценка влияния формы и размера вершины трещины на характеристики разрушения является актуальной задачей механики разрушения. Как правило, разрушение в хрупком или пластичном материале возникает вследствие зарождения и развития трещин, инициированных высокой концентрацией напряжений. Изначально линейная механика разрушения решает задачи в телах с идеально острой трещиной или математическим разрезом, когда радиус кривизны вершины трещины равен нулю. В реальности трещина имеет конечный радиус вследствие затупления ее вершины. Явление затупления вершины трещины происходит вследствие пластических деформаций, возникающих вокруг кончика трещины при воздействии нагрузки. В связи с этим при численном решении задач механики разрушения чаще всего моделируют трещину, имеющую конечный радиус кривизны ее вершины [1].

В работе O'Dowd и Shih [2] установлено, что в условиях нормального отрыва поля напряженно-деформированного состояния (НДС) не зависят от радиуса кривизны вершины трещины, если произошло затупление ее вершины в 3 раза по сравнению начальным радиусом. За исключением локальной области в непосредственной близости к затупленной вершине трещины решение не зависит от начального радиуса и может быть интерпретировано как решение, относящееся к изначально острой трещине.

Влияние формы и радиуса кривизны вершины трещины при изучении разрушения твердых тел привлекает внимание исследователей [3–6]. Необходимо отметить, что основная часть исследований влияния радиуса кривизны вершины трещины проводилась либо в мо-

дельных задачах тел бесконечных размеров, либо в экспериментальных образцах, содержащих трещину или надрез с радиусом вершины порядка 100 мкм и более. В исследовании Zhang et al. [7] установлено влияние радиуса вершины трещины на форму и размер зоны пластичности. Показано, что увеличение радиуса кривизны вершины приводит к увеличению зоны нелинейных деформаций. Шлянников и соавт. в своем исследовании [8] показали влияние конечного радиуса кривизны вершины трещины на поля параметров НДС и на параметры смешанности в условиях плоской деформации. В результате масштабного экспериментального исследования [4] предложен метод оценки влияния радиуса вершины и ориентации трещины на прочностные характеристики алюминиевого сплава.

В последнее время наблюдается интерес к исследованию поведения материалов на микроуровне с учетом доминирующих механизмов деформирования, особое внимание среди исследователей получила градиентная теория пластичности, которая позволяет связать разрушение, происходящее на макроуровне, с процессами, происходящими на микро- и мезоуровнях. Это реализуется за счёт учета параметра структуры материала и позволяет предсказать масштабные эффекты, наблюдаемые в экспериментах на малых масштабных уровнях. В связи с этим возникает необходимость моделирования вершины трещины с размерами, соответствующими размерам реальных трещин, зарождающихся и развивающихся в испытательных образцах и элементах конструкций. Актуальными становятся задачи по выбору и обоснованию радиуса кривизны вершины трещины при решении задач механики разрушения с учетом процессов, протекающих на микроуровне. Настоящая работа посвящена анализу влияния радиуса кривизны вершины

трещины на поля напряжений градиентной теории пластичности в сравнении с классическими полями Hutchinson – Rice – Rosengren (HRR).

### 1. Структура полей параметров НДС в вершине трещины

#### Модель Hutchinson – Rice – Rosengren

Количественное описание полей напряжений и деформаций в области вершины трещины является основой для прогнозирования разрушения элементов конструкций, содержащих дефект. Основы аналитического исследования состояния в пластической области вершины трещины в деформационно-упрочняющемся материале заложены в ставшей классической модели Hutchinson – Rice – Rosengren [9–11]. HRR-решение описывает поля компонент напряжений, деформаций и перемещений в пластической области вершины трещины в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{ij} = K_p r^{-1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (1)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \alpha K_p^n r^{-n/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n), \quad (2)$$

$$u_i = \alpha K_p^n r^{1/(n+1)} \tilde{u}_i(\theta, n) \quad (3)$$

здесь  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n)$ ,  $\tilde{u}_i(\theta, n)$  – компоненты тензоров безразмерных напряжений, деформаций и перемещений соответственно,  $K_p$  – пластический коэффициент интенсивности напряжений,  $\alpha$  и  $n = 1/N$  – параметры упрочнения материала,  $N$  – показатель деформационного упрочнения,  $r$  и  $\theta$  – полярные координаты с началом в вершине трещины.

Достоинствами HRR-модели считаются установленные вид упругопластической сингулярности и различия между плоской деформацией и плоским напряженным состоянием в зависимости от деформационной способности материала. При этом отсутствует возможность рассмотрения эффекта затупления вершины трещины и неоднородности материала, так как согласно структуре решения при  $r \rightarrow 0$  напряжения будут стремиться к бесконечности. Конституционные уравнения классической пластичности не содержат параметра структуры материала и, следовательно, не могут предсказать размерные эффекты, наблюдаемые на малых масштабных уровнях. Кроме того, HRR-решение не в полной мере учитывает возможные варианты геометрии и условий нагружения тела с трещиной.

#### Градиентная теория пластичности с учетом механизмов деформирования

Теории градиентной пластичности описывают поля напряжений в области вершины трещины путем учета влияния плотности распределения дислокаций и учитывают масштабные эффекты, так как напряжения зависят не только от деформаций, но также и от градиента де-

формаций. Зона пластичности в окрестности вершины трещины физически мала и содержит высокие пространственные градиенты деформаций, что в свою очередь приводит к значительно более высокому уровню напряжений по сравнению с классическими теориями пластичности [12].

В настоящее время наиболее распространенными в литературе являются следующие варианты градиентной теории пластичности: основанная на механизме деформирования теория градиентной пластичности (Mechanism-based strain gradient plasticity – MSG), предложенная Gao et al. [13,14], переформулированная феноменологическая теория (Strain Gradient Plasticity – SGP) Fleck и Hutchinson [15,16], усовершенствованная модель Gudmundson [17], а также более общая теория Gurtin [18], которую называют Distortion gradient plasticity (DGP). Huang et al. [19] представили упрощенную формулировку MSG теории, основанной на дислокационной модели Тейлора [20]. Упрощение заключается в исключении членов высоких порядков, связанных с ротационными составляющими, эта теория получила название теории градиентной пластичности на основе традиционного механизма деформирования (the Conventional Mechanism-based Strain Gradient (CMSG) plasticity theory). Согласно CMSG-теории, градиент деформации появляется только в конституционной модели поведения, в то время как уравнения равновесия и граничные условия совпадают с традиционными теориями континуума. Martínez-Pañeda [21] реализовал упрощенную модель для характеристики градиентных эффектов, так как она не испытывает проблем сходимости при численном решении сложных задач, таких как деформация вершины трещины при больших деформациях, в отличие от ее аналога более высокого порядка. В работе Shi et al. [22] показано, что более простая CMSG-теория пластичности очень хорошо согласуется с подходом MSG с учетом членов высоких порядков. Подробный обзор теорий градиентной пластичности проведен в статье Хамидуллина [23].

В настоящей работе использована CMSG теория пластичности, разработанная Huang et al. [19]. В соответствии с CMSG-теорией соотношение между истинными напряжениями и деформациями при простом одноосном растяжении описывается уравнением

$$\sigma = \sigma_{ref} f(\varepsilon^p) = \sigma_y \left( \frac{E}{\sigma_y} \right)^N \left( \varepsilon^p + \frac{\sigma_y}{E} \right)^N, \quad (4)$$

где  $\sigma_{ref}$  является базовым напряжением одноосного растяжения

$$\sigma_{ref} = \sigma_y \left( E/\sigma_y \right)^N, \quad (5)$$

и  $f$  – безразмерная функция пластической деформации, определенная в результате аппроксимации кривой статического деформирования, которая для большинства пластичных материалов представлена степенной зависимостью

$$f(\varepsilon^p) = (\varepsilon^p + (\sigma_y/E))^N. \quad (6)$$

В уравнениях (1)–(3),  $\sigma_y$  – предел текучести материала,  $N$  – показатель деформационного упрочнения, который изменяется в пределах  $(0 \leq N < 1)$ .

Для того чтобы исключить члены высоких порядков из рассмотрения и тем самым упростить определяющие соотношения, Huang et al. [19] предложил вязкопластичный аналог формулировки теории градиентной пластичности CMSG в форме следующих конституционных уравнений поведения материала

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_{flow}} \right)^m = \dot{\varepsilon} \left[ \frac{\sigma_e}{\sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l\eta^p}} \right]^m; \quad (7)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = K \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left[ \dot{\varepsilon}'_{ij} - \frac{3\dot{\varepsilon}}{2\sigma_e} \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_{flow}} \right)^m \sigma'_{ij} \right], \quad (8)$$

здесь  $\sigma_{flow} = \sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l\eta^p}$  – напряжение течения,  $l = 18\alpha^2 (\mu/\sigma_y)^2 b$  – характерный размер структуры материала,  $\mu$  – модуль упругости при сдвиге,  $b$  – вектор Бюргерса,  $\alpha$  – эмпирический коэффициент, изменяющийся в пределах от 0,3 до 0,5,  $\sigma_e$  – эффективные или эквивалентные напряжения,  $\eta^p$  – мера градиента эффективных пластических деформаций  $\dot{\varepsilon}'_{ij}$  – девиатор скоростей деформаций, и  $m$  – экспонента, чувствительная к скорости деформаций. Полная сводка конституционных уравнений теории градиентной пластичности с учетом механизмов деформирования приведена в работах [12, 24].

Упрощенная теория градиентной пластичности на основе механизмов деформирования, как и другие теории пластичности сплошной среды, имеют нижний предел и не могут быть использованы на нанометровом масштабе структуры. Этот нижний предел не является фиксированной константой и может варьироваться для разных материалов. Верхнего предела для применения CMSG не существует, так как вклад градиента деформации становится незначительным, поскольку CMSG естественным образом трансформируется в классическую пластичность при увеличении характеристического расстояния  $l$ .

### 3. Объект исследования и свойства материала

Объектом численных исследований являлась пластина с односторонним надрезом при одноосном растяжении. Геометрия и схема нагружения образца, а также область вершины трещины представлены на рис. 1. Исследования проводились для пяти значений радиуса вершины трещины  $\rho = 0$  (математический разрез);  $\rho = 25$  нм,  $\rho = 30$  нм,  $\rho = 60$  нм и  $\rho = 100$  нм. На-

грузка, приложенная к отверстиям образца, соответствовала значению упругого коэффициента интенсивности напряжений  $K_I = 7,4$  МПа/ $\sqrt{м}$ .

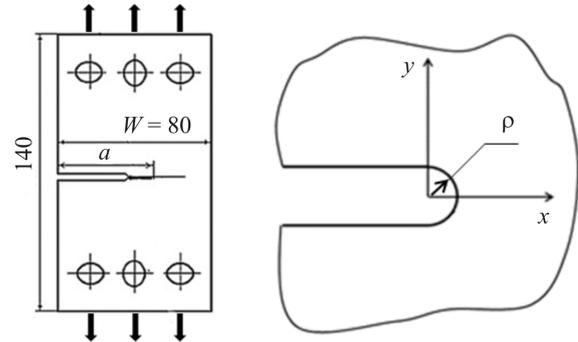


Рис. 1. Схема образца и области вершины трещины

Fig. 1. Specimen geometry and crack tip area

Комплекс численных расчетов выполнен в настоящем исследовании для следующих свойств материала предел текучести  $\sigma_y = 200$  МПа, модуль Юнга  $E = 100\,000$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Для каждого значения радиуса вершины трещины показатель деформационного упрочнения варьировался от  $N = 0,075$  до  $N = 0,4$ .

Значение Тейлоровского параметра структуры материала  $l$  обычно находится в диапазоне от 1 до 10 мкм. Градиентная теория пластичности по определению совпадает с классической пластичностью при  $l = 0$ . В настоящей работе расчеты по градиентной теории пластичности выполнены для двух значений  $l = 1$  и 10 мкм.

Анализ НДС в образцах с односторонним надрезом в условиях плоской деформации (ПД) проводился численно с привлечением вычислительного МКЭ-комплекса ANSYS [25]. Для решения задач по градиентной теории пластичности определяющие соотношения (уравнения (4), (7), (8)) реализованы авторами [12, 24] в ANSYS через пользовательскую подпрограмму USER-MATERIAL UMAT.

Рассматриваемый образец (рис. 1) имеет ширину  $W = 80$  мм, высоту  $h = 140$  мм, соотношение длины трещины к ширине  $a/W = 0,5$ . В расчетной схеме конечных элементов вершина трещины моделировалась в виде математического разреза с  $\rho = 0$  и в виде надреза с конечным радиусом кривизны  $\rho = 25$  нм,  $\rho = 30$  нм,  $\rho = 60$  нм и  $\rho = 100$  нм.

Схема конечных элементов показана на рис. 2. Для воспроизведения влияния градиента деформации вблизи вершины трещины использована сетка конечных элементов высокой плотности, как это показано на рис. 2. В результате серии параметрических расчетов [12, 24] установлено, что устойчивое решение достигается при минимальном размере элемента порядка 5 нм. В связи с этим в настоящем исследовании минимальный размер элемента в области вершины трещины составлял 3,5 нм при общем количестве четырехугольных квадратных плоских элементов 20 115.

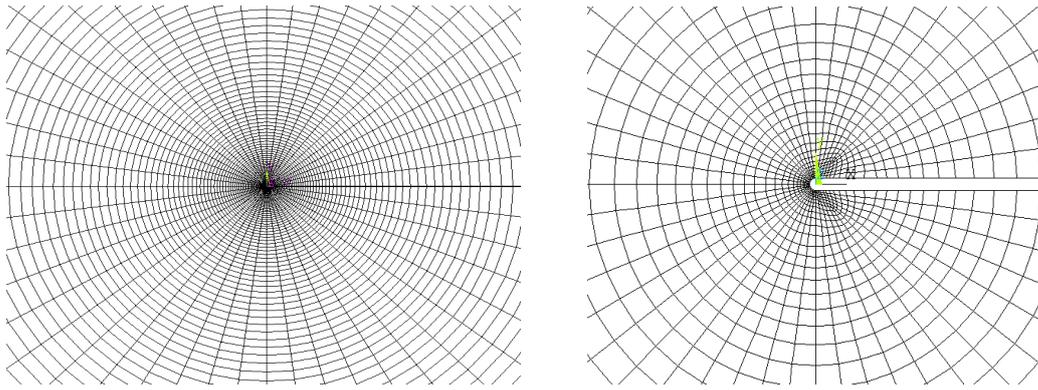


Рис. 2. Сетка конечных элементов в вершине трещины с конечным радиусом кривизны

Fig. 2. Detail of the finite element mesh used in the vicinity of the crack tip

#### 4. Результаты и их обсуждение

##### Распределения компонент напряжений на продолжении трещины

В работах Aoki et al. [26, 27] введены и описаны области доминирования полей напряжений, определяемые по различным модельным представлениям. По мере удаления от вершины трещины они располагаются в следующем порядке: область повреждения структуры; область затупления вершины трещины; область доминирования HRR-полей; область упругого КИН. Это совпадает с мнением многих авторов о доминантности HRR-полей в пластической области, исключая зону процесса разрушения, примыкающую к вершине трещины. В работе [28] определена зона доминантности HRR-полей для тела бесконечных размеров в интервале относительного расстояния от вершины трещины  $2 < r\sigma_y/J < 12$ . Hutchinson при изложении основ феноменологической теории механики разрушения подчеркивает [29], что в зоне процесса разрушения происходит упругая разгрузка вследствие роста пор и имеет место существенно непропорциональное пластическое нагружение. Современные подходы с позиций градиентной теории пластичности позволяют описать поведение материала и определить поля параметров НДС в области, непосредственно примыкающей к вершине трещины. В работах [12, 30] установлены области доминирования сингулярных полей градиентной теории пластичности ( $r/l < 5$ ) и HRR-полей ( $r/l > 5$ ).

В настоящей работе результаты представлены в виде радиальных распределений компонент напряжений на продолжении трещины ( $\theta = 0^\circ$ ). На рис. 3 показаны радиальные распределения окружных (см. рис. 3, а) и эквивалентных (см. рис. 3, б) напряжений, определенные по классической HRR-модели. Компоненты напряжений нормированы на предел текучести. Результаты представлены для двух типов материала с коэффициентом деформационного упрочнения  $N = 0,075$  (пунктирные линии) и  $N = 0,4$  (сплошные линии) для пяти значений радиуса кривизны вершины трещины. Изменение радиуса вершины трещины оказывает существенное влияние на рас-

пределения компонент напряжений в диапазоне относительного расстояния от вершины трещины  $0 < r\sigma_y/J < 0,2$ . При дальнейшем удалении от вершины трещины изменение радиуса вершины трещины не сказывается на распределении компонент напряжений.

Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод, что изменение радиуса вершины трещины в рассматриваемом диапазоне ( $0 < \rho < 100$  нм) не оказывает существенного влияния на поля напряжений в зоне доминирования полей HRR ( $2 < r\sigma_y/J < 12$ ). Пластические свойства материала, а именно коэффициент деформационного упрочнения, влияют на распределение напряжений, важно отметить, что это влияние имеет место в диапазоне относительного расстояния  $0 < r\sigma_y/J < 12$ . Этот факт подтверждает верхнюю границу зоны доминантности полей HRR ( $r\sigma_y/J = 12$ ), так как при дальнейшем удалении от вершины трещины влияние пластических свойств материала практически отсутствует.

На рис. 4 показаны радиальные распределения окружных (см. рис. 4, а, в) и эквивалентных (см. рис. 4, б, г) напряжений, определенные по MSG-теории. Результаты представлены для двух типов материала с коэффициентами деформационного упрочнения  $N = 0,075$  (см. рис. 4, а, б) и  $N = 0,4$  (см. рис. 4, в, г) и пяти значений радиуса кривизны вершины трещины.

Представленные данные определялись при значении параметра структуры материала  $l = 1 \mu\text{m}$ . Очевидно, что радиус кривизны вершины трещины оказывает существенное влияние на распределения компонент напряжений. Причем для более пластичного материала ( $N = 0,075$ ) характерен больший диапазон изменения компонент напряжений в зависимости от значения радиуса кривизны вершины трещины. Из данных, представленных на рис. 4, следует, что влияние радиуса кривизны вершины трещины в рассматриваемом диапазоне ( $0 < \rho < 100$  нм) реализуется в зоне с размером не более  $0,1r/l$ , то есть непосредственно в области доминирования полей градиентной пластичности. В связи с этим при решении задач градиентной теории пластичности необходимо уделять особое внимание выбору и обоснованию радиуса вершины трещины. Распределения напряжений при  $l = 5 \mu\text{m}$  имеют аналогичный качественный характер.

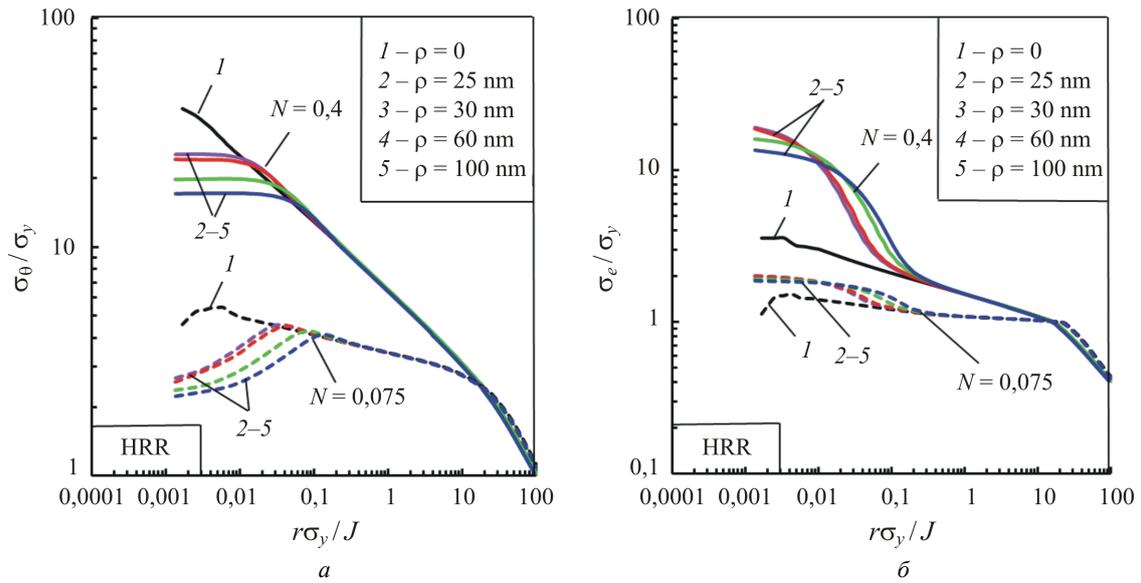


Рис. 3. Влияние радиуса кривизны вершины трещины на поля напряжений по модели HRR

Fig. 3. HRR stress fields as a function of the crack root radius

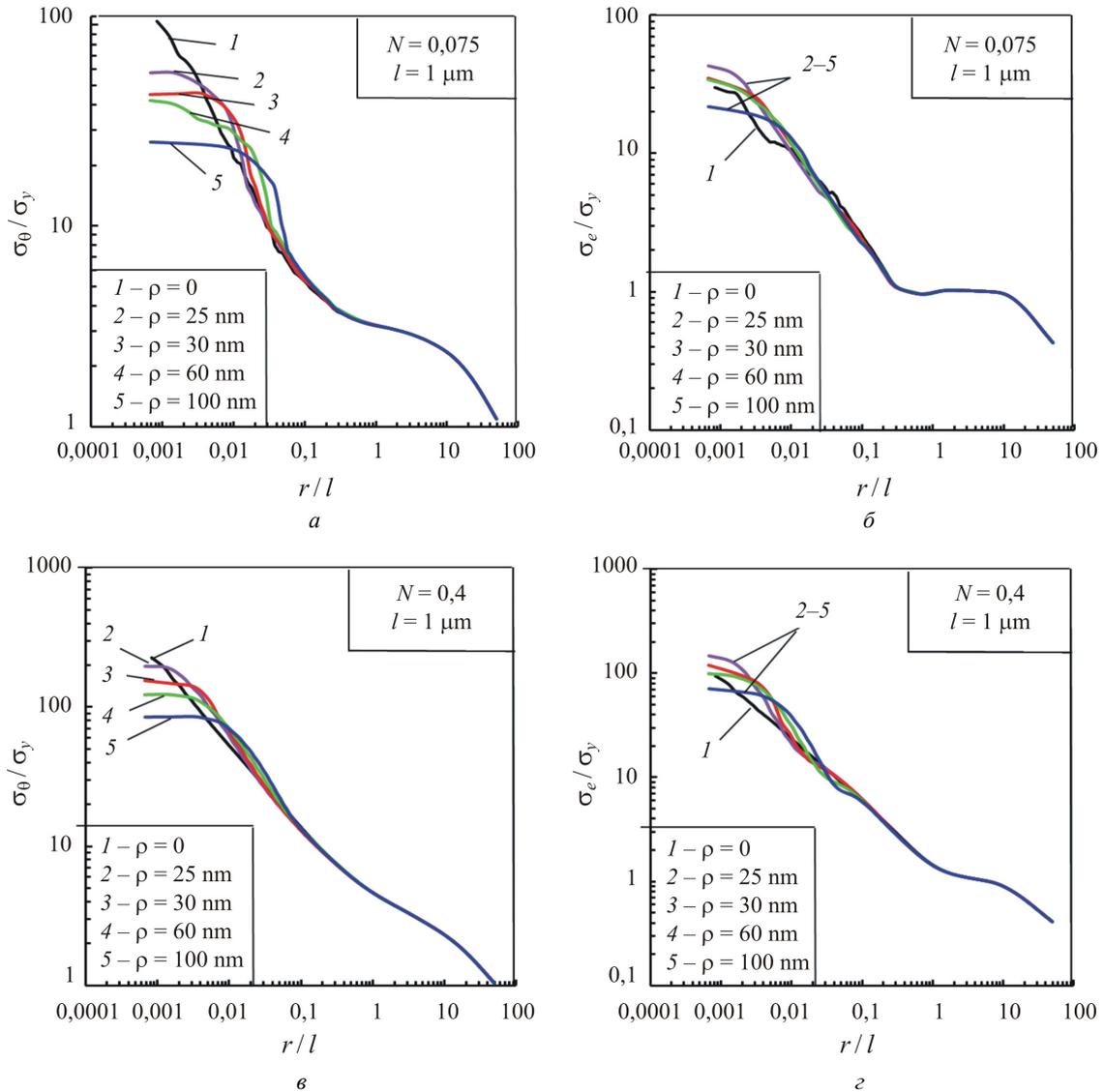


Рис. 4. Влияние радиуса кривизны вершины трещины на поля напряжений по модели CMSG

Fig. 4. CMSG stress fields as a function of the crack root radius

На рис. 5 приведены радиальные распределения окружных (см. рис. 5, а, в) и эквивалентных напряжений (см. рис. 5, б, г), нормированных на предел текучести, в зависимости от радиуса кривизны вершины трещины. Результаты расчетов по градиентной пластичности обозначены сплошными линиями, решение для классической пластичности показано пунктиром. Результаты приведены для двух значений показателя деформационного упрочнения  $N = 0,075$  (см. рис. 5, а, б) и  $N = 0,4$  (см. рис. 5, в, г). Из представленных на рис. 5 данных следует, что использование упрощенной формулировки градиентной теории пластичности приводит к существенному увеличению значений компонент напряжений. По мере удаления от вершины трещины эффекты градиентной пластичности ослабевают, и решение по модели SMSG постепенно приближается к классической модели HRR. Необходимо отметить, что влияние радиуса кривизны вершины трещины реализуется в локальной области размером  $0,1r/l$  в рамках обоих модельных представлений. В материале с пока-

затем деформационного упрочнения  $N = 0,075$  наблюдается большее в количественном выражении различие между распределениями напряжений, полученными по моделям SMSG и HRR.

На рис. 6 приведены распределения окружных (см. рис. 6, а, в) и эквивалентных (см. рис. 6, б, г) напряжений, определенных по SMSG-теории пластичности в зависимости от пластических свойств материала. Распределения компонент напряжений для материала с показателем деформационного упрочнения  $N = 0,4$  обозначены сплошными линиями, а для материала с  $N = 0,075$  нанесены пунктиром. Пластические свойства материала оказывают существенное влияние на распределения напряжений в диапазоне значений относительного расстояния от трещины  $0 < r/l < 10$ . Необходимо отметить, что поля HRR-типа, представленные на рис. 3, более чувствительны к пластическим свойствам материала, чем поля градиентной теории пластичности, так как реализуется существенно большая разница в значениях напряжений в зависимости от типа материала.

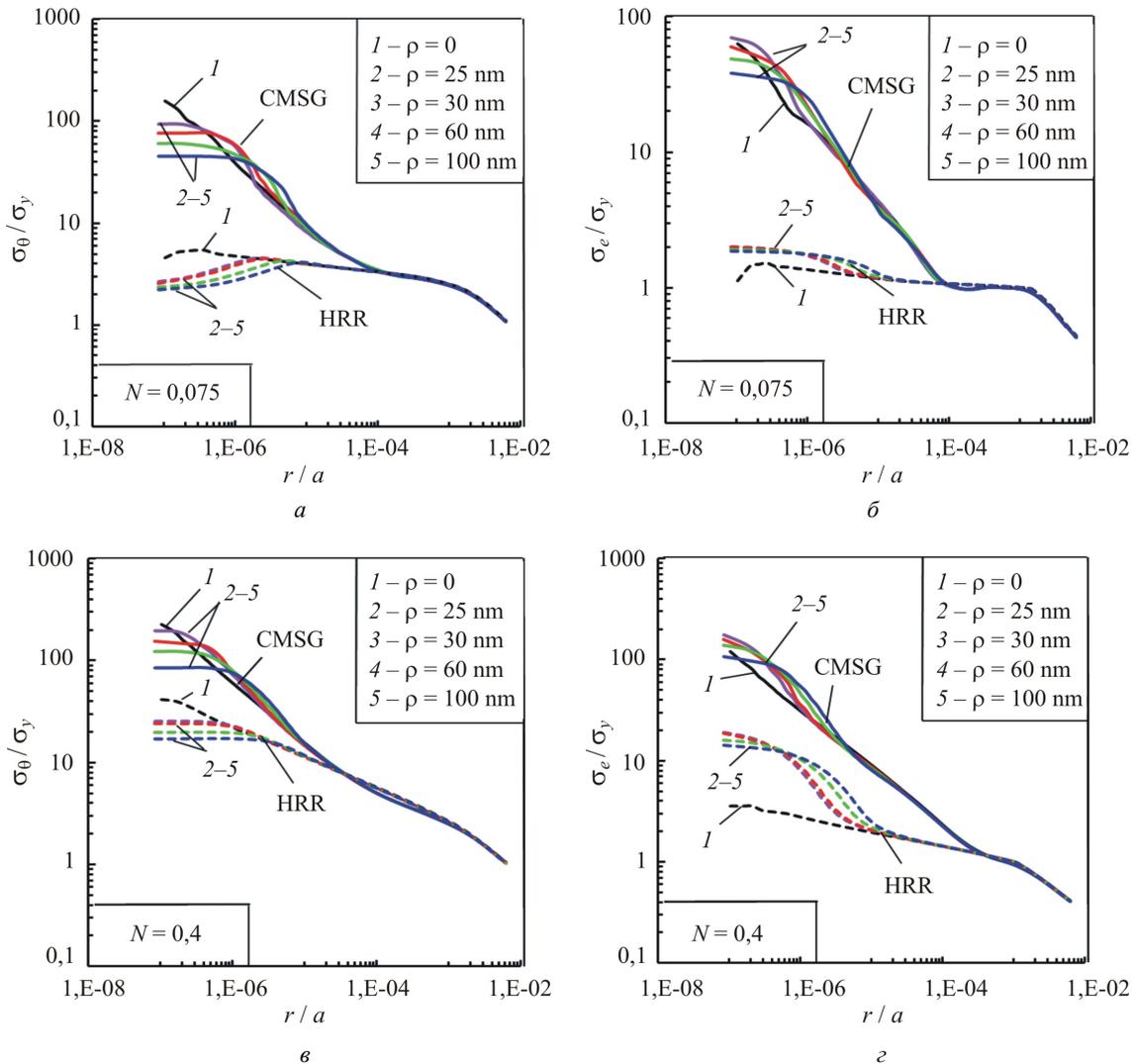


Рис. 5. Сопоставление распределений напряжений по ХРР и СРР ( $l = 5 \text{ мк}$ )  
 Fig. 5. Comparison of stress distributions for HRR and SMSG plasticity ( $l = 5 \text{ }\mu\text{m}$ )

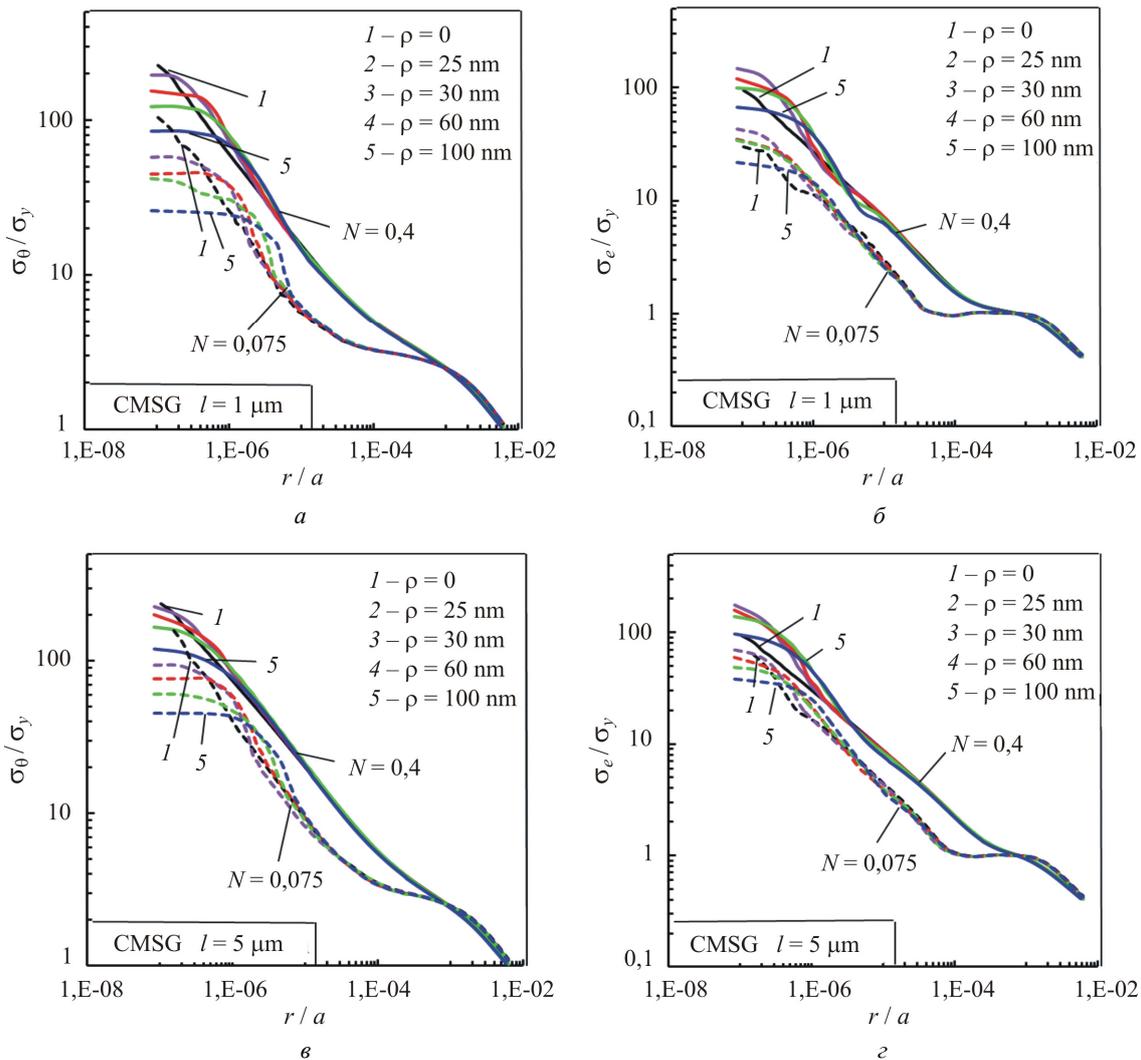


Рис. 6. Влияние пластических свойств материала на поля напряжений по модели CMSG

Fig. 6. Effect of plastic material properties on the CMSG stress fields

На рис. 7 продемонстрировано влияние параметра структуры материала на радиальные распределения окружных и эквивалентных напряжений для материала с показателем деформационного упрочнения  $N = 0,075$ . Результаты представлены для двух значений радиуса кривизны вершины трещины  $\rho = 0$  (см. рис. 7, а, б) и  $\rho = 100$  нм (см. рис. 7, в, г). При остальных значениях варьируемых параметров ( $N$  и  $\rho$ ) наблюдается аналогичная картина. Параметр структуры материала оказывает влияние на поля напряжений в локальной зоне радиусом менее  $r/l = 1$ . Увеличение Тейлоровского параметра структуры материала приводит к увеличению значений компонент напряжений.

**Границы области влияния радиуса вершины трещины**

Настоящий раздел статьи относится к определению границ зоны влияния конечного радиуса кривизны вершины трещины на поля напряжений в области ее верши-

ны. Размер области влияния радиуса вершины трещины определяется как радиальная координата  $r/a$  равенства окружных или эквивалентных напряжений для максимального из рассматриваемых радиусов  $\rho = 100$  нм и математического разреза  $\rho = 0$ . На рис. 8 показаны границы области влияния конечного радиуса кривизны вершины трещины в зависимости от пластических свойств материала для окружных и эквивалентных напряжений.

Области влияния радиуса вершины трещины для классического HRR-решения и градиентной пластичности не совпадают между собой. Более того, в рамках каждого модельного представления границы зоны влияния радиуса вершины для окружных и эквивалентных напряжений различны (см. рис. 8, а-в). Область влияния конечного радиуса кривизны вершины трещины проявляет чувствительность к пластическим свойствам и структуре материала. Разница между границами зоны влияния  $\rho$  в терминах окружных и эквивалентных напряжений увеличивается по мере возрастания Тейлоровского параметра структуры материала  $l$  для модели

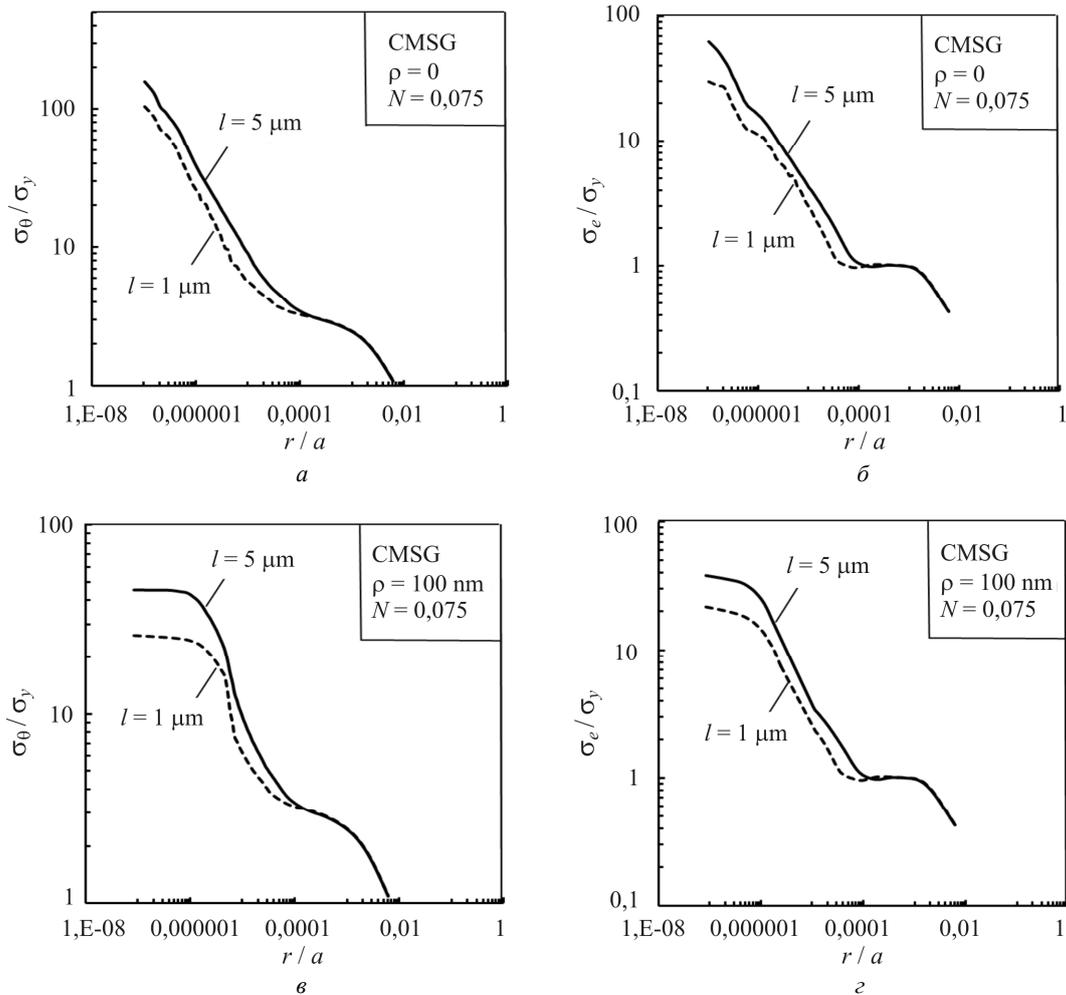


Рис. 7. Влияние структуры материала на распределения напряжений по модели CMSG

Fig. 7. CMSG plasticity stress distributions as a function of the intrinsic material length

CMSG и достигает максимального значения в случае классического решения HRR (см. рис. 8, а–в). При увеличении показателя деформационного упрочнения размер области влияния  $\rho$  уменьшается. Исключение составляют поля эквивалентных напряжений HRR-типа, для которых граница зоны влияния радиуса кривизны вершины трещины является постоянной величиной (см. рис. 8, в).

На рис. 8, г, д, представлено сравнение размеров области влияния радиуса кривизны вершины трещины для двух рассматриваемых модельных представлений в терминах окружных и эквивалентных напряжений. Для материала с развитой пластичностью ( $N = 0,075$ ) область влияния вершины трещины на поля эквивалентных напряжений совпадает для рассматриваемых модельных представлений (см. рис. 8, г). По мере перехода от развитой пластичности при  $N = 0,075$  до состояния близкого к упругости при  $N = 0,4$  разница между размерами областей влияния  $\rho$  для HRR и CMSG увеличивается. Наибольших размеров область влияния  $\rho$  на поля эквивалентных напряжений достигает при решении по модели HRR, в рамках CMSG-модели размер области влияния  $\rho$  уменьшается по мере уменьшения параметра структуры материала.

При анализе размеров области влияния радиуса вершины на поля окружных напряжений наблюдается противоположная тенденция, а именно область влияния радиуса кривизны вершины трещины минимальна для HRR-модели, максимальна в случае CMSG с минимальным размером структуры материала.

Необходимо отметить, что максимальное расстояние, на котором реализуется влияние конечного радиуса кривизны вершины трещины, характерно для полей эквивалентных напряжений по модели HRR и составляет  $r/a = 0,0002$ .

### Зона доминантности градиентной теории пластичности CMSG

Данный раздел статьи посвящен определению границ зоны доминантности CMSG. Размер зоны доминантности определялся как радиальная координата равенства окружных или эквивалентных напряжений, определенных по моделям HRR и CMSG. В таблице приведены координаты границ зоны доминантности.

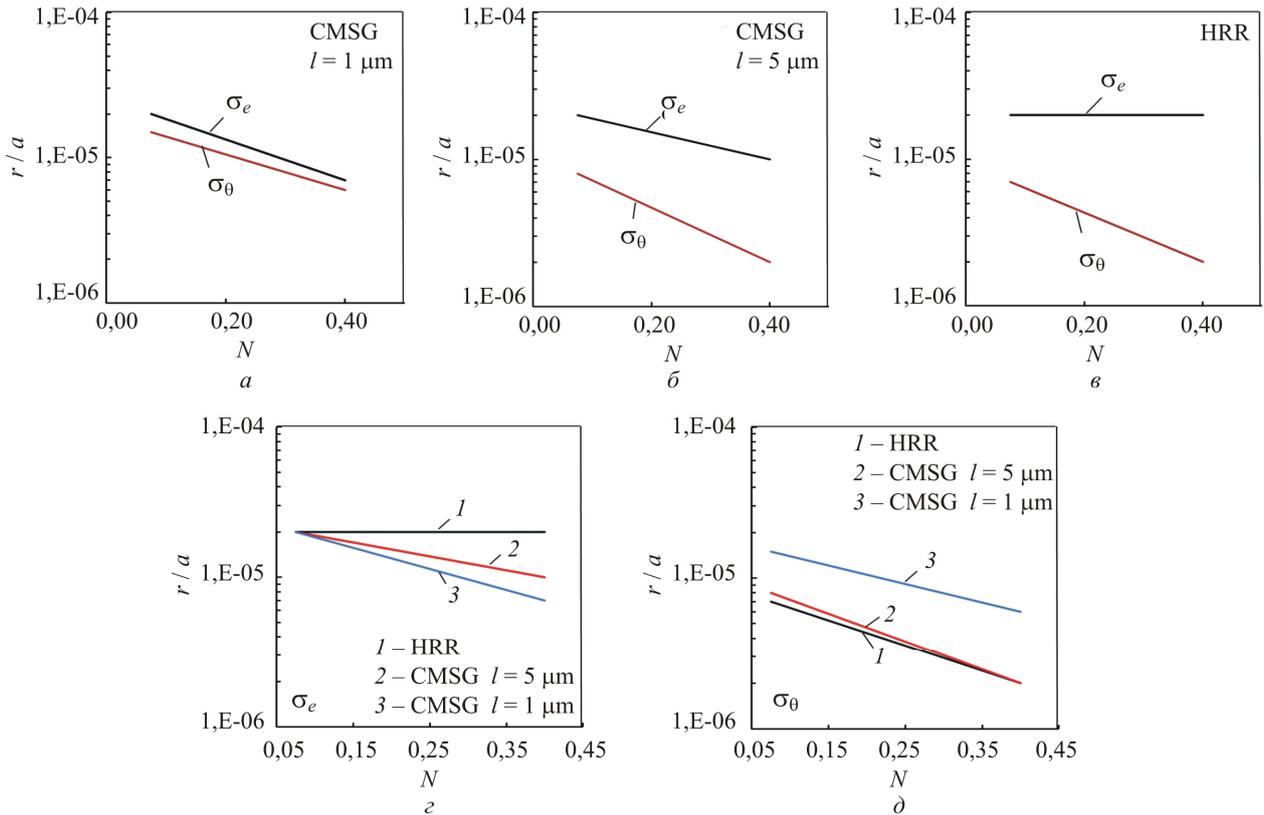


Рис. 8. Размеры области влияния радиуса вершины трещины

Fig. 8. The boundaries of areas of crack root radius influence

Границы зоны доминантности градиентной теории пластичности CSMG

The boundaries of the dominance area of CSMG plasticity

$(r/a)_{\max}$ $\sigma_{ij} _{HRR} = \sigma_{ij} _{CSMG}$		$\sigma_{\theta}$		$\sigma_e$	
		$N = 0,075$	$N = 0,4$	$N = 0,075$	$N = 0,4$
CSMG	$l = 1 \mu\text{m}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
	$l = 5 \mu\text{m}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$

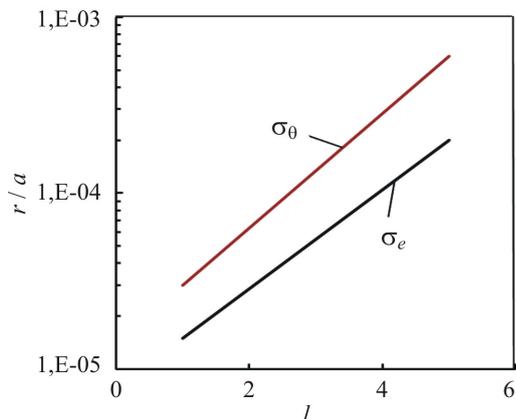


Рис. 9. Размеры зоны доминантности градиентной теории пластичности

Fig. 9. The boundaries of the dominance area of CSMG plasticity

Из данных, приведенных в таблице, следует, что размер зоны доминантности CSMG проявляет чувст-

вительность к параметру структуры материала  $l$ , при этом не зависит от показателя деформационного упрочнения. Граница зоны доминантности CSMG варьируется в диапазоне  $3 \cdot 10^{-5} < r/a < 6 \cdot 10^{-4}$  в зависимости от параметра структуры материала. На рис. 9 продемонстрирована зависимость размера зоны доминантности от параметра структуры материала. Размер зоны увеличивается при увеличении  $l$ .

Взаимосвязь между размером зоны доминантности и параметром структуры материала для окружных и эквивалентных напряжений описана с помощью аппроксимационных уравнений в следующем виде:

окружные напряжения  $\sigma_{\theta}$ :  $r/a = 0,00001419e^{0,74893307 \cdot l}$ ; (9)

эквивалентные напряжения  $\sigma_e$ :  $r/a = 0,00000785e^{0,64756679 \cdot l}$ . (10)

Данные зависимости позволяют определить размер зоны доминантности градиентной теории пластичности CSMG для любого значения параметра структуры материала из рассмотренного диапазона.

**Заключение**

Проведен численный анализ влияния широкого диапазона изменения радиуса кривизны вершины трещины на поля напряжений для классической модели Hutchinson – Rice – Rosengren и градиентной теории пластичности при вариации показателя деформационного упрочнения материала. Определены

границы локальных областей, в которых реализуется влияние радиуса кривизны вершины трещины для обоих модельных представлений. Получено, что область влияния конечного радиуса кривизны вершины трещины зависит от пластических свойств и Тейлоровского масштаба структуры материала. Установлены размеры зоны доминантности градиентной теории пластичности и представлены их аппроксимационные зависимости. Показано, что влияние радиуса кривизны вершины трещины в рассматриваемом диапазоне реализуется непосредственно в области доминирования полей градиентной пластичности, что обуславливает необходимость уделять особое внимание подобным проблемам при решении задач с новой формулировкой конституционных уравнений состояния среды.

максимумы радиуса кривизны вершины трещины в рассматриваемом диапазоне реализуется непосредственно в области доминирования полей градиентной пластичности, что обуславливает необходимость уделять особое внимание подобным проблемам при решении задач с новой формулировкой конституционных уравнений состояния среды.

## Библиографический список

1. McMeeking R.M. Finite deformation analysis of crack tip opening in elastic-plastic materials and implications for fracture // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1977. – Vol. 25. – P. 357–381. DOI: 10.1016/0022-5096(77)90003-5
2. O'Dowd N.P., Shih C.F. Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter – I. Structure of fields // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1991. – Vol. 39 (8). – P. 989–1015. DOI: 10.1016/0022-5096(91)90049-T
3. Crack tip shape effect on stress-strain fields in plastically compressible materials / M.I. Alam, D. Khan, Y. Mittal, S. Kumar // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2019. – Vol. 629. – P. 012035. DOI: 10.1088/1757-899X/629/1/012035
4. Effect of crack tip radius and crack orientation on metal fracture. Statistical prognosis/ D. Angelova, A. Dishliev, I. Vasilev, L. Slavtcheva // *International Journal of Fracture*. – 1994. – Vol. 66. – P. 241–254. DOI: 10.1007/BF00042587
5. Матвиенко Ю.Г. Тенденции нелинейной механики разрушения в проблемах машиностроения. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. – 56 с.
6. Dini D., Hills D.A. The effect of a crack-tip radius on the validity of the singular solution // *Journal of Mechanical Engineering Science*. – 2004. – Vol. 218. – P. 693–701. DOI: 10.1243/0954406041319491
7. Zhang J.-P., Venugopalan D. Effects of notch radius and anisotropy on the crack tip plastic zone // *Engineering Fracture Mechanics*. – 1987. – Vol. 26 (6). – P. 913–925 DOI: 10.1016/0013-7944(87)90038-5
8. Шлянников В.Н., Кислова С.Ю. Параметры смешанных форм деформирования с учетом кривизны вершины трещины // *Проблемы прочности*. – 2010. – № 6. – С. 44–63.
9. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 337–347. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90021-5
10. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 13–31. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90014-8
11. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 1–12. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90013-6
12. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity / V. Shlyannikov, E. Martínez-Pañeda, A. Tumanov, A. Tartygasheva // *International Journal of Solids and Structures*. – 2021. – Vol. 208–209. – P. 63–82. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015
13. Mechanism-based strain gradient plasticity-I. theory / H. Gao, Y. Huang, W.D. Nix, J.W. Hutchinson // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1999 – Vol. 47. – P. 128–152. DOI: 10.1016/S0022-5096(98)00103-3.
14. Mechanism-based. Analysis / Y. Huang, H. Gao, W.D. Nix, J.W. Hutchinson // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2000. – Vol. 48. – P. 99–128. DOI: 10.1016/S0022-5096(99)00022-8.
15. Fleck N.A., Hutchinson J.W. A reformulation of strain gradient plasticity // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2001 – Vol. 49. – P. 2245–2271. DOI: 10.1016/S0022-5096(01)00049-7.
16. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity // *Advances in Applied Mechanics*. – 1997. – Vol. 33. – P. 295–361. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70388-0.
17. Gudmundson P. A unified treatment of strain gradient plasticity // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2004. – Vol. 52. – P. 1379–1406. DOI: 10.1016/j.jmps.2003.11.002
18. Gurtin M.E. A gradient theory of small-deformation isotropic plasticity that accounts for the Burgers vector and for dissipation due to plastic spin // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2004. – Vol. 52. – P. 2545–2568. DOI: 10.1016/j.jmps.2004.04.010.
19. A conventional theory of mechanism-based strain gradient plasticity / Y. Huang, S. Qu, K.C. Hwang, M. Li, H. Gao // *International Journal of Plasticity*. – 2004. – Vol. 20. – P. 753–782. DOI: 10.1016/j.ijplas.2003.08.002
20. Taylor G.I. Plastic strain in metals // *Twenty-eighth May Lecture to the Institute of Metals*. – 1938. – Vol. 62. – P. 307–324.
21. Martínez-Pañeda E., Natarajan S., Bordas S. Gradient plasticity crack tip characterization by means of the extended finite element method // *Computational Mechanics*. – 2017. – Vol. 59. – P. 831–842. DOI: 10.1007/s00466-017-1375-6
22. The boundary-layer effect on the crack tip field in mechanism-based strain gradient plasticity / M. Shi, Y. Huang, H. Jiang, K.C. Hwang, M. Li // *International Journal of Fracture*. – 2001. – Vol. 112. – P. 23–41. DOI: 10.1023/A:1013548131004
23. Хамидуллин Р.М. Обзор теорий градиентной пластичности // *Труды Академэнерго*. – 2020. – № 3. – С. 85–98. DOI: 10.34129/2070-4755-2020-60-3-85-98.
24. Шлянников В.Н., Туманов А.В., Хамидуллин Р.М. Эффекты градиентной пластичности в вершине трещины при плоском напряженном состоянии // *Физическая мезомеханика*. – 2021. – Т. 24, № 2. – С. 41–55. DOI: 10.24412/1683-805X-2021-2-41-55
25. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference Release 14.5 // ANSYS, Inc. Southpointe. 275 Technology Drive, Canon-Burg, PA. – 2012.
26. Aoki S., Kishimoto K., Sakata M. A finite element study of the near crack tip deformation of a ductile material under mixed mode loading // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1987. – Vol. 35. – P. 431–456. DOI: 10.1016/0022-5096(87)90046-9
27. Aoki S., Kishimoto K., Sakata M. Energy-release rate in elastic-plastic fracture problems // *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. – 1981. – Vol. 48. – P. 825–829. DOI: 10.1115/1.3157741
28. Shlyannikov V.N., Ilchenko B.V., Boichenko N.V. Biaxial loading effect on higher-order crack tip parameters // *ASTM*

Special Technical Publication, (STP1508 Fatigue and Fracture Mechanics (36th ASTM National Symposium on Fatigue and Fracture Mechanics). – 2009. – Vol. 36. – P. 609–640.

29. Hutchinson J.W. Fundamentals of the phenomenological theory of nonlinear fracture mechanics // *Journal of Applied Me-*

chanics, Transactions ASME. – 1983. – Vol. 50. – P. 1042–1051. DOI: 10.1115/1.3167187

30. Xia, Z.C. Hutchinson, J.W. Crack tip fields in strain gradient plasticity // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1996. – Vol. 44. – P. 1621–1648.

## References

1. McMeeking R.M. Finite deformation analysis of crack-tip opening in elastic-plastic materials and implications for fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 1977, vol. 25, no. 5, pp. 357-381.

2. O’Dowd N.pp., Shih C.F. Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter-I. Structure of fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, vol. 39, no. 8, pp. 989-1015.

3. Alam M.I. et al. Crack tip shape effect on stress-strain fields in plastically compressible materials. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, vol. 629, no. 1.

4. Angelova D. et al. Effect of crack tip radius and crack orientation on metal fracture. Statistical prognosis. *Int. J. Fract*, 1994, vol. 66, no. 3, pp. 241-254.

5. Matvienko Y.G. Trends in nonlinear fracture mechanics for mechanical engineering problems. Institute for Computer Research, 2015.

6. Dini D., Hills D.A. The effect of a crack-tip radius on the validity of the singular solution. *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, 2004, vol. 218, no. 7, pp. 693-701.

7. Zhang J.pp., Venugopalan D. Effects of notch radius and anisotropy on the crack tip plastic zone. *Eng. Fract. Mech.*, 1987, vol. 26, no. 6, pp. 913-925.

8. Shlyannikov V.N., Kislova S.Y. Parameters of deformation mixed modes with account of crack tip curvature. *Strength Mater*, 2010, vol. 42, no. 6, pp. 660-674.

9. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, vol. 16, no. 1, pp. 13-31.

10. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip. *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, vol. 16, no. 5, pp. 337-342.

11. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, vol. 16, no. 1, pp. 1-12.

12. Shlyannikov V. et al. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity. *Int. J. Solids Struct*, 2021, vol. 208-209, pp. 63-82.

13. Gao H. et al. Mechanism-based strain gradient plasticity - I. Theory. *J. Mech. Phys. Solids*, 1999, vol. 47, no. 6, pp. 1239-1263.

14. Huang Y. et al. Mechanism-based strain gradient plasticity - II. Analysis. *J. Mech. Phys. Solids*, 2000, vol. 48, no. 1, pp. 99-128.

15. Fleck N.A., Hutchinson J.W. A reformulation of strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 2001, vol. 49, no. 10, pp. 2245-2271.

16. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain Gradient Plasticity. *Advances in Applied Mechanics. Academic Press Inc.*, 1997. vol. 33, no. C, pp. 295-361.

17. Gudmundson pp. A unified treatment of strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 2004, vol. 52, no. 6, pp. 1379-1406.

18. Gurtin M.E. A gradient theory of small-deformation isotropic plasticity that accounts for the Burgers vector and for dissipation due to plastic spin. *J. Mech. Phys. Solids*, 2004, vol. 52, no. 11, pp. 2545-2568.

19. Huang Y. et al. A conventional theory of mechanism-based strain gradient plasticity. *Int. J. Plast*, 2004, vol. 20, no. 4-5, pp. 753-782.

20. Taylor G.I. Plastic strain in metals. Twenty-eighth May Lecture to the Institute of Metals. 1938, pp. 307-325.

21. Martínez-Pañeda E., Natarajan S., Bordas S. Gradient plasticity crack tip characterization by means of the extended finite element method. *Comput. Mech.*, 2017, vol. 59, no. 5, pp. 831-842.

22. Shi M. et al. The boundary-layer effect on the crack tip field in mechanism-based strain gradient plasticity. *Int. J. Fract*, 2001, vol. 112, no. 1, pp. 23-41.

23. Khamidullin R. Review of models of gradient plasticity theory. *Trans. Acad*, 2020, vol. 3, pp. 85-98.

24. Shlyannikov V., Tumanov A., Khamidullin R. Strain-gradient effects at the crack tip under plane strain and plane stress conditions. *Phys. Mesomech*. 2021.

25. ANSYS. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference. *ANSYS Inc.*, 2013, vol. Release15, no. November, pp. 1-909.

26. Aoki S. et al. A finite element study of the near crack tip deformation of a ductile material under mixed mode loading. *J. Mech. Phys. Solids*, 1987, vol. 35, no. 4, pp. 431-455.

27. Aoki S., Kishimoto K., Sakata M. Energy-release rate in elastic-plastic fracture problems. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 1981, vol. 48, no. 4, pp. 825-829.

28. Shlyannikov V.N., Ilchenko B.V., Boychenko N.V. Biaxial loading effect on higher-order crack tip parameters. *ASTM Special Technical Publication*, 2009, vol. 1508 STpp, pp. 609-640.

29. Hutchinson J.W. Fundamentals of the phenomenological theory of nonlinear fracture mechanics. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 1983, vol. 50, no. 4, pp. 1042-1051.

30. Xia Z.C., Hutchinson J.W. Crack tip fields in strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 1996, vol. 44, no. 10, pp. 1621-1648.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Financing.** The study was not sponsored.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.