



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.05

УДК 539.374

ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ТРАЕКТОРИЯМ ДЕФОРМАЦИЙ

В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев, Д.Ю. Фомин

Московский политехнический университет, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 30 июня 2021 г.
Принята: 10 ноября 2021 г.
Опубликована: 30 декабря 2021 г.

Ключевые слова:

варианты теории пластического течения, комбинированное упрочнение, сложное нагружение, пространственные траектории деформаций, компоненты вектора напряжений, скалярные свойства.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются варианты теории пластического течения при комбинированном упрочнении, широко применяемые в практических расчетах конструкций. Проводится сравнительный анализ вариантов теории при сложном нагружении по пространственным траекториям деформаций постоянной и переменной кривизны и кручения. Рассматриваются траектории большой кривизны и от среднего до большого кручения. Анализ результатов исследований проводится в векторном пространстве А.А. Ильюшина. Рассматриваются пространственные траектории деформаций в виде винтовых линий постоянной и переменной кривизны. Результаты расчетов сопоставляются с результатами экспериментальных исследований по ответным компонентам вектора напряжений и скалярным свойствам вдоль траектории деформаций. Рассматриваются варианты теории: модель Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова (линейное кинематическое упрочнение и изотропное упрочнение); модель Шабоса с тремя эволюционными уравнениями Армстронга – Фредерика – Кадашевича; модель Темиса, построенная на основе инвариантной теории пластичности; модель Бондаря с трехчленной структурой эволюционного уравнения для кинематического упрочнения. Приводятся материальные параметры (функции), замыкающие варианты теории пластичности. Удовлетворительное соответствие эксперименту по всем траекториям деформаций достигается при расчете на основе модели Шабоса – отличие результатов расчетов и экспериментов не превышает 30 %. Наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря – отличие результатов расчетов и экспериментов по всем траекториям не превышает 10 %. Модель Бондаря замыкается тремя материальными параметрами и одной материальной функцией, которые определяются из простых экспериментов на одноосное растяжение и растяжение после предварительного сжатия (излом траектории деформаций на 180°). Модель пластичности Бондаря имеет обобщение на неизотермическое нагружение, особенности циклического непропорционального и пропорционального нагружений и описывает процессы накопления повреждений (ресурс).

© ПНИПУ

© Бондарь Валентин Степанович – д.ф.-м.н., проф., e-mail: tm@mami.ru, [ID: 0000-0002-1047-7211](https://orcid.org/0000-0002-1047-7211).

Абашев Дмитрий Рустамович – к.ф.-м.н., доц., e-mail: tm@mami.ru, [ID: 0000-0002-1626-0662](https://orcid.org/0000-0002-1626-0662).

Фомин Денис Юрьевич – асп., e-mail: tm@mami.ru, [ID: 0000-0001-9520-5145](https://orcid.org/0000-0001-9520-5145).

Valentin S. Bondar – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: tm@mami.ru, [ID: 0000-0002-1047-7211](https://orcid.org/0000-0002-1047-7211).

Dmitry R. Abashev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, e-mail: tm@mami.ru, [ID: 0000-0002-1626-0662](https://orcid.org/0000-0002-1626-0662).

Denis Ju. Fomin – PhD student, e-mail: tm@mami.ru, [ID: 0000-0001-9520-5145](https://orcid.org/0000-0001-9520-5145).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THEORIES OF PLASTICITY UNDER COMPLEX LOADING ALONG SPATIAL TRAJECTORIES OF DEFORMATIONS

V.S. Bondar, D.R. Abashev, D.Ju. Fomin

Moscow polytechnical university, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 30 June 2021
Accepted: 10 November 2021
Published: 30 December 2021

Keywords:

variants of the theory of plastic flow, combined hardening, complex loading, spatial deformation trajectories, stress trajectories, scalar properties.

ABSTRACT

Variants of theories of plastic flow with combined hardening, which are widely used in practical calculations of structures, are considered. A comparative analysis of variants of the theory under complex loading along the spatial trajectories of deformations of constant and variable curvature and torsion is carried out. The trajectories of large curvature and from medium to large torsion are considered. The analysis of the research results is carried out in the vector space of A.A. Il'yushin. The spatial trajectories of deformations in the form of helical lines of constant and variable curvature are considered. The calculation results are compared with the results of experimental studies on the response components of the stress vector and scalar properties along the deformation trajectory. Variants of the theory are considered: the Ishlinsky – Prager – Kadashevich – Novozhilov model (linear kinematic hardening and isotropic hardening); the Shabosh model with three evolutionary Armstrong – Frederick – Kadashevich equations; Themis model based on the invariant theory of plasticity; Bondar model with a three-term transformation of the evolutionary equation for kinematic hardening. Material parameters (functions) that close versions of the theory of plasticity are given. Satisfactory agreement with the experiment for all trajectories of deformations is achieved when calculating on the basis of the Shabosh model – the difference between the results of calculations and experiments does not exceed 30 %. The best agreement with the experiment is achieved on the basis of the Bondar model – the difference between the results of calculations and experiments for all trajectories does not exceed 10 %. The Bondar Model is closed by three material parameters and one material function which are determined from simple experiments on uniaxial tension after preliminary compression (kink of the deformation trajectory by 180°). Bondar plasticity model has a generalization for non-isothermal loading, many features of cyclic disproportionate and proportional loading and describes the processes of damage accumulation (resource).

© PNRPU

Введение

Построение вариантов теорий пластичности, адекватно описывающих процессы сложного нагружения, имеет два основных направления: варианты теории упругопластических процессов [1–8] и варианты теории пластического течения при комбинированном упрочнении [9–25]. Варианты второго направления широко применяются в практических расчетах, так как достаточно просты, имеют обобщения на неизотермические процессы нагружения и позволяют оценивать ресурс.

Оценка работоспособности вариантов теорий пластического течения при комбинированном упрочнении, наиболее применяемых в программных комплексах расчета конструкций, при сложном нагружении является весьма актуальной задачей. В предыдущей работе такая оценка была проведена на плоских траекториях деформаций следующих вариантов теорий: модель изотропного упрочнения, модель Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова [8–10], модель Оно – Ванга [22], модель Армстронга – Фредерика – Кадашевича [11, 13], модель Шабоша [15, 16], модель Темиса [21, 23], модель Бондаря [17–20]. Удовлетворительное соответствие экспериментам [26] достигается при расчетах на основе моделей Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова, Шабоша и Темиса – отличие результатов расчетов и экспериментов не превышает 30 %.

Наилучшее соответствие эксперименту [26] достигается на основе модели Бондаря – отличие результатов и экспериментов не превышает 10 %.

В настоящей работе сравнительный анализ вариантов теорий, удовлетворительно описывающий процессы сложного нагружения по плоским траекториям деформаций, проводится при сложном нагружении по пространственным траекториям деформаций в виде винтовых траекторий постоянной и переменной кривизны и кручения. Результаты расчетов сопоставляются с результатами экспериментов [27, 28].

1. Варианты теорий пластичности

Рассматриваются конструкционные стали и сплавы однородные и начально изотропные. В процессе деформирования в материале может возникать только пластическая деформационная анизотропия. Рассматриваются малые деформации в условиях отсутствия фазовых превращений, динамических и реологических явлений. Для всех вариантов теории пластического течения при комбинированном упрочнении тензор скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$ представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ и пластической $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ деформаций:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p. \quad (1)$$

Упругие деформации следуют обобщенному закону Гука:

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{ij} - \nu (3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})], \quad (2)$$

где E, ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона. σ_{ij} – тензор напряжений; $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ – среднее напряжение.

Принимается поверхность нагружения, разделяющая области упругого и упругопластического состояний. Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} (s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C_p^2 = 0. \quad (3)$$

Здесь $s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}$ – девиатор активных [12] напряжений; s_{ij} – девиатор напряжений; a_{ij} – девиатор смещения поверхности нагружения, характеризует направленное (анизотропное) упрочнение (девиатор микронапряжений [12]). Скаляр $C_p(\varepsilon_{u*}^p)$ зависит от накопленной пластической деформации ε_{u*}^p и отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружений, а также характеризует изотропное упрочнение.

Для определения скоростей пластической деформации используется ассоциированный с формулой (3) градиентальный закон течения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u*}^p. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_u^* = \left(\frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^*\right)^{\frac{1}{2}}$ – интенсивность активных напряжений, $\dot{\varepsilon}_{u*}^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p\right)^{\frac{1}{2}}$ – скорость накопленной пластической деформации.

Для всех рассматриваемых вариантов теорий изотропное упрочнение определяется следующей зависимостью:

$$C_p = C_p(\varepsilon_{u*}^p). \quad (5)$$

Рассматриваются следующие варианты, отличающиеся эволюционными уравнениями для смещения центра поверхности нагружения.

Модель Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова [8–10]

$$a_{ij} = \frac{2}{3} g \varepsilon_{ij}^p. \quad (6)$$

Материальные функции стали 45 (табл. 1)

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3, \quad g = 6670 \text{ МПа}$$

Таблица 1

Функция изотропного упрочнения. Ст. 45

Table 1

Isotropic hardening function. St. 45

ε_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0026	0,0055	0,018	0,027	0,047	0,1
C_p , МПа	287	324	341	365	374	405	416	425	432

Модель Шабоза [15, 16]

$$\dot{a}_{ij} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_{ij}^{(m)}, \quad \dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(m)} a_{ij}^{(m)} \dot{\varepsilon}_{u*}^p. \quad (7)$$

Здесь, как и ранее, используется модель, состоящая из трех эволюционных уравнений, т.е. $M = 3$.

Материальные функции стали 45 (табл. 2)

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3,$$

$$g^{(1)} = 7070 \text{ МПа}, \quad g^{(2)} = 5991 \text{ МПа}, \quad g^{(3)} = 160375 \text{ МПа},$$

$$g_a^{(1)} = -0,37, \quad g_a^{(2)} = -91, \quad g_a^{(3)} = -2622.$$

Таблица 2

Функция изотропного упрочнения. Ст. 45

Table 2

Isotropic hardening function. St. 45

ε_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0026	0,0055	0,018	0,027	0,047	0,1
C_p , МПа	287	289	289	289	286	286	289	288	288

Модель Бондаря [17–20]

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \left(\frac{2}{3} g_\varepsilon \varepsilon_{ij}^p + g_a a_{ij}\right) \dot{\varepsilon}_{u*}^p, \quad (8)$$

$$g = E_a + \beta \sigma_a, \quad g_\varepsilon = E_a \beta, \quad g_a = -\beta.$$

Материальные функции стали 45 (табл. 3)

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3,$$

$$E_a = 6770 \text{ МПа}, \quad \sigma_a = 140 \text{ МПа}, \quad \beta = 265.$$

Таблица 3

Функции изотропного упрочнения. Ст. 45

Table 3

Isotropic hardening function. St. 45

ε_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0026	0,0055	0,018	0,027	0,047	0,1
C_p , МПа	287	314	321	295	266	266	276	285	292

Модель Темиса [21, 23]

$$a_{ij} = a_1(\varepsilon_{u*}^p) \varepsilon_{ij}^p + a_2(\varepsilon_{u*}^p) \xi_{ij}, \quad (9)$$

$$\dot{\xi}_{ij} = K(\sigma_u, \varepsilon_{u*}^p) \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (10)$$

Материальные функции стали 45 получены А.Д. Худяковой и ею проведены расчеты.

Для удобства сопоставления расчетных и экспериментальных результатов рассматривается векторное представление процессов нагружения и деформирования [1]. Расчеты на основе вариантов теорий проводятся на пространственных винтовых траекториях деформаций в пространстве $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ вектора деформаций $\bar{\mathcal{E}}$. Сравнение результатов расчетов и экспериментов [27, 28] осуществляется на компонентах S_1, S_2, S_3 вектора напряжений \bar{S} вдоль траектории деформаций. Анализируются скалярные свойства – изменение модуля вектора напряжений вдоль траектории деформаций

$$\sigma = \sigma(s).$$

2. Винтовая траектория деформаций постоянной кривизны и кручения

Сравнение вариантов теории при сложном нагружении проводится на пространственной траектории деформаций в виде винтовой линии (рис. 1) постоянной кривизны и кручения. В экспериментальных исследованиях [27, 28] реализуются траектории с кривизной от 100 до 333 и круткой от 10 до 666, относящиеся к траекториям от средней до большой кривизны и от малого до большого кручения. Здесь рассматривается винтовая траектория с кривизной и круткой, равными 200. Такую траекторию можно отнести к траектории большой кривизны и большого кручения (50–100 траектории среднего кручения и средней крутки). Экспериментальные исследования [27, 28] проводятся на тонкостенных цилиндрических образцах из стали 45 под действием осевой силы, крутящего момента и внутреннего давления

(P, M, q –опыты). Экспериментальные результаты [27, 28] на всех рисунках показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штрихпунктирными, штриховыми и пунктирными (точками) кривыми. Изменения компонент вектора напряжений S_1, S_2, S_3 вдоль траектории деформаций, т.е. как функции длины дуги траектории деформаций s , показаны соответственно на рис. 2 (а–в). Скалярные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ вдоль траектории деформаций приведены на рис. 3.

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам теорий и эксперимента [27, 28] показывает:

- по компонентам вектора напряжений худшие результаты получены на основе модели Темиса; удовлетворительные – на основе модели Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе моделей Шабоша и Бондаря при лучшем соответствии эксперименту модели Бондаря;

- по скалярным свойствам худший результат получен на основе модели Темиса; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе моделей Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова, Шабоша и Бондаря.

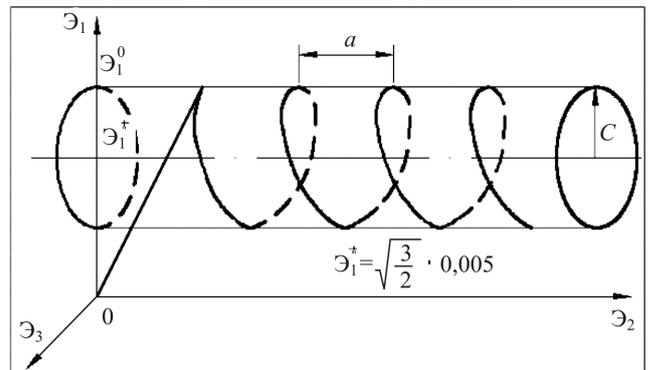


Рис. 1. Траектория деформаций

Fig. 1. Deformation trajectory

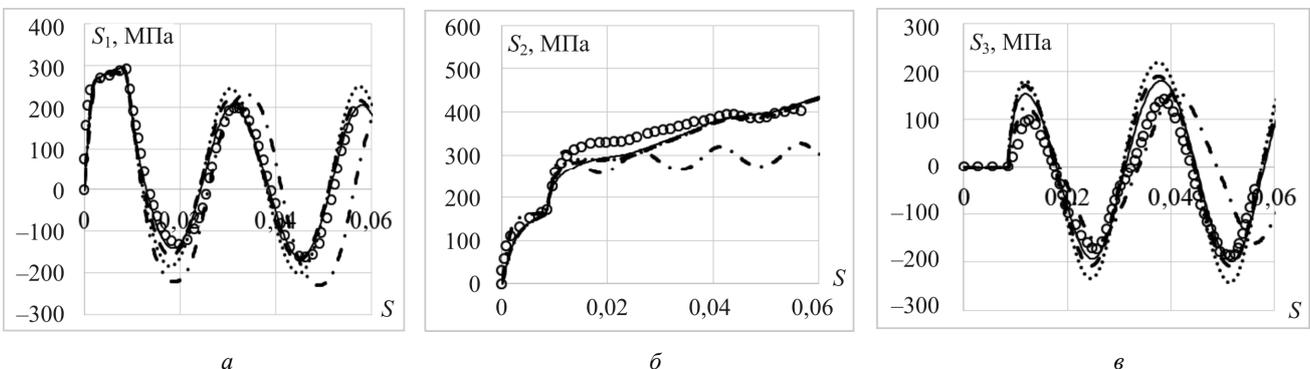


Рис. 2. Изменение компоненты: а – S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций; б – S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций; в – S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций

Fig. 2. Change in the component: а – S_1 of the stress vector along the deformation trajectory; б – S_2 of the stress vector along the deformation trajectory; в – S_3 of the stress vector along the deformation trajectory

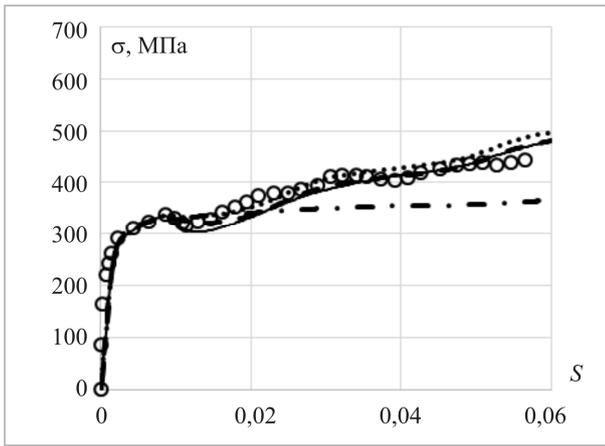


Рис. 3. Скалярные свойства (кружки – эксперимент, сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая (точки) – модель Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова, штриховая кривая – модель Шабоша, штрихпунктирная кривая – модель Темиса)

Fig. 3. Scalar properties (circles – experiment, solid curve – Bondar model, dashed curve (points) – Ishlinskii – Prager – Kadashevich model, dotted curve – Chaboche model, dashpoint curve – Temis model)

3. Винтовая траектория деформаций переменной кривизны и кручения

Сравнительный анализ вариантов теорий проводится при сложном нагружении по пространственной траектории деформаций в виде винтовой линии с переменной кривизной и кручением. Экспериментальные исследования [27, 28] проводятся на трубчатых образцах из стали 45. На рис. 4 показаны изменения кривизны и крутки вдоль траектории деформаций. Здесь кривизна меняется от 150 до 370, а крутка – от 50 до 100. Таким образом, рассматриваемую траекторию можно отнести к траектории большой кривизны и среднего кручения. На всех рисунках экспериментальные результаты пока-

заны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штрихпунктирными, штриховыми и пунктирными (точками) кривыми. Изменения компонент вектора напряжений S_1, S_2, S_3 вдоль траектории деформаций показаны соответственно на рис. 5 (а–в). Скалярные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ вдоль траектории деформаций приведено на рис. 6.

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам теорий и эксперимента [27, 28] показывает:

- по компонентам вектора напряжений худшие результаты получены на основе моделей Темиса и Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова; удовлетворительный – на основе модели Шабоша; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;

- по скалярным свойствам худшие результаты получены на основе моделей Темиса и Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова; удовлетворительный – на основе модели Шабоша; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря.

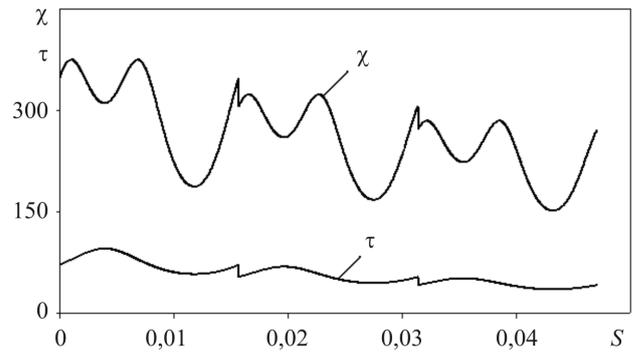


Рис. 4. Изменение кривизны χ и крутки τ вдоль траектории деформации

Fig. 4. Change in curvature χ and twist τ along the deformation trajectory

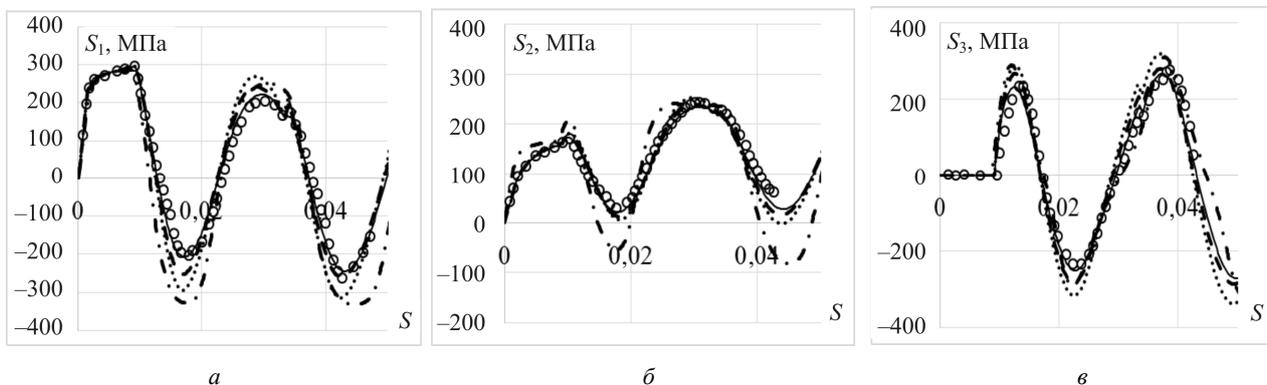


Рис. 5. Изменение компоненты: а – S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций; б – S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций; в – S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций

Fig. 5. Change in the component: а – S_1 of the stress vector along the deformation trajectory; б – S_2 of the stress vector along the deformation trajectory; в – S_3 of the stress vector along the deformation trajectory

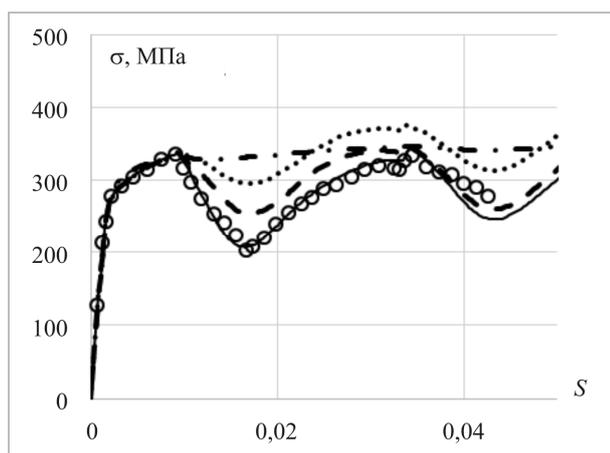


Рис. 6. Скалярные свойства (кружки – эксперимент, сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова, штриховая кривая – модель Шабоша, штрихпунктирная кривая – модель Темиса)

Figure 6. Scalar properties (circles – experiment, solid curve – Bondar model, dashed curve (points) – Ishlinskii – Prager – Kadashevich model, dotted curve – Chaboche model, dashpoint curve – Temis model)

Заключение

Проведены сравнения различных вариантов теории пластического течения при комбинированном упрочнении наиболее используемых в практических расчетах и

Библиографический список

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
2. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. МДТТ. – М.: ВНИТИ, 1990. – Т. 21. – С. 3–75.
3. Малый В.И. О проблеме векторных свойств материалов в упругопластических процессах // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14, № 3. – С. 19–27.
4. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность: в 2 т. – Т. 2: Пластичность. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 336 с.
5. Дао Зуй Бик. Модификация соотношений упругопластических процессов средней кривизны // Вестн. МГУ. Матем. и механика. – 1981. – № 5. – С. 103–106.
6. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Ч. 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. – 2016. – № 1. – С. 110–135.
7. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Прикладной вариант теории упругопластических процессов // Изв. Тульского гос. университета. Естественные науки. – 2011. – Вып. 3. – С. 46–56.
8. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журн. – 1954. – Т. 6, вып. 3. – С. 314–324.
9. Prager W. The theory of plasticity: A Survey of Recent Achievements // Proc. Inst. Mech. Engrs. – London, 1955. – Vol. 169. – P. 41.

показавших себя при сравнительных исследованиях при сложном нагружении по плоским траекториям деформаций. Рассмотрена пространственная траектория деформаций в виде винтовой линии постоянной кривизны и кручения (кривизна 200, крутка 200), которая относится к траектории большой кривизны и большого кручения. Рассмотрена также пространственная траектория деформаций в виде винтовой линии переменной кривизны и кручения (кривизна меняется от 150 до 370, а крутка – от 50 до 100), которую можно отнести к траектории большой кривизны и среднего кручения.

Удовлетворительное соответствие эксперименту по всем пространственным траекториям деформаций достигается при расчетах на основе модели Шабоша – отличие результатов расчетов и экспериментов не превышает 30 %. Наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря – отличие результатов расчетов и экспериментов по всем траекториям не превышает 10 %. Следует отметить, что модель пластичности Бондаря замыкается тремя материальными параметрами и одной материальной функцией, которые определяются из достаточно простого эксперимента на одноосное растяжение и растяжение после предварительного сжатия (излом траектории на 180°). Модель пластичности Бондаря имеет обобщение на не-изотермическое нагружение, многие особенности циклического непропорционального и пропорционального нагружений и описывает процессы накопления повреждений (ресурс).

10. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 117, вып. 4. – С. 586–588.
11. Кадашевич Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. – Вып. 6. – С. 39–45.
12. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л. Машиностроение, 1990. – 224 с.
13. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect // CEBG Report No. RD/B/N/ 731. – 1966.
14. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 424 с.
15. Нелинейная механика материалов / Ж. Бессон [и др.]. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397 с.
16. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.
17. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.
18. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation and low-high-cycle fatigue of stainless steel 304 in uniaxial stress state / V.S. Bondar, V.V. Dansin, D.Vu. Long, D.D. Nguyen // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2018. – Vol. 25 (12) – P. 1009–1017, DOI: 10.1080/15376494.2017.1342882

19. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Петров В.К. Некоторые особенности прогнозирования ресурса материалов и конструкций при циклическом нагружении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 1. – С. 18–26. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.02

20. Abashev D.R., Bondar V.S. Refinement of plasticity theory for modeling monotonic and cyclic loading processes // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2020. – Vol. 15. – P. 225.

21. Демьянушко И.В., Темис Ю.М. К построению теорий пластического течения с анизотропным упрочнением для материалов, находящихся под воздействием физических полей // Изв.АН СССР. МТТ. – 1975. – № 5. – С. 111–119.

22. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior // International Journal of Plasticity. – 1993. – Vol. 9. – P. 375–390.

23. Темис Ю.М., Худякова А.Д. Модель неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении // Матема-

тическое моделирование и численные методы. – 2017. – № 3. – С. 22–41.

24. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratcheting // Int. J. of Plasticity. – 2009. – Vol. 25. – P. 1560–1587.

25. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models // Int. J. Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1863–1889.

26. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. Экспериментальная пластичность. Процессы сложного деформирования. – Тверь: ТГТУ, 2003. – Кн. 1. – 172 с.

27. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций / А.С. Вавакин, Р.А. Васин, В.В. Викторов [и др.]. – М., 1986. – 67 с. Деп. в ВИНТИ, № 7298-В86.

28. Упругопластическое поведение стали 45 на винтовых траекториях деформаций / А.С. Вавакин, Р.А. Васин, В.В. Викторов [и др.] // Пластичность и разрушение твердых тел. – М., 1988. – С. 21–29.

References

1. Il'jushin A.A. *Mekhanika sploshnoj sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, Publishing house of Moscow State University, 1990, 310 p.

2. Vasin R.A. *Nekotorye voprosy svyazi napryazhenij i deformatsij pri sloznom nagruzhenii* [Determining the relationship of the theory of plasticity]. *Uprugost' i neuprugost'*. Vyp. 1. Moscow, Izd-vo MGUB, 1971, pp. 59-126.

3. Mal'j V.I. *O probleme vektornykh svoystv materialov v uprugoplasticheskikh processah* [On the problem of vector properties of materials in elastoplastic processes]. *Prikladnaya mekhanika*. 1978, vol. 14, no. 3, pp. 19-27.

4. Zubchaninov V.G. *Ustojchivost' i plastichnost'*. V 2-h t. T. 2. *Plastichnost' [Stability and ductility. In 2 volumes. vol. 2. Plasticity]*. Moscow, FIZMATLIT, 2008. 336 p.

5. Dao Zuj Bik. *Modifikaciya sootnoshenij uprugoplasticheskikh processov srednej krivizny* [Modification of relations of elastoplastic processes of average curvature]. *Vestn. MGU. Matem. i mekhanika*, 1981, no. 5, pp. 103-106.

6. Peleshko V.A. *Prikladnoj i inzhenernyj varianty teorii uprugoplasticheskikh processov aktivnogo slozhnogo nagruzheniya. Chast' 2: Identifikaciya i verifikaciya* [Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 2: Identification and verification]. *Izv. RAN. MTT*, 2016, no. 1, pp. 110-135.

7. Bondar V.S., Danshin V.V., Semenov P.V. *Prikladnoj variant teorii uprugoplasticheskikh processov* [Applied version of the theory of elastoplastic processes]. *Izv. Tul'skogo gos. universiteta. Estestvennye nauki*, 2011, Vyp. 3, pp. 46-56.

8. Ishlinskij A.Ju. *Obshchaya teoriya plastichnosti s linejnym uprochneniem* [General theory of plasticity with linear hardening]. *Ukr. matem. zhurn*, 1954, vol. 6, iss. 3, pp. 314-324.

9. Prager W. *The theory of plasticity: A Survey of Recent Achievements*. Proc. Inst. Mech. Engrs, London, 1955, vol. 169, pp. 41.

10. Kadashevich Ju.I., Novozhilov V.V. *Teoriya plastichnosti, uchityvayushchaya effekt Bauschingera* [The theory of plasticity, taking into account the Bauschinger effect]. *Dokl. AN SSSR*, 1957, vol. 117, iss. 4, pp. 586-588.

11. Kadashevich Ju.I. *O razlichnykh tenzorno-linejnykh sootnosheniyah v teorii plastichnosti* [On various tensor-linear rela-

tions in the theory of plasticity]. *Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti*. Leningrad, Izd-vo LGU, 1967, vyp. 6, pp. 39-45.

12. Kadashevich Ju.I., Novozhilov V.V. *Mikronapryazheniya v konstrukcionnykh materialah* [Microstresses in structural materials]. Leningrad, Mashinostroenie, 1990, 224 p.

13. Armstrong P.J., Frederick C.O. *A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect*. CEBG Report No. RD/B/N/731, 1966.

14. Volkov I.A., Korotkih Ju.G. *Uraveneniya sostojaniya v'jazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdenijami* [Equations of state for damaged viscoelastoplastic media]. Moscow, FIZMATLIT, 2008, 424 p.

15. *Nelinejnaya mekhanika materialov* [Nonlinear mechanics of materials]. Besson Zh. [i dr.]. Sankt-Peterburg: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2010, 397 s.

16. Chaboche J.-L. *A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories*. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1642-1692.

17. Bondar V.S. *Inelasticity. Variants of the theory*. New York, Begell House, 2013, 194 p.

18. Bondar V.S., Dansin V.V., Long D. Vu., Nguyen D.D. *Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation and low-high-cycle fatigue of stainless steel 304 in uniaxial stress state*. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2018, vol. 25 (12), pp. 1009-1017, DOI: 10.1080/15376494.2017.1342882

19. Bondar V.S., Abashev D.R., Petrov V.K. *On Predicting Material and Structural Resources under Cyclic Loading*. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 1, pp. 18-26. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.02

20. Abashev D.R., Bondar V.S. *Refinement of plasticity theory for modeling monotonic and cyclic loading processes*. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2020, vol. 15, pp. 225.

21. Dem'yanushko I.V., Temis Ju.M. *K postroeniyu teorii plasticheskogo techeniya s anizotropnym uprochneniem dlya materialov, nahodyashchih'sya pod vozdejstviem fizicheskikh polej* [On the construction of theories of plastic flow with anisotropic hardening for materials under the influence of physical fields]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1975, no. 5, pp. 111-119.

22. Ohno N., Wang J.-D. *Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic*

features for ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity*, 1993, vol. 9, pp. 375-390.

23. Temis Ju.M., Hudyakova A.D. Model' neizotermicheskogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya konstrukcionnyh materialov pri slozhnom nagruzhении [Model of non-isothermal elastoplastic deformation of structural materials under complex loading]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*, 2017, no. 3, pp. 22-41.

24. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 1560-1587.

25. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models. *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1863-1889.

26. Zubchaninov V.G., Ohlopkov N.L., Garannikov V.V. *Eksperimental'naya plastichnost'. Processy slozhnogo deformirovaniya. Kniga 1* [Experimental plasticity. Complex deformation processes. Book 1]. Tver', TGTU, 2003, 172 p.

27. Vavakin A.S., Vasin R.A., Viktorov V.V. i dr. *Eksperimental'noe issledovanie uprugoplasticheskogo deformirovaniya stali pri slozhnom nagruzhении po krivolinyjnym prostanstvennym traektoriyam deformacij* [Experimental study of elastoplastic deformation of steel under complex loading along curvilinear spatial trajectories of deformations]. Moscow, 1986. 67 p. Dep. v VINITI, no. 7298-V86.

28. Vavakin A.S., Vasin R.A., Viktorov V.V. i dr. *Uprugoplasticheskoe povedenie stali 45 na vintovyh traektoriyah deformacij* [Elastoplastic behavior of steel 45 on screw trajectories of deformations]. *Plastichnost' i razrushenie tverdyh tel.*, 1988, pp. 21-29.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Financing. The study was not sponsored.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.