



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.07

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА С ПОКРЫТИЕМ НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

А.О. Ватульян^{1,2}, С.А. Нестеров², В.О. Юров^{2,1}

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 28 апреля 2021 г.
Принята: 25 ноября 2021 г.
Опубликована: 30 декабря 2021 г.

Ключевые слова:

полый цилиндр, покрытие, градиентная термоупругость, модель Айфантиса, вариационная постановка, масштабные эффекты, асимптотическое решение, модифицированные функции Бесселя, напряжения Коши, моментные напряжения, полные напряжения.

АННОТАЦИЯ

Проведено исследование напряженно-деформированного состояния термоупругого полого цилиндра с однородным покрытием с учетом масштабных эффектов. Для учета масштабных эффектов применяется однопараметрическая градиентная модель Айфантиса. Уравнения равновесия и граничные условия для составного полого термоупругого цилиндра получены на основе вариационного принципа Лагранжа. По сравнению с классической постановкой задачи задаются дополнительные граничные условия и условия сопряжения для моментных напряжений и градиентов перемещений. Выполнено обезразмеривание поставленной задачи термоупругости. Решение задачи несвязанной термоупругости начинается с нахождения радиального распределения температуры слоистого цилиндра на основе решения задачи теплопроводности в классической постановке. Решение задачи в перемещениях представлено в виде суммы решений в классической постановке задачи и дополнительных пограничных слагаемых, найденных на основе асимптотических свойств модифицированных функций Бесселя. Получены упрощенные аналитические выражения для нахождения радиальных перемещений, радиальных и окружных напряжений Коши, ненулевых компонент тензора моментных и полных напряжений. На конкретных примерах проведены вычисления радиального распределения перемещений и напряжений составного цилиндра в случае как механического, так и теплового нагружения. Исследованы границы применимости асимптотического решения задачи. Показано отличие радиального распределения перемещений и напряжений, найденных на основе решения задачи в классической постановке и в градиентной постановке. Выяснено, что радиальные напряжения Коши испытывают скачок на границе цилиндра и покрытия, что объясняется непрерывностью радиальных перемещений и их первых производных. Компоненты тензора моментных напряжений либо принимают пиковые значения либо испытывают скачок на границе сопряжения. Моментные напряжения пропорциональны квадрату градиентного параметра, при малых значениях которого имеют величины, намного меньшие значений полных напряжений. При увеличении безразмерного масштабного параметра снижаются значения радиальных перемещений и полных окружных напряжений, однако возрастают моментные напряжения.

© ПНИПУ

© Ватульян Александр Ованесович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: aovatulyan@sfedu.ru, [ID: 0000-0003-0444-4496](https://orcid.org/0000-0003-0444-4496).

Нестеров Сергей Анатольевич – к.ф.-м.н, с.н.с., e-mail: 1079@list.ru, [ID: 0000-0003-3780-5104](https://orcid.org/0000-0003-3780-5104).

Юров Виктор Олегович – к.ф.-м.н., м.н.с., e-mail: vyurov@sfedu.ru, [ID: 0000-0002-4689-4068](https://orcid.org/0000-0002-4689-4068).

Alexander O. Vatulyan – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, e-mail: aovatulyan@sfedu.ru, [ID: 0000-0003-0444-4496](https://orcid.org/0000-0003-0444-4496).

Sergey A. Nesterov – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: 1079@list.ru, [ID: 0000-0003-3780-5104](https://orcid.org/0000-0003-3780-5104).

Victor O. Yurov – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, e-mail: vyurov@sfedu.ru, [ID: 0000-0002-4689-4068](https://orcid.org/0000-0002-4689-4068).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A HOLLOW CYLINDER WITH A COATING BASED ON THE GRADIENT MODEL OF THERMOELASTICITY

A.O. Vatulyan^{1,2}, S.A. Nesterov², V.O. Yurov^{2,1}

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

²Southern Mathematical Institute, a branch of the VSC RAS, Vladikavkaz, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 28 April 2021
Accepted: 25 November 2021
Published: 30 December 2021

Keywords:

hollow cylinder, coating, gradient thermoelasticity, Aifantis model, variational formulation, scale effects, asymptotic solution, modified Bessel functions, Cauchy stresses, moment stresses, total stresses.

ABSTRACT

The study of the stress-strain state of a thermoelastic hollow cylinder with a homogeneous coating is carried out taking into account the scale effects. Aifantis' one-parameter gradient model is used to account for scale effects. Equilibrium equations and boundary conditions for a composite hollow thermoelastic cylinder are obtained on the basis of the Lagrange variational principle. In comparison with the classical formulation of the problem, additional boundary conditions and conjugation conditions are set for moment stresses and displacement gradients. The dimensionlessness of the task of thermoelasticity has been carried out. Solving the problem of uncoupled thermoelasticity begins with finding the radial temperature distribution of a layered cylinder on the basis of solving the problem of heat conduction in the classical formulation. The solution of the problem in displacements is presented as a sum of solutions in the classical formulation of the problem and additional boundary layer terms found on the basis of the asymptotic properties of the modified Bessel functions. Simplified analytical expressions are obtained for finding radial displacements, radial and circumferential Cauchy stresses, nonzero components of the tensor of moment and total stresses. On specific examples, calculations of the radial distribution of displacements and stresses of a composite cylinder in the case of both mechanical and thermal loading are carried out. The limits of applicability of the asymptotic solution of the problem are investigated. The difference between the radial distribution of displacements and stresses found on the basis of solutions to the problem in the classical formulation and in the gradient formulation is shown. It was found that the Cauchy radial stresses experience a jump at the boundary of the cylinder and the coating, which is explained by the continuity of radial displacements and their first derivatives. The components of the moment stress tensor either take on peak values or experience a jump at the interface. The moment stresses are proportional to the square of the gradient parameter, at small values of which they have values that are much less than the values of the total stresses. With an increase in the dimensionless scale parameter, the values of radial displacements and total circumferential stresses decrease, but moment stresses increase.

© PNRPU

Введение

В последние годы большое внимание ученых привлечено к изучению напряженно-деформированного состояния (НДС) микрообъектов, ультратонких структур, наноструктурированных композитов. В этих структурах, согласно экспериментальным данным [1, 2], проявляются масштабные эффекты, т.е. зависимость НДС от характерных размерных параметров исследуемой модели. Для описания масштабных эффектов используются различные градиентные и нелокальные теории, которые в определяющие уравнения включают градиентные параметры размерности длины [3–6]. Градиентный параметр материала – это размер, характеризующий микроструктурное строение материала. Если длина объекта и градиентный параметр являются величинами одного порядка, то в среде будут проявляться масштабные эффекты.

В градиентной теории упругости плотность энергии деформации зависит не только от деформации, как в классической теории, но и от его градиентов. Градиентная теория упругости была сформулирована в 60-х гг. прошлого века в работах Тупина [7] и Миндлина [8–10]. В 70-х гг. XX в. градиентная теория упругости получила обобщение и на механику связанных полей, в том числе на термоупругость [11].

Уточнение НДС микроцилиндров на основе модели градиентной теории упругости имеет особое практическое значение при расчете на прочность и потерю устойчивости устройств микроэлектроники и микромеханических систем MEMS, которые применяются в устройствах медицинской диагностики, солнечных батареях и т.д. [12]. Впервые задача Ламе в градиентной теории упругости для трубы бесконечной длины и сферической оболочки, находящихся под действием равномерного внешнего и внутреннего давления, была рассмотрена на основе модели Тупина – Миндлина в [13], которая в определяющие уравнения включает кроме параметров Ламе еще 5 дополнительных градиентных модулей, что наталкивается на сложности их идентификации [14]. В целях упрощения расчетов были предложены прикладные градиентные модели Айфантиса [15–18] и Лурье [19], которые в определяющие уравнения включают только один градиентный параметр. Так, в рамках модели Айфантиса с помощью аппарата модифицированных функций Бесселя получены аналитические решения задачи о нахождении НДС полого цилиндра при механическом нагружении, как в случае однородного материала [20–22], так и функционально-градиентного материала со степенным законом неоднородности [23]. В случае теплового нагружения цилинд-

ра в рамках модели Айфантиса на основе численного метода обобщенных дифференциальных квадратур решена задача о нахождении НДС полого цилиндра со степенными законами неоднородности [24, 25].

В целях предотвращения износа и разрушения изделий вследствие действия интенсивных термомеханических нагрузок применяют защитные покрытия. В работах [26, 27] в рамках классической теории упругости и термоупругости получены аналитические решения задачи деформирования системы «покрытие – подложка», как в случае однородного, так и функционально-градиентного покрытия. Для уточнения НДС системы «покрытие – подложка» на основе градиентной модели получены аналитические решения в случае механического нагружения [28–31]. Так, в работах [28] в рамках модели Лурье исследуется задача равновесия двухслойного покрытия, находящегося под действием локализованной нормальной нагрузки. В исследовании [30] решается задача изгиба микробалки с частичным покрытием. Исследовано влияние изменения масштабного параметра на изменения распределения смещений, напряжений и нейтральной линии. В работах [32–34] получены аналитические решения задачи градиентной термоупругости для составных тел. В исследовании [34] решается задача градиентной термоупругости для составного стержня. Для нахождения напряжений Коши применяется асимптотический подход Вишика – Люстерника, учитывающий наличие погранслойных решений в окрестности границ и точки сопряжения стержней. Исследована зависимость скачка напряжений Коши от соотношения физических характеристик стержней и масштабного параметра. Однако задача градиентной термоупругости для цилиндра с покрытием остается неисследованной.

В данной работе приведена постановка задачи однопараметрической градиентной термоупругости для цилиндра с покрытием. На основе вариационного принципа Лагранжа получены уравнения равновесия и граничные условия для составного цилиндра. После нахождения радиального распределения температуры решение для радиальных перемещений представлено в виде суммы решений задачи в классической постановке и дополнительных погранслойных слагаемых. Проведены вычисления радиального распределения перемещений, напряжений Коши, полных и моментных напряжений в случае как механического, так и теплового нагружения составного цилиндра. Сделан анализ полученных результатов.

1. Применение вариационной формулировки градиентной термоупругости к составному цилиндру

В градиентной модели Айфантиса [16] вводят выражения для компонент тензоров деформации $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, напряжений Коши $\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma T \delta_{ij}$, градиентов деформаций $\chi_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$, моментных напряжений

$m_{ijk} = l^2 \tau_{ij,k}$, полных напряжений $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk}$. Здесь λ и μ – параметры Ламе, γ – коэффициент температурных напряжений, T – температура, δ_{ij} – символ Кронекера, l – градиентный параметр, имеющий размерность длины.

Уравнения равновесия и граничные условия в градиентной теории получают путем применения вариационного принципа Лагранжа для случая термоупругого равновесия [23, 25]. Для этого сначала составляют выражение для внутренней энергии по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\tau_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ijk} \chi_{ijk}) dV. \quad (1)$$

Выражение для внутренней энергии деформации в полярной системе координат (r, φ) имеет вид [23]:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\tau_{rr} \varepsilon_{rr} + \tau_{\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + m_{rrr} \chi_{rrr} + m_{\varphi\varphi r} \chi_{\varphi\varphi r} + m_{\varphi\varphi\varphi} \chi_{\varphi\varphi\varphi} + m_{r\varphi\varphi} \chi_{r\varphi\varphi}) dV. \quad (2)$$

В формулу (2) подставим компоненты тензоров деформации $\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}$, градиентов деформации

$$\chi_{rrr} = \frac{d^2 u}{dr^2}, \quad \chi_{\varphi\varphi r} = \chi_{r\varphi\varphi} = \chi_{\varphi\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right),$$

$$\text{напряжений Коши } \tau_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dr} + \lambda \frac{u}{r} - \gamma T, \quad \tau_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} + \lambda \frac{du}{dr} - \gamma T, \quad \text{моментных напряжений } m_{rrr} = l^2 \frac{d^2 \tau_{rr}}{dr^2},$$

$$m_{\varphi\varphi r} = l^2 \frac{d \tau_{\varphi\varphi}}{dr}, \quad m_{r\varphi\varphi} = m_{\varphi\varphi r} = \frac{1}{2} l^2 \left(\frac{\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi}}{r} \right) = 2\mu l^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right),$$

$$\text{полных напряжений } \sigma_{rr} = \tau_{rr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{rrr}) + \frac{1}{r} (m_{\varphi\varphi r} + m_{r\varphi\varphi}),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \tau_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{\varphi\varphi r}) - \frac{1}{r} (m_{\varphi\varphi\varphi} + m_{r\varphi\varphi}).$$

Далее находится работа внешних сил:

$$A = \int_S f_i u_i dS, \quad (3)$$

где f_i – компоненты вектора плотности поверхностных сил.

Сообщим телу виртуальные перемещения δu_i , а также, предполагая, что температурное поле при виртуальных перемещениях остается неизменным, согласно вариационному принципу Лагранжа имеем:

$$\delta W - \delta A = 0. \quad (4)$$

Применим вариационный принцип Лагранжа для получения уравнений равновесия и граничных условий составного термоупругого цилиндра. Рассмотрим равновесие бесконечного полого термоупругого двухслойного цилиндра, имеющего поверхность сопряжения $r = r_0$. На внутренней боковой поверхности составного цилиндра $r = a$ поддерживается нулевая температура и действует внутреннее давление p_0 . Внешняя поверхность $r = b$

свободна от напряжений и поддерживается при температуре T_0 . Тогда выражение для первой вариации внутренней энергии (2) примет вид:

$$\begin{aligned} \delta W = & \frac{1}{2} \int_a^{r_0} \int_0^{2\pi} \left(\tau_{rr}^{(1)} \delta \frac{du^{(1)}}{dr} + \tau_{\varphi\varphi}^{(1)} \delta \frac{u^{(1)}}{r} + m_{rrr}^{(1)} \delta \frac{d^2 u^{(1)}}{dr^2} + \right. \\ & \left. + (m_{\varphi\varphi r}^{(1)} + m_{\varphi r\varphi}^{(1)} + m_{r\varphi\varphi}^{(1)}) \delta \frac{d}{dr} \left(\frac{u^{(1)}}{r} \right) \right) r d\varphi dr + \\ & + \frac{1}{2} \int_{r_0}^b \int_0^{2\pi} \left(\tau_{rr}^{(2)} \delta \frac{du^{(2)}}{dr} + \tau_{\varphi\varphi}^{(2)} \delta \frac{u^{(2)}}{r} + m_{rrr}^{(2)} \delta \frac{d^2 u^{(2)}}{dr^2} + \right. \\ & \left. + (m_{\varphi\varphi r}^{(2)} + m_{\varphi r\varphi}^{(2)} + m_{r\varphi\varphi}^{(2)}) \delta \frac{d}{dr} \left(\frac{u^{(2)}}{r} \right) \right) r d\varphi dr. \end{aligned} \quad (5)$$

Полагая в (5) $\delta \frac{d}{dr} \left(\frac{u^{(i)}}{r} \right) = \frac{1}{r} \left(\delta \frac{du^{(i)}}{dr} - \delta \frac{u^{(i)}}{r} \right)$,

$$\begin{aligned} \tau_{rr}^{(i)} \delta \frac{du^{(i)}}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(\tau_{rr}^{(i)} \delta u^{(i)} \right) - \frac{d\tau_{rr}^{(i)}}{dr} \delta u^{(i)}, & m_{rrr}^{(i)} \delta \frac{d^2 u^{(i)}}{dr^2} &= \\ &= \frac{d}{dr} \left(m_{rrr}^{(i)} \delta \frac{du^{(i)}}{dr} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{dm_{rrr}^{(i)}}{dr} \delta u^{(i)} \right) + \frac{d^2 m_{rrr}^{(i)}}{dr^2} \delta u^{(i)}, & i=1,2, \end{aligned}$$

выполняя условия принципа Лагранжа (4), учитывая при этом, что вариация от работы внешних сил равна $\delta A = \int_0^{2\pi} p_0 \delta u^{(1)} d\varphi$, и введя обозначения $t_r^{(i)} = \tau_{rr}^{(i)} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{rrr}^{(i)}) + \frac{1}{r} (m_{\varphi\varphi r}^{(i)} + m_{\varphi r\varphi}^{(i)} + m_{r\varphi\varphi}^{(i)})$, $i=1,2$, после некоторых преобразований получим уравнения равновесия, записанные в полных напряжениях:

$$\frac{d\sigma_{rr}^{(i)}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}}{r} = 0, \quad i=1,2, \quad (6)$$

статические граничные условия

$$t_r^{(1)}(a) = p_0, \quad m_{rrr}^{(1)}(a) = 0, \quad t_r^{(2)}(b) = 0, \quad m_{rrr}^{(2)}(b) = 0 \quad (7)$$

и условия сопряжения при $r = r_0$

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r_0) &= u^{(2)}(r_0), \quad \frac{du^{(1)}}{dr}(r_0) = \frac{du^{(2)}}{dr}(r_0), \\ t_r^{(1)}(r_0) &= t_r^{(2)}(r_0), \quad m_{rrr}^{(1)}(r_0) = m_{rrr}^{(2)}(r_0). \end{aligned} \quad (8)$$

Обратим внимание, что граничные условия (7) и условия сопряжения (8) записываются не относительно радиальных напряжений Коши $\tau_{rr}^{(i)}$ или полных напряжений $\sigma_{rr}^{(i)}$, $i=1,2$, а относительно выражений $t_r^{(i)}$, $i=1,2$, которые в градиентной теории являются определением вектора напряжений на поверхности тела.

Обезразмерим задачу (6)–(8) согласно формулам:

$$\xi = \frac{r}{b}, \quad U^{(i)} = \frac{u^{(i)}}{b}, \quad \Omega_{rr}^{(i)} = \frac{\sigma_{rr}^{(i)}}{\mu_0}, \quad \Omega_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\mu_0}, \quad S_{rr}^{(i)} = \frac{\tau_{rr}^{(i)}}{\mu_0},$$

$$S_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{\tau_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\mu_0}, \quad M_{rrr}^{(i)} = \frac{m_{rrr}^{(i)}}{\mu_0 b}, \quad M_{\varphi\varphi r} = \frac{m_{\varphi\varphi r}}{\mu_0 b}, \quad M_{r\varphi\varphi} = \frac{m_{r\varphi\varphi}}{\mu_0 b},$$

$$\bar{t}_r = \frac{t_r}{\mu_0}, \quad P = \frac{p_0}{\mu_0}, \quad \bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\mu_0}, \quad \bar{\mu}_i = \frac{\mu_i}{\mu_0}, \quad \bar{\gamma}_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_0}, \quad R_0 = \frac{r_0}{b},$$

$$\alpha = \frac{l}{b}, \quad \bar{a} = \frac{a}{b}, \quad \mu_0 = \max_{r \in [a,b]} \mu(r), \quad \gamma_0 = \max_{r \in [a,b]} \gamma(r), \quad i=1,2.$$

Тогда постановка обезразмеренной задачи (6)–(8) примет вид:

$$\frac{d\Omega_{rr}^{(i)}}{d\xi} + \frac{\Omega_{rr}^{(i)} - \Omega_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\xi} = 0, \quad i=1,2, \quad (9)$$

$$\bar{t}_r(\bar{a}) = P, \quad M_{rrr}^{(1)}(\bar{a}) = 0, \quad \bar{t}_r(1) = 0, \quad M_{rrr}^{(2)}(1) = 0, \quad (10)$$

$$U^{(1)}(R_0) = U^{(2)}(R_0), \quad \frac{dU^{(1)}}{d\xi}(R_0) = \frac{dU^{(2)}}{d\xi}(R_0),$$

$$\bar{t}_r^{(1)}(R_0) = \bar{t}_r^{(2)}(R_0), \quad M_{rrr}^{(1)}(R_0) = M_{rrr}^{(2)}(R_0). \quad (11)$$

2. Решение задачи градиентной термоупругости для составного цилиндра

Решение задачи несвязанной термоупругости начинается с нахождения радиального распределения температуры слоистого цилиндра на основе решения задачи теплопроводности в классической постановке:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT^{(i)}}{dr} \right) = 0, \quad i=1,2, \quad (12)$$

$$T^{(1)}(a) = 0, \quad T^{(2)}(b) = T_0, \quad (13)$$

$$T^{(1)}(r_0) = T^{(2)}(r_0), \quad k_1 \frac{dT^{(1)}}{dr}(r_0) = k_2 \frac{dT^{(2)}}{dr}(r_0). \quad (14)$$

Обезразмерим задачу (12)–(14) согласно формулам:

$$W^{(i)} = \frac{\gamma_0 T^{(i)}}{\mu_0}, \quad \beta_0 = \frac{\gamma_0 T_0}{\mu_0}, \quad \bar{k}_i = \frac{k_i}{k_0}, \quad k_0 = \max_{r \in [a,b]} k(r), \quad i=1,2.$$

Постановка задачи теплопроводности в безразмерном виде примет вид:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dW^{(i)}}{d\xi} \right) = 0, \quad i=1,2, \quad (15)$$

$$W^{(1)}(\bar{a}) = 0, \quad W^{(2)}(1) = \beta_0, \quad (16)$$

$$W^{(1)}(R_0) = W^{(2)}(R_0), \quad \bar{k}_1 \frac{dW^{(1)}}{d\xi}(R_0) = \bar{k}_2 \frac{dW^{(2)}}{d\xi}(R_0). \quad (17)$$

Решение задачи теплопроводности (15)–(17) имеет вид:

$$W^{(1)} = \beta_0 \frac{\bar{k}_2 \ln \frac{\xi}{\bar{a}}}{\bar{k}_2 \ln \frac{R_0}{\bar{a}} - \bar{k}_1 \ln R_0},$$

$$W^{(2)} = \beta_0 \frac{\bar{k}_1 \ln \frac{\xi}{R_0} + \bar{k}_2 \ln \frac{R_0}{\bar{a}}}{\bar{k}_2 \ln \frac{R_0}{\bar{a}} - \bar{k}_1 \ln R_0}. \quad (18)$$

После нахождения распределения температуры далее определяют радиальные перемещения. Для этого уравнения равновесия (9) выразим в перемещениях:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dU^{(i)}}{d\xi} - \frac{1}{\xi^2} U^{(i)} - \\ & - \alpha^2 \left(\frac{d^4 U^{(i)}}{d\xi^4} + \frac{2}{\xi} \frac{d^3 U^{(i)}}{d\xi^3} - \frac{3}{\xi^2} \frac{d^2 U^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{3}{\xi^3} \frac{dU^{(i)}}{d\xi} - \frac{3}{\xi^4} U^{(i)} \right) = \\ & = \beta_0 \frac{\bar{\gamma}_i}{\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i} \frac{d}{d\xi} \left(W^{(i)} - \alpha^2 \left(\frac{d^2 W^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dW^{(i)}}{d\xi} - \frac{1}{\xi^2} W^{(i)} \right) \right), \\ & i = 1, 2. \end{aligned} \quad (19)$$

Представим решение задачи в перемещениях согласно Айфантису [6] в виде суммы решения задачи термоупругости в классической постановке $U_{clas}^{(i)}$ и дополнительных градиентных слагаемых $U_{grad}^{(i)}$, т.е. $U^{(i)} = U_{clas}^{(i)} + U_{grad}^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Полагая в (19) $\alpha = 0$, получим уравнения равновесия в классической постановке:

$$\frac{d^2 U_{clas}^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dU_{clas}^{(i)}}{d\xi} - \frac{1}{\xi^2} U_{clas}^{(i)} = \beta_0 \frac{\bar{\gamma}_i}{\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i} \frac{dW^{(i)}}{d\xi}, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Интегрируя уравнения (20), выражения для радиальных перемещений цилиндра и покрытия получим в виде:

$$\begin{aligned} U_{clas}^{(1)}(\xi) &= G_1 \xi + \frac{G_2}{\xi} + \beta_0 \frac{\bar{\gamma}_1}{(\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1)\xi} \int_{\bar{a}}^{\xi} \rho W^{(1)}(\rho) d\rho, \quad (21) \\ U_{clas}^{(2)}(\xi) &= G_3 \xi + \frac{G_4}{\xi} + \beta_0 \frac{\bar{\gamma}_2}{(\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2)\xi} \int_{R_0}^{\xi} \rho W^{(2)}(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Здесь константы G_1, G_2, G_3, G_4 находят путем удовлетворения классических граничных условий, полагая в (10), (11) $\alpha = 0$.

В случае механического нагружения цилиндра константы G_1, G_2, G_3, G_4 , найденные с помощью системы Maple, полагая в (21) $\beta_0 = 0$, после некоторых преобразований примут вид:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\left(\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (1 + R_0^2) + \bar{\mu}_1 \bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2 (\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) (R_0^2 - 1) \right)}{2Q} \bar{a}^2 P, \\ G_3 &= \frac{\bar{\mu}_2 (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1) R_0^2}{2Q} \bar{a}^2 P, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 &= \\ &= \frac{\bar{\mu}_2 \left((\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1) (1 + R_0^2) + (\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) (1 - R_0^2) \right) + \bar{\lambda}_2 (\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1)}{2Q} \bar{a}^2 R_0^2 P, \\ G_4 &= \frac{(\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1)}{2S} \bar{a}^2 R_0^2 P, \\ Q &= (\bar{\mu}_1 + \bar{\lambda}_1) (\bar{\mu}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) \bar{\mu}_2 (\bar{a}^2 - 1) (R_0^2 - 1) + \\ &+ (\bar{\lambda}_1 \bar{\mu}_2 (\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) - \bar{\mu}_1 \bar{\lambda}_2 (\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1)) (R_0^2 - 1) - \\ &- (\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\mu}_2) \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (R_0^4 - 1) + \\ &+ (\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2) (\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1) \bar{\mu}_1 (\bar{a}^2 - 1). \end{aligned}$$

Выражения для констант G_1, G_2, G_3, G_4 при тепловом нагружении, найденных с помощью системы Maple, полагая в граничном условии (10) $P = 0$, имеют громоздкий вид и здесь не приводятся.

Перейдем к нахождению градиентных слагаемых $U_{grad}^{(i)}$. При $\alpha \neq 0$ уравнение (19) можно записать в виде:

$$\frac{d^2 U^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dU^{(i)}}{d\xi} - \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right) U^{(i)} = -\frac{1}{\alpha^2} U_{clas}^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Однородная часть уравнений (22) – модифицированные уравнения Бесселя первого порядка. Тогда решение однородных уравнений (22) для цилиндра и покрытия имеет вид:

$$\begin{aligned} U_{grad}^{(1)}(\xi) &= G_5 I_1 \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) + G_6 K_1 \left(\frac{\xi}{\alpha} \right), \\ U_{grad}^{(2)}(\xi) &= G_7 I_1 \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) + G_8 K_1 \left(\frac{\xi}{\alpha} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где $I_1 \left(\frac{\xi}{\alpha} \right), K_1 \left(\frac{\xi}{\alpha} \right)$ – модифицированные функции

Бесселя первого и второго рода первого порядка. Далее составляют выражения для перемещений $U^{(i)} = U_{clas}^{(i)} + U_{grad}^{(i)}$, $i = 1, 2$, градиентов радиальных перемещений, напряжений Коши $S_{rr}^{(i)} = (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \frac{dU^{(i)}}{d\xi} +$

$$+ \bar{\lambda}_i \frac{U^{(i)}}{\xi} - \beta_0 \bar{\gamma}_i W^{(i)}, \quad S_{\varphi\varphi}^{(i)} = (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \frac{U^{(i)}}{\xi} + \bar{\lambda}_i \frac{dU^{(i)}}{d\xi} - \beta_0 \bar{\gamma}_i W^{(i)},$$

и моментных напряжений, которые содержат неизвестные G_5, G_6, G_7, G_8 . Константы G_5, G_6, G_7, G_8 определяют путем удовлетворения неклассических граничных условий $M_{rr}^{(1)}(\bar{a}) = 0, M_{rr}^{(2)}(1) = 0$ и условий сопряжения $\frac{dU_1}{d\xi}(R_0) = \frac{dU_2}{d\xi}(R_0), M_{rr}^{(1)}(R_0) = M_{rr}^{(2)}(R_0)$.

В работе были получены точные аналитические решения, которые имеют громоздкий вид, здесь не приводятся, а далее используются для оценки точности решения приближенного аналитического решения.

Получим приближенные асимптотические выражения для $U_{grad}^{(i)}$, $i=1,2$ при малом значении параметра α , которые имеют погранслоный характер. При $\alpha \rightarrow 0$ аргументы модифицированных функций Бесселя, входящих в формулы (23), стремятся к бесконечности, и можно воспользоваться соответствующими асимптотиками [35]: $I_1(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$, $K_1(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{x}}e^{-x}$ при $x \rightarrow \infty$.

Точные аналитические решения с использованием формул (23) показали, что для слоистого цилиндра пограничные слои локализованы в окрестностях поверхностей $\xi = \bar{a}$, $\xi = R_0$ и $\xi = 1$. Поэтому в силу быстрого убывания погранслоных решений в окрестностях поверхностей $\xi = \bar{a}$, $\xi = R_0$ и $\xi = 1$ представим градиентные слагаемые для перемещений цилиндра и покрытия в виде:

$$U_{grad}^{(1)}(\xi) \approx \frac{C_1}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\bar{a}-\xi}{\alpha}} + \frac{D_1}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi-R_0}{\alpha}},$$

$$U_{grad}^{(2)}(\xi) \approx \frac{C_2}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{R_0-\xi}{\alpha}} + \frac{D_2}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi-1}{\alpha}}. \quad (24)$$

Входящие в формулы (24) константы C_1, D_1, C_2, D_2 определяют путем удовлетворения неклассических граничных условий для моментных напряжений и условий сопряжения для моментных напряжений и градиентов радиальных перемещений аналогично использованию формулы (23).

В случае механического нагружения цилиндра константы C_1, D_1, C_2, D_2 , найденные с помощью системы Maple, после некоторых преобразований примут вид:

$$C_1 = -2\alpha^2 R_0^2 P \bar{\mu}_1 \cdot \frac{\bar{\mu}_2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) (R_0^2 - 1) + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1) (\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2)}{\sqrt{\bar{a}} (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1) Q},$$

$$D_1 = C_2 = -\alpha P \bar{a}^2 \sqrt{R_0} \cdot \frac{(\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2) (\bar{\mu}_2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) (R_0^2 - 1) + \bar{\lambda}_1 \bar{\mu}_2 - \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_1)}{(\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1 + \bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2) Q},$$

$$D_2 = 2\alpha^2 R_0^2 P \bar{\mu}_2 \bar{a}^2 \frac{(\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1)}{(\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2) Q}.$$

В случае теплового нагружения цилиндра константы $C_1, D_1 = C_2, D_2$ имеют громоздкий вид и здесь не приводятся.

После нахождения перемещений далее определяют деформации, напряжения Коши, моментные и полные напряжения. При этом выражения для полных напряжений в безразмерном виде имеют вид:

$$\Omega_{rr}^{(i)} = S_{rr}^{(i)} - \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi M_{rr}^{(i)}) + \frac{1}{\xi} (M_{\varphi\varphi}^{(i)} + M_{r\varphi\varphi}^{(i)}),$$

$$\Omega_{\varphi\varphi}^{(i)} = S_{\varphi\varphi}^{(i)} - \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi M_{\varphi\varphi}^{(i)}) - \frac{1}{\xi} (M_{\varphi\varphi}^{(i)} + M_{r\varphi\varphi}^{(i)}), \quad i=1,2.$$

3. Результаты расчетов

Рассмотрим результаты вычисления распределения по координате ξ безразмерных перемещений, напряжений Коши, моментных и полных напряжений в случае как механического, так и теплового нагружения цилиндра. Исследовано влияние величины градиентного параметра α на точность вычисления безразмерных перемещений слоистого цилиндра с использованием для вычисления градиентных слагаемых асимптотических формул (24). При этом в точном решении для вычисления градиентных слагаемых используются формулы (23). Выяснено, что погрешность вычисления перемещений по асимптотическим формулам (24) не превосходит 2 % при $\alpha \leq 0,03$.

Для случая механического нагружения составного цилиндра примем, что покрытие расположено на внутренней поверхности цилиндра. При этом в расчетах полагаем $\beta_0 = 0, P = -1, \bar{a} = 0,6, R_0 = 0,7, \bar{\lambda}_1 = 1, \bar{\mu}_1 = 0,8, \bar{\lambda}_2 = 0,5, \bar{\mu}_2 = 0,4$.

Для случая теплового нагружения составного цилиндра примем, что покрытие расположено на внешней поверхности цилиндра. При этом в расчетах полагаем $\beta_0 = 1, P = 0, \bar{a} = 0,6, R_0 = 0,9, \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 1, \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0,8, \bar{\gamma}_1 = 0,7, \bar{\gamma}_2 = 1, \bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2 = 0,2$.

На рис. 1 показано распределение радиальных напряжений Коши S_{rr} в случае механического (см. рис. 1, а) и теплового нагружения (см. рис. 1, б) при $\alpha = 0,01$.

Из рис. 1 следует, что радиальные напряжения Коши на границе сопряжения терпят разрыв, что связано с разностью термомеханических характеристик и непрерывностью перемещений и их первых производных на поверхности сопряжения.

На рис. 2 показано распределение по координате ξ моментных напряжений M_{rr} в случае механического (см. рис. 2, а) и теплового нагружения (см. рис. 2, б) при $\alpha = 0,01$.

Из рис. 2 следует, что моментные напряжения M_{rr} при $\alpha = 0,01$ в сотни раз меньше напряжений Коши S_{rr} и принимают пиковое значение на поверхности сопряжения $\xi = R_0$. Моментные напряжения пропорциональны квадрату градиентного параметра.

На рисунках ниже показано распределение безразмерных функций вдоль координаты ξ . При этом сплошной линией изображено решение задачи на основе классической постановки при $\alpha = 0$, пунктиром – решение задачи в градиентной постановке при $\alpha = 0,03$.

На рис. 3 показано распределение радиальных перемещений в случае механического (см. рис. 3, а) и теплового нагружения (см. рис. 3, б).

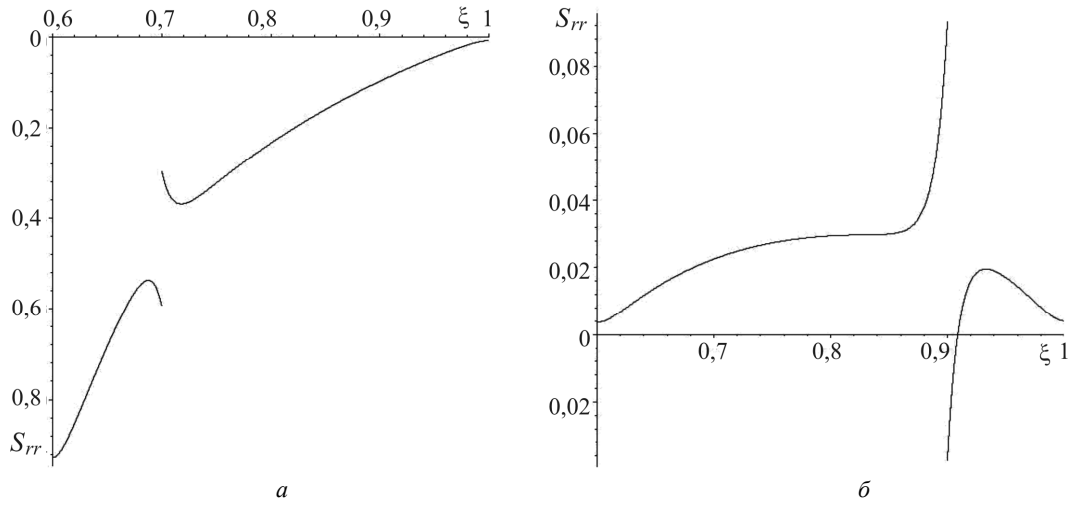


Рис. 1. Распределение по координате ξ напряжений Коши S_{rr} при (а) механическом нагружении, (б) тепловом нагружении
 Fig. 1. Distribution of Cauchy stresses S_{rr} along the coordinate ξ under (a) mechanical loading, (b) thermal loading

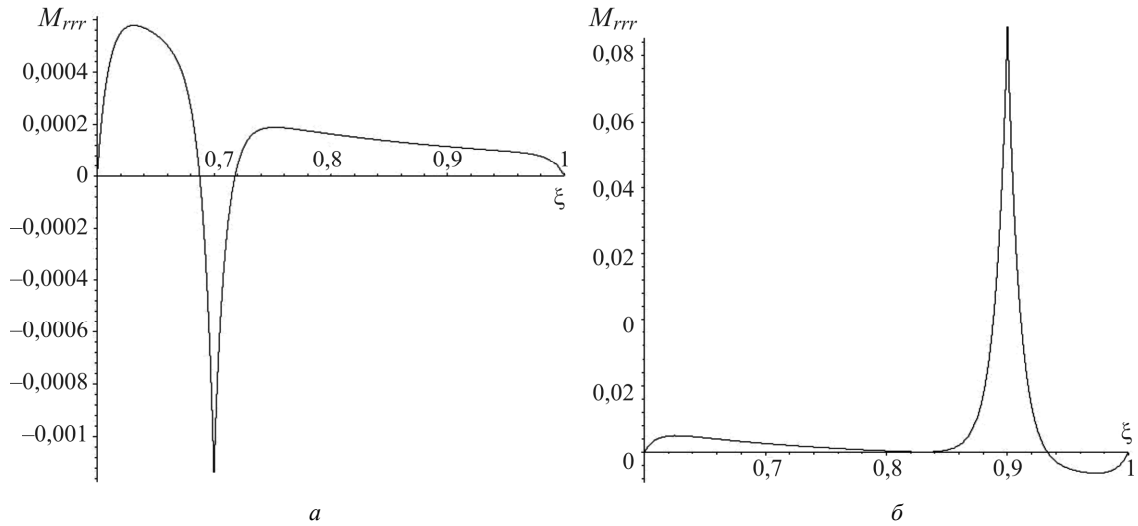


Рис. 2. Распределение по координате ξ моментных напряжений M_{rrr} при (а) механическом нагружении, (б) тепловом нагружении
 Fig. 2. Distribution of moment stresses M_{rrr} along the coordinate ξ under (a) mechanical loading, (b) thermal loading

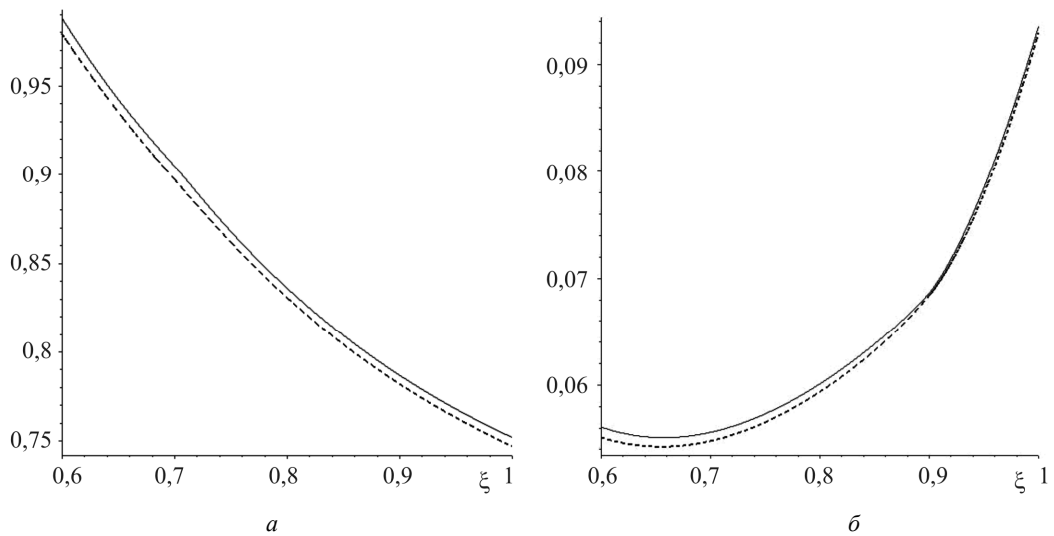


Рис. 3. Распределение по координате ξ радиальных перемещений при (а) механическом нагружении, (б) тепловом нагружении
 Fig. 3. Distribution of radial displacements along the coordinate ξ under (a) mechanical loading, (b) thermal loading

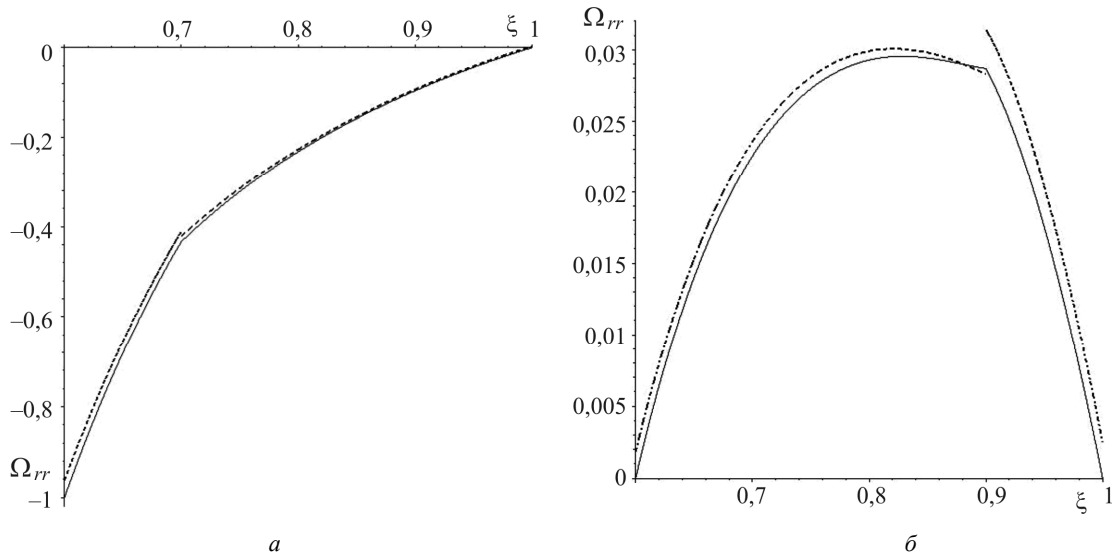


Рис. 4. Распределение по координате ξ полных радиальных напряжений при (а) механическом нагружении, (б) тепловом нагружении

Fig. 4. Distribution of total radial stresses along the coordinate ξ under (a) mechanical loading, (b) thermal loading

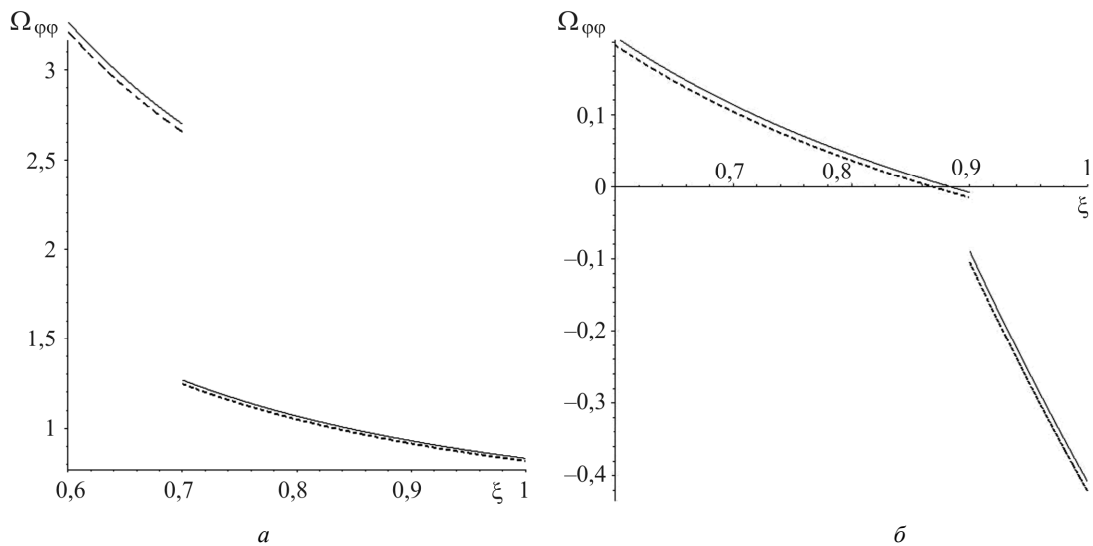


Рис. 5. Распределение по координате ξ полных окружных напряжений при (а) механическом нагружении, (б) тепловом нагружении

Fig. 5. Distribution of total circumferential stresses along the coordinate ξ under (a) mechanical loading, (b) thermal loading

Из рис. 3 следует, что с увеличением масштабного параметра уменьшаются значения радиальных перемещений.

На рис. 4 показано распределение по координате ξ полных радиальных напряжений в случае механического (см. рис. 4, а) и теплового нагружения (см. рис. 4, б).

Из рис. 4 следует, что полные радиальные напряжения Ω_{rr} увеличиваются с ростом α ; терпят разрыв на поверхности раздела, что связано с тем, что при $\xi = R_0$ выполняется непрерывность неполных радиальных напряжений, а компонент вектора \bar{l}_r .

На рис. 5 показано распределение по координате ξ полных окружных напряжений $\Omega_{\phi\phi}$ в случае механического (см. рис. 5, а) и теплового нагружения (см. рис. 5, б).

Из рис. 5 следует, что полные окружные напряжения, как и в классической теории упругости, терпят раз-

рыв при $\xi = R_0$, обусловленный разностью термомеханических характеристик цилиндра и покрытия; с увеличением масштабного параметра α значения полных окружных напряжений уменьшаются.

Заключение

На основе вариационного принципа Лагранжа получены уравнения равновесия и граничные условия для составного полого термоупругого цилиндра с учетом масштабных эффектов. После нахождения радиального распределения температуры решение задачи для перемещений представлено в виде суммы решений в классической постановке задачи и градиентных слагаемых, найденных при малых значениях градиентного параметра на основе асимптотических свойств модифицированных функций Бесселя. Проведено вычис-

ление НДС составного цилиндра как при механическом, так и при тепловом нагружении. Осуществлен сравнительный анализ полученных результатов градиентного решения с классическим решением. Скачок напряжений Коши в окрестности поверхности сопряжения материалов объясняется непрерывностью деформаций и их градиентов. Полные радиальные напряжения также терпят разрыв на поверхности сопряжения. Выяснено, что увеличение градиентного параметра снижает значения радиальных перемещений и полных окружных напряжений. Моментные напря-

жения при малых значениях градиентного параметра намного меньше полных напряжений и принимают пиковое значение на поверхности сопряжения. Уточнение НДС полого термоупругого цилиндра с покрытием с учетом масштабных эффектов позволяет более точно проводить расчеты на прочность слоистого микроцилиндра. Разработанный подход может быть применен также и для нахождения асимптотического решения задачи градиентной термоупругости для слоистого цилиндра конечного размера при малых значениях градиентного параметра.

Библиографический список

- McFarland A.W., Colton J.S. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors // *Micromech. Microeng.* – 2005. – Vol. 15, № 5. – P. 1060–1067. DOI: 10.1088/0960-1317/15/5/024
- Experiments and theory in strain gradient elasticity // D.C.C. Lam, F. Yang, A.C.M. Chong, J. Wang, P. Tong // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2003. – Vol. 51, № 8. – P. 1477–1508. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X
- Peddieson J., Buchanan G.R., McNitt R.P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology // *Int. J. Eng. Sci.* – 2003. – Vol. 41, № 3. – P. 305–312. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00210-0
- Malikan M. Buckling analysis of a micro composite plate with nano coating based on the modified couple stress theory // *J. Appl. Comput. Mech.* – 2018. – Vol. 4, № 1. – P. 1–15. DOI: 10.22055/JACM.2017.21820.1117
- Mohammad Abadi M., Daneshmehr A.R. An investigation of modified couple stress theory in buckling analysis of micro composite laminated Euler-Bernoulli and Timoshenko beams // *Int. J. Eng. Sci.* – 2014. – Vol. 75. – P. 40–53. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2013.11.009
- Askes H., Aifantis E.C. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – Vol. 48. – P. 1962–1990. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006
- Toupin R.A. Elastic materials with couple stresses // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1962. – Vol. 11. – P. 385–414. DOI: 10.1007/BF00253945
- Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1964. – Vol. 16. – P. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490
- Mindlin R.D., Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 1968. – Vol. 4. – P. 109–124.
- Mindlin R.D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 1965. – Vol. 1. – P. 417–438. DOI: 10.1016/0020-7683(65)90006-5
- Ahmadi G., Firoozbakhsh K. First strain gradient theory of thermoelasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 1975. – Vol. 11. – P. 339–345.
- Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation techniques // X. Li, B. Bhushan, K. Takashima, C.W. Baek, Y.K. Kim // *Ultramicroscopy.* – 2003. – Vol. 97, № 1. – P. 481–494. DOI: 10.1016/S0304-3991(03)00077-9.
- Лурье М.В. Задачи Ламе в градиентной теории упругости // *Докл. АН СССР.* – 1968. – Т. 181, № 5. – С. 1087–1089.
- Лурье С.А., Соляев Ю.О. Определение параметров градиентной теории упругости по потенциалам межатомного взаимодействия, учитывающим модифицированное правило Лоренца – Бергло // *Физическая мезомеханика.* – 2016. – Т. 19. – С. 39–46.
- Ru C.Q., Aifantis E.C. A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity // *Acta Mech.* – 1993. – Vol. 101. – P. 59–68. DOI: 10.1007/BF01175597
- Altan B.S., Aifantis E.C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity // *J. Mech. Behav. Mater.* – 1997. – Vol. 8, № 3. – P. 231–282. DOI: 10.1515/JMBM.1997.8.3.231
- Aifantis K., Askes H. Gradient elasticity with interfaces as surfaces of discontinuity for the strain gradient // *J. Mech. Behav. Mater.* – 2007. – Vol. 18. – P. 283–306. DOI: 10.1515/JMBM.2007.18.4.283
- Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales // *J. Mech. Behav. Mater.* – 1994. – Vol. 5, № 3. – P. 335–353. DOI: 10.1515/jmbm.1994.5.3.355
- Масштабные эффекты в механике сплошных сред. Материалы с микро- и наноструктур / С.А. Лурье, П.А. Белов, Л.Н. Рабинский, С.И. Жаворонок. – М.: Изд-во МАИ, 2011. – 160 с.
- Gao X.L., Park S.K. Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem // *Int. J. Solids Struct.* – 2007. – Vol. 44, № (22–23). – P. 7486–7499. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.04.022
- Aravas N. Plane-Strain Problems for a Class of Gradient Elasticity Models – A Stress Function Approach // *J. Elast.* – 2011. – Vol. 104. – P. 45–70. DOI: 10.1007/s10659-011-9308-7
- Papargyri-Beskou S., Tsinopoulos S. Lamé's strain potential method for plane gradient elasticity problems // *Arch. Appl. Mech.* – 2015. – Vol. 85, № 9–10. – P. 1399–1419. DOI: 10.1007/s00419-014-0964-5
- Chu L., Dui G. Exact solutions for functionally graded micro-cylinders in first gradient elasticity // *Int. J. Mech. Sci.* – 2018. – Vol. 148. – P. 366–373. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.09.011
- Sadeghi H., Baghani M., Naghdabadi R. Strain gradient thermoelasticity of functionally graded cylinders // *Scientia Iranica B.* – 2014. – Vol. 21, № 4. – P. 1415–1423.
- Hosseini M., Dini A., Eftekhari M. Strain gradient effects on the thermoelastic analysis of a functionally graded micro-rotating cylinder using generalized differential quadrature method // *Acta Mech.* – 2017. – Vol. 228, № 5. – P. 1563–1580. DOI: 10.1007/s00707-016-1780-5
- Sburlati R. Analytical elastic solutions for pressurized hollow cylinders with internal functionally graded coatings // *Compos. Struct.* – 2012. – Vol. 94, № 12. – P. 3592–600. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.05.018
- Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R. Regarding some thermoelastic models of «coating – substrate» system deformation // *Continuum Mech Thermodyn.* – 2020. – Vol. 32, № 4. – P. 1173–1186. DOI: 10.1007/s00161-019-00824-9

28. Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости для слоя / С.А. Лурье [и др.] // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2013. – Т. 1. – С. 161–181.

29. A size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory / A. Li, S. Zhou, S. Zhou, B. Wang // *Compos. Struct.* – 2014a. – Vol. 108. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.09.020.

30. Guangyang F., Shenjuie Z., Lu Q. The size-dependent static bending of a partially covered laminated microbeam // *Int. J. Mech. Sci.* – 2019. – Vol. 152. – P. 411–419. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037

31. Sidhardh S., Ray M.C. Exact solution for size-dependent elastic response in laminated beams considering generalized first strain gradient elasticity // *Compos. Struct.* – 2018. – Vol. 204. – P. 31–42. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.07.030

References

1. McFarland A.W., Colton J.S. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors. *Micromech. Microeng.*, 2005, vol. 15, no. 5, pp. 1060-1067. DOI: 10.1088/0960-1317/15/5/024

2. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 2003, vol. 51, no. 8, pp. 1477-1508. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X

3. Peddieson J., Buchanan G.R., McNitt R.P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *Int. J. Eng. Sci.*, 2003, vol. 41, no. 3, pp. 305-312. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00210-0

4. Malikan M. Buckling analysis of a micro composite plate with nano coating based on the modified couple stress theory. *J. Appl. Comput. Mech.*, 2018, vol. 4, no. 1, pp. 1-15. DOI: 10.22055/JACM.2017.21820.1117

5. Mohammad Abadi M., Daneshmehr A.R. An investigation of modified couple stress theory in buckling analysis of micro composite laminated Euler-Bernoulli and Timoshenko beams. *Int J Eng Sci.*, 2014, vol. 75, pp. 40-53. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2013.11.009

6. Askes H., Aifantis E.C. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *Int. J. Solids Struct.*, 2011, vol. 48, pp. 1962-1990. DOI: 10.1016/j.jisols.2011.03.006

7. Toupin R.A. Elastic materials with couple stresses. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1962, vol. 11, pp. 385-414. DOI: 10.1007/BF00253945

8. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964, vol. 16, pp. 51-78. DOI: 10.1007/BF00248490

9. Mindlin R.D., Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 1968, vol. 4, pp. 109-124.

10. Mindlin R.D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 1965, vol. 1, pp. 417-438. DOI: 10.1016/0020-7683(65)90006-5

11. Ahmadi G., Firozabakhsh K. First strain gradient theory of thermoelasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 1975, vol. 11, pp. 339-345.

12. Li X., Bhushan B., Takashima K., Baek C.W., Kim Y.K. Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation techniques. *Ultra-microscopy*, 2003, vol. 97, no. 1, pp. 481-494. DOI: 10.1016/S0304-3991(03)00077-9.

13. Lur'ye M.V. Zadachi Lamé v gradiyentnoy teorii uprugosti [Lamé Problems in the Gradient Theory of Elasticity]. *Reports of Academy of Sciences of the USSR*, 1968, vol. 181,

32. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2021. – Т. 163, кн. 2. – С. 181–196. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196

33. Лурье С.А., Фам Тьонг., Соляев Ю.О. Градиентная модель термоупругости и ее приложения к моделированию тонкослойных композитных структур // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 440–449.

34. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity // *Materials Physics Mechanics*. – 2020. – Vol. 46. – P. 27–41. DOI: 10.18149/MPM.4612020_3

35. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

no. 5, pp. 1087-1089. available at: www.mathnet.ru/links/f0a53c069b8b8b28e80e2ab0cab95f97/dan34051.pdf

14. Lurie S.A., Solyaev Yu.O. Opredeleniye parametrov gradiyentnoy teorii uprugosti po potentsialam mezhatomnogo vzaimodeystviya, uchityvayushchim modifitsirovannoye pravilo Lorentsa-Bertlo [Determination of the parameters of the gradient theory of elasticity from the interatomic interaction potentials taking into account the modified Lorentz-Berthelot rule]. *Physical Mesomechanics*, 2016, vol. 19, pp. 39-46.

15. Ru C.Q., Aifantis E.C. A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity. *Acta Mech.*, 1993, vol. 101, pp. 59-68. DOI: 10.1007/BF01175597

16. Altan B.S., Aifantis E.C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity. *J. Mech. Behav. Mater.*, 1997, vol. 8, no. 3, pp. 231-282. DOI: 10.1515/JMBM.1997.8.3.231

17. Aifantis K., Askes H. Gradient elasticity with interfaces as surfaces of discontinuity for the strain gradient. *J. Mech. Behav. Mater.*, 2007, vol. 18, pp. 283-306. DOI: 10.1515/JMBM.2007.18.4.283

18. Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales. *J. Mech. Behav. Mater.*, 1994, vol. 5, no. 3, pp. 335-353. DOI: 10.1515/jmbm.1994.5.3.355

19. Lurie S.A., Belov P.A et al. Masshtabnyye efekty v mekhanike sploshnykh sred. Materialy s mikro- i nanostruktur [Scale effects in continuum mechanics. Materials from micro-and nanostructures]. Moscow, MAI Publishing House, 2011, 160 p.

20. Gao X.L., Park S.K. Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem. *Int. J. Solids Struct.*, 2007, vol. 44, no. 22-23, pp. 7486-7499. DOI: 10.1016/j.jisols.2007.04.022

21. Aravas N. Plane-Strain Problems for a Class of Gradient Elasticity Models – A Stress Function Approach. *J. Elast.*, 2011, vol. 104, pp. 45-70. DOI: 10.1007/s10659-011-9308-7

22. Papargyri-Beskou S., Tsinopoulos S. Lamé's strain potential method for plane gradient elasticity problems. *Arch. Appl. Mech.*, 2015, vol. 85 (9-10), pp. 1399-1419. DOI: 10.1007/s00419-014-0964-5

23. Chu L., Dui G. Exact solutions for functionally graded micro-cylinders in first gradient elasticity. *Int. J. Mech. Sci.*, 2018, vol. 148, pp. 366-373. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.09.011

24. Sadeghi H., Baghani M., Naghdabadi R. Strain gradient thermoelasticity of functionally graded cylinders. *Scientia Iranica B.*, 2014, vol. 21 (4), pp. 1415-1423.

25. Hosseini M., Dini A., Eftekhari M. Strain gradient effects on the thermoelastic analysis of a functionally graded micro-rotating cylinder using generalized differential quadra-

ture method. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 5, pp. 1563-1580. DOI: 10.1007/s00707-016-1780-5

26. Sburlati R. Analytical elastic solutions for pressurized hollow cylinders with internal functionally graded coatings. *Compos. Struct.*, 2012, vol. 94, no. 12, pp. 3592-3600. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.05.018

27. Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R. Regarding some thermoelastic models of «coating-substrate» system deformation. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2020, vol. 32, no. 4, pp. 1173-1186. DOI: 10.1007/s00161-019-00824-9

28. Lurie S.A., Solyaev Y.O., Rabinsky L.N., Kondratova U.N., Volov M.I. Simulation of the stress-strain state of thin composite coating based on solutions of the plane problem of strain-gradient elasticity for layer. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, vol. 1, pp. 161-181.

29. Li A., Zhou S., Zhou S., Wang B. A size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory. *Compos. Struct.*, 2014a, vol. 108. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.09.020.

30. Guangyang F., Shenjuie Z., Lu Q. The size-dependent static bending of a partially covered laminated microbeam. *Int. J. Mech. Sci.*, 2019, vol. 152, pp. 411-419. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037

31. Sidhardh S., Ray M.C. Exact solution for size-dependent elastic response in laminated beams considering generalized first strain gradient elasticity. *Compos. Struct.*, 2018, vol. 204, pp. 31-42. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.07.030

32. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Solution of the problem of gradient thermoelasticity for a coated strip. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 2, pp. 181–196. doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196 (In Russian)

33. Lurie S.A., Pham T., Soliaev J.O. Gradient model of thermoelasticity and its application for the modeling of thin layered composite structures. *Journal of composite mechanics and design*, 2012, vol. 18, no. 3, pp. 440-449.

34. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity. *Materials Physics Mechanics*, 2020, vol. 46, pp. 27-41. DOI: 10.18149/MPM.4612020_3

35. Abramovitz M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam* [Handbook of special functions]. Moscow, Nauka, 1979, 832 p.

Финансирование. Благодарность. Работа выполнена при поддержке Южного математического института – филиала ВНИИ РАН, Владикавказ.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Funding. Acknowledgment. This work was supported by the Southern Mathematical Institute, a branch of the All-Russian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.