



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.14

УДК 539.3; 620.171.2

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ АВТОВОЛНОВОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Л.Б. Зуев, С.А. Баранникова, В.В. Горбатенко

Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, Томск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 25 июня 2021 г.  
Принята: 25 декабря 2021 г.  
Опубликована: 30 декабря 2021 г.

#### Ключевые слова:

пластичность, деформация, упругость, дефекты, кристаллическая решетка, автоволны, структура, металлы.

### АННОТАЦИЯ

Показано, что пластическое течение в кристаллических твердых телах всегда развивается локализованным образом. Данная локализация характеризуется макроскопическим масштабом  $\sim 10^{-2}$  м. При этом возникающий паттерн локализованной пластичности является проекцией автоволновых процессов локализованной деформации, развивающихся в объеме, на наблюдаемую поверхность образца. Паттерн может наблюдаться с помощью методики спекл-фотографии. Исследования материалов разного сорта позволили установить, что паттерн локализованной деформации, можно рассматривать как источник информации о кинетике развития процессов формоизменения. Общей характеристикой локализованного пластического течения является упругопластический инвариант деформации, который связывает типичные характеристики автоволн локализованного пластического течения с характеристиками упругих волн в кристаллической решетке. Величина инвариантного соотношения определена для почти сорока разных материалов (ОЦК, ГЦК, ГПУ металлов и сплавов, щелочно-галогидных кристаллов, керамики, горных пород), исследованных в условиях активного нагружения при сжатии и растяжении, а также в интервале температур от 143 до 420 К. В работе рассмотрены физические соображения, объясняющие возникновение и смысл инвариантного соотношения, и обсуждена его количественная связь с другими физическими характеристиками кристаллической решетки, в частности с температурой Дебая. Рассмотрены также многочисленные следствия из упругопластического инварианта. Установлено, что совокупность этих следствий фактически охватывает и правильно описывает все главные закономерности процесса развитого пластического течения, что позволяет рассматривать упругопластический инвариант деформации как основное уравнение развиваемого в настоящее время автоволнового подхода к физической теории пластической деформации.

© ПНИПУ

© Зуев Лев Борисович – д.ф.-м.н., проф., зав. лаб., e-mail: lbz@ispms.tsc.ru, iD: 0000-0003-3991-0207.

Баранникова Светлана Александровна – д.ф.-м.н., в.н.с., e-mail: bsa@ispms.tsc.ru, iD: 0000-0001-5010-9969.

Горбатенко Вадим Владимирович – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: gvv@ispms.tsc.ru, iD: 0000-0001-6464-6159.

Lev B. Zuev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Laboratory, e-mail: lbz@ispms.tsc.ru, iD: 0000-0003-3991-0207.

Svetlana A. Barannikova – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: bsa@ispms.tsc.ru, iD: 0000-0001-5010-9969.

Vadim V. Gorbatenko – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: gvv@ispms.tsc.ru, iD: 0000-0001-6464-6159.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## ELASTIC-PLASTIC INVARIANT OF AUTOWAVE PLASTICITY

L.B. Zuev, S.A. Barannikova, V.V. Gorbatenko

Institute of Strength Physics and Materials Science, SB RAS, Tomsk, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 25 June 2021  
 Accepted: 25 December 2021  
 Published: 30 December 2021

## Keywords:

plasticity, deformation, elasticity, defects, crystal lattice, autowaves, structure, metals.

## ABSTRACT

It is shown in the work that plastic flow in solids develops always in localized manner. A macroscopic scale  $\sim 10^{-2}$  m characterizes the localization. The localized flow zones form the pattern of localized strain, which is the projection of the autowave processes of plastic flow, developing in the volume, on the observed surface of the tested specimen. One can observe the pattern with the help of speckle-photography method. The investigations of various materials allowed to establish that the pattern of localized deformation is the information source for a kinetics of deformation processes. A general characteristic of localized plastic flow in solids is the elastic-plastic invariant of deformation which couples the typical characteristics of localized plastic flow autowaves with the same for the elastic waves in crystal lattice. The quantity of the invariant ratio is defined for nearly forty various materials (BCC, FCC, HCP metals and alloys, alkali-halide crystals, ceramics, rocks) studied in the conditions of active elongation and compression at the temperature range 143–420 K. The physical considerations are presented to explain the invariant origination and its relation to other physical characteristics of crystal lattice, in particular, the Debye temperature. In the light of these considerations, it is possible to explain the meaning and the origin of the invariant, and to derive numerous consequences from them. In fact, the set of these consequences comprehend all the regularities of developed plastic flow processes and allows to consider the elastic-plastic invariant of deformation as the master equation for developing this day autowave approach to physical theory of plastic deformation.

© PNRPU

### Введение. Пластическое течение и автоволновые процессы

Начиная с 30-х гг. XX в. и практически до наших дней жизнеспособные методы описания пластичности традиционно базируются на теории дислокаций [1, 2]. К сожалению, многочисленные дислокационные модели, развитые за это время, не привели к созданию строгой и полной физической теории пластичности твердых тел. Это породило обоснованные сомнения в надежности методического обеспечения дислокационных исследований – электронно-микроскопического анализа тонких металлических фольг. На фоне недостаточности дислокационных моделей начали развиваться подходы, инициированные предложением Зегера и Франка [3] рассматривать *рост плотности дислокаций при деформации как процесс образования структуры*.

Развивая эту мысль и полагая вслед за Хакеном [4], что *система считается самоорганизующейся, если она без специфического воздействия извне обретает какую-то пространственную, временную или функциональную структуру*, некоторые исследователи пришли к заключению о возможности самоорганизации дефектной структуры при пластическом течении. Тогда же Николис и Пригожин, ясно заявив о *невозможности исследовать пластичность на чисто механической основе*, предложили *рассматривать ее как часть общей проблематики нелинейных динамических систем, работающих вдали от равновесия* [5]. Тем самым они открыли заманчивые перспективы для применения понятия и формального аппаратов теории неравновес-

ных систем (синергетики) в создании и развитии новой механики деформируемого твердого тела.

В рамках этого направления в физике пластичности стал формироваться тренд к изучению коллективных эффектов пластического течения в среде со структурными дефектами и наметился прогресс в понимании сложных аспектов пластического течения. Так, плодотворная концепция многомасштабности феномена пластичности (физическая мезомеханика материалов) [6] позволила успешно понять и объяснить ряд проблем деформируемого твердого тела. В наших работах [7–9] было показано, что пластическая деформация всегда развивается макроскопически локализовано, а картины ее локализации на разных этапах пластического течения принимают форму *автоволновых процессов* разных типов. Автоволны являются решениями системы (параболических) реакционно-диффузионных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = f(\varepsilon) + D_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon'', \\ \dot{\sigma} = g(\sigma) + D_{\sigma\sigma} \sigma'' \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

для деформаций  $\varepsilon$  и напряжений  $\sigma$  соответственно. Здесь  $D$  – коэффициенты переноса, а  $f(\varepsilon)$  и  $g(\sigma)$  –  $N$ -образные функции. Автоволновые эффекты при пластической деформации наблюдались и обсуждались также в работах [10–20].

Существование автоволн локализации пластического течения доказано с помощью специально модифицированной для этих целей методики спекл-фотографии [7], позволяющей определять поле векторов смещения в деформируемом образце и рассчитывать на этом осно-

вании компоненты тензора пластической дисторсии. В ходе экспериментов было установлено, что локализация пластического течения проявляется и наблюдается как самопроизвольное расслоение деформируемой среды на макроскопические деформирующиеся в данный момент и недеформирующиеся объемы (очаги), чередующиеся в пространстве образца. Совокупность этих объемов формирует эволюционирующую макроскопическую автоволновую картину локализованной деформации – *паттерн локализованной пластичности*.

Сопоставление наблюдаемых паттернов локализованного пластического течения со стадиями деформационного упрочнения [8] указало на взаимно однозначное соответствие между этими характеристиками процесса. Это соответствие не зависит от сорта материала и конкретных деталей механизмов деформационного упрочнения и, по-видимому, определяется только формой зависимости коэффициента деформационного упрочнения от общей деформации  $\theta(\varepsilon)$ .

При деформации на площадке текучести наблюдается движение одиночного очага локализованной пластичности, известного как полоса Людерса. На ее фронте упругая среда переводится в пластичное состояние с другими механическими свойствами, структурой и механизмами деформирования. По этой причине деформация за счет движения фронта локализованной пластической деформации есть аналог явлений, характерных для автоволны переключения в активной среде [4]. Периодические деформационные процессы, наблюдаемые на стадиях линейного деформационного упрочнения и легкого скольжения, представляют собой типичные фазовые автоволны локализованного пластического течения, характеризующиеся длиной  $\lambda \approx 10^{-2}$  м и скоростью распространения, обратно пропорциональной коэффициенту деформационного упрочнения  $V_{aw} = V_0 + \Xi / \theta$ ; их закон дисперсии имеет вид  $\omega \sim 1 + k^2$ . В этих соотношениях  $V_0$  и  $\Xi$  – константы,  $\omega$  – частота,  $k = 2\pi / \lambda$  – волновое число. При таких режимах одни и те же объемы материала могут многократно возбуждаться через временной интервал – время рефрактерности, определяемый микроскопическими свойствами среды. На стадии параболического деформационного упрочнения формируется система эквидистантно расположенных неподвижных очагов локализованной пластической деформации, которая может интерпретироваться как стационарная диссипативная структура. Пространственный период неподвижных распределений очагов  $\lambda$  примерно такой же, как и длина автоволны на стадии линейного деформационного упрочнения. По существу, на этой стадии в образце существует совокупность слабо выраженных шеек, из которых впоследствии развивается только одна. На стадии предразрушения, следующей после параболического упрочнения, очаги деформации снова становятся подвижными, но характер процесса на этом этапе сложнее по сравнению с тем, который на-

блюдается на стадии линейного деформационного упрочнения. На этой стадии зависимости положений очагов локализованной деформации от времени – прямолинейны и при экстраполяции сходятся в одной точке, образуя пучки прямых. Подобная ситуация может рассматриваться как коллапс автоволнового процесса развития локализованной пластичности, завершающийся образованием шейки разрушения. Скорости движения отдельных очагов на этой стадии процесса различны, но остаются постоянными, то есть они с самого начала стадии предразрушения взаимно согласуются.

В новом подходе были сделаны попытки учесть, что пластическая деформация протекает в *открытой* системе, так как образец при испытании получает энергию от источника (испытательной машины) и возвращает ее часть в сток. Учитывались также *нелинейность* деформируемой среды, следующая из сложной формы зависимости напряжения от деформации  $\sigma(\varepsilon)$ , и ее *активность* и *неравновесность*, связанные с наличием распределенных по объему локальных источников потенциальной энергии – упругих полей возникающих и релаксирующих концентраторов напряжений [4].

Основным предметом настоящей статьи является анализ роли макроскопических эффектов пластической деформации в развитии процесса течения и выяснение их функциональной связи с решеточными характеристиками деформируемой среды на стадиях линейного деформационного упрочнения.

## 1. Упругопластический инвариант автоволновой пластичности

В соответствии с представлениями, сформулированными в исследовании [7], будем рассматривать деформацию твердого тела как результат взаимодействия упругой и пластической компонент, каждая из которых контролируется процессами, протекающими на соответствующих масштабах. Можно полагать, что развитие локализованной пластической деформации характеризуется экспериментально определяемыми длиной автоволны  $\lambda$  и соответствующей ей скоростью  $V_{aw}$ . Для упругой деформации такими характеристиками могут служить значения межплоскостного расстояния  $\chi$  и скорости поперечных ультразвуковых колебаний  $V_s$ , определяемые из справочной литературы.

### 1.1. Введение упругопластического инварианта деформации

Нетрудно заметить, что отношения пространственных и скоростных масштабов пластического и упругого деформационных процессов  $\lambda / \chi \approx V_s / V_{aw} \approx 10^7$  имеют один порядок величины. Будем рассматривать в качестве характеристик этих процессов произведения  $\lambda V_{aw}$  и  $\chi V_s$  с размерностью кинематической вязкости  $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ , совпадающей с размерностью коэффициентов  $D_{\varepsilon\varepsilon}$  и  $D_{\sigma\sigma}$  в уравнениях (1) и (2).

Экспериментальные данные, представленные на рис. 1, показывают, что произведение  $\lambda V_{aw}$ , характеризующее автоволну локализованной пластичности на стадии линейного деформационного упрочнения, сложным образом зависит от свойств деформируемой среды. В меньшей степени это относится к величине  $\chi V_t$ . Так, на рис. 1, а, представлена экспоненциальная зависимость  $\lambda V_{aw}$  от плотности исследуемых металлов, из которой видно, что величина  $\lambda V_{aw}$  различна для легких и тяжелых металлов. На рис. 1, б, в логарифмических координатах представлены линейные зависимости  $\lambda V_{aw}$  и модуля сдвига от плотности металлов; данные рис. 1, в, г, указывают на осциллирующий характер величин  $\chi V_t$  и  $\lambda V_{aw}$  по мере роста атомного номера  $Z$  Периодической системы элементов. Осцилляции коррелируют с аналогичным поведением ряда других независимо определяемых решеточных характеристик, таких, например, как характеристический параметр Дебая  $\theta_D$ . Представляется важным рассмотреть отношение величин  $\lambda V_{aw}$  и  $\chi V_t$  для большого числа мате-

риалов. База для обобщения такого рода данных приведена в табл. 1, в которой использованы уточненные и дополненные экспериментальные данные из работ [7–9].

На основании этих данных удалось ввести безразмерное отношение

$$\left\langle \frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t} \right\rangle = \hat{Z} = 0,46 \pm 0,03 \approx \frac{1}{2}, \quad (3)$$

далее называемое **упругопластическим инвариантом деформации**, который количественно связывает характеристики упругих волн ( $\chi$  и  $V_t$ ) с характеристиками автоволн локализации пластической деформации ( $\lambda$  и  $V_{aw}$ ). Произведения  $\chi V_t$  и  $\lambda V_{aw}$  представляют собой инварианты упругих и пластических деформационных процессов, одновременно идущих в деформируемой среде, а установленное соотношение (3) отражает взаимосвязь малых упругих и больших пластических деформаций. Графическая интерпретация обсуждаемых данных дана на рис. 2.

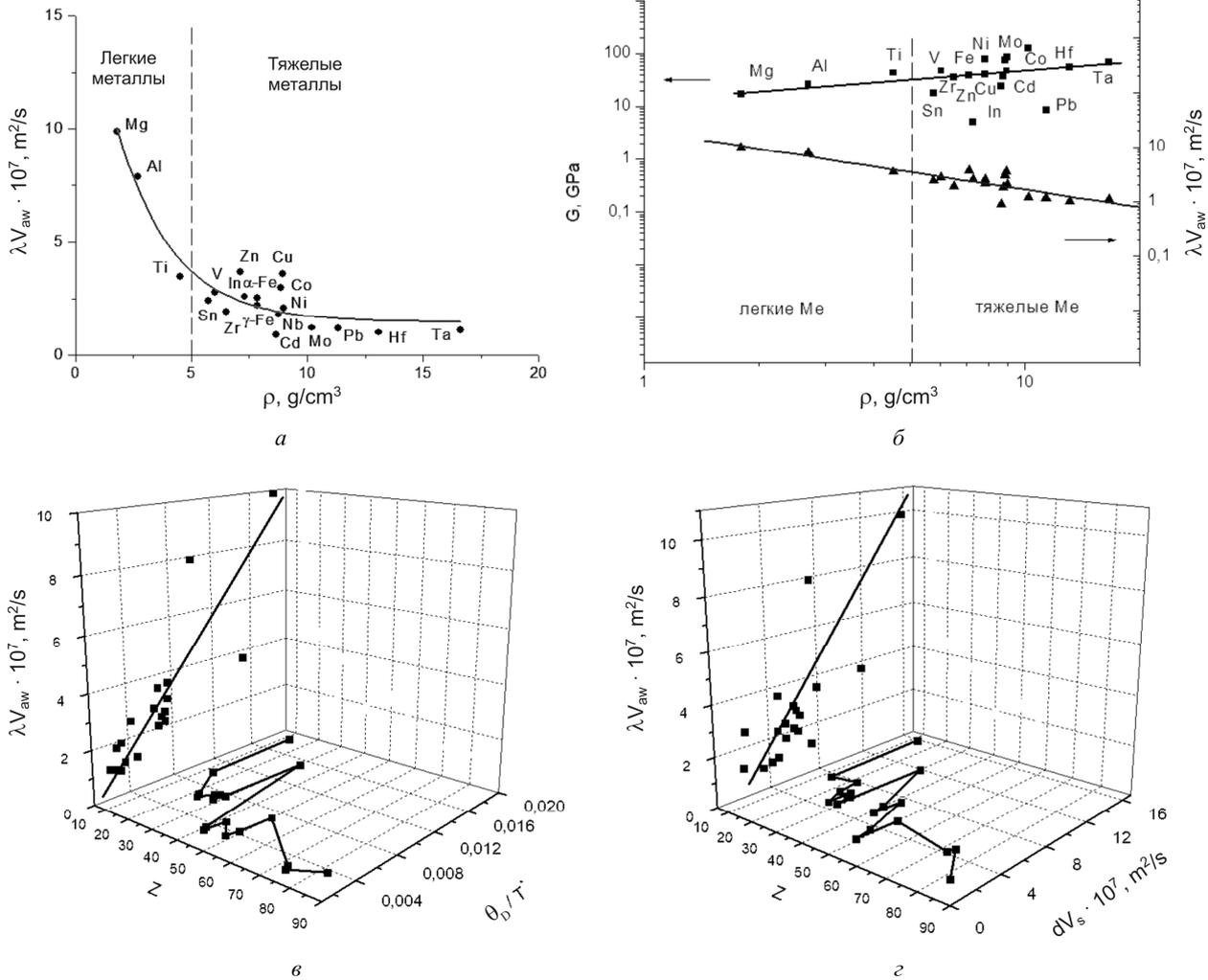


Рис. 1. Зависимости величины  $\lambda V_{aw}$  и модуля сдвига  $G$  от плотности (а, б), температуры и атомного номера  $Z$  (в); связь произведений  $\lambda V_{aw}$  и  $\chi V_t$  с атомным номером  $Z$  (г)

Fig. 1. Dependences of the magnitude  $\lambda V_{aw}$  and shear modulus  $G$  on the density (а, б), temperature and atomic number  $Z$  (в); connection of products  $\lambda V_{aw}$  and  $\chi V_t$  with  $Z$  (г)

Таблица 1

Условия испытаний при определении характеристик автоволновой пластичности

Table 1

Test conditions for determining the characteristics of autowave plasticity

| Вид испытания, исследованный материал                                  | Число измерений |
|------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| Растяжение металлических образцов (линейное деформационное упрочнение) | 24              |
| Растяжение металлических образцов (легкое скольжение)                  | 5               |
| Сжатие щелочно-галогидных монокристаллов                               | 3               |
| Сжатие горных пород                                                    | 2               |
| Пробеги индивидуальных дислокаций                                      | 4               |

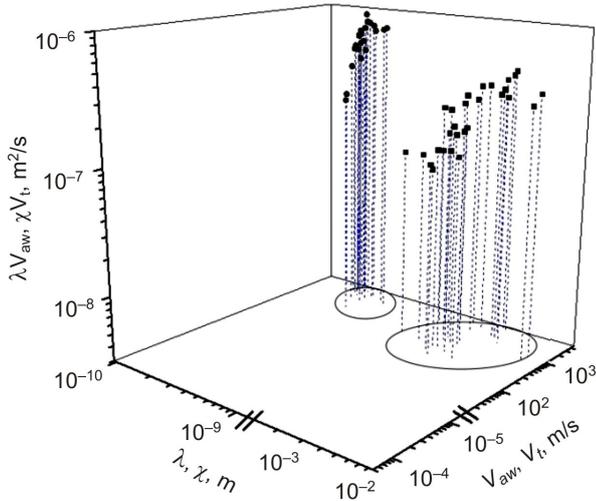


Рис. 2. Сравнение произведений  $\lambda V_{aw}$  и  $\chi V_t$ , входящих в упругопластический инвариант (3)

Fig. 2. Comparison of the products and included in the elastoplastic invariant (3)

Экспериментальные значения величины  $\hat{Z}$  из соотношения (3) были подвергнуты статистическому анализу для проверки типа распределения по методике, описанной в [21]. Для этой цели полученные данные были преобразованы в вариационный ряд. В качестве нулевой гипотезы было использовано предположение о нормальности распределения величины  $\hat{Z}$ . Это предположение проверено с помощью критерия Колмогорова – Смирнова с применением программы Statistica.

Значение стандартного нормального распределения  $z_j$  для  $j$ -го ранга переменной с  $N = 38$  наблюдениями вычислялось как  $z_j = F^{-1}[(3j-1)/(3N+1)]$ , где  $F^{-1}$  – обратная функция стандартного нормального распределения, преобразующая нормальную вероятность  $p$  в нормальное значение  $z$ .

Из рис. 3 следует, что распределение величины  $\hat{Z}$  действительно нормальное и характеризуется следующими параметрами:  $\hat{Z}_{\min} = 0,2$ ,  $\hat{Z}_{\max} = 1,1$ , дисперсия  $\sigma^2 = 0,04$ .

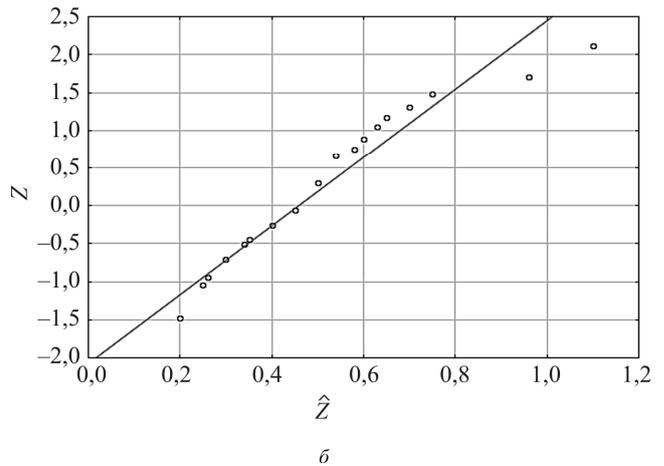
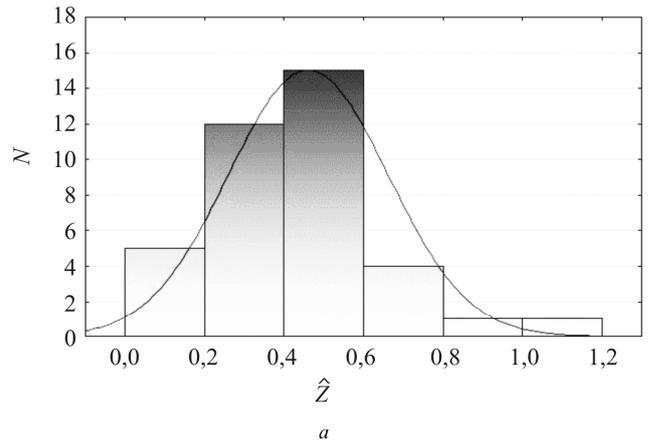


Рис. 3. Нормальное распределение:  $N$  – число наблюдений,  $\hat{Z}$  – значения инварианта (а); нормальный вероятностный график:  $Z$  – значения стандартного нормального распределения,  $\hat{Z}$  – значения инварианта (б)

Fig. 3. Normal distribution:  $N$  – number of observations,  $\hat{Z}$  – values of invariant (a); normal probability plot:  $Z$  – values of the standard normal distribution,  $\hat{Z}$  – values of the invariant (b)

## 1.2. Упругопластический инвариант и характеристики среды

Обсуждая физический смысл инварианта (3), желательно найти его связь с другими решеточными характеристиками деформируемых сред. В качестве первого шага можно использовать известные соотношения для модуля сдвига  $G \approx \chi^{-1} \cdot d^2W/du^2$  и скорости  $V_t^2 \approx G/\rho \approx \chi^2 \omega_D^2$ , где  $W$  – межчастичный потенциал,  $u$  – малое смещение,  $\rho$  – плотность среды, а  $\omega_D$  – дебаевская частота [22]. В этом случае

$$\lambda V_{aw} \approx \hat{Z} \cdot \frac{d^2W/du^2}{(\omega_D \chi) \rho} \approx \hat{Z} \frac{d^2W/du^2}{\xi_1}, \quad (4)$$

причем  $\xi_1 = (\omega_D \chi) \rho = V_t \rho$  есть акустическое сопротивление среды.

Инвариант (3), записанный как

$$\frac{\lambda}{V_t} \approx \hat{Z} \cdot \frac{\chi}{V_{aw}} \approx \hat{Z} \vartheta \approx 10^{-5} \text{ с}, \quad (5)$$

указывает на равенство характерных времен развития упругих и пластических актов деформации  $\vartheta$ . Полагая, что пластическая деформация развивается термически активированным образом [1, 2], запишем  $\vartheta \approx \omega_D^{-1} \exp(U/k_B T)$ , где  $k_B$  – постоянная Больцмана, а  $U$  – энергия активации. Оценка для  $T = 300$  К дает  $U \approx 0,5$  эВ, что типично для ряда элементарных актов пластического течения [1, 2].

Наконец, записав уравнение (3) в виде  $\lambda V_{aw} = \hat{Z} \chi V_t = \hat{Z} \chi^2 \omega_D$  и применив соотношение  $k_B \theta_D = \hbar \omega_D \approx \hbar (V_t / \chi)$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка, а  $\theta_D$  – дебаевская температура, получим

$$\lambda V_{aw} \approx \hat{Z} \chi V_t \approx \hat{Z} \chi^2 \frac{k_B \theta_D}{\hbar} \approx \hat{Z} \frac{k_B}{\hbar} \chi^2 \theta_D(T), \quad (6)$$

откуда следует температурная зависимость характеристики локализации пластического течения  $\lambda V_{aw}$  через температурную зависимость температуры Дебая  $\theta_D(T)$  [22]. Соотношение (6) качественно правильно описывает экспериментально наблюдаемый температурный ход автоволновых характеристик [23].

Определенная универсальность упругопластического инварианта деформации (3) и его связь с решеточными характеристиками деформируемой среды возводит его в ранг важной закономерности локализованного пластического течения.

### 1.3. Физический смысл упругопластического инварианта

Главный вопрос, который возникает при обсуждении автоволновых процессов локализованной пластичности, касается причин порождения макроскопического масштаба  $\lambda \approx 10^{-2}$  м в системе, в которой исходно существуют только микроскопические масштабы  $\chi \approx b \approx 10^{-10}$  м [24]. Учтем, что, согласно [3, 7], локализация пластической деформации есть результат самоорганизации (структурообразования) в активной деформируемой среде, содержащей структурные дефекты. Признаком самоорганизации в открытой системе, какой является деформируемый образец, служит уменьшение энтропии [4, 5]. Поэтому анализ энтропии при описании процессов локализации пластической деформации вполне обоснован.

Используем представление о том, что в основе пластического течения лежат согласованные пространственно-временные процессы трансформации полей напряжений  $\sigma(x, y, t)$  и пластических деформаций  $\varepsilon(x, y, t)$  [1, 2], когда релаксация локальных напряжений вызывает деформацию, а изменение последней инициирует перестройку поля напряжений и создание новых концентраторов. Это утверждение соответствует флуктуационно-диссипационной теореме [25], в применении к эффекту пластичности. Согласно этому положению, механизм

любой диссипации (дислокационное скольжение) является одновременно механизмом рождения флуктуаций (концентраторов напряжений). Кинетика трансформационных процессов определяется скоростями  $V_t$  для упругого поля и  $V_{aw} \ll V_t$  для поля пластических деформаций. Скорости и пространственные масштабы соответствующих полей  $\chi$  и  $\lambda \gg \chi$  входят в уравнение инварианта (3), которое, будучи записано в виде

$$\frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t} = \frac{\lambda / \chi}{V_t / V_{aw}} = \hat{Z} < 1, \quad (7)$$

сводит инвариант к отношению масштабных  $\lambda / \chi$  и кинетических  $V_t / V_{aw}$  характеристик процесса. Первое отношение имеет смысл числа возможных мест зарождения автоволны локализованной пластической деформации, а второе определяет выбор скорости автоволны из интервала возможных значений  $0 \leq V_{aw} \leq V_t$ .

Отношениям  $\lambda / \chi$  и  $V_t / V_{aw}$  разумно придать смысл термодинамических вероятностей [25]. В таком случае, логарифмируя уравнение (7) и получая

$$\ln \frac{\lambda}{\chi} - \ln \frac{V_t}{V_{aw}} < 0, \quad (8)$$

можно с помощью формулы Больцмана оценить изменение энтропии при генерации автоволны за счет масштабного и кинетического факторов, то есть,

$$\Delta S = k_B \ln \frac{\lambda}{\chi} - k_B \ln \frac{V_t}{V_{aw}} = \Delta S_{scale} - \Delta S_{kin} < 0. \quad (9)$$

Здесь  $\Delta S_{scale} = k_B \ln \lambda / \chi$  – масштабный, а  $\Delta S_{kin} = k_B \ln V_t / V_{aw}$  – кинетический вклады в энтропию деформационного процесса. Условие  $\Delta S < 0$  отражает требование уменьшения энтропии при формировании автоволн локализации пластического течения. Для его выполнения необходимо, чтобы вклады  $\Delta S_{scale}$  и  $\Delta S_{kin}$ , характеризующие в уравнении (9) автоволновой процесс пластической деформации, входили в него с разными знаками.

Тогда из уравнений (8) и (9) следует

$$\ln \hat{Z} = \ln \frac{\lambda}{\chi} - \ln \frac{V_t}{V_{aw}} = \frac{\Delta S}{k_B} < 0 \quad (10)$$

и, соответственно,

$$\hat{Z} = \exp\left(\frac{\Delta S}{k_B}\right) \approx \frac{1}{2}, \quad (11)$$

а  $\Delta S = k_B \ln 1/2 \approx -0,7 k_B$ , то есть условие самоорганизации  $\Delta S < 0$  выполнимо только при  $\hat{Z} < 1$ .

Другое объяснение природы инварианта основано на анализе микроскопических механизмов трансформации упругого и пластического полей, которые реали-

зуются смещениями элементов среды  $u$ . Считая отклонение деформируемой системы от равновесия малым, представим скорости смещений как линейные функции градиентов пластических и упругих деформаций  $\dot{u}_{pl}^{(p)} \approx D_{\varepsilon\varepsilon} \nabla \varepsilon_{pl}$  и  $\dot{u}_{el}^{(p)} \approx D_{\sigma\sigma} \nabla \varepsilon_{el}$ . Здесь из соображений размерности принято, что  $\lambda V_{aw} \equiv D_{\varepsilon\varepsilon}$  и  $\chi V_t \equiv D_{\sigma\sigma}$ . Нелинейность деформируемой среды порождает также дополнительные скорости  $\dot{u}_{el}^{(ad)} \approx D_{\varepsilon\sigma} \nabla \varepsilon_{pl}$  и  $\dot{u}_{pl}^{(ad)} \approx D_{\sigma\varepsilon} \nabla \varepsilon_{el}$ .

В результате система уравнений для пластической и упругой компонент скоростей смещений в деформируемой среде приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{u}_{pl} = D_{\varepsilon\varepsilon} \nabla \varepsilon + D_{\varepsilon\sigma} \nabla \varepsilon_{el}, \\ \dot{u}_{el} = D_{\sigma\varepsilon} \nabla \varepsilon_{pl} + D_{\sigma\sigma} \nabla \varepsilon. \end{cases} \quad (12)$$

$$\quad (13)$$

Коэффициенты уравнений (12) и (13) системы образуют матрицу

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{\varepsilon\varepsilon} & D_{\varepsilon\sigma} \\ D_{\sigma\varepsilon} & D_{\sigma\sigma} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

в которой, согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов Онзагера [15], недиагональные элементы равны, то есть  $D_{\varepsilon\sigma} = D_{\sigma\varepsilon}$ . Это ведет к равенству  $D_{\varepsilon\varepsilon} / D_{\sigma\sigma} \approx 1$  или  $\lambda V_{aw} / \chi V_t \approx 1$ , фактически объясняя инвариант (3). Однако диагональные элементы матрицы (24)  $D_{\varepsilon\varepsilon}$  и  $D_{\sigma\sigma}$ , выполняющие роль коэффициентов автоволновых уравнений локализованной пластичности (1) и (2), не обязаны быть равными, то есть  $D_{\varepsilon\varepsilon} \ll D_{\sigma\sigma}$  [7].

Наконец, структура уравнения для инварианта (3) указывает на определенную аналогию между ним и числом Рейнольдса, характеризующим режимы ламинарного и турбулентного течения [26]:

$$\text{Re} = \frac{lV}{\nu} = \frac{\rho lV}{\mu}, \quad (15)$$

где  $l$  – пространственный масштаб потока,  $V$  – его скорость,  $\rho$  – плотность,  $\nu$  – кинематическая, а  $\mu$  – динамическая вязкость среды. Если для пластического течения принять, что  $l \equiv \lambda$ ,  $V \equiv V_{aw}$  и  $\nu \equiv \chi V_t$ , то формально выражение (15) совпадает с инвариантом (3). Это совпадение позволяет сделать важное заключение. Как известно, скорость движения дислокаций в поле напряжений  $V_{disl} = b\sigma/B$  определяется вязкостью фононного газа (в металлах фононного и электронного)  $B$  [27], причем  $\chi V_t \sim \mu \sim B$ .

В таком случае возникает возможность анализа температурной зависимости критерия Рейнольдса и, соответственно, инварианта (3) на основе зависимости  $B(T)$ , приведенной в [27]. Как показывает экспериментальное сравнение, в интервале температур 143 до 420 К значения зависимостей  $\lambda V_{aw}(T)$  и  $B(T)$  изменяются почти в одинаковой степени [23], так что выполняется отношение  $\lambda V_{aw} / \chi V_t \approx \text{const}$ . Это можно рассматри-

вать как указание на температурную независимость упругопластического инварианта (3).

## 2. Следствия из упругопластического инварианта деформации

Из инвариантного соотношения (3) вытекают многие важные положения, касающиеся экспериментально установленных закономерностей развития локализованного пластического течения в материалах разного сорта. Убедимся в этом, последовательно рассмотрев эти следствия.

### 2.1. Скорость распространения автоволн

Дифференцирование инварианта (3) по деформации  $\varepsilon$  дает

$$\frac{d}{d\varepsilon} (\lambda V_{aw}) = \lambda \frac{dV_{aw}}{d\varepsilon} + V_{aw} \frac{d\lambda}{d\varepsilon} = \hat{Z} \cdot \chi \frac{dV_t}{d\varepsilon} + \hat{Z} \cdot V_t \frac{d\chi}{d\varepsilon}. \quad (16)$$

В таком случае

$$V_{aw} = \left( \frac{d\lambda}{d\varepsilon} \right)^{-1} \left( \hat{Z} \cdot \chi \frac{dV_t}{d\varepsilon} + \hat{Z} \cdot V_t \frac{d\chi}{d\varepsilon} - \lambda \frac{dV_{aw}}{d\varepsilon} \right), \quad (17)$$

где величина  $\chi$  не зависит от пластической деформации, так что  $\hat{Z} \cdot V_t \cdot d\chi/d\varepsilon = 0$ . Тогда

$$V_{aw} = \hat{Z} \chi \cdot \frac{dV_t}{d\lambda} - \lambda \cdot \frac{dV_{aw}}{d\lambda}. \quad (18)$$

Простые преобразования приводят к уравнению

$$V_{aw} = \hat{Z} \chi \cdot \frac{dV_t}{d\lambda} - \chi \cdot \frac{dV_{aw}}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\chi} \approx V_0 + \frac{\Xi}{\theta}, \quad (19)$$

аналогичному ранее экспериментально полученной в исследовании [7] зависимости, если положить, что коэффициент деформационного упрочнения есть отношение двух структурных параметров  $\lambda$  и  $\chi \ll \lambda$ , то есть  $\theta \approx \chi/\lambda$ .

### 2.2. Дисперсия автоволн локализованной пластичности

Запишем уравнение инварианта (3) относительно скорости автоволны

$$V_{aw} = \frac{\Theta}{\lambda} = \frac{\Theta}{2\pi} k, \quad (20)$$

введя обозначение  $\Theta = \hat{Z} \chi V_t$ . Если  $V_{aw} = d\lambda/dT = d\omega/dk$ , то  $d\omega = (\Theta/2\pi) k dk$ . В этом случае

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \frac{\Theta}{2\pi} \int_0^{k-k_0} k dk. \quad (21)$$

Таким образом, закон дисперсии автоволн локализованного пластического течения приобретает квадратичную форму

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{\Theta}{4\pi}(k - k_0)^2, \quad (22)$$

существование которой ранее было установлено экспериментально [7] и которая характерна для автоволновых процессов в нелинейных системах разного типа [4].

Придав далее уравнению (3) форму

$$V_{aw}(k) \approx \chi^2 \frac{k_B \theta_D}{\hbar} \cdot \frac{1}{\lambda} \approx \chi^2 \frac{k_B \theta_D}{\hbar} \cdot k \approx \zeta \cdot k, \quad (23)$$

можно вычислить коэффициент  $\zeta = \chi^2 k_B \theta_D / \hbar \approx \chi^2 \omega_D$ , используя межплоскостные расстояния  $\chi$  и значения температуры Дебая  $\theta_D^{(Fe)} = 420$  К и  $\theta_D^{(Al)} = 394$  К из работы [22]. Согласно расчетам  $\zeta^{(Fe)} \approx 3,7 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с, а  $\zeta^{(Al)} \approx 4,45 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с, что согласуется с оцененными из экспериментальных данных о зависимости  $V_{aw}(k)$  [8] значениями  $\zeta^{(Fe)} = (1,0 \pm 0,08) \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с и  $\zeta^{(Al)} = (12,9 \pm 0,15) \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с.

### 2.3. Влияние размера зерна на длину автоволны локализованной пластичности

Запишем инвариант (3) в форме

$$\lambda = \hat{Z} \chi \cdot \frac{V_t}{V_{aw}} \quad (24)$$

и примем во внимание, что скорости  $V_t$  и  $V_{aw}$  могут зависеть от размера зерна  $\delta$  [7]. В таком случае дифференцирование соотношения (24) по  $\delta$  дает

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\delta} &= \hat{Z} \chi \cdot \frac{d}{d\delta} \left( \frac{V_t}{V_{aw}} \right) = \\ &= \hat{Z} \chi \cdot \left( \frac{V_{aw} \cdot dV_t/d\delta - V_t \cdot dV_{aw}/d\delta}{V_{aw}^2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Преобразование уравнения (25) приводит к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} d\lambda &= \hat{Z} \chi \cdot \left( \frac{dV_t}{d\delta} \cdot \frac{1}{V_{aw}} - V_t \frac{dV_{aw}}{d\delta} \cdot \frac{1}{V_{aw}^2} \right) \cdot d\delta = \\ &= (a_1 \lambda - a_2 \lambda^2) \cdot d\delta, \end{aligned} \quad (26)$$

коэффициенты которого  $a_1 = \frac{1}{V_t} \cdot \frac{dV_t}{d\delta} = \frac{d \ln V_t}{d\delta}$  и

$a_2 = \frac{1}{\hat{Z} \chi V_t} \cdot \frac{dV_{aw}}{d\delta}$ , поскольку  $V_{aw} = \hat{Z} \chi V_t \cdot \lambda^{-1}$ . Его решением является логистическая функция [28]

$$\lambda(\delta) = \lambda_0 + \frac{a_1/a_2}{1 + C \exp(-a_1 \delta)}, \quad (27)$$

где  $\lambda_0 = \text{const}$ , а  $C$  – постоянная интегрирования. Зависимость  $\lambda(\delta)$  экспериментально получена в исследовании [7] для размеров зерна  $5 \cdot 10^{-3} \leq \delta \leq 15$  мм в алюминии.

### 2.4. Масштабный эффект

Если экспериментальные исследования проводятся на образцах разной длины  $L$ , то с учетом инварианта (3) можно формально записать производную

$$\frac{d}{dL}(\lambda V_{aw}) = \frac{d\lambda}{dL} V_{aw} + \lambda \frac{dV_{aw}}{dL} = \hat{Z} \frac{d}{dL}(\chi V_t) = 0, \quad (28)$$

поскольку, очевидно, что  $d(\chi V_t)/dL = 0$ . Тогда

$$\frac{d\lambda}{dL} = -\frac{\lambda}{V_{aw}} \frac{dV_{aw}}{dL}. \quad (29)$$

Если  $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$  и  $\frac{dV_{aw}}{dL} \approx \frac{V_{aw}}{L}$ , то  $\frac{d\lambda}{dL} \approx \frac{\lambda_0}{V_{aw}} \cdot \frac{V_{aw}}{L}$ ,

то есть  $d\lambda = \lambda_0 dL/L$  и  $\lambda \sim \ln L$ , как установлено экспериментально для поликристаллического Al и сплава на основе Zr [29].

### 2.5. Инвариант и автоволновое уравнение

Запишем уравнение инварианта (3) в виде

$$\chi/\lambda = \hat{Z}(V_{aw}/V_t) \quad (30)$$

и будем считать, что  $\varepsilon \approx \lambda/\chi \gg 1$  – пластическая деформация. Применив оператор  $\partial/\partial t = D_{\varepsilon\varepsilon} \cdot \partial^2/\partial x^2$  и действуя им на левую и правую части этого уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \hat{Z} D_{\varepsilon\varepsilon} \left( -V_t \cdot \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} + V_{aw}^{-1} \cdot \frac{\partial^2 V_t}{\partial x^2} \right) = \\ &= \hat{Z} D_{\varepsilon\varepsilon} \left[ -V_t \cdot \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (V_t/V_{aw})}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Скорость распространения ультразвука слабо зависит от деформации, то есть,  $V_t \approx \text{const}$ . Кроме того, в силу уравнения (30)  $V_t/V_{aw} \approx \hat{Z}^{-1} \cdot \lambda/\chi \approx \varepsilon$  и

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\hat{Z} D_{\varepsilon\varepsilon} V_t \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} + D_{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}, \quad (32)$$

что эквивалентно уравнению для скорости деформации  $\dot{\varepsilon} = f(\varepsilon) + D_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon''$ , в котором

$$f(\varepsilon) = \hat{Z} D_{\varepsilon\varepsilon} V_t (V_{aw}^{-1})''. \quad (33)$$

Учитывая совпадение размерностей коэффициента  $D_{\varepsilon\varepsilon}$  и произведений в инварианте (3), естественно предположить, что  $D_{\varepsilon\varepsilon} \equiv \lambda V_{aw}$ .

### 2.6. Уравнение дислокационной кинетики Тейлора – Орована

Развивая автоволновой подход к описанию пластического течения, необходимо установить его связь с теорией дислокаций. Известно, что дислокационные меха-

низмы пластичности базируются, главным образом, на использовании уравнения Тейлора – Орована [1, 2], определяющего скорость пластической деформации

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = b\rho_m V_{disl}. \quad (34)$$

Здесь  $b$  – вектор Бюргерса, а  $\rho_m$  – плотность подвижных дислокаций. Сравнивая уравнения (32) и (34), покажем, что первый член в правой части уравнения (32) аналогичен выражению  $b\rho_m V_{disl}$  в уравнении Тейлора – Орована. Действительно, пусть  $V_t \approx \chi\omega_D \approx b\omega_D$ ,  $D_{\varepsilon\varepsilon} = \hat{Z}D_{\sigma\sigma} = \hat{Z}\chi V_t$ , а  $\frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} \approx \frac{V_{aw}^{-1}}{x^2}$ . Если дислокации распределены хаотически, то  $x^{-2} \approx l^{-2} \approx \rho_m$ , где  $l$  – их пробег. Следовательно

$$\begin{aligned} -\hat{Z}D_{\varepsilon\varepsilon} V_t \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} &\approx -\hat{Z}^2 \cdot \chi V_t^2 \cdot b\omega_D \cdot \frac{V_{aw}^{-1}}{x^2} \approx \\ &\approx -\hat{Z}^2 b V_t \frac{V_t/V_{aw}}{l^2} \approx -\hat{Z}^2 V^{*-1} b\rho V_t. \end{aligned} \quad (35)$$

Скорость дислокаций связана со скоростью  $V_t$  [1], так что  $V_{disl} \approx V_t\Psi$ . Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} &= -\frac{\hat{Z}^2}{V^*\Psi} \cdot b\rho_m V_{disl} + D_{\varepsilon\varepsilon} \partial^2\varepsilon/\partial x^2 = \\ &= \alpha b\rho_m V_{disl} + D_{\varepsilon\varepsilon} \partial^2\varepsilon/\partial x^2, \end{aligned} \quad (36)$$

где в правой части содержатся гидродинамическая  $f(\varepsilon) = b\rho_m V_{disl} \sim V_{disl}$  и диффузионная  $D_{\varepsilon\varepsilon} \partial^2\varepsilon/\partial x^2 \sim \partial^2\varepsilon/\partial x^2$  компоненты деформационного потока.

Таким образом, оказывается, что уравнение Тейлора – Орована является частным случаем уравнения (36). Использование уравнения (34) допустимо при малых плотностях дислокаций. Однако при больших пластических деформациях и, соответственно, больших плотностях дефектов необходимо применять уравнение (36), учитывающее автоволновой режим деформации.

### 2.7. Плотность подвижных дислокаций

Запишем инвариант (3) как  $D_{\varepsilon\varepsilon} = \hat{Z}D_{\sigma\sigma}$ . Из соображений размерности коэффициент  $D_{\varepsilon\varepsilon}$  в уравнении (1) можно связать с плотностью дислокаций  $D_{\varepsilon\varepsilon} = d(\rho_m^{-1})/dt$ . Тогда

$$\frac{d}{dt}(\rho_m^{-1}) = \hat{Z} \frac{dD_{\sigma\sigma}}{dt} = -\rho_m^{-2} \frac{d\rho_m}{dt} = \Omega. \quad (37)$$

Отсюда следует

$$\rho_m^{-2} d\rho_m = -\Omega dt \quad (38)$$

и  $\rho_m \sim -t^{-1}$  или  $\rho_m \sim \varepsilon^{-1}$ . Эта закономерность верна для больших деформаций [2].

### 2.8. Объяснение возникновения автоволн

В русле развиваемых представлений лежит объяснение формирования автоволн локализованной пластичности. Действительно, задаваемое испытательной машиной условие для скорости деформации  $\dot{\varepsilon} = \text{const}$  в соответствии с уравнением (34) удовлетворяется только при  $\rho_m V_{disl} = \text{const}$  в уравнении (34), то есть при достаточных плотности подвижных дислокаций и скорости их движения. Это условие может быть нарушено из-за снижения плотности подвижных дислокаций при деформации или за счет падения скорости их движения при уменьшении эффективного напряжения, действующего на дислокацию, от  $\sigma$  до  $\sigma - Gb\rho_d^{1/2}$  [1] при деформационном упрочнении. В таком случае деформируемая среда поддерживает требуемое постоянство скорости пластического течения включением диффузионного механизма, который описывается слагаемым  $D_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon''$  в уравнении (1) и порождает новые очаги локализованного пластического течения на расстоянии  $\sim \lambda$  от исходного. Это объясняет причину возникновения автоволны локализованного пластического течения.

### 2.9. Коэффициент деформационного упрочнения

Если в инвариант (3)  $\hat{Z} = \lambda V_{aw}/\chi V_t$  подставить зависимость (29) скорости автоволны от коэффициента деформационного упрочнения  $V_{aw} \approx \Xi/\theta$ , то, решая получившееся уравнение относительно  $\theta$ , приходим к равенству

$$\theta \approx \frac{\Xi\lambda}{\chi V_t \hat{Z}} \approx \frac{\Xi}{V_t \hat{Z}} \cdot \frac{\lambda}{\chi}. \quad (39)$$

Из него следует  $\theta \approx 3 \cdot 10^{-3}$ , что близко к экспериментально наблюдаемым значениям этой величины для материалов разного сорта [1, 2].

### 2.10. Упругопластический инвариант и соотношение Холла – Петча

Соотношение Холла – Петча  $\sigma_f = \sigma_0 + k_f \delta^{-1/2}$ , связывающее напряжение течения (при заданной деформации) поликристаллов с размером зерна  $\delta$  в них, является одним из важнейших соотношений физики пластичности [1]. В работе [30] было установлено, что длина автоволны локализованной деформации связана с размером зерна, причем зависимость  $\lambda(\delta)$  разделяется на два участка, как показано на рис. 4. В области малых зерен  $\lambda \sim \exp(\delta/\delta_0)$ , а в области больших зерен  $\lambda \sim \ln(\delta/\delta_0)$ , где  $\delta_0 \approx 0,1$  мм граничное значение размера зерна. Результаты вычислений величин  $\lambda V_{aw}$  для двух диапазонов размеров зерен приведены в табл. 2. Они демонстрируют выполнение инвариантного соотношения для зависимости Холла – Петча.

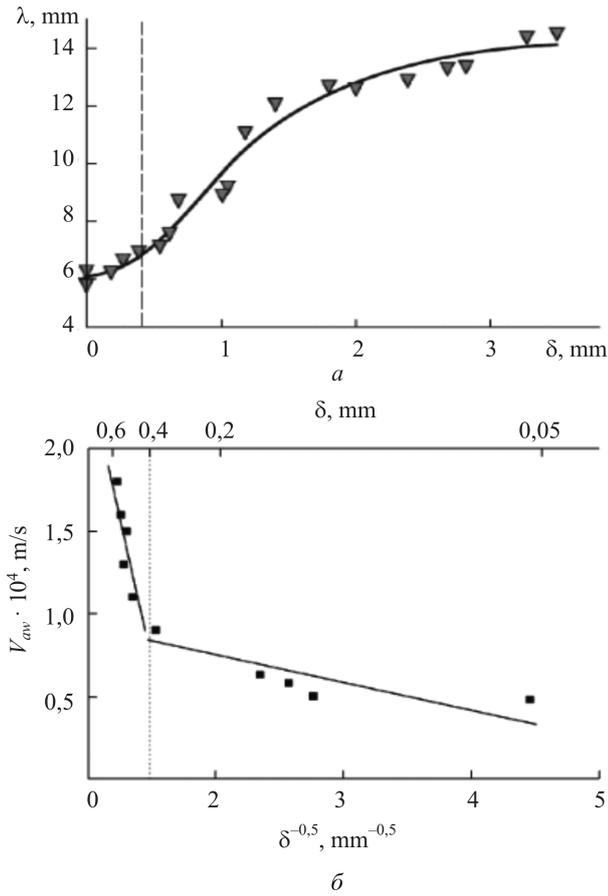


Рис. 4. Зависимость  $\lambda(\delta)$  в координатах  $\lambda - \delta$  (а) и  $\lambda - \delta^{-1/2}$  (б)  
 Fig. 4. Dependence  $\lambda(\delta)$  in coordinates  $\lambda - \delta$  (a) and  $\lambda - \delta^{-1/2}$  (b)

Таблица 2

К проверке выполнения инвариантного соотношения (3) для двух диапазонов размеров зерен в алюминии

Table 2

Checking the fulfillment of the invariant relation (3) for two grain sizes in aluminum

| Размеры зерен, мм            | $\chi V_t \cdot 10^7, \text{ м}^2/\text{с}$ | $\lambda V_{av} \cdot 10^7, \text{ м}^2/\text{с}$ | $\hat{Z}$ |
|------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------|
| $0,005 \leq \delta \leq 0,1$ | 5,1                                         | 2,6                                               | ~0,5      |
| $0,1 \leq \delta \leq 5$     | 6,1                                         | 3,1                                               | ~0,5      |

Таким образом, выполнение соотношения Холла – Петча оказывается связанным с автоматической подстройкой акустических свойств среды к изменению ее структурного состояния. Этим обеспечивается выполнение соотношения Холла – Петча при деформации.

**2.11. О связи упругой и пластической компонент деформации**

Интерпретируя физический смысл инварианта (3), примем во внимание, что обычно при анализе соотношения между упругой  $\epsilon_{el}$  и пластической  $\epsilon_{pl}$  компо-

нентами общей деформации  $\epsilon_{tot}$  по умолчанию принимается условие  $\epsilon_{tot} = \epsilon_{el} + \epsilon_{pl} \approx \epsilon_{pl}$ , поскольку  $\epsilon_{pl} \gg \epsilon_{el}$ . В то же время из смысла инварианта (3) следует, что взаимосвязь упругой и пластической компонент общей деформации не сводится к общепринятой аддитивной формуле, но является гораздо более глубокой. Согласно развиваемым представлениям, упругая деформация выступает в качестве управляющего развитием пластического течения фактором [7]. В частности, именно поведением упругого поля деформации объясняется формирование макроскопического масштаба локализации пластической деформации в деформируемых объектах.

**2.12. О связи дислокационного и мезоскопического масштабов**

Как было сказано выше,  $D_{\sigma\sigma} = (F/\rho)^{1/2} \approx 1 \text{ м}^2/\text{с}$ . Коэффициент  $D_{\epsilon\epsilon} = d(\rho_m^{-1})/dt$  оценить труднее, поскольку имеющиеся данные о плотности подвижных дислокаций на разных стадиях процесса пластического течения отличаются в значительной мере. К тому же плотность подвижных дислокаций  $\rho_m$  экстремально зависит от деформации [2], так что ее временная производная меняет знак при деформации. Однако, используя имеющиеся экспериментальные данные, можно найти, что  $10^{-8} \leq D_{\epsilon\epsilon} \leq 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ , так что  $D_{\epsilon\epsilon} \ll D_{\sigma\sigma}$ . Выполнение этого неравенства является условием реализации процесса генерации автоволен в активных средах [24].

Как уже сказано, коэффициент  $D_{\sigma\sigma}$  описывает связанное со случайными блужданиями перераспределение напряжений в объеме образца, а коэффициент  $D_{\epsilon\epsilon}$  определяется перестройкой дислокационной субструктуры. В таком случае  $D_{\sigma\sigma}$  естественно считать характеристикой макроуровня пластического течения, а  $D_{\epsilon\epsilon}$  отнести к кинетике развития деформации на мезоуровне. Воспользовавшись диффузионным приближением, представим коэффициенты  $D_{\epsilon\epsilon}$  и  $D_{\sigma\sigma} \neq D_{\epsilon\epsilon}$  в общем виде как произведения длины свободного пробега  $\mathbf{R}$  и скорости  $\mathbf{V}$ , то есть  $D = \mathbf{R}\mathbf{V}$ . Здесь  $\mathbf{R}$  есть размер области неоднородности в деформируемой системе, а  $\mathbf{V}$  – скорость перераспределения деформаций или напряжений в ней. Так как коэффициент  $D_{\sigma\sigma}$  связан с перераспределением напряжений, то характерная скорость этого процесса есть скорость  $V_t$ , то есть,  $\mathbf{V} = V_t \approx 10^3 \text{ м/с}$ . В этом случае  $\mathbf{R} \equiv l_\sigma = D_{\sigma\sigma}/V_t \approx 10^{-3} \text{ м}$ , что можно отождествить с мезоскопическим масштабом неоднородности пластической деформации. Для дислокационного коэффициента  $D_{\epsilon\epsilon} \approx 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$  можно положить  $\mathbf{V} \approx V_{disl} \approx 10 \text{ м/с}$  [2], так что в этом случае  $\mathbf{R} \equiv l_\epsilon \approx D_{\epsilon\epsilon}/V_{disl} \approx 10^{-9} \text{ м} \approx nb$ , где  $n \approx 2 \dots 5$ , что, очевидно, отвечает дислокационному масштабу пластического течения.

Анализ устанавливает иерархию структурных уровней пластической деформации [8]. Как оказалось, коэффициенты  $D_\epsilon$  и  $D_\sigma$  содержат длины, характеризующие ниже лежащий уровень пластического течения. Возникают следующие соотношения, определяющие иерархию и соподчинение масштабов пластического течения:  $D_{\epsilon\epsilon} \approx l_{micro} V_{disl}$  для мезоскопического и  $D_{\sigma\sigma} \approx l_{meso} V_t$  для макроскопического уровней. Соотношения указывают на связь масштабов развивающейся пластической деформации. Эта связь организована таким образом, что в транспортный коэффициент в качестве множителя входит масштаб ниже лежащего уровня. Он определяет кинетику процессов на выше лежащем уровне через соответствующий диффузионный коэффициент автоволновых уравнений (1) и (2). Результаты вычислений этих величин представлены в табл. 3.

Таблица 3

Параметры автоволновых процессов локализации деформации

Table 3

Parameters of autowave deformation localization processes

| Материал (масс. %)            | $V_{aw} \cdot 10^5$ , м/с | $D_{\epsilon\epsilon} \cdot 10^7$ , м <sup>2</sup> /с | $R \cdot 10^9$ , м |
|-------------------------------|---------------------------|-------------------------------------------------------|--------------------|
| Fe-0,1 % C-2 % Mn             | 4,5                       | 8,1                                                   | 5,3                |
| Cu-10 % Ni-6 % Sn             | 6,5                       | 7,6                                                   | 5,2                |
| NiTi (эквивалентный)          | 1,0                       | 0,8                                                   | 0,6                |
| Ni <sub>3</sub> Mn            | 10,0                      | 13,5                                                  | 6,8                |
| Fe-18 % Cr-12 % Ni            | 3,5                       | 7,8                                                   | 4,3                |
| Fe-18 % Cr-12 % Ni<br>0,5 % N | 2,7                       | 2,0                                                   | 1,0                |

Значения коэффициента  $D_{\epsilon\epsilon}$  в табл. 3 оценивались из экспериментальных данных по смещению фронтов деформации  $\Delta x$  за время  $t$ , как  $D_{\epsilon\epsilon} \approx (\Delta x)^2 / t$ . Они использованы для вычисления масштабного множителя  $R$ . Обсуждая соотношения масштабов, учтем также, что для автоволновых процессов характерно наличие минимального размера системы  $l_{min}$ , допускающего их реализацию [5, 24]. Этот размер нетрудно оценить из равенства периода колебаний в автоволновой системе  $\vartheta_{os} \approx 2\pi\omega^{-1}$  и характерного времени диффузии  $\vartheta_D \approx l_{min}^2 / 2D$  как

$$l_{min} \approx (2D\vartheta_D)^{1/2} \approx (4\pi D/\omega)^{1/2}. \quad (40)$$

Используя для оценки величины  $l_{min}$  параметры медленных процессов  $D \equiv D_{\epsilon\epsilon} \approx 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с и  $\omega \approx 10^{-3}$  Гц,

## Библиографический список

1. Фридель Ж. Дислокации. – М.: Мир, 1967. – 643 с.
2. Hull D. and Bacon D.J. Introduction in Dislocations. – Oxford: Elsevier, 2011. – 272 p.
3. Seeger A. and Frank W. Structure formation by dissipative processes in crystals with high defect densities // Non-Linear Phenomena in Materials Science. – New York: Trans. Tech. Pub., 1987. – P. 125–138.
4. Haken H. Information and Self-Organization. – Berlin: Springer, 2006. – 258 p.

можно получить нижнюю оценку  $l_{min} \approx 1,1 \cdot 10^{-2}$  м, что близко к экспериментально наблюдаемой длине образца  $l_{min}^{(exp)} \leq 2 \cdot 10^{-2}$  м, при которой не удается наблюдать автоволновые процессы локализации деформации.

## Заключение

Для стадии линейного деформационного упрочения материалов при описании развития локализованной пластичности может быть введен упругопластический инвариант деформации, связывающий характеристики упругой и пластической компонент тотальной деформации. Связь этих компонент определяется тем обстоятельством, что формирование автоволновой структуры локализованного пластического течения представляет собой упорядочение (самоорганизацию) деформируемой среды и должно протекать с уменьшением энтропии системы. Инвариант играет роль основного уравнения автоволновой теории пластичности. Из него вытекает ряд следствий, которые правильно описывают основные закономерности автоволнового процесса локализованного пластического течения, в частности, скорость и дисперсию автоволн локализованной пластичности, причину возникновения локализационных явлений при деформации, масштабный эффект, зависимость длины автоволны от размера зерна и многие другие.

Автоволновое описание пластического течения тесно связано с теорией дислокаций. Показано, что автоволновое уравнение деформации включает в себя основное уравнение дислокационной теории (уравнение Тейлора – Орована) как частный случай, соответствующий малой плотности подвижных дислокаций.

Таким образом, автоволновой подход к проблеме пластичности твердых тел, основанный на экспериментальном исследовании картин локализации пластического течения и представлении о процессе пластического течения как о структурообразовании, позволил с единой точки зрения объяснить многочисленные важные закономерности этого явления, которые ранее могли быть объяснены только при введении многочисленных частных моделей. Что касается других стадий пластического течения, то введение упругопластического инварианта деформации не представляется возможным, поскольку на площадке текучести и стадиях параболического деформационного упрочения произведение  $\lambda V_{aw} = 0$ .

5. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. – М.: Мир, 1990. – 342 с.

6. Егорушкин В.Е., Панин В.Е. Масштабная инвариантность пластической деформации планарной и кристаллической подсистем твердых тел в условиях сверхпластичности // Физ. мезомех. – 2017. – Т. 20, № 1. – С. 5–13.

7. Зуев Л.Б. Автоволновая пластичность. Локализация и коллективные моды. – М.: Физматлит, 2018. – 207 с.

8. Zuev L.B. and Barannikova S.A. Autowave physics of material plasticity // *Crystals*. – 2019. – Vol. 9, № 458. – P. 1–30.
9. Zuev L.B. and Barannikova S.A. Quasi-particle approach to the autowave physics of metal plasticity // *Metals*. – 2020. – Vol. 10. – P. 1–15.
10. Vildeman V.E., Lomakin E.V. and Tretiakova T.V. Yield delay and space-time inhomogeneity of plastic deformation of carbon steel // *Mechan. Solids*. – 2015. – Vol. 50, № 4. – P. 412–420.
11. Hähner P. Theory of solitary plastic waves // *Appl. Phys.* – 1994. – Vol. A58, № 1. – pp. 41–58.
12. Упругопластический переход в железе: структурные и термодинамические особенности / О.А. Плехов, О.Б. Наймарк, N. Saintier, T. Palin-Luc // *ЖТФ*. – 2009. – Т. 7, № 8. – С. 56–61.
13. Reyne B., Manach P.-Y., Moes N. Macroscopic consequences of Poibert-Luders and Portevin-Le Chatelier bands during tensile Deformation in Al-Mg alloys // *Mat. Sci. Eng. A*. – 2019. – Vol. 746. – P. 187–196.
14. Kobelev N.P., Lebyodkin M.A., Lebedkina T.A. Role of self-organization of dislocations in the onset and kinetics of macroscopic plastic instability // *Met. Mat. Trans. A*. – 2017. – Vol. 48 (3). – P. 965–974.
15. Taupin V., Chevy J., Fressengeas C. Effects of grain-to-grain interactions on shear strain localization in Al-Cu-Li rolled sheets // *Int. J. Sol. Str.* – 2016. – Vol. 99. – P. 71–81.
16. Tretyakova T., Wildemann V. Study of spatial-time inhomogeneity of inelastic deformation and failure in bodies with concentrators by using the digital image correlation and infrared analysis // *Proc. Str. Integ.* – 2017. – Vol. 5. – P. 318–324.
17. Kinematics of formation and cessation of type B deformation bands during the Portevin-Le Chatelier effect in an AlMg alloy / M.A. Lebyodkin, D.A. Zhemchuzhnikova, T.A. Lebedkina, E.C. Aifantis // *Res. Phys.* – 2019. – Vol. 12. – P. 867–869.
18. Intermittent plasticity associated with the spatio-temporal dynamics of deformation bands during creep tests in an Al-Mg polycrystal / A.A. Shibkov, M.F. Gasanov, M.A. Zheltov, A.E. Zolotov, V.I. Ivolgin // *Int. J. Plast.* – 2016. – Vol. 8. – P. 37–55.
19. The Portevin – Le Châtelier Effect in a Metastable Austenitic Stainless Steel / A. Müller, C. Segel, M. Linderov, A. Vinogradov, A. Weidner, H. Biermann // *Met. Mater. Trans. A*. – 2016. – Vol. 47. – P. 59–74.
20. Efsthathiou C., Sehitoglu H. Strain hardening and heterogeneous deformation during twinning in Hadfield steel // *Acta Mater.* – 2010. – Vol. 58, № 5. – P. 1479–1488.
21. Худсон Д. Статистика для физиков. – М.: Мир, 1967. – 242 с.
22. Newnham R.E. Properties of Materials. – Oxford: University Press, 2005. – 378 p.
23. Температурная зависимость автоволновых характеристик локализованной пластичности / Л.Б. Зуев, С.А. Баранникова, С.В. Колосов, А.М. Никонова // *ФТТ*. – 2021. – Т. 63. – № 1. – С. 48–54.
24. Krinsky V.I. Self-Organization: Autowaves and Structures far from Equilibrium. – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 270 p.
25. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000. – 608 с.
26. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2017. – 733 с.
27. Al'shits V.I. and Indenbom V.L. Mechanism of dislocation drag // *Dislocations in Solids*. – Amsterdam: Elsevier, 1986. – P. 43–111.
28. Мэрди Дж. Модели популяций // Математическое моделирование. – М.: Мир, 1979. – С. 109–127.
29. Зуев Л.Б., Данилов В.И., Надежкин М.В. Масштабный эффект при автоволновой пластической деформации // *Письма в ЖТФ*. – 2020. – Т. 46, № 19. – С. 18–20.
30. Зуев Л.Б., Зариковская Н.В., Федосова М.А. Макролокализация пластического течения в алюминии и соотношение Холла – Петча // *ЖТФ*. – 2010. – Т. 80, № 9. – С. 68–74.

## References

1. Friedel J. Dislocations. Oxford: Pergamon Press, 1964, 640 p.
2. Hull D. and Bacon D.J. Introduction in Dislocations. Oxford, Elsevier, 2011, 272 p.
3. Seeger A. and Frank W. Structure formation by dissipative processes in crystals with high defect densities. In *Non-Linear Phenomena in Materials Science*. New York, Trans. Tech. Pub., 1987, pp. 125-138.
4. Haken H. Information and Self-Organization. Berlin, Springer, 2006, 258 p.
5. Nicolis G. and Prigogine I. Exploring Complexity. New York, W.H. Freeman, 1989, 323 p.
6. Egorushkin V.E. and Panin V.E. Scale invariance of plastic deformation of the planar and crystal subsystems of solids under superplastic conditions. *Physical Mesomechanics*, 2017, vol. 20, no. 1, pp. 5-13.
7. Zuev L.B. Autowave Plasticity. Localization and Collective Modes. Cambridge, Taylor & Francis Group, 2020, 185 p.
8. Zuev L.B. and Barannikova S.A. Autowave physics of material plasticity. *Crystals*, 2019, vol. 9, no. 458, pp. 1-30.
9. Zuev L.B. and Barannikova S.A. Quasi-particle approach to the autowave physics of metal plasticity. *Metals*, 2020, vol. 10, pp. 1-15.
10. Vildeman V.E., Lomakin E.V. and Tretiakova T.V. Yield delay and space-time inhomogeneity of plastic deformation of carbon steel. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, no. 4, pp. 412-420.
11. Hähner P. Theory of solitary plastic waves. *Applied Physics*, 1994, vol. A58, no. 1, pp. 41-58.
12. Plechov O.A., Naimark O.B., Saintier N., Palin-Luc T. Elastic-plastic transition in iron: structure and thermodynamic features. *Technical Physics*, 2009, vol. 7, no. 8, pp. 56-61.
13. Reyne B., Manach P.-Y., Moes N. Macroscopic consequences of Poibert-Luders and Portevin-Le Chatelier bands during tensile Deformation in Al-Mg alloys. *Materials Science and Engineering A*, 2019, vol. 746, pp. 187-196.
14. Kobelev N.P., Lebyodkin M.A., Lebedkina T.A. Role of self-organization of dislocations in the onset and kinetics of macroscopic plastic instability. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 2017, vol. 48, no. 3, pp. 965-974.
15. Taupin V., Chevy J., Fressengeas C. Effects of grain-to-grain interactions on shear strain localization in Al-Cu-Li rolled sheets. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, vol. 99, pp. 71-81.
16. Tretyakova T., Wildemann V. Study of spatial-time inhomogeneity of inelastic deformation and failure in bodies with concentrators by using the digital image correlation and infrared analysis. *Procedia Structural Integrity*, 2017, vol. 5, pp. 318-324.
17. Lebyodkin M.A., Zhemchuzhnikova D.A., Lebedkina T.A., Aifantis E.C. Kinematics of formation and cessation of type B deformation bands during the Portevin-Le Chatelier effect in an Al-Mg alloy, *Results in Physics*, 2019, vol. 12, pp. 867-869.

18. Shibkov A.A., Gasanov M.F., Zheltov M.A., Zolotov A.E., Ivolgin V.I. Intermittent plasticity associated with the spatio-temporal dynamics of deformation bands during creep tests in an Al-Mg polycrystal. *International Journal of Plasticity*, 2016, vol. 8, pp. 37-55.
19. Müller A., Segel C., Linderov M., Vinogradov A., Weidner A., Biermann H. The Portevin – Le Châtelier Effect in a Metastable Austenitic Stainless Steel. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 2016, vol. 47, pp. 59-74.
20. Efstathiou C., Sehitoglu H. Strain hardening and heterogeneous deformation during twinning in Hadfield steel. *Acta Materialia*, 2010, vol. 58, no5, pp. 1479-1488.
21. Hudson D.J. Statistics. Geneva, CERN, 1964, 242 с.
22. Newnham R.E. Properties of Materials. Oxford: University Press, 2005, 378 p.
23. Zuev L.B., Barannikova S.A., Kolosov S.V., Nikonova A.V. Temperature dependence of autowave characteristics of localized plasticity. *Physics of the Solid State*, 2021, vol. 63, no. 1, pp. 47-53.
24. Krinsky V.I. Self-Organization: Autowaves and Structures far from Equilibrium. Berlin, Springer-Verlag, 1984, 270 p.
25. Rumer Yu.B., Ryvkin V. Sh. Thermodynamics, Statistical Physics and Kinetics. Moscow, Mir Publ., 1980, 600 p.
26. Landau L.D. and Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Oxford, Pergamon Press, 1987, 539 p.
27. Al'shits V.I., Indenbom V.L. Mechanism of dislocation drag. Dislocations in Solids. Amsterdam, Elsevier, 1986, pp. 43-111.
28. Murdie G. Models of Populations. In Mathematical Modelling. London, Butterworths, 1976, pp. 109-127.
29. Zuev L.B., Danilov V.I., Nadezhkin M.V. Scale effect by autowave plastic deformation. *Technical Physics Letters*, 2020, vol. 46, no. 19, pp. 18-20.
30. Zuev L.B., Zarikovskaya N.V. and Fedosova M.A. Macroscopic localization of plastic flow in aluminum and the Hall-Petch relation. *Technical Physics*, 2010, vol. 80, no. 9, pp. 68-74.

**Финансирование. Благодарность.** Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, проект FWRW-2021-0011.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Funding. Acknowledgment.** The work was carried out within the framework of the state task of the ISPMS SB RAS, project FWRW-2021-0011.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.