

Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Гюнал И., Шишкин В.М. Теоретико-экспериментальный метод определения аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца ромбовидного поперечного сечения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 200–219. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.12

Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Shishkin V.M. Theoretical-experimental method for determination of aerodynamic damping component of test samples with diamond-shaped cross-section. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 4. Pp. 200–219. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.12



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.12

УДК 531.121.1: 539.3

## ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ДЕМПФИРОВАНИЯ ТЕСТ-ОБРАЗЦА РОМБОВИДНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В.Н. Паймушин<sup>1,2</sup>, В.А. Фирсов<sup>1</sup>, И. Гюнал<sup>1</sup>, В.М. Шишкин<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Казань, Россия

<sup>2</sup>Казанский федеральный университет, Казань, Россия

<sup>3</sup>Вятский государственный университет, Киров, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 15 октября 2016 г.

Принята: 09 декабря 2016 г.

Опубликована: 30 декабря 2016 г.

#### Ключевые слова:

логарифмический декремент колебаний, параметр внутреннего демпфирования, динамический модуль упругости, конечный элемент, целевая функция, прямой поиск.

### АННОТАЦИЯ

Разработана методика численной обработки опытной виброграммы затухающих изгибных колебаний тест-образца для определения экспериментальной нижней частоты и амплитудной зависимости логарифмического декремента колебаний (ЛДК), определяющего демпфирующие свойства тест-образца. Для определения ЛДК используется экспериментальная огибающая затухающих изгибных колебаний свободного конца тест-образца с аппроксимацией ее суммой двух экспонент с четырьмя независимыми параметрами, определяемыми прямым поиском минимума целевой функции, зависящей от указанных параметров. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность разработанной методики. Показано, что для надежного определения экспериментальной аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца ромбовидного сечения необходимо, чтобы его материал имел стабильные и низкие демпфирующие свойства. Таким требованиям в полной мере удовлетворяет дюралюминий. Построена матрица демпфирования конечно-элементной модели тест-образца произвольного поперечного сечения при амплитудно-независимом внутреннем трении в материале. Получен параметр внутреннего демпфирования тест-образца, обусловленный демпфирующими свойствами материала. Определена экспериментальная аэродинамическая составляющая демпфирования серии тест-образцов ромбовидного сечения.

Отмечена частотная зависимость модуля упругости дюралюминия марки Д16АТ. Разработан итерационный алгоритм определения нижней частоты колебаний тест-образца с учетом частотной зависимости модуля упругости. Проведены численные эксперименты на образцах ромбовидного сечения, подтверждающие достоверность разработанного алгоритма. Разработан теоретико-экспериментальный метод построе-

© Паймушин Виталий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: vpajmushin@mail.ru

Фирсов Вячеслав Анатольевич – доктор технических наук, профессор, e-mail: vafirsov\_49@mail.ru

Гюнал Ибрахим – кандидат технических наук, доцент, e-mail: ibrahimgunal@gmail.com

Шишкин Виктор Михайлович – доктор технических наук, профессор, e-mail: tism1@rambler.ru

Vitaly N. Paymushin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: vpajmushin@mail.ru

Vyacheslav A. Firsov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: vafirsov\_49@mail.ru

Ibrahim Gyunal – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: ibrahimgunal@gmail.com

Viktor M. Shishkin – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: tism1@rambler.ru

ния структурной формулы для расчетного определения аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца ромбовидного сечения, основанный на модификации базовой формулы для тонкой пластины постоянной толщины и использовании экспериментальных данных о демпфирующих свойствах серии тест-образцов с указанной формой поперечного сечения. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность полученной структурной формулы.

© ПНИПУ

## THEORETICAL-EXPERIMENTAL METHOD FOR DETERMINATION OF AERODYNAMIC DAMPING COMPONENT OF TEST SAMPLES WITH DIAMOND-SHAPED CROSS-SECTION

V.N. Paimushin<sup>1,2</sup>, V.A. Firsov<sup>1</sup>, I. Gyunal<sup>1</sup>, V.M. Shishkin<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev, Kazan, Russian Federation

<sup>2</sup>Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation

<sup>3</sup>Vyatka State University, Kirov, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 15 October 2016  
Accepted: 09 December 2016  
Published: 30 December 2016

#### Keywords:

logarithmic decrement of oscillations, the internal damping parameter, dynamic modulus of elasticity, finite element, objective function, direct search.

### ABSTRACT

A numerical method for processing of experimental vibration data has been developed to find the lowest experimental frequency and amplitude dependences of the logarithmic decrement which are used to determine damping properties of test-samples. The logarithmic decrement (LD) is determined by the experimental decay curve obtained from the tip point amplitude measurements of test-samples during their flexural vibrations and approximated by the sum of two exponents with four parameters determined by a direct search of the objective function depending on these parameters. The conducted numerical experiments confirmed the reliability of the developed method. It is shown that the material of the test samples with a diamond-shaped cross-section must have stable and low damping properties for a reliable determination of the experimental aerodynamical damping component. Duralumin alloys absolutely meet these requirements. The damping matrix of the finite element model of the test-sample with an arbitrary cross-sectional shape is constructed in the case of the amplitude-independent internal friction in the material. The internal damping parameter which specifies the material damping properties is obtained. The experimental aerodynamic component of damping is obtained from the series of test-samples with the diamond-shape cross section.

It has been noted that the elasticity modulus of duralumin D16 AT is frequency dependent. An iterative algorithm is developed to determine the lowest vibration frequency of the test-sample considering this dependence. The conducted numerical experiments using the test-samples with the specified cross-section confirm the reliability of the developed algorithm. The theoretical and experimental method is developed to construct the structural formulae to determine the aerodynamic component of damping for the test-samples with the diamond-shaped cross-section. The method is based on the modification of the basic formulae for thin plates with the constant thickness and the experimental data on the damping properties obtained for the series of test samples with the specified cross-sectional shape. The reliability of the obtained structural formulae has been confirmed by the performed numerical experiments.

© PNRPU

## Введение

В последнее время повышенный интерес вызывают исследования вынужденных и свободных механических колебаний пластин в неподвижной вязкой жидкости (газе). Одно из их практических приложений связано с измерением демпфирующих свойств материалов [1–4]. Мотивация этого приходит также из множества других предметных областей, включающих атомную микроскопию [5, 6], датчики и приводы головок на микромеханических генераторах [7–9], робототехнические движители [10–12], гашение колебаний жидкости в топливных баках [13], колебания протяженных элементов конструкций, таких как лопасти несущих и управляющих винтов вертолетов, лопасти турбин, рули и стабилизаторы зенитных управляемых ракет и т.д.

Одной из основных задач в этом классе проблем является определение сил, действующих на колеблющуюся пластину со стороны жидкости (газа). Считается, что аэродинамическое взаимодействие может быть сведено к инерционному эффекту присоединенной массы и аэродинамическому демпфированию [см., например, 14, 15]. Инерционный эффект приводит к незначительному снижению частоты, а аэродинамическое демпфирование – к заметному росту ЛДК пластины по сравнению с ее колебаниями только при учете внутреннего демпфирования [1–4].

В работе [16] теоретико-экспериментальным методом получена структурная формула для определения аэродинамической составляющей ЛДК тонкой консольно закрепленной дюралюминиевой пластины постоянной толщины. В основе ее получения лежит известное положение о том, что внутреннее демпфирование дюралюминиевых пластин практически не зависит от амплитуды колебаний [17]. Это позволяет ставить и решать самостоятельную задачу построения методики определения аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца (пластины), форма поперечного сечения которого отличается от прямоугольной, при известных демпфирующих свойствах материала. Однако следует заметить, что решение такой задачи наталкивается на серьезные трудности, обусловленные сложностью моделирования трехмерных течений газа, вызванных колебанием пластины [18]. Поэтому реальным будет теоретико-экспериментальный метод, основанный на модифицировании некоторой базовой аппроксимации аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца прямоугольного сечения с использованием экспериментальных данных о демпфирующих свойствах тест-образца с другой формой поперечного сечения. В настоящей работе такой метод используется для тест-образца ромбовидного сечения.

## 1. Экспериментальная установка для исследования изгибных затухающих колебаний тест-образцов

Для определения динамических характеристик упругости и амплитудной зависимости демпфирующих свойств материалов в диапазоне малых и средних частот ( $f < 100$  Гц) необходимо использовать тест-образцы значительной длины. С целью исключения статической составляющей прогиба динамические испытания таких образцов целесообразно осуществлять при их вертикальном расположении.

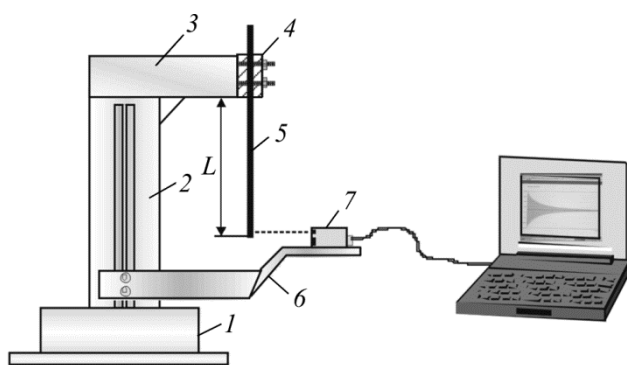


Рис. 1. Схема экспериментальной установки  
Fig. 1. Schematic of experimental setup

Для реализации данной возможности проведена модернизация разработанной ранее экспериментальной установки [1], принципиальная схема которой представлена на рис. 1.

Установка состоит из основания 1 и силовой стойки 2, жестко соединенных между собой. На стойке неподвижно закреплена консоль 3 с захватом 4 на конце. Защемление тест-образца 5 осуществляется с помощью разнесенных жестких планок, соединенных с консолью

болтовыми соединениями и исключая поворот тест-образца в сечении заделки. На стойке установлена подвижная платформа 6 для установки лазерного датчика перемещений 7, положение которой вдоль стойки может изменяться для измерения прогиба  $w$  свободного конца тест-образца при изменении его стрелы вылета  $L$ . После отклонения тест-образца от положения статического равновесия он совершает свободные затухающие изгибные колебания. Измерение прогибов свободного конца тест-образца осуществляется с некоторой задержкой по времени, необходимой для перехода его из начального (статического) изогнутого состояния к основной форме колебаний.

В установке используется триангуляционный лазерный датчик фирмы RIFTEK (RF603-X/100), обеспечивающий точность измерения амплитуды колебаний 0,01мм в цифровом формате. Результаты измерений передаются на персональный компьютер. Разработанное математическое обеспечение позволяет осуществлять до 2000 замеров прогиба в секунду, что обеспечивает высокую точность описания экспериментальных виброграмм затухающих колебаний исследуемых тест-образцов при практически важных частотах до 100 Гц.

## 2. Обработка результатов эксперимента

Демпфирующие свойства тест-образца определяются ЛДК  $\delta(A)$ , зависящим от амплитуды колебаний  $A$  его свободного конца. Обработка результатов испытаний тест-образца имеет своей целью нахождение по экспериментальной виброграмме  $w(t)$  затухающих изгибных колебаний тест-образца зависимости  $\delta(A)$  и низшей циклической частоты  $f = 1/T$ , где  $t$  – текущее время;  $T$  – период колебаний тест-образца.

Обработка результатов эксперимента состоит из двух этапов. На первом этапе из записанной виброграммы  $w(t)$  колебаний свободного конца тест-образца выбирается рабочий диапазон изменения амплитуд  $[A_{\max}; A_{\min}]$ , и находятся моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , соответствующие нулевым прогибам  $w$  в указанном диапазоне амплитуд. По значениям  $t_1$  и  $t_k$  находится осредненный полупериод колебаний  $T/2 = (t_k - t_1)/(k - 1)$ , что дает возможность определить частоту  $f = 0,5/(T/2) = 1/T$ .

На втором этапе обработки виброграммы  $w(t)$  находятся амплитуды колебаний  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в выбранном диапазоне  $[A_{\max}; A_{\min}]$  в области положительных значений  $w$  и соответствующие им моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , в результате чего получается экспериментальная дискретная зависимость  $\bar{A}_i(t_i)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Полученная зависимость аппроксимируется суммой двух экспонент:

$$A(t) = a_1 e^{-a_2 t} + a_3 e^{-a_4 t}. \quad (2.1)$$

Параметры  $a_1, a_2, a_3, a_4$  зависимости (2.1) определяются из условия

$$\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{i=1}^n (1 - A_i / \bar{A}_i)^2 \rightarrow \min,$$

где  $A_i$  – значения  $A(t)$ , найденные по зависимости (2.1) в моменты времени  $t_i$ .

Для нахождения данных параметров можно использовать необходимое условие существования минимума целевой функции  $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4)$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_3} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_4} = 0.$$

Это приводит к системе нелинейных уравнений относительно параметров  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , для решения которой можно использовать итерационные методы (метод простой итерации, метод Ньютона и др.). При этом необходимо иметь начальные значения параметров  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Однако проведенные численные эксперименты показали, что выбрать данные параметры так, чтобы они обеспечивали сходимость отмеченных методов, практически невозможно. Поэтому предпочтение было отдано прямым методам поиска нулевого порядка. Из них наиболее простым и удобным является метод конфигураций Хука-Дживса [19], который легко реализуется при любой размерности пространства поиска.

Для определения ЛДК тест-образца можно использовать известную формулу

$$\delta(t) = -\frac{1}{f} \frac{d \ln A(t)}{dt} = -\frac{1}{fA(t)} \frac{dA(t)}{dt}.$$

Подставляя сюда аппроксимацию (2.1), получаем зависимость

$$\delta(t) = \frac{a_1 a_2 e^{-a_2 t} + a_3 a_4 e^{-a_4 t}}{f(a_1 e^{-a_2 t} + a_3 e^{-a_4 t})}. \quad (2.2)$$

Аппроксимация (2.1) и зависимость (2.2) в параметрическом виде определяют необходимую зависимость  $\delta(A)$ .

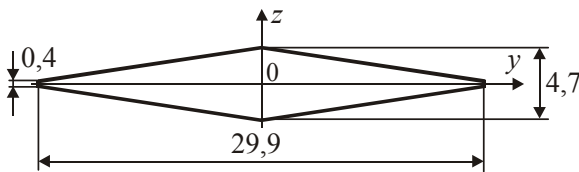


Рис. 2. Поперечное сечение тест-образца  
Fig. 2. Transverse section of test-sample

Исследовались затухающие изгибные колебания тест-образца ромбовидного сечения (рис. 2) с длиной вылета  $L = 250, 300, 350, \dots, 700$  мм (всего 10 размеров). Далее тест-образец с указанным диапазоном изменения  $L$  будет считаться как 10 отдельных тест-образцов, имеющих каждый свое определенное значение  $L$ ). В табл. 1 приведены длины  $L$ ,

частоты  $f$  и параметры  $a_1, a_2, a_3, a_4$  аппроксимации (2.1), найденные методом конфигураций Хука-Дживса с шагом  $h_a = 0,001$  по каждому параметру. В последних двух столбцах таблицы приведено число  $p$  исследованных при поиске точек и достигнутые при этом значения целевой функции  $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4)$ . Координаты базовой (начальной) точки для каждого тест-образца определялись при условии  $a_3^{(0)} = a_1^{(0)}, a_4^{(0)} = a_2^{(0)}$  по заданным значениям амплитуд  $A_1 = A_{max}, A_n = A_{min}$  и соответствующим им моментам времени  $t_1, t_n$ , что дает

$$a_4^{(0)} = a_2^{(0)} = \ln(A_1/A_n)/(t_n - t_1), \quad a_3^{(0)} = a_1^{(0)} = A_1 e^{a_2^{(0)} t_1}.$$

На рис. 3 приведены экспериментальная огибающая затухающих изгибных колебаний тест-образца длиной  $L = 550$  мм и аппроксимация ее зависимостью (2.1) при параметрах  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , найденных для данного образца. Наблюдается хорошее приближение данной зависимости к экспериментально измеренным амплитудам  $\bar{A}_i(t_i)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Аналогичная картина в отношении отмеченных амплитуд получилась и при обработке виброграмм  $w(t)$  остальных девяти тест-образцов, что свидетельствует

о достоверности предлагаемой методики определения параметров  $a_1, a_2, a_3, a_4$  и пригодности аппроксимации (2.1) для представления экспериментальных амплитуд колебаний тест-образцов.

Таблица 1

Длины  $L$  тест-образцов, экспериментальные частоты  $f$ , параметры  $a_1, a_2, a_3, a_4$  аппроксимации (2.1), число  $p$  исследованных при поиске точек и значения целевой функции  $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4)$

Table 1

Lengths  $L$  of test-samples, experimental frequencies  $f$ , parameters  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , of approximation (2.1), number  $p$  of points in search and value of objective function  $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4)$

| $L, \text{ мм}$ | $f, \text{ Гц}$ | $a_1$  | $a_2$ | $a_3$  | $a_4$ | $p$    | $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4)$ |
|-----------------|-----------------|--------|-------|--------|-------|--------|----------------------------|
| 250             | 38,863          | 9,570  | 2,550 | 8,745  | 0,972 | 68112  | 0,00309                    |
| 300             | 26,854          | 20,765 | 2,101 | 9,736  | 0,571 | 121824 | 0,00748                    |
| 350             | 20,375          | 15,043 | 1,408 | 10,568 | 0,411 | 67851  | 0,02826                    |
| 400             | 16,049          | 18,991 | 1,156 | 14,369 | 0,400 | 58797  | 0,01695                    |
| 450             | 12,969          | 18,830 | 0,914 | 20,333 | 0,444 | 21024  | 0,00578                    |
| 500             | 10,437          | 26,487 | 0,957 | 21,603 | 0,272 | 74178  | 0,00328                    |
| 550             | 8,857           | 18,896 | 0,684 | 18,603 | 0,214 | 20142  | 0,00332                    |
| 600             | 7,362           | 17,955 | 0,515 | 18,032 | 0,174 | 25577  | 0,00198                    |
| 650             | 6,153           | 25,446 | 0,484 | 27,272 | 0,152 | 35955  | 0,00114                    |
| 700             | 5,564           | 26,068 | 0,292 | 24,638 | 0,116 | 23229  | 0,01018                    |

На рис. 4 приведена амплитудная зависимость ЛДК  $\delta$  того же тест-образца, полученная при найденных параметрах  $a_1, a_2, a_3, a_4$  с использованием зависимостей (2.1) и (2.2).

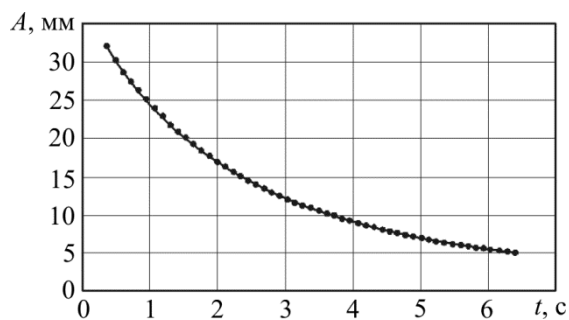


Рис. 3. Огибающая затухающих колебаний тест-образца длиной  $L = 550$  мм: точки – эксперимент; линия – зависимость (2.1)  
 Fig. 3. Decay curve of damped vibrations of test-sample with free length  $L = 550$  mm, dots are experimental values; line is a dependence (2.1)

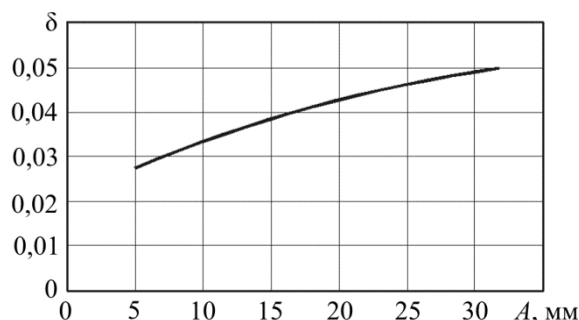


Рис. 4. Амплитудная зависимость ЛДК тест-образца длиной  $L = 550$  мм  
 Fig. 4. Amplitude dependence of LD for the test-sample with length  $L = 550$  mm

### 3. Определение параметра внутреннего демпфирования тест-образца

Учитывая малость сил внутреннего трения и аэродинамических сил по сравнению с упругими силами, можно считать [18], что полный ЛДК тест-образца складывается из двух независимых частей, отвечающих механическому (внутреннее плюс конструктивное)  $\delta^*$  и аэродинамическому  $\delta_a$  демпфированию:

$$\delta = \delta^* + \delta_a. \tag{3.1}$$

Внутреннее демпфирование обусловлено необратимым рассеянием энергии в материале [20–24], а конструкционное – потерями энергии в узле крепления тест-образца. Проведенные экспериментальные исследования при различной степени зажатия тест-образцов показали, что их демпфирующие свойства остаются при этом практически неизменными. Это означает, что конструкционное демпфирование в данном случае является малозначимым фактором и им можно пренебречь. Поэтому далее будем считать, что параметр внутреннего демпфирования  $\delta^*$  тест-образца определяется только рассеянием энергии (внутренним трением) в материале. Демпфирующие свойства материала при циклическом растяжении-сжатии определяются ЛДК  $\delta_m(\epsilon_0)$ , зависящим в общем случае от амплитуды деформации  $\epsilon_0$  [20, 21, 24, 25]. Для надежного экспериментального определения составляющей  $\delta_a$  из формулы (3.1) необходимо, чтобы материал тест-образца имел по возможности низкие и стабильные (слабо зависящие от  $\epsilon_0$ ) характеристики демпфирования.

В работе [4] на основе исследования затухающих изгибных колебаний серии пластин, изготовленных из дюралюминия марки Д16АТ, получена степенная зависимость

$$\delta_m(\epsilon_0) = 0,005209 \epsilon_0^{0,001885},$$

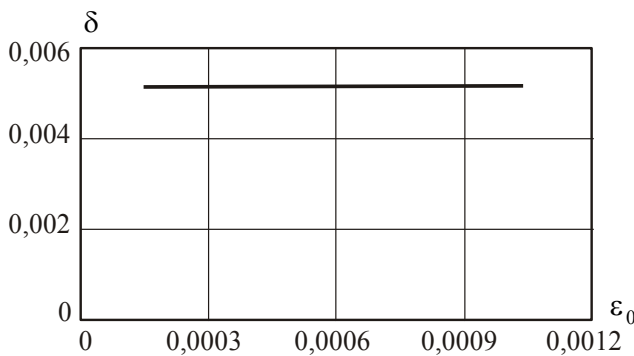


Рис. 5. Амплитудная зависимость ЛДК дюралюминия марки Д16АТ  
 Fig. 5. Amplitude dependence of LD for duralumin (D16AT)

которая дает практически постоянное значение  $\delta_m$  в достаточно широком диапазоне  $\epsilon_0$  (рис. 5). Это дает возможность считать величину  $\delta_m$  постоянной и равной ее среднему значению в диапазоне амплитуд деформаций, соответствующему выбранному диапазону изменения амплитуд колебаний тест-образца, что существенно упрощает процесс получения параметра внутреннего демпфирования  $\delta^*$ .

Для определения параметра  $\delta^*$  тест-образца ромбовидного поперечного сечения при известном ЛДК  $\delta_m$  материала предлагается использовать метод конечных элементов [26, 27].

Тест-образец в продольном направлении моделируется 40 одномерными конечными элементами одинаковой длины (рис. 6, а), работающими в рамках гипотез Кирхгоффа–Лява. Элемент имеет четыре степени свободы (рис. 6, б). Узловые параметры элемента (прогибы  $w_1, w_2$  и углы поворота  $\varphi_1, \varphi_2$ ) представляются вектором  $\mathbf{r}_e = \{w_1 \varphi_1 w_2 \varphi_2\}$ .

Затухающие колебания конечно-элементной модели тест-образца без учета сил аэродинамического сопротивления описываются системой дифференциальных уравнений

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = 0, \tag{3.2}$$

где  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{r}$  – матрица масс, матрица демпфирования, матрица жесткости и вектор узловых перемещений отмеченной модели соответственно. Точка над символом означает диф-

ференцирование его по времени  $t$ . Необходимо заметить, что при вертикальном расположении тест-образца на его колебания оказывают влияние продольные силы от его собственного веса, которые приводят к некоторому возрастанию частоты  $f$ , степень которого зависит от жесткости на изгиб и длины  $L$  рабочей части тест-образца [4]. Для учета данного влияния в уравнения (3.2) следует добавить слагаемое  $\mathbf{K}_g \mathbf{r}$  [28], где  $\mathbf{K}_g$  – матрица геометрической жесткости тест-образца. Однако проведенные численные исследования показали, что влиянием данного слагаемого на частоту  $f$  при реально используемых длинах вылета  $L$  ( $L \leq 700$  мм) рассматриваемых тест-образцов можно пренебречь, так как даже при максимальной длине  $L = 700$  мм относительное возрастание частоты  $f$  за счет учета сил тяжести тест-образца не превышает 1 % от того, что получается без учета данных сил.

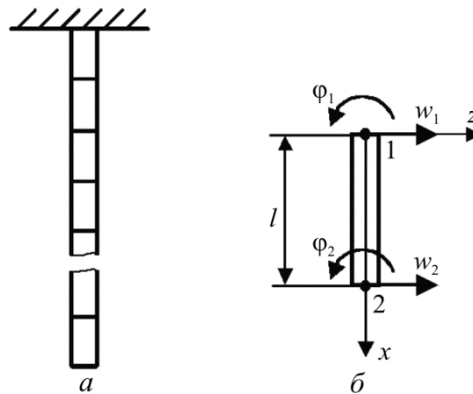


Рис. 6. Конечно-элементная модель тест-образца (а) и один элемент отмеченной модели (б)  
 Fig. 6. Finite element model of the test-sample (a) and one of the elements of the specified model (b)

Матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$  формируются из соответствующих матриц  $\mathbf{M}_e$  и  $\mathbf{K}_e$  конечных элементов, имеющих известный вид [28, 29]. Поэтому остановимся только на процессе получения матрицы демпфирования  $\mathbf{C}_e$  конечного элемента, зависящей от модели неупругого деформирования материала. Если материал тест-образца обладает вязкоупругими свойствами, то для их описания можно использовать физические зависимости между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и тензора скоростей деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij} = \partial \varepsilon_{ij} / \partial t$ :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij})$ . При одноосном напряженном состоянии простейшая из таких зависимостей, наиболее часто используемая на практике, описывается известной моделью Фойгта-Томпсона-Кельвина [24, 30]

$$\sigma = E_0 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}, \quad (3.3)$$

где  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\dot{\varepsilon}$  – соответственно нормальное напряжение, относительная деформация и скорость ее изменения по времени  $t$ ;  $E_0$ ,  $\eta$  – статический модуль упругости и коэффициент вязкости материала. Последний связан с ЛДК  $\delta_m$  зависимостью

$$\eta = E_0 \delta_m / \pi \omega, \quad (3.4)$$

где  $\omega$  – круговая частота деформирования материала. В работе [4] показано, что модуль упругости дюралюминия зависит от частоты  $\omega$ . В этом случае модуль  $E_0$  необходимо за-



менить динамическим модулем упругости  $E$ . С учетом такой замены и зависимости (3.4) модель (3.3) принимает вид

$$\sigma = E\varepsilon + E\delta_m \dot{\varepsilon} / \pi\omega.$$

Запишем бесконечно малое приращение работы неупругой части напряжения  $\sigma$  на соответствующем ему приращении деформации  $d\varepsilon$  в объеме  $dx dF$  конечного элемента:

$$dA = -\frac{E\delta_m}{\pi\omega} \int_F \int_0^l d\varepsilon \dot{\varepsilon} dx dF. \quad (3.5)$$

Деформацию  $\varepsilon$  в произвольной точке поперечного сечения элемента можно определить через его узловые перемещения  $\mathbf{r}_e$ , используя геометрическую зависимость

$$\varepsilon = -z w'' = -z \mathbf{N}''^T \mathbf{r}_e, \quad (3.6)$$

где  $w$  – функция прогиба;  $\mathbf{N}''$  – вектор вторых производных от базисных функций  $N_i$  ( $i = 1; 2; 3; 4$ ) конечного элемента по его локальной координате  $x$ :

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}; \quad N_2 = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}; \quad N_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}; \quad N_4 = \frac{-x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}.$$

Подставляя зависимость (3.6) в соотношение (3.5), приходим к выражению

$$dA = -d\mathbf{r}_e^T EI_y \frac{\delta_m}{\pi\omega} \int_0^l \mathbf{N}'' \mathbf{N}''^T dx \dot{\mathbf{r}}_e, \quad I_y = \int_F z^2 dF.$$

Полученное выражение можно представить в виде

$$dA = -\delta_m d\mathbf{r}_e^T \mathbf{K}_e \dot{\mathbf{r}}_e / \pi\omega, \quad (3.7)$$

где

$$\mathbf{K}_e = EI_y \int_0^l \mathbf{N}'' \mathbf{N}''^T dx$$

– матрица жесткости конечного элемента. Из выражения (3.7) получается матрица демпфирования элемента, пропорциональная его матрице жесткости  $\mathbf{K}_e$ :

$$\mathbf{C}_e = \delta_m \mathbf{K}_e / \pi\omega \quad (3.8)$$

С учетом соотношения (3.8) система уравнений (3.2) будет такой:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \delta_m \mathbf{K}\dot{\mathbf{r}} / \pi\omega + \mathbf{K}\mathbf{r} = 0. \quad (3.9)$$

Необходимо отметить, что параметр внутреннего демпфирования  $\delta^*$  тест-образца должен определяться после перехода его от статической формы изгиба на низшую моду колебаний  $\mathbf{W}_1$ . В этом случае систему уравнений (3.9) можно заменить одним уравнением относительно обобщенной координаты  $q_1(t)$  данной моды колебаний

$$m_q \ddot{q}_1(t) + \delta_m k_q \dot{q}_1(t) / \pi\omega_1 + k_q q_1(t) = 0. \quad (3.10)$$

Здесь

$$m_q = \mathbf{W}_1^T \mathbf{M} \mathbf{W}_1, \quad k_q = \mathbf{W}_1^T \mathbf{K} \mathbf{W}_1$$

– соответственно обобщенная масса и обобщенная жесткость тест-образца. Уравнение (3.10) можно записать в стандартном виде:

$$\ddot{q}_1(t) + 2n_1\dot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) = 0, \quad \omega_1^2 = k_q/m_q, \quad 2n_1 = \delta_m k_q/m_q \pi \omega_1.$$

Коэффициент затухания  $n_1$  связан с параметром  $\delta^*$  известной зависимостью:  $\delta^* = n_1 \bar{T}_1$ , где  $\bar{T}_1$  – период колебаний, определяемый с учетом коэффициента затухания  $n_1$ ,

$$\bar{T}_1 = 2\pi / \sqrt{\omega_1^2 - n_1^2}.$$

Однако проведенные численные эксперименты показали, что максимальное относительное увеличение периода колебаний  $\bar{T}_1$  по сравнению с периодом  $T_1 = 2\pi/\omega_1$  без учета затухания для рассматриваемых тест-образцов составляет величину  $3,3 \cdot 10^{-5}\%$ . Поэтому далее можно принять  $\bar{T}_1 = T_1 = 2\pi/\omega_1$ , что дает  $\delta^* = 2\pi n_1/\omega_1$ . Подставляя в  $\delta^*$  величину  $2n_1 = \delta_m k_q/m_q \pi \omega_1$  и учитывая, что  $k_q/m_q = \omega_1^2$ , получаем практически важное равенство  $\delta^* = \delta_m$ , которое является справедливым независимо от упругих свойств материала.

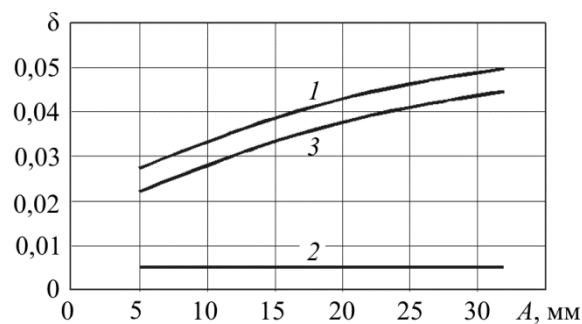


Рис. 7. Полный ЛДК (1), параметр внутреннего демпфирования (2) и аэродинамическая составляющая (3) ЛДК тест-образца длиной  $L = 550$  мм  
 Fig. 7. Total LD (1), internal damping parameter (2) and aerodynamic component (3) of LD for the test sample with  $L = 550$  mm length

Наличие параметра внутреннего демпфирования  $\delta^*$  и полного экспериментального ЛДК  $\delta$  тест-образца позволяет определить аэродинамическую составляющую демпфирования  $\delta_a$ , необходимую для построения расчетной зависимости  $\delta_a(A)$  (данный вопрос будет рассмотрен в следующем подразделе). На рис. 7 приведены экспериментальный полный ЛДК, параметр внутреннего демпфирования  $\delta^*$  и аэродинамическая составляющая ЛДК  $\delta_a = \delta - \delta^*$  тест-образца длиной  $L=550$  мм в зависимости от амплитуды колебаний  $A$  его свободного конца. Нетрудно заметить, что значительно большую часть полного ЛДК тест-образца дает аэродинамическая составляющая демпфирования  $\delta_a$ .

Остановимся на вопросе определения низшей частоты  $f_1$  колебаний тест-образца в случае частотной зависимости модуля упругости материала  $E(f)$ . Для определения  $f_1$  и соответствующей ей моды  $\mathbf{W}_1$  можно воспользоваться системой однородных уравнений [31]

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{W} = 0, \tag{3.11}$$

составляющей содержание обобщенной проблемы собственных векторов и собственных значений пары матриц  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$ . При частотно-зависимом модуле упругости материала матрица  $\mathbf{K}$  будет зависеть от частоты  $f_1$ . А поскольку частота  $f_1$  на момент формирования матрицы  $\mathbf{K}$  еще неизвестна, то решение системы (3.11) необходимо итерировать. Учитывая, что частота  $f_1$  может иметь достаточно большое значение (особенно в случае коротких тест-образцов), в качестве критерия завершения итераций целесообразно взять условие, содержащее отношение частот  $f_1$  на текущей и предыдущей итерациях:

$$\left| 1 - f_1^{(i)} / f_1^{(i-1)} \right| \leq \Delta. \tag{3.12}$$

Здесь  $\Delta$  – заданная точность. Для решения системы (3.11) на каждой итерации можно воспользоваться известным методом Якоби [32], реализуемым встроенными функциями (решателями) популярных пакетов компьютерной математики MATLAB, Mathcad, Mathematica. Однако эти функции всегда дают полный спектр собственных мод и частот, из которого необходимо иметь только низшую пару  $\mathbf{W}_1, f_1$ . Поэтому задачу (3.11) целесообразно решать методами, основанными на итерировании матриц [33, 34]. Наиболее подходящим из них является метод обратных итераций [28, 34], позволяющий определять  $\mathbf{W}_1$  и  $f_1$  без нахождения всех остальных мод и частот.

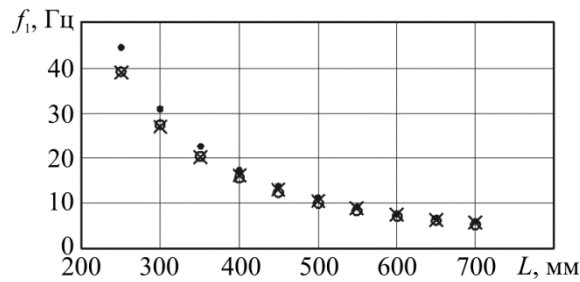


Рис. 8. Частоты  $f_1$ : крестики – эксперимент; кружки – расчет при динамическом модуле упругости  $E(f)$ ; точки – расчет при статическом модуле упругости  $E_0$

Fig. 8. Frequencies  $f_1$ : crosses is the experiment; circles are the calculations with the dynamic elastic modulus  $E(f)$ ; dots are the calculations with static elastic modulus  $E_0$

На рис. 8 приведены экспериментальные и расчетные частоты  $f_1$  прежних тест-образцов с длиной вылета  $L = 250, 300, 350, \dots, 700$  мм. Экспериментальные значения  $f_1$  находились по методике, изложенной в п. 2. Расчетные значения  $f_1$  определялись итерированием решения системы (3.11) до выполнения условия (3.12) при  $\Delta = 1 \cdot 10^{-9}$  с использованием зависимости  $E(f)$ , полученной в работе [4] для дюралюминия марки Д16АТ:

$$E(f) = 8,090 \cdot 10^3 e^{-1,024 \cdot 10^{-1} f} + 5,628 \cdot 10^4 e^{-2,357 \cdot 10^{-4} f}, \tag{3.13}$$

дающей значения  $E$  в МПа. Для сравнения приведены частоты  $f_1$  (точки), найденные при решении задачи (3.11) с использованием статического модуля упругости  $E_0 = 72000$  МПа. Из рисунка видно, что расчетные частоты  $f_1$ , полученные с учетом зависимости (3.13), при всех длинах  $L$  получились достаточно близкими к их экспериментальным значениям, а расчетные значения  $f_1$  при модуле  $E_0$  оказываются существенно выше соответствующих экспериментальных частот (особенно в области высоких значений  $f_1$ ).

#### 4. Построение структурной формулы для вычисления аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца ромбовидного сечения

В работе [16] при исследовании затухающих изгибных колебаний дюралюминиевых пластин построена структурная формула для определения аэродинамической составляющей ЛДК тонкой консольно закрепленной пластины с постоянной толщиной  $h$ :

$$\delta_a = \frac{\rho_a b}{\rho h} \left( \frac{6,14}{\sqrt{\beta}} + \frac{5,1\chi^{a+0,42}}{0,12 + \chi^a} \right); \quad \beta = b^2 f / \nu; \quad \chi = A/b; \quad a = 1,03 + 16,61\beta^{-0,627}. \quad (4.1)$$

Здесь  $\rho_a$  и  $\nu$  – соответственно плотность и кинематическая вязкость воздуха;  $\rho$  – плотность материала;  $b$  – ширина пластины. Первое слагаемое в скобках отражает вклад в  $\delta_a$  вязкой составляющей аэродинамического сопротивления пластины, которая зависит только безразмерной частоты (параметра Стокса)  $\beta$ . Его влияние на величину  $\delta_a$  сказывается главным образом при малых амплитудах колебаний пластины. Второе слагаемое определяет вклад в  $\delta_a$  вихревой компоненты аэродинамического сопротивления, которая зависит главным образом от безразмерной амплитуды  $\chi$ .

Для определения аэродинамической составляющей ЛДК тест-образца ромбовидного сечения предлагается использовать теоретико-экспериментальный подход, состоящий в подходящем модифицировании формулы (4.1) так, чтобы минимизировалось расхождение между расчетными и экспериментальными значениями  $\delta_a$  при нескольких амплитудах колебаний  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, r$ ) в заданном диапазоне амплитуд  $[A_{max}; A_{min}]$ . Из формулы (4.1) видно, что величина  $\delta_a$  при заданной ширине и плотности материала пластины зависит от трех параметров: толщины  $h$ , параметра Стокса  $\beta$  и безразмерной амплитуды  $\chi$ .

Введем обозначение  $\rho_a b / \rho h = \alpha$ . Простейший вариант модификации формулы (4.1) применительно к тест-образцу ромбовидного сечения может состоять в замене  $h$  некоторой приведенной толщиной  $h^*$  так, чтобы выполнялось условие

$$\Phi(\alpha) = \sum_{i=1}^r (\bar{\delta}_{a,i} - \delta_{a,i})^2 \rightarrow \min. \quad (4.2)$$

Здесь  $\bar{\delta}_{a,i}$ ,  $\delta_{a,i}$  – соответственно экспериментальная и расчетная аэродинамическая составляющие демпфирования тест-образца при амплитуде колебаний  $A_i$ . Для определения  $h^*$  можно воспользоваться необходимым условием существования минимума функции  $\Phi(\alpha)$ :

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = 2 \sum_{i=1}^r (\bar{\delta}_{a,i} - \delta_{a,i}) \frac{d\delta_{a,i}}{d\alpha} = 0,$$

что дает

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \bar{\delta}_{a,i} \left( \frac{6,14}{\sqrt{\beta}} + \frac{5,1\chi_i^{a+0,42}}{0,12 + \chi_i^a} \right) / \sum_{i=1}^r \left( \frac{6,14}{\sqrt{\beta}} + \frac{5,1\chi_i^{a+0,42}}{0,12 + \chi_i^a} \right)^2, \quad \chi_i = \frac{A_i}{b}.$$

Отсюда находится  $h^* = \rho_a b / \alpha \rho$ . Однако проведенные численные эксперименты показали, что условие (4.2) выполняется для всех тест-образцов лишь при достаточно большом значении функции  $\Phi(\alpha)$ . Реально это отражается в том, что значения  $\delta_a$  и  $\bar{\delta}_a$  полу-

чаются близкими между собою только в окрестности середины диапазона  $[A_{\max}; A_{\min}]$ , а на его границах имеют существенные различия (рис. 9).

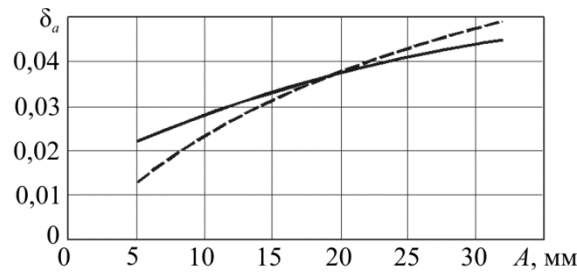


Рис. 9. Амплитудные зависимости аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца длиной  $L = 550$  мм: сплошная линия – эксперимент; пунктирная линия – формула (4.1) при  $h = h^*$   
 Fig. 9. Amplitude dependences of the aerodynamic damping component of the test-sample with  $L = 550$  mm length: continuous line is the experiment; dashed line is the formulae (4.1) at  $h = h^*$

Отсюда возникает необходимость принятия более сильных мер по модификации формулы (4.1) (при найденной приведенной толщине  $h^*$ ). После многочисленных проб наиболее подходящим оказался вариант, состоящий в замене числа 6,14 в исходной формуле некоторым параметром  $x_0$  и умножении второго слагаемого в скобках на поправочную функцию, зависящую от безмерной амплитуды  $\chi$  и параметров  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\delta_a = \alpha \left[ \frac{x_0}{\sqrt{\beta}} + \frac{5,1\chi^{a+0,42}(x_1 + x_2\chi^{x_3})}{0,12 + \chi^a} \right], \quad \alpha = \frac{\rho_a b}{\rho h^*}. \quad (4.3)$$

Параметры  $x_0, x_1, x_2, x_3$  находятся из условия

$$H(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^r (\bar{\delta}_{a,i} - \delta_{a,i})^2 \rightarrow \min. \quad (4.4)$$

Решение задачи (4.4) с использованием необходимого условия минимума функции  $H(x_0, x_1, x_2, x_3)$  приводит в данном случае к системе нелинейных уравнений. При этом, как уже говорилось выше, встает проблема сходимости и удачного выбора начальных значений  $x_0, x_1, x_2, x_3$ . Поэтому для получения параметров  $x_0, x_1, x_2, x_3$  лучше использовать снова прямой поиск по базовой точке.

В табл. 2 даны длины  $L$  прежних десяти тест-образцов, значения приведенной толщины  $h^*$  и параметры  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , полученные прямым поиском с шагом  $d = 0,0001$  по каждому параметру. В последних двух столбцах таблицы приведено число  $p$  исследованных при поиске точек и достигнутые при этом значения целевой функции  $H(x_0, x_1, x_2, x_3)$ . Базовая точка имела координаты  $x_0^{(0)} = 6, x_1^{(0)} = 0,5, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = -1,4$ .

Найденные параметры  $x_0, x_1, x_2, x_3$  в совокупности с приведенной толщиной  $h^*$  обеспечивают практически полное совпадение расчетной составляющей аэродинамического демпфирования  $\delta_a$  с ее экспериментальными значениями  $\bar{\delta}_a$  по всем тест-образцам. Однако непосредственное использование данных параметров и толщины  $h^*$  при вычислении величины  $\delta_a$  по формуле (4.3) является с практической точки зрения неудобным, так как

для каждого тест-образца необходимо брать свои параметры  $x_0, x_1, x_2, x_3$  и свою приведенную толщину  $h^*$ .

Таблица 2

Длины  $L$  тест-образцов, приведенные толщины  $h^*$ , параметры  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , число  $p$  исследованных при поиске точек и значения целевой функции  $H(x_0, x_1, x_2, x_3)$

Table 2

Lengths  $L$  of test-samples, reduced thicknesses  $h^*$ , parameters  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , number  $p$  of points in search and values of objective function  $H(x_0, x_1, x_2, x_3)$

| $L, \text{мм}$ | $h^*, \text{мм}$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$  | $p$    | $H(x_0, x_1, x_2, x_3)$ |
|----------------|------------------|-------|-------|-------|--------|--------|-------------------------|
| 250            | 0,667            | 5,995 | 0,523 | 0,039 | -1,394 | 6633   | 0,00064                 |
| 300            | 0,841            | 2,380 | 0,856 | 0,022 | -1,579 | 380664 | 0,00407                 |
| 350            | 1,087            | 3,737 | 0,823 | 0,035 | -1,509 | 251046 | 0,00305                 |
| 400            | 1,128            | 6,001 | 0,757 | 0,060 | -1,493 | 43524  | 0,00399                 |
| 450            | 1,178            | 7,629 | 0,580 | 0,186 | -1,264 | 199134 | 0,00087                 |
| 500            | 1,342            | 5,018 | 0,933 | 0,028 | -1,937 | 197730 | 0,00065                 |
| 550            | 1,460            | 5,993 | 0,850 | 0,081 | -1,454 | 57294  | 0,00119                 |
| 600            | 1,555            | 5,994 | 0,795 | 0,097 | -1,449 | 51228  | 0,00100                 |
| 650            | 1,851            | 5,991 | 0,901 | 0,079 | -1,592 | 83583  | 0,00041                 |
| 700            | 2,373            | 6,006 | 0,708 | 0,249 | -1,115 | 98811  | 0,00009                 |

Из табл. 2 видно, что из всех параметров  $x_0, x_1, x_2, x_3$  относительно наименьший разброс имеют параметры  $x_0$  и  $x_3$ . С целью получения более удобной формулы можно заменить данные параметры их осредненными значениями  $x_{0,s} = 5,474$  и  $x_{3,s} = -1,479$ . В результате вместо (4.3) получается следующая формула:

$$\delta_a = \alpha \left[ \frac{5,474}{\sqrt{\beta}} + \frac{5,1\chi^{a+0,42}(x_1 + x_2\chi^{-1,479})}{0,12 + \chi^a} \right]; \quad \alpha = \frac{\rho_a b}{\rho h^*}.$$

Однако это требует повторного вычисления параметров  $x_1$  и  $x_2$  из условия

$$G(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^r (\bar{\delta}_{a,i} - \delta_{a,i})^2 \rightarrow \min.$$

Но теперь уже можно обойтись без трудоемкой процедуры прямого поиска, а использовать необходимые условия минимума функции  $G(x_1, x_2)$ :  $\partial G/\partial x_1 = 0$ ;  $\partial G/\partial x_2 = 0$ , в результате чего получается система линейных алгебраических уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \quad (4.5)$$

где

$$a_{11} = \sum_{i=1}^r \left( \frac{\chi_i^{a+0,42}}{0,12 + \chi_i^a} \right)^2; \quad a_{12} = a_{21} = \sum_{i=1}^r \left( \frac{\chi_i^{a+0,42}}{0,12 + \chi_i^a} \right)^2 \chi_i^{-1,479}; \quad a_{22} = \sum_{i=1}^r \left( \frac{\chi_i^{a+0,42}}{0,12 + \chi_i^a} \right)^2 \chi_i^{-2,958};$$

$$b_1 = \frac{1}{5,1\alpha} \sum_{i=1}^r \left( \bar{\delta}_i - \alpha \frac{5,474}{\sqrt{\beta}} \right) \frac{\chi_i^{a+0,42}}{0,12 + \chi_i^a}; \quad b_2 = \frac{1}{5,1\alpha} \sum_{i=1}^r \left( \bar{\delta}_i - \alpha \frac{5,474}{\sqrt{\beta}} \right) \frac{\chi_i^{a+0,42}}{0,12 + \chi_i^a} \chi_i^{-1,479}.$$

В табл. 3 приведены длины  $L$  тест-образцов и параметры  $x_1, x_2$ , полученные из системы (4.5).

Таблица 3

Длины  $L$  тест-образцов и параметры  $x_1, x_2$

Table 3

Lengths  $L$  of test-samples and parameters  $x_1, x_2$

| $L, \text{мм}$ | 250   | 300   | 350   | 400   | 450   | 500   | 550   | 600   | 650   | 700   |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$          | 0,570 | 0,808 | 0,802 | 0,753 | 0,681 | 0,884 | 0,857 | 0,805 | 0,895 | 0,793 |
| $x_2$          | 0,030 | 0,026 | 0,036 | 0,064 | 0,128 | 0,059 | 0,079 | 0,093 | 0,093 | 0,169 |

Наконец, с целью получения формулы, применимой для тест-образцов произвольной длины  $L$  (из диапазона реально используемых длин), предлагается поставить приведенную толщину  $h^*$  (см. табл. 2) и полученные параметры  $x_1, x_2$  в зависимость от удлинения  $s = L/b$  тест-образца. Проведенные численные эксперименты показали, что для этой цели более всего подходят кубические полиномы

$$\begin{aligned}
 h^*(s) &= -3,1977 + 8,1781 \cdot 10^{-1} s - 5,2909 \cdot 10^{-2} s^2 + 1,1993 \cdot 10^{-3} s^3, \\
 x_1(s) &= -7,6981 \cdot 10^{-2} + 1,3090 \cdot 10^{-1} s - 6,2769 \cdot 10^{-3} s^2 + 1,0009 \cdot 10^{-4} s^3, \\
 x_2(s) &= -4,4814 \cdot 10^{-1} + 9,8029 \cdot 10^{-2} s - 6,2417 \cdot 10^{-3} s^2 + 1,3464 \cdot 10^{-4} s^3.
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Таким образом, окончательно получается следующая формула для вычисления аэродинамической составляющей демпфирования тест-образцов ромбовидного сечения:

$$\delta_a = \alpha \left\{ \frac{5,474}{\sqrt{\beta}} + \frac{5,1 \chi^{a+0,42} [x_1(s) + x_2(s) \chi^{-1,479}]}{0,12 + \chi^a} \right\}, \quad \alpha = \frac{\rho_a b}{\rho h^*(s)}.
 \tag{4.7}$$

Параметры  $a$  и  $\beta$  в (4.7) берутся такими же, как в базовой формуле (4.1).

На рис. 10 приведены амплитудные зависимости экспериментальной и расчетной аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца длиной  $L = 550$  мм, вычисленной по формуле (4.7). Представленные зависимости являются достаточно близкими между собою. Однако следует признать, что относительно малое отклонение расчетной зависимости от экспериментальной получается не на всех 10 тест-образцах, а только на

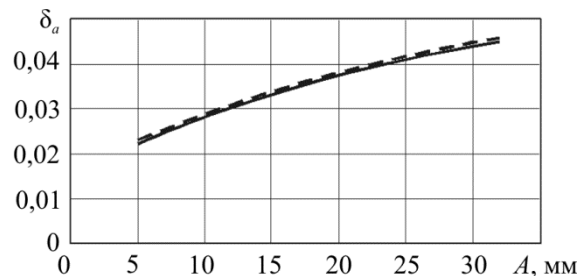


Рис. 10. Амплитудные зависимости аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца длиной  $L = 550$  мм: сплошная линия – эксперимент; пунктирная линия – формула (4.7)

Fig. 10. Amplitude dependences of the aerodynamic damping component of the test-sample with  $L = 550$  mm length: continuous line is the experiment; dashed line is the formulae (4.7)

образцах с длиной  $L = 400, 500, 550, 600, 650$  и  $700$  мм. На остальных тест-образцах различие между расчетом и экспериментом оказалось более существенным. Причину этого можно объяснить, по всей видимости, значительным разбросом параметра  $x_2$  (см. табл. 3) относительно его аппроксимации зависимостью (4.6) (рис. 11).

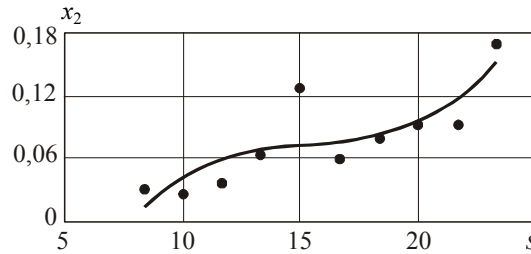


Рис. 11. Зависимость параметра  $x_2$  от удлинения  $s = L/b$  тест-образца: точки – табл. 3; линия – аппроксимация (4.6)

Fig. 11. Dependence of parameter  $x_2$  on extension  $s = L/b$  of the test-sample: dots are the table 3; line is the approximation (4.6)

В табл. 4 приведены длины  $L$  тест-образцов и соответствующие им осредненные по амплитудам относительные отклонения  $\Delta = (\delta_a - \bar{\delta}_a) / \bar{\delta}_a$  расчетной составляющей аэродинамической демпфирования  $\delta_a$  от ее экспериментального значения  $\bar{\delta}_a$ . В последней строке таблицы дано осредненное по всем тест-образцам отклонение  $\tilde{\Delta} = \sum \Delta / 10$ . Приведенные результаты свидетельствуют о пригодности формулы (4.7) для определения расчетной составляющей аэродинамического демпфирования тест-образцов ромбовидного поперечного сечения.

Таблица 4

Длины  $L$  тест-образцов, осредненные по амплитудам относительные отклонения  $\Delta = (\delta_a - \bar{\delta}_a) / \bar{\delta}_a$  и среднее отклонение  $\tilde{\Delta}$  по всем тест-образцам

Table 4

Lengths  $L$  of the test-samples averaged amplitudes of relative deviations  $\Delta = (\delta_a - \bar{\delta}_a) / \bar{\delta}_a$  and mean deviations  $\tilde{\Delta}$  for all test-samples

| $L$ , мм         | 250    | 300   | 350   | 400   | 450    | 500   | 550   | 600    | 650    | 700   |
|------------------|--------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|
| $\Delta$         | -0,185 | 0,029 | 0,184 | 0,037 | -0,084 | 0,032 | 0,018 | -0,006 | -0,047 | 0,029 |
| $\tilde{\Delta}$ | 0,0007 |       |       |       |        |       |       |        |        |       |

## Выводы

1. Разработана простая и удобная в практическом плане методика обработки виброграммы затухающих изгибных колебаний тест-образца для определения экспериментальной низшей частоты  $f$  и амплитудной зависимости ЛДК  $\delta$  тест-образца. Проведены численные эксперименты, подтверждающие эффективность и достоверность разработанной методики.

2. Показана практическая независимость демпфирующих свойств дюралюминия марки Д16АТ от амплитуды деформации  $\epsilon_0$ , что определяет целесообразность применения



данного материала для изготовления тест-образцов при идентификации аэродинамической составляющей демпфирования  $\delta_a$  тест-образца. Отмечена зависимость модуля упругости дюралюминия Д16АТ от частоты его деформирования  $f$ .

3. Разработана конечно-элементная методика определения параметра внутреннего демпфирования  $\delta^*$  тест-образца при амплитудно-независимом ЛДК  $\delta_m$  материала, в результате которой получен важный в практическом плане результат – при постоянном ЛДК материала параметр внутреннего демпфирования тест-образца не зависит от амплитуды колебаний  $A$  и равен ЛДК данного материала.

4. Разработан итерационный алгоритм определения низшей частоты колебаний  $f_1$  тест-образца в случае частотной зависимости модуля упругости материала. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность разработанного алгоритма.

5. Разработан теоретико-экспериментальный метод построения структурной формулы для вычисления аэродинамической составляющей демпфирования  $\delta_a$  тест-образца ромбовидного сечения, основанный на модификации формулы, полученной ранее для тонкой пластины постоянной толщины, с использованием экспериментальных значений  $\delta_a$  указанного тест-образца. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность полученной структурной формулы. Разработанный метод можно применять и для образцов с произвольной формой поперечного сечения с пересчетом аппроксимаций (4.6) для вычисления приведенной толщины  $h^*$  и параметров  $x_1, x_2$ .

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00667).*

## **Библиографический список**

1. Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 1. Experimental Basis / V.N. Paimushin, V.A. Firsov, I. Gynal, A.G. Egorov // *Mechanics of Composite Materials*. – 2014. – Vol. 50. – No. 2. – P. 127–136.
2. Identification of the elasticity and damping characteristics of a fiberglass based on a study of damped flexural vibrations of test samples / V.N. Paimushin, V.A. Firsov, I. Gyunal, V.M. Shishkin // *Mechanics of Composite Materials*. – 2015. – Vol. 51. – No. 3. – P. 285–300.
3. Development of an improved technique for identification of the damping properties of orthogonally reinforced composites in shear / V.N. Paimushin, V.A. Firsov, I. Gynal, V.M. Shishkin // *Mechanics of Composite Materials*. – 2016. – Vol. 52. – No. 2. – P. 133–142.
4. Identification of the Elastic and Damping Characteristics of Soft Materials Based on the Analysis of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens / V.N. Paimushin, V.A. Firsov, I. Gynal, V.M. Shishkin // *Mechanics of Composite Materials*. – 2016. – Vol. 52. – No. 4. – P. 435–454.
5. Sader J.E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // *Journal of Applied Physics*. – 1998. – Vol. 84 (1). – P. 64–76.
6. Kirstein S., Mertesdorf M., Schoenhoff M. The influence of a viscous fluid on the vibration dynamics of scanning near-field optical microscopy fiber probes and atomic force microscopy cantilevers // *Journal of Applied Physics*. – 1998. – Vol. 84 (4). – P. 1782–1790.
7. Hosaka H., Itao K., Kuroda S. Damping characteristics of beam-shaped micro-oscillators // *Sensors and Actuators A: Physical*. – 1995. – Vol. 49 (1–2). – P. 87–95.

8. Kimber M., Garimella S.V., Raman A. Local heat transfer coefficients induced by piezoelectrically actuated vibrating cantilevers // Transactions of the ASME Journal of Heat Transfer. – 2007. – Vol. 129 (9). – P. 1168–1176.
9. Kimber M., Lonergan R., Garimella S.V. Experimental study of aerodynamic damping in arrays of vibrating cantilevers // Journal of Fluids and Structures. – 2009. – Vol. 5 (8). – P. 1334–1347.
10. Shyy W., Berg M., Ljungqvist D. Flapping and flexible wings for biological and micro air vehicles // Progress in Aerospace Sciences. – 1999. – Vol. 35 (5). – P. 455–505.
11. Chen Z., Shataru S., Tan X. Modeling of biomimetic robotic fish propelled by an ionic polymer-metal composite caudal fin // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. – 2010. – Vol. 13 (5). – P. 519–529.
12. Aureli M., Kopman V., Porfiri M. Free-locomotion of underwater vehicles actuated by ionic polymer metal composites // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. – 2010. – Vol. 15 (4). – P. 603–614.
13. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение. – 1978. – 247 с.
14. Aureli M., Basaran M.E., Porfiri M. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids // Journal of Sound and Vibration. – 2012. – Vol. 331. – P. 1624–1654.
15. Sarpkaya T. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan–Carpenter numbers // Journal of Fluid Mechanics. – 1986. – Vol. 165. – P. 61–71.
16. Theoretical-Experimental Method of Determining the Drag Coefficient of a Harmonically Oscillating Thin Plate / A.G. Egorov, A.M. Kamalutdinov, V.N. Paimushin, V.A. Firsov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2016. – Vol. 57. – No. 2. – P. 275–282. DOI: 10.1134/S0021894416020103
17. Adams R.D. The damping characteristics of certain steels, cast irons and other metals // Journal of Sound and Vibration. – 1972. – Vol. 23. – No. 2. – P. 199–216.
18. Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 2. Aerodynamic Component of Damping / A.G. Egorov, A.M. Kamalutdinov, A.N. Nuriev, V.N. Paimushin // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – Vol. 50. – No. 3. – P. 267–278.
19. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: практ. руководство: пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 238 с.
20. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
21. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – Киев: Наукова думка, 1970. – 377 с.
22. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 129 с.
23. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях // Журнал технической физики. – 1938. – Т. 8, Вып. 6. – С. 483–499.
24. Хильчевский В.В., Дубенец В.Г. Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций. – Киев: Вища школа, 1977. – 252 с.
25. Пальмов В.А. Колебания упругопластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
26. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
27. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
28. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений: пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
29. Кандидов В.П., Чесноков С.С., Выслоух В.А. Метод конечных элементов в задачах динамики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 165 с.
30. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах. – М.: Metallurgia, 1969. – 330 с.
31. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
32. Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д. Численные методы. Использование MatLab. – 3-е изд. – М.: Вильямс, 2001. – 720 с.

33. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 384 с.
34. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов: пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.

## References

1. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gunal I. and Egorov A.G. Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 1. Experimental Basis. *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, no. 2, pp. 127-136.
2. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Shishkin V.M. Identification of the elasticity and damping characteristics of a fiberglass based on a study of damped flexural vibrations of test samples. *Mechanics of Composite Materials*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 285-300.
3. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I. and Shishkin V.M. Development of an improved technique for identification of the damping properties of orthogonally reinforced composites in shear. *Mechanics of Composite Materials*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 133-142.
4. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. Identification of the Elastic and Damping Characteristics of Soft Materials Based on the Analysis of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. *Mechanics of Composite Materials*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 435-454.
5. Sader J.E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope. *Journal of Applied Physics*, 1998, vol. 84(1), pp. 64-76.
6. Kirstein S., Mertesdorf M., Schoenhoff M. The influence of a viscous fluid on the vibration dynamics of scanning near-field optical microscopy fiber probes and atomic force microscopy cantilevers. *Journal of Applied Physics*, 1998, vol. 84(4), pp. 1782-1790.
7. Hosaka H., Itao K., Kuroda S. Damping characteristics of beam-shaped micro-oscillators. *Sensors and Actuators A: Physical*, 1995, vol. 49 (1-2), pp. 87-95.
8. Kimber M., Garimella S.V., Raman A. Local heat transfer coefficients induced by piezoelectrically actuated vibrating cantilevers. *Transactions of the ASME Journal of Heat Transfer*, 2007, vol. 129 (9), pp. 1168-1176.
9. Kimber M., Lonergan R., Garimella S.V. Experimental study of aerodynamic damping in arrays of vibrating cantilevers. *Journal of Fluids and Structures*, 2009, vol. 5 (8), pp. 1334-1347.
10. Shyy W., Berg M., Ljungqvist D. Flapping and flexible wings for biological and micro air vehicles. *Progress in Aerospace Sciences*, 1999, vol. 35 (5), pp. 455-505.
11. Chen Z., Shataru S., Tan X. Modeling of biomimetic robotic fish propelled by an ionic polymer-metal composite caudal fin. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2010, vol. 13 (5), pp. 519-529.
12. Aureli M., Kopman V., Porfiri M. Free-locomotion of underwater vehicles actuated by ionic polymer metal composites. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2010, vol. 15 (4), pp. 603-614.
13. Mikishev G.N. Eksperimental'nye metody v dinamike kosmicheskikh apparatov [Experimental methods in dynamics of spacecraft]. Moscow: Mashinostroenie, 1978, 247 p.
14. Aureli M., Basaran M.E., Porfiri M. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, vol. 331, pp. 1624-1654.
15. Sarpkaya T. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986, vol. 165, pp. 61-71.
16. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Paimushin V.N. and Firsov V.A. Theoretical-Experimental Method of Determining the Drag Coefficient of a Harmonically Oscillating Thin Plate. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 275-282. DOI: 10.1134/S0021894416020103.
17. Adams R.D. The damping characteristics of certain steels, cast irons and other metals. *Journal of Sound and Vibration*, 1972, vol. 23, no. 2, pp. 199-216.
18. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N., Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 2. Aerodynamic component of damping. *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 267-278.
19. Shup T. Reshenie inzhenernykh zadach na EVM: prakticheskoe rukovodstvo [Solving engineering problems using computers: a practical guide]. Moscow: Mir, 1982, 238 p.

20. Panovko Ia.G. Vnutrennee trenie pri kolebaniiaxh uprugikh system [Internal friction under oscillations of elastic systems]. Moscow: Fizmatgiz, 1960, 193 p.
21. Pisarenko G.S. Kolebaniia mekhanicheskikh sistem s uchetom nesovershennoi uprugosti materiala [The vibrations of mechanical systems taking account of imperfect elasticity of the material]. Kiev: Naukova dumka, 1970, 377 p.
22. Sorokin E.S. K teorii vnutrennego treniia pri kolebaniiaxh uprugikh system [On the internal friction theory in the oscillations of elastic systems]. Moscow: Gosstroizdat, 1960, 129 p.
23. Davidenkov N.N. O rasseianii energii pri vibratsiiaxh [On the dissipation of energy in vibrations]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 1938, vol. 8, iss. 6, pp. 483-499.
24. Khil'chevskii V.V., Dubenets V.G. Rasseianie energii pri kolebaniiaxh tonkostennykh elementov konstruksii [Energy dissipation during oscillations of thin-walled structural elements]. Kiev: Vishcha shkola, 1977, 252 p.
25. Pal'mov V.A. Kolebaniia uprugo-plasticheskikh tel [Vibrations of elastoplastic bodies]. Moscow: Nauka, 1976, 328 p.
26. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite element method in engineering science]. Moscow: Mir, 1975, 541 p.
27. Segerlind L. Primenenie metoda konechnykh elementov [Application of Finite Element Method]. Moscow: Mir, 1979, 392 p.
28. Klaf R., Penzien Dzh. Dinamika sooruzhenii [Dynamics of structures]. Moscow: Stroizdat, 1979, 320 p.
29. Kandidov V.P., Chesnokov S.S., Vysloukh V.A. Metod konechnykh elementov v zadachakh dinamiki [Finite Element Method for dynamic problems]. Moskovskij universitet, 1980, 165 p.
30. Postnikov V.S. Vnutrennee trenie v metallakh [Internal friction in metals]. Moscow: Metallurgiiia, 1969, 330 p.
31. Obratsov I.F., Savel'ev L.M., Khazanov Kh.S. Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov [The finite element method in aircraft structural mechanics]. Moscow: Vysshiaia shkola, 1985, 392 p.
32. Met'iuz Dzhon G., Fink Kurtis D. Chislennye metody. Ispol'zovanie MATLAB 3-e izdanie [Numerical methods using MATLAB, 3rd Edition]. Moscow: Izdatel'skii dom "Vil'iams", 2001, 720 p.
33. Parlett B. Simmetrichnaia problema sobstvennykh znachenii. Chislennye metody [The symmetric eigenvalue problem. Numerical methods]. Moscow: Mir, 1983, 384 p.
34. Bate K., Vil'son E. Chislennye metody analiza i metod konechnykh elementov [Numerical methods in finite element analysis]. Moscow: Stroizdat, 1982, 447 p.