Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термовязкопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 1. – С. 39–56. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.03

Bondar V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. Variant of thermoviscoplasticity theory. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 1. Pp. 39-56. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.03

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/

DOI 10.15593/perm.mech/2016.1.03

УДК 539.374

ВАРИАНТ ТЕОРИИ ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ

В.С. Бондарь, В.В. Даншин, А.А. Кондратенко

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 12 ноября 2015 г.
Принята: 1 февраля 2016 г.
Опубликована: 30 марта 2016 г.

Ключевые слова:

термовязкопластичность, комбинированное упрочнение, микронапряжения, ратчетинг, дополнительное упрочнение, накопление повреждений, охрупчивание, залечивание повреждений

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются основные положения и уравнения теории термовязкопластичности (неупругости), относящейся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении. Тензор скоростей деформаций представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой и неупругой деформаций. При этом следует отметить, что в данной теории нет условного разделения неупругой деформации на деформации пластичности и ползучести. Упругая деформация следует обобщенному закону Гука, распространенному на неизотермическое нагружение. Вводится поверхность нагружения, которая изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Текущая поверхность нагружения определяется процессом нагружения, изменяющимся во времени. Для радиуса поверхности нагружения формулируется эволюционное уравнение, учитывающее дополнительное изотропное упрочнение при непропорциональном (сложном) нагружении, а также обобщенное на неизотермическое нагружение и процессы возврата механических свойств при отжиге. В качестве параметра, характеризующего меру сложности процесса нагружения, принимается параметр Кадашевича–Мосолова, соответствующий углу между векторами скоростей деформаций и напряжений. Смещение поверхности нагружения описывается на основе модели Новожилова–Шабоши, подразумевающей, что полное смещение есть сумма смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение. Проведенный анализ петли пластического гистерезиса позволил выделить три типа микронапряжений (смещений) и сформулировать три типа эволюционных уравнений, обобщенных на неизотермическое нагружение и процессы снятия микронапряжений при отжиге. Для определения тензора скоростей неупругой деформации используется ассоциированный (градиентальный) закон течения. Для жестких и мягких режимов нагружения получены выражения для определения скорости накопленной неупругой деформации. Сформулированы условия упругого и неупругого состояний. Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводятся кинетические уравнения накопления повреждений, где в качестве энергии, расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия, равная работе микронапряжений второго типа на поле неупругих деформаций. Здесь эти кинетические уравнения обобщены на неизотермическое нагружение и процессы охрупчивания и залечивания повреждений. Выделяются материальные функции, замыкающие

© **Бондарь Валентин Степанович** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: bondar@mami.ru
Даншин Владимир Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: tm@mami.ru
Кондратенко Арина Алексеевна – аспирант, e-mail: tm@mami.ru

Valentin S. Bondar – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: bondar@mami.ru
Vladimir V. Danshin – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, e-mail: tm@mami.ru
Arina A. Kondratenko – Postgraduate Student, e-mail: tm@mami.ru

вариант теории, формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций. Приводится описание верификации вариантов теории термовязкопластичности на широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований.

VARIANT OF THERMOVISCOPLASTICITY THEORY

V.S. Bondar, V.V. Danshin, A.A. Kondratenko

Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 12 November 2015
Accepted: 1 February 2016
Published: 30 March 2016

Keywords:
thermoviscoplasticity, combined hardening, microstresses, ratcheting, additional hardening, damage accumulation, embrittlement, healing damage

ABSTRACT

Basic terms and equations of the theory of thermoviscoplasticity (inelasticity) belonging to the class of theories of flow in combined hardening are discussed. The tensor of strain rates is presented as a sum of tensors of the velocities of elastic and inelastic deformations. It should be noted that in this theory there is no conventional separation of the inelastic strain for deformation plasticity and creep. Elastic strain follows the generalized Hooke's law common to non-isothermal loading. The authors introduce a yield surface which isotropically expands or contracts and shifts to the process of loading. The current yield surface is defined by the process loading. The impact of the time factor is the process of loading too. For the radius of the yield surface it became possible to formulate the evolution equation that takes into account additional isotropic hardening under non-proportional (complex) load; and it is also generalized to non-isothermal loading processes and return to mechanical properties after annealing. We accepted parameter Kadashevich-Mosolov (corresponding to the angle between the velocity vectors of strain and stress) as a parameter describing a measure of the complexity of the process of loading,. The displacement yield surface is described on the basis of Novozhilov-Suboshi implying that the total displacement is the sum of displacements; each of them is its evolution equation. The analysis of hysteresis loops of plastic has allowed to allocate three types of microstresses (displacements) and formulate three types of evolution equations generalized to non-isothermal loading processes and relieving of microstresses during annealing. To determine the rate tensor of inelastic deformation we use the associated (gradiently) law of flow. For hard and soft loading regimes, the expressions for determining the rate of the accumulated inelastic deformation were found. The terms of elastic and inelastic states are formulated. To describe the nonlinear process of damage accumulation we introduced the kinetic equation of damage accumulation, where the energy that is required to create damage in the material is taken as the energy equal to the work of microstresses of the second type on the field of inelastic deformations. Here these kinetic equations are generalized to non-isothermal loading and the processes of embrittlement and heal the damage. Material functions closing the theory variant are specified, the basic experiment and method of identification of material functions are formulated. The description of the verification version of the theory of thermoviscoplasticity on a wide range of structural steels and alloys and programmes of experimental research are presented.

Введение

Вопросам построения математических моделей в теориях термовязкопластичности посвящено большое количество работ. Основные направления построения моделей и обширную библиографию по этому вопросу можно найти в монографиях, обзорах и отдельных работах А.А. Ильюшина [1; 2], В.В. Новожилова [3], Ю.Н. Работнова [4], И.А. Биргера [5], В.С. Бондаря [6–9], Р.А. Васина [10],Ю.И. Кадашевича [3], Л.М. Качанова [11], И.В. Кнетса [12], Ю.Г. Коротких [13], Н.Н. Малинина [14], Ю.М. Темиса [15], Кремпла [16; 17], Криега [18–20], Леметри [21], Линхольма [22], Миллера [23–25], Оно [26–29], Харта [30], Шабоши [31–36] и др.

Наибольшее распространение в практических расчетах в настоящее время нашли дифференциальные теории течения, базирующиеся на концепции комбинированного упрочнения. Среди этих вариантов теорий теории В.С. Бондаря [6–9], Ю.Г. Коротких [13] и Шабоши [31–36] являются наиболее экспериментально обоснованными и широко применяемыми для расчетов ресурса материалов в условиях термовязкопластического деформирования. Основной проблемой построения этих вариантов является формулировка достаточно адекватных эволюционных уравнений для радиуса поверхности нагружения (изотропное упрочнение), для смещения центра поверхности нагружения (анизотропное упрочнение), а также кинетических уравнений накопления повреждений для произвольных процессов термомеханических нагружений, развивающихся в реальном времени.

Для описания изменения радиуса поверхности нагружения с учетом дополнительного изотропного упрочнения, неизотермического нагружения и процессов возврата механических свойств при отжиге принимается эволюционное уравнение, предложенное в работах [6, 7, 9], где в качестве меры сложности процесса непропорционального нагружения принимается параметр Кадашевича–Мосолова [37]. Для описания смещения поверхности нагружения используется модель Новожилова–Шабоши [38, 39], подразумевающая, что полное смещение есть сумма смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение. В качестве таких уравнений в настоящей работе принимаются уравнения, аналогичные уравнениям Ишлинского–Прагера [40, 41], Амстронга–Фредерика–Кадашевича [42, 43] и Оно–Ванга [44], обобщенные на неизотермическое нагружение и процессы снятия микронапряжений при отжиге. Для описания нелинейных процессов накопления повреждений формулируется кинетическое уравнение накопления повреждений и эволюционное уравнение изменения энергии разрушения, обобщенные на неизотермическое нагружение и процессы охрупчивания и залечивания повреждений. Для определения материальных функций, замыкающих вариант теории термовязкопластичности, формулируются базовый эксперимент и метод идентификации [6–9, 45, 46] материальных функций. Приводится описание верификации [6, 8, 45–49] варианта теории термовязкопластичности.

1. Основные положения и уравнения теории

Материал однороден и начально изотропен. Рассматриваются только поликристаллические конструкционные стали и сплавы. В процессе термовязкопластического деформирования в материале может возникать только неупругая деформационная анизотропия. Рассматриваются малые деформации при температурах, когда нет фазовых превращений, и скоростях деформаций, когда динамическими эффектами можно пренебречь. Случаи больших градиентов температур не рассматриваются. Рассматриваются шестимерные пространства напряжений и деформаций.

Тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой ε_{ij}^{e} и неупругой ε_{ij}^{p} деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}. \tag{1}$$

Упругие деформации следуют обобщенному закону Гука:

$$\begin{gathered} \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = \frac{1}{E}\left[\dot{\sigma}_{ij} - \nu\left(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}\right)\right] + \alpha_{ij}^{\varepsilon T}\,\dot{T}, \\ \alpha_{ij}^{\varepsilon T} = \alpha_T\delta_{ij} - \frac{1}{E^2}\left[\sigma_{ij} - \nu\left(3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}\right)\right]\frac{dE}{T} - \frac{1}{E}\left(3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}\right)\frac{d\nu}{dT}, \end{gathered} \tag{2}$$

где E, ν, α_T – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент температурного расширения, являющиеся функциями температуры *T*; σ_{ij} – тензор напряжений; $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ – среднее напряжение; δ_{ij} – символ Кронекера ($\sigma_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Полагается, что в пространстве составляющих тензора напряжений существует поверхность нагружения, разделяющая области упругого и неупругого состояний. Поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Начальная поверхность нагружения не имеет смещения, а ее размер (радиус) равен пределу ползучести. Текущая поверхность нагружения определяется процессом нагружения, изменяющимся во времени. Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f\left(\sigma_{ij}\right) = \frac{3}{2}\left(s_{ij} - a_{ij}\right)\left(s_{ij} - a_{ij}\right) - C^2 = 0. \tag{3}$$

Здесь s_{ij} – девиатор напряжений; a_{ij} – девиатор смещения (микронапряжений, добавочных напряжений, остаточных микронапряжений [3, 5]); C – размер (радиус) поверхности нагружения. Тензор a_{ij} характеризует анизотропное (направленное) упрочнение. Скаляр C отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения и характеризует изотропное упрочнение. Тензор a_{ij} и скаляр C являются функционалами процесса нагружения.

Для скорости изменения радиуса поверхности нагружения принимается следующее уравнение:

$$\dot{C} = q_\varepsilon\, \dot{\varepsilon}^p_{u*} + q_T \dot{T} - q_R. \tag{4}$$

Здесь $\dot{\varepsilon}^p_{u*}$ – интенсивность скоростей неупругой деформации (скорость накопленной неупругой деформации); q_ε, q_T, q_R – определяющие функции, которые выражаются через материальные функции, подлежащие экспериментальному определению. По знаку q_ε определяется состояние циклического упрочнения $\left(q_\varepsilon > 0\right)$, состояние циклической стабилизации $\left(q_\varepsilon = 0\right)$ и состояние разупрочнения $\left(q_\varepsilon < 0\right)$. Параметр q_T обеспечивает неизотермический переход, а параметр q_R – возврат механических свойств при отдыхе или отжиге. Радиус поверхности нагружения может быть меньше начального в случае циклического разупрочнения материала.

Смещение поверхности нагружения описывается на основе модели Новожилова–Шабоши [38, 39], подразумевающей, что полное смещение есть сумма смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение,

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{M} a_{ij}^{(m)}. \tag{5}$$

Проведенный анализ [46] позволил выделить три типа микронапряжений (смещений) и сформулировать три типа эволюционных уравнений, обобщенных на неизотермическое нагружение и процессы, развивающиеся в реальном времени (снятие микронапряжений при отдыхе и отжиге).

Для микронапряжений первого типа принимается следующее уравнение (аналог уравнения Ишлинского–Прагера [40, 41]):

$$\dot{a}_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} g^{(1)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + g_a^{T(1)} a_{ij}^{(1)} \dot{T} - g_R^{(1)} a_{ij}^{(1)}. \tag{6}$$

Здесь $g^{(1)}, g_a^{T(1)}, g_R^{(1)}$ – определяющие функции, выражающиеся через экспериментально определяемые материальные функции.

Для микронапряжений второго типа принимается следующее эволюционное уравнение (аналог уравнения Амстронга–Фредерика–Кадашевича [42, 43]):

$$\dot{a}_{ij}^{(2)} = \frac{2}{3} g^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + g_a^{(2)} a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{u*}^{p} + g_a^{T(2)} a_{ij}^{(2)} \dot{T} - g_R^{(2)} a_{ij}^{(2)}. \tag{7}$$

Здесь $g^{(2)}, g_a^{(2)}, g_a^{T(2)}, g_R^{(2)}$ – определяющие функции, выражающиеся через экспериментально определяемые материальные функции.

Для микронапряжений третьего типа принимаются следующие эволюционные уравнения (аналог уравнений Оно–Ванга [9, 44, 46, 48]):

$$\dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + g_a^{T(m)} a_{ij}^{(m)} \dot{T} - g_R^{(m)} a_{ij}^{(m)}. \tag{8}$$

Здесь $g^{(m)}, g_a^{T(m)}, g_R^{(m)}$ – определяющие функции, выражающиеся через экспериментально определяемые материальные функции.

Неупругие деформации определяются на основе ассоциированного с поверхностью (3) закона течения следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \lambda = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^{*}}{\sigma_u^{*}} \dot{\varepsilon}_{u*}^{p}. \tag{9}$$

Здесь $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = s_{ij} - a_{ij}$ – девиатор активных напряжений [3].

Дифференцируя уравнение (3) по времени, подставляя в полученное выражение (4)–(9) и далее разрешая относительно скорости накопленной неупругой деформации $\dot{\varepsilon}_{u*}^{p}$, можно получить следующее уравнение для скорости накопленной неупругой деформации при мягком нагружении, т.е. при заданных напряжениях:

$$\dot{\varepsilon}_{u*}^{p} = \frac{1}{E_*} \left[\frac{3}{2} \frac{s_{ij}^{*} \dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^{*}} - B^T \dot{T} + B^R \right], \tag{10}$$

$$E_* = q_\varepsilon + g + g_a^{(2)} a_u^{(2)*},$$

$$B^T = q_T + \sum_{m=1}^{M} g_a^{T(m)} a_u^{(m)*},$$

$$B^R = q_R + \sum_{m=1}^{M} g_a^{R(m)} a_u^{(m)*},$$

$$a_u^{(m)*} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^{*} a_{ij}^{(m)}}{\sigma_u^{*}} \ \left(m = 1, ..., M \right), \ g = \sum_{m=1}^{M} g^{(m)}.$$

Для получения уравнения при жестком нагружении (при заданных деформациях) на основании (1), (2) следует выражение

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left[\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} - \alpha_{ij}^{\varepsilon T}\dot{T} + \frac{\nu}{E}3\dot{\sigma}_0\delta_{ij}\right]. \quad (11)$$

Далее подставляя (11) в (10) и разрешая относительно $\dot{\varepsilon}_{u*}^{p}$, можно получить следующее уравнение для скорости накопленной неупругой деформации при жестком нагружении:

$$\dot{\varepsilon}_{u*}^{p} = \frac{1}{E_* + 3G}\left[3G\frac{s_{ij}^{*}\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \alpha_{ij}^{\varepsilon T}\,\dot{T}\right)}{\sigma_u^{*}} - B^T\dot{T} + B^R\right]. \quad (12)$$

Здесь $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига. Для смешанных режимов нагружения уравнения для $\dot{\varepsilon}_{u*}^{p}$ приводятся в работах [6–9, 45].

Условия упругого и неупругого состояний имеют [6–9] следующий вид:

$$\begin{gathered}\sigma_u^{*} < C \bigcup \dot{\varepsilon}_{u*}^{p} \le 0 \text{ – упругость,}\\ \sigma_u^{*} = C \bigcap \dot{\varepsilon}_{u*}^{p} > 0 \text{ – неупругость.}\end{gathered} \quad (13)$$

Здесь скорость накопленной неупругой деформации задается выражениями (10) или (12) или любым другим выражением, связывающим скорость накопленной неупругой деформации и скорости напряжений и деформаций (смешанные режимы нагружения).

Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводится кинетическое уравнение накопления повреждений, базирующееся на энергетическом принципе, где в качестве энергии, расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия, равная работе микронапряжений второго типа на поле неупругих деформаций. Это уравнение аналогично [46], но здесь оно обобщено на неизотермическое нагружение и процессы залечивания и охрупчивания. Тогда кинетическое уравнение накопления повреждений и эволюционное уравнение для энергии разрушения будут иметь следующий вид:

$$\dot{\omega} = \alpha\omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\frac{a_{ij}^{(2)}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}}{W} - g_\omega\omega, \quad (14)$$

$$\dot{W} = g_W^T\dot{T} - g_W W. \quad (15)$$

Здесь α, g_ω, g_W^T, g_W – определяющие функции, выражающиеся через экспериментально определяемые материальные функции. Функция $\alpha\left(a_u^{(2)}, T\right)$ характеризует нелинейность процесса накопления повреждений; функция $g_\omega\left(\sigma_{ii}, T\right)$ описывает процесс залечивания повреждений; функция $g_W^T\left(W, T\right)$ обеспечивает неизотермический переход; функция $g_W\left(\sigma_u, T\right)$ описывает процесс охрупчивания. Критерием разрушения будет достижение повреждением предельного значения, обычно принимаемого равным единице.

2. Связь определяющих функций с материальными

В случае отсутствия дополнительного изотропного упрочнения определяющие функции для радиуса поверхности нагружения выражаются через материальные функции следующим образом [6, 7, 9]:

$$q_\varepsilon = \frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon^p_{u*}}, \quad q_T = \frac{C}{C_p}\frac{\partial C_p}{\partial T}, \; q_R = q_\varepsilon P_c. \tag{16}$$

Здесь $C_p\left(T, \varepsilon^p_{u*}\right)$ – функция изотропного упрочнения; $P_c\left(T, C, \omega\right)$ – функция изотропной ползучести.

Для описания дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональном (сложном) нагружении определяющая функция q_ε принимает следующий вид [7, 9]:

$$q_\varepsilon = \frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon^p_{u*}} + q_{\varepsilon A}, \tag{17}$$

где ε^p_{u*} – длина дуги траектории неупругой деформации (накопленная неупругая деформация); $q_{\varepsilon A}$ – описывает дополнительное изотропное упрочнение. Для $q_{\varepsilon A}$ принимается следующее выражение [7–9, 50]:

$$q_{\varepsilon A} = \vartheta_A\left(C_A - C\right), \quad \vartheta_A = \left(1-A\right)\vartheta_0 + A\vartheta_1, \quad C_A = \left(1-A\right)C_0 + AC_1. \tag{18}$$

Здесь $\vartheta_A\left(A, T\right)$ характеризует интенсивность (скорость) дополнительного упрочнения или разупрочнения, а $C_A\left(A, \varepsilon^p_{u*}, T\right)$ – величину дополнительного упрочнения или разупрочнения; A – параметр (мера) непропорциональности нагружения. Параметр C_0 при упрочнении и разупрочнении принимает различные значения, но можно с незначительной погрешностью принять, что при упрочнении и разупрочнении

$$C_0 = C_p. \tag{19}$$

Для параметра C_1, характеризующего дополнительное упрочнение, можно принять зависимость в долях от C_p, т.е.

$$C_1 = d_1 C_p. \tag{20}$$

Здесь $\vartheta_0\left(T\right), \vartheta_1\left(T\right), d_1\left(T\right)$ – модули дополнительного упрочнения и разупрочнения.

В качестве параметра непропорциональности принимается параметр Кадашевича–Мосолова [37], обоснование выбора которого проведено в работе [8],

$$A = 1 - \left(\frac{\dot{e}_{ij}\dot{s}_{ij}}{\dot{\varepsilon}_{u*}\dot{\sigma}_{u*}}\right)^2, \; \dot{\varepsilon}_{u*} = \left(\frac{2}{3}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}, \; \dot{\sigma}_{u*} = \left(\frac{3}{2}\dot{s}_{ij}\dot{s}_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Здесь $\dot{e}_{ij}$, $\dot{s}_{ij}$ – девиаторы скоростей деформаций и напряжений.

Далее рассматриваются определяющие функции, входящие в эволюционные уравнения для смещения поверхности нагружения.

Для определяющей функции $g^{(1)}$ с учетом эффекта вышагивания (ratcheting) петли пластического гистерезиса при мягком несимметричном циклическом нагружении и эффекта посадки петли пластического гистерезиса при жестком несимметричном циклическом нагружении и на основании принципа симметрии циклических свойств [47] принимается следующее выражение:

$$g^{(1)} = E_a\left(\varepsilon^p_{u*}, T\right) = E_{ao} / \left[1 + K_E\left(\varepsilon^p_{u*}\right)^{n_E+1}\right]. \tag{22}$$

Здесь $E_{ao}(T)$ – модуль анизотропного упрочнения; $K_E\left(T\right)$, $n_E\left(T\right)$ – модули вышагивания.

Для определяющих функций $g^{(2)}, g_a^{(2)}, g^{(m)}$ $\left(m = 3,...M\right)$ имеют место [6–9] следующие выражения:

$$\begin{gathered} g^{(2)} = \beta\sigma_a\,,\; g_a^{(2)} = -\beta, \\ g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)}\sigma_a^{(m)}, \\ 0,\ \text{если}\ a_u^{(m)} \ge \sigma_a^{(m)} \cap a_{ij}^{(m)}\, s_{ij}^* > 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь $\beta\left(T\right), \sigma_a\left(T\right), \beta^{(m)}$ и $\sigma_a^{(m)}\left(T\right)$ $\left(m = 3,...M\right)$ – модули анизотропного упрочнения, определяемые экспериментально.

Для определяющих функций $g_a^{T(m)}$ $\left(m = 1...M\right)$ имеют место [6–9, 51] следующие выражения:

$$g_a^{T(1)} = \frac{1}{E_{ao}}\frac{dE_{ao}}{dT},\quad g_a^{T(2)} = \frac{1}{\sigma_a}\frac{d\sigma_a}{dT},\quad g_a^{T(m)} = \frac{1}{\sigma_a^{(m)}}\frac{d\sigma_a^{(m)}}{dT}\ \left(m = 3...M\right). \tag{24}$$

Для получения выражений, связывающих определяющие функции $g_R^{(m)}$ $\left(m = 1...M\right)$ с материальными, далее рассматривается состояние установившейся ползучести в условиях одноосного напряженного состояния. При изотермическом одноосном нагружении эволюционные уравнения для радиуса и смещений поверхности нагружения принимают следующий вид:

$$\dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}^p - q_R, \tag{25}$$

$$\begin{gathered} \dot{a}^{(1)} = g^{(1)}\,\dot{\varepsilon}^p - g_R^{(1)}\,a^{(1)}, \\ \dot{a}^{(2)} = g^{(2)}\,\dot{\varepsilon}^p + g_a^{(2)} a^{(2)}\dot{\varepsilon}^p - g_R^{(2)}\,a^{(2)}, \\ \dot{a}^{(m)} = g^{(m)}\,\dot{\varepsilon}^p - g_R^{(m)}\,a^{(m)}\ \left(m = 3,...,M\right). \end{gathered} \tag{26}$$

В условиях установившейся ползучести имеют место следующие соотношения [6, 7, 9]:

$$\dot{C} = 0,\ \dot{a}^{(m)} = 0 \qquad \left(m = 1,...M\right) \qquad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}^p_{st} = P_a = P_C. \tag{27}$$

Далее на основании (25)–(27) можно получить следующие выражения для определяющих функций $g_R^{(m)}$ $\left(m=1...M\right)$:

$$q_R = q_\varepsilon P_C, \tag{28}$$

$$g_R^{(1)} = g^{(1)} P_a / a_u^{(1)}, \tag{29}$$

$$q_R^{(2)} = \left(g^{(2)} + g_a^{(2)} a_u^{(2)}\right) P_a / a_u^{(2)}, \tag{30}$$

$$g_R^{(m)} = g^{(m)} P_a / a_u^{(m)} \quad \left(m = 3,...,M\right). \tag{31}$$

Здесь $P_C\left(T, C, \omega\right)$ – функция изотропной ползучести; $P_a\left(T, a_u, \omega\right)$ [6, 7, 9] – функция анизотропной ползучести. Для описания разупрочнения при ползучести (третья стадия ползучести) функции P_C и P_a принимаются зависящими от повреждения ω.

Залечивание материала зависит от характера напряженного состояния. При одноосном сдвиге и растяжении залечивания нет, а при сжатии есть, и чем больше сжатие, тем более интенсивно залечивание материала. Поэтому принимается, что определяющая функция g_ω зависит от первого инварианта тензора напряжений [6, 7, 9], т.е.

$$g_\omega = \lambda\left(T, \sigma_{ii}\right). \tag{32}$$

Охрупчивание материала принимается зависящим от уровня напряжений [6, 7, 9], т.е. от второго инварианта девиатора напряжений или интенсивности напряжений,

$$g_W = \rho\left(T, \sigma_u\right). \tag{33}$$

Обоснование зависимости охрупчивания от интенсивности напряжений приводится в работе [6].

Для определяющей функции g_W^T, обеспечивающей неизотермический переход, имеет место следующее выражение [6, 7, 9]:

$$g_W^T = \frac{W}{W_0} \frac{d W_0}{dT}, \tag{34}$$

где $W_0\left(T\right)$ – начальная энергия разрушения, определяемая из опытов на малоцикловую усталость.

Определяющая функция α, характеризующая нелинейность процесса накопления повреждений, определяется следующим образом [46]:

$$\alpha = \left(\sigma_a / a_u^{(2)}\right)^{n_\alpha}, \tag{35}$$

где $n_\alpha\left(T\right)$ – параметр нелинейности процесса накопления повреждений.

3. Материальные функции, базовый эксперимент и метод идентификации

Вариант теории термовязкопластичности замыкают следующие материальные функции:

$E(T)$, $\nu(T)$, $\alpha_T(T)$ – упругие параметры;

$E_{ao}(T)$, $\sigma_a(T)$, $\beta(T)$ – модули анизотропного упрочнения;

$\sigma_a^{(m)}(T)$, $\beta^{(m)}(T)$ $(m = 3,...M)$ – модули анизотропного упрочнения, соответствующие аналогу модели Оно–Ванга;

$K_E(T)$, $n_E(T)$ – модули вышагивания;

$C_p\left(T,\ \varepsilon_{u*}^p\right)$ – функция изотропного упрочнения;

$\vartheta_o(T)$, $\vartheta_1(T)$, $d_1(T)$ – модули дополнительного изотропного упрочнения;

$W_0(T)$ – начальная энергия разрушения;

$P_C(T,C,\omega)$ – функция изотропной ползучести;

$P_a(T,a_u,\omega)$ – функция анизотропной ползучести;

$\lambda(T,\sigma_{ii})$ – модуль залечивания;

$\rho(T,\sigma_u)$ – модуль охрупчивания.

Функции изотропной и анизотропной ползучести, а также модули залечивания и охрупчивания аппроксимируются следующими выражениями [6, 7, 9]:

$$\begin{gathered}
P_C(T,C,\omega) = \exp(b_c)\left|C - C_{po}\right|^{n_c}(1-\omega)^{-m_\omega},\\
P_a(T,a_u,\omega) = \exp(b_a)(a_u)^{n_a}(1-\omega)^{-m_\omega},\\
\lambda(T,\sigma_{ii}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \sigma_{ii} \ge 0,\\ \exp(b_\lambda)\left|\sigma_{ii}\right|^{n_\lambda}, \text{ если } \sigma_{ii} < 0,\end{cases}\\
\rho(T,\sigma_u) = \exp(b_\rho)(\sigma_u)^{n_\rho}.
\end{gathered} \tag{36}$$

Здесь $b_c(T)$, $n_c(T)$, $b_a(T)$, $n_a(T)$, $m_\omega(T)$ – параметры изотропной и анизотропной ползучести; $C_{po}(T)$ – предел ползучести; $b_\lambda(T)$, $n_\lambda(T)$, $b_\rho(T)$, $n_\rho(T)$ – параметры залечивания и охрупчивания.

Для термопластических процессов материальные функции определяются по результатам испытаний в условиях упругопластического состояния при различных уровнях температуры. Базовый эксперимент включает в себя следующий набор данных:

– упругие параметры, которые определяются традиционными методами;

– диаграмма пластического деформирования при растяжении до деформации $0,05-0,1$;

– циклические диаграммы при симметричном растяжении-сжатии при постоянной амплитуде деформации $0,0075-0,015$;

– циклические диаграммы при несимметричном растяжении-сжатии при постоянной амплитуде деформации $0,005-0,01$ и средней деформации цикла $0,05-0,01$;

– данные по малоцикловой усталости при одноблочном и двухблочном жестком симметричном циклическом нагружении;

– диаграмма максимальных значений интенсивности напряжений на цикле от накопленной неупругой деформации при непропорциональном циклическом нагружении по траектории деформаций в виде окружности радиусом $0,0075-0,015$ до стабилизации дополнительного изотропного упрочнения и последующем пропорциональном циклическом нагружении до стабилизации разупрочнения;

– данные по усталостному разрушению при непропорциональном циклическом нагружении по траекториям деформаций в виде окружностей с различными радиусами.

Для описания термовязкопластических процессов деформирования и накопления повреждений необходимы:

– данные по ползучести при постоянном напряжении растяжения: зависимость минимальной скорости ползучести от напряжения во всем диапазоне изменения напряжений – от кратковременной до весьма длительной ползучести;

– диаграмма кратковременной ползучести при постоянном напряжении растяжения вплоть до разрушения;

– данные по длительной прочности: кривая длительной прочности при растяжении, включающая все три участка, и кривая длительной прочности при сжатии, соответствующая только второму участку.

Метод идентификации материальных функций по данным базового эксперимента подробно изложен в работах [6–9, 45, 46], в которых для ряда конструкционных сталей и сплавов приведены материальные функции.

4. Верификация варианта теории термовязкопластичности

Далее рассматривается верификация на основе сопоставления расчетных и экспериментальных результатов для различных процессов пропорционального (простого) и непропорционального (сложного), изотермического и неизотермического режимов нагружения.

В работах [6, 8, 45–49] приводится верификация варианта теории при пропорциональных стационарных и нестационарных, симметричных и несимметричных, жестких и мягких режимах циклического изотермического нагружения. Иллюстрируется адекватное описание эффекта посадки петли пластического гистерезиса при жестком несимметричном циклическом нагружении, а также эффекта вышагивания (ratcheting) при мягком несимметричном циклическом нагружении. В этих же работах анализируются процессы нелинейного накопления повреждений при одноблочных и многоблочных режимах жестких и мягких циклических нагружений. Рассматриваются процессы от малоцикловой до многоцикловой усталости (10^1-10^6 циклов).

Неизотермические процессы при пропорциональном (простом) циклическом нагружении рассматриваются в работах [6, 45]. Показано адекватное описание теорией экспериментальных циклических диаграмм и разрушения в условиях малоцикловой усталости.

Процессы непропорционального (сложного) нагружения достаточно полно анализируются в монографии [8], где рассматриваются плоские и пространственные траектории деформаций в широком диапазоне кривизн и круток от малых до больших. В этой же монографии показано адекватное описание теорией эффекта дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональных (сложных) циклических нагружениях. Там же рассматривается разрушение при циклических пропорциональных и непропорциональных режимах нагружения от малоцикловой до многоцикловой усталости. Снижение долговечности в условиях непропорционального циклического нагружения по сравнению с пропорциональным при одинаковых размахах деформаций достигает почти порядка, что показывают как эксперимент, так и расчет.

Верификация варианта теории для процессов термовязкопластического деформирования и разрушения рассматривается в работах [6, 45]. Так, например, исследование процессов неупругого деформирования при сложном нагружении по двухзвенным траекториям напряжений проводилось [6, 45] на нержавеющей стали при температуре 650 °C. Каждый цикл нагружения состоял из быстрого кручения, выдержки, быстрой разгрузки, быстрого совместного кручения и растяжения, выдержки и последующей разгрузки (под быстрыми нагружениями подразумеваются нагружения, при которых не успевает проявляться ползучесть). Таким образом, реализовывалась циклическая ползучесть в условиях сложного нагружения. Анализировались [6] и процессы сложного нагружения по двухзвенным траекториям деформаций с различными скоростями деформирования в условиях повышенной температуры.

Исследовались [6, 45] процессы циклического деформирования и малоцикловой прочности при изотермических и неизотермических синфазных и противофазных режимах нагружения в условиях повышенных температур и различных длительностей циклов.

Сравнивались [45] расчетные и экспериментальные кривые длительной прочности, включающие все три участка.

Рассматривалась [6] малоцикловая прочность конструкций при теплосменах, в которых реализовывалось сложное неизотермическое нагружение.

Соответствие расчетных и экспериментальных результатов для широкого спектра конструкционных сталей и сплавов и режимов нагружения говорит о достаточной работоспособности предложенного варианта теории термовязкопластичности.

Заключение

Сформулированы основные положения и уравнения варианта теории термовязкопластичности, адекватно описывающие кинетику напряженно-деформированного состояния и нелинейные процессы накопления повреждений при произвольном сложном неизотермическом нагружении в условиях повторности и длительности термомеханических воздействий. Выделены материальные функции, замыкающие теорию, сформулированы базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций. Приводится описание верификации варианта теории термовязкопластичности на широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований.

Следует отметить, что здесь в рамках одной теории описываются экспериментально полученные в последнее время закономерности сложного нагружения как по плоским, так и по пространственным траекториям деформаций, эффекты посадки и вышагивания (ratcheting) петли пластического гистерезиса при несимметричных циклических нагружениях, закономерности неизотермического нагружения и нелинейного суммирования повреждений, а также эффекты дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональных циклических нагружениях.

Вариант теории термовязкопластичности описывает: три стадии ползучести; три участка кривой длительной прочности; знакопеременные и нестационарные процессы ползучести; процессы охрупчивания и залечивания повреждений; взаимное влияние ползучести, пластичности и повреждения и т.д.

Адекватное описание процессов термовязкопластического деформирования и разрушения конструкционных сталей и сплавов при разнообразных режимах нагружения иллюстрирует широкие возможности варианта теории термовязкопластичности.

Библиографический список

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.

2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

3. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 224 с.

4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Физматгиз, 1966. – 752 с.

5. Термопрочность деталей машин: справочник / под ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с.

6. Бондарь В.С. Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкций при сложном неизотермическом нагружении: дис. … д-ра физ.-мат. наук. – М.: Изд-во Моск. гос. машиностроит. ун-та (МАМИ), 1990. – 314 с.

7. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.

8. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: Физматлит, 2008. – 176 с.

9. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.

10. Васин Р.А. Экспериментально-теоретическое исследование определяющих соотношений в теории упругопластических процессов: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 36 с.

11. Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: Физматлит. 1960. – 455 с.

12. Кнетс И.В. Основные современные направления в математической теории пластичности. – Рига: Зинатне, 1971. – 147 с.

13. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.

14. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.

15. Темис Ю.М. Моделирование пластичности и ползучести конструкционных материалов ГТД // Приоритеты развития отечественного автотракторостроения и подготовки инженерных научных кадров: материалы 49-й Междунар. науч.-техн. конф. ААИ. Школа-семинар «Современные модели термовязкопластичности». Ч. 2. – М.: Изд-во Моск. гос. машиностроит. ун-та (МАМИ), 2005. – С. 25–76.

16. Krempl E. The influence of state of stress on low-cycle fatigue of structural materials: a literature survey and interpretive report // Amer. Soc. Test. and Mater. Spec. Techn.Publ. – 1974. – No. 549. – P. 1–46.

17. Krempl E., Lu H. The Hardening and Dependent Behavior of Fully Annealed AISI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial in Phase and Out – of – Phase Strain Cycling at Room Temperature // ASME Journal of Engineering Materials and Technology. – 1984. – Vol. 106. – P. 376–382.

18. Krieg R.D. A. Practical Two Surface plasticity Theory // Journal of Applied Mechanics. – 1975. – Vol. 42. – P. 641–646.

19. Krieg R.D., Swearengen J.C., Rhode R.W. A physicallybased internal variable model for rate-dependent plasticity // Proc. ASME/CSME PVP Conference. – 1978. – P. 15–27.

20. Krieg R.D., Krieg D.B. Accurate of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model // Trans. ASME. – 1977. – Vol. 199. – No. 4. – P. 510–515.

21. Lemaitre J. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. – 1985. – Vol. 51. – No. 1–3. – P. 31–49.

22. Constitutive modeling for isotropic materials (HOST) / U.S. Lindholm, K.S. Chan, S.R. Bodner, R.M. Weber, K.P. Walker, B.N. Cassenti // Second Annual Contract Report. NASA CR. 174980. – 1985.

23. Miller A.K. A unified approach to predicting interactions among creep, cyclic plasticity, and recovery // Nuclear Eng. and Design. – 1978. – Vol. 51. – P. 35–43.

24. Miller K.J., Brown M.W Multiaxial fatigue: a brief review // Adv. Fract. Res. Proc. 6^{ts} Int. Conf. New Delhi 4–10 Dec. – 1984. – Vol. I. – P. 31–56.

25. Miller A.K., Tanaka T.G. NONSS: A new method for integrating unified constitutive equations ander complex histories // Trans. ASME: J. Eng. Mater. and Technol. – 1988. – Vol. 110. – No. 3. – P. 205–211.

26. Ohno N. A constitutive model of cyclic plasticity with a nonhardening strain region // J. Appl. Mech. – 1982. – Vol. 49. – P. 721–727.

27. Ohno N. Recent topics in constitutive modeling of cyclic and viscoplasticity // Appl. Mech. rev. – 1990. – Vol. 43. – P. 283.

28. Ohno N., Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rulle to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions // Int. Journal of Plasticity. – 1991. – Vol. 7. – P. 879–891.

29. Ohno N., Wang J.D. Kinematics hardening rule with critical state of dynamic recovery. Parts I and II. // Int. Journal of Plasticity. – 1993. – Vol. 9. – P. 375–403.

30. Харт. Уравнения состояния для неупругой деформации металлов // Теоретические основы инженерных расчетов: тр. ASME. – 1976. – № 3. – С. 1–7.

31. Chaboche J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // Inter. J. of Plasticity. – 1989. – Vol. 5. – No. 3. – P. 247–302.

32. Chaboche J.L. Thermodynamically based viscoplastic constitutive equations: theory versus experiment // ASME Winter Annual Meeting. – GA (USA). – Atlanta, 1991. – P. 1–20.

33. Chaboche J.L. Cyclic viscoplastic constitutive equations, parts I and II // ASME J. of Applied Mechanics. – 1993. – Vol. 60. – P. 813–828.

34. Chaboche J.L., Rousselier G. On the plastic an viscoplastic constitutive equations // ASME J. of Pres. Vessel Techn. – 1983. – Vol. 105. – P. 153–164.

35. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.

36. Нелинейная механика материалов / Ж. Бессон, Ж. Каето, Ж.-Л. Шабоши, Т.С. Форест. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397 с.

37. Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б. О соотношениях эндохронной теории пластичности с «новой» мерой внутреннего времени при сложном циклическом нагружении // Технология легких сплавов. – 1990. – № 3. – С. 32–36.

38. Новожилов В.В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений // ПММ. – 1964. – Т. 28. – Вып. 3. – С. 393–400.

39. Chaboche J.-L., Dang–Van K., Cordier G. Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel // Proceedings of the 5th International Conference on SMiRT. Div L. – Berlin, 1979. – Paper No. L. 11/3.

40. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. – 1954. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 314–324.

41. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic colids // ASME J. Appl. Mech. – 1956. – Vol. 23. – P. 493–496.

42. Amstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical represention of the multiaxial bauscinger effect // CEGB Report No. RD/B/N/ 731. – 1966.

43. Кадашевич Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. – Вып. 6. – С. 39–45.

44. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery. Part 1: Formulations and basic features for ratcheting behavior // International Journal of Plasticity. – 1993. – Vol. 9. – P. 375–390.

45. Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов неизотермического неупругого деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах: дис. … канд. физ.-мат. наук. – М.: Изд-во Моск. гос. машиностроит. ун-та (МАМИ), 2005. – 108 с.

46. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 125–152.

47. Бондарь В.С. Некоторые новые результаты исследования пластичности материалов при сложном нагружении // Упругость и неупругость. – М.: ЛЕНАНД, 2006. – С. 94–109.

48. Бондарь В.С., Бурчаков С.В., Даншин В.В. Математическое моделирование процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов при циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. Вып. 72. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2010. – С. 18–27.

49. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Нелинейные процессы накопления повреждений при нестационарных циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности. – 2012. – Вып. 75, Ч. 2. – С. 96–104.

50. Benallal A., Marquis D. Constitutive equations for no proportional cyclic elasto-viscoplasticity // Journal of Engineering Materials and Technology. – 1987. – Vol. 109. – P. 326–337.

51. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 2. – С. 21–35. DOI: 10.15593 / perm.mech / 2015.2.02.

References

1. Il'iushin A.A. Plastichnost'. Osnovy obshchei matematicheskoi teorii [Plasticity. Fundamentals of General mathematical theory]. Moscow: Akademiia nauk SSSR, 1963. 271 p.

2. Il'iushin A.A. Mekhanika sploshnoi sredy [Continuum mechanics]. Moscovskii gosudarstvennyi universitet, 1990. 310 p.

3. Novozhilov V.V., Kadashevich Ju.I. Mikronapriazheniia v konstruktsionnykh materialakh [Microstresses in structural materials]. Leningrad: Mashinostroenie, 1990. 224 p.

4. Rabotnov Ju.N. Polzuchest' elementov konstruktsii [The creep of structural elements]. Moscow: Fizmatgiz, 1966. 752 p.

5. Birgera I.A., Shorra B.F. Termoprochnost' detalei mashin: Spravochnik [Termoprochnost machine parts: Directory]. Moscow: Mashinostroenie, 1975. 455 p.

6. Bondar' V.S. Neuprugoe povedenie i razrushenie materialov i konstruktsii pri slozhnom neizotermicheskom nagruzhenii [Inelastic behavior and fracture of materials and structures with complex non-isothermal loading]. Thesis of doctor’s degree dissertation. Moscovskii mashinostroitel’nyi universitet, 1990. 314 p.

7. Bondar V.S. Neuprugost'. Varianty teorii [Inelasticity. Variants of the theory]. Moscow: Fizmatlit, 2004. 144 p.

8. Bondar V.S., Danshin V.V. Plastichnost'. Proportsional'nye i neproportsional'nye nagruzheniia [Plasticity. Proportional and disproportionate loading]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 176 p.

9. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013. 194 p.

10. Vasin R.A. Eksperimental'no-teoreticheskoe issledovanie opredeliaiushchikh sootnoshenii v teorii uprugoplasticheskikh protsessov [Experimental and theoretical study of the constitutive relations in the theory of elastoplastic processes]. Abstract of the thesis of the candidate of physical and mathematical sciences. Moscovskii gosudarstvennyi universitet, 1987. 36 p.

11. Kachanov L.M. Teoriia polzuchesti [Theory of creep]. Moscow: Fizmatlit, 1960. 455 p.

12. Knets I.V. Osnovnye sovremennye napravleniia v matematicheskoi teorii plastichnosti [Main modern trends in the mathematical theory of plasticity]. Riga: Zinatne, 1971. 147 p.

13. Volkov I.A., Korotkikh Ju.G. Uravneniia sostoianiia viazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniiami [The equation of state viscous elastoplastic media with injuries]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 424 p.

14. Malinin N.N. Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow: Mashinostroenie, 1975. 400 p.

15. Temis Ju.M. Modelirovanie plastichnosti i polzuchesti konstruktsionnykh materialov GTD [Modeling the plasticity and creep of structural materials TBG]. *Materialy 49 Mezhdunarodnoi nauchno-tehnicheskoi konferentsii AAI “Prioritety razvitiia otechestvennogo avtotraktorostroeniia i podgotovki inzhenernykh nauchnykh kadrov”. Shkola-seminar “Sovremennye modeli termoviazkoplastichnosti”.* Chast' 2. Moscovskii mashinostroitel’nyi universitet, 2005, pp. 25-76.

16. Krempl E. The influence of state of stress on low-cycle fatigue of structural materials: a literature survey and interpretive report. A*mer. Soc. Test. And Mater. Spec. Techn.Publ.*, 1974, no. 549, pp. 1-46.

17. Krempl E., Lu H. The Hardening and Dependent Behavior of Fully Annealed AISI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial in Phase and Out – of – Phase Strain Cycling at Room Temperature. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 1984, vol. 106, pp. 376-382.

18. Krieg R.D. A. Practical Two Surface plasticity Theory. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, vol. 42, pp. 641-646.

19. Krieg R.D., Swearengen J.C., Rhode R.W. A physicallybased internal variable model for rate-dependent plasticity. *Proc. ASME/CSME PVP Conference*, 1978, pp. 15-27.

20. Krieg R.D., Krieg D.B. Accurate of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model. *Trans. ASME*, 1977, vol. 199, no. 4, pp. 510-515.

21. Lemaitre Jean. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 1985, vol. 51, no. 1–3, pp. 31-49.

22. Lindholm U.S., Chan K.S. [et. al.] Constitutive modeling for isotropic materials (HOST). *Second annual contract report. NASA CR*. 174980, 1985.

23. Miller A.K. A unified approach to predicting interactions among creep, cyclic plasticity, and recovery. *Nuclear Eng. and Design*, 1978, vol. 51, pp. 35-43.

24. Miller K.J., Brown M.W Multiaxial fatigue: a brief review. *Adv. Fract. Res. Proc.* 6^{ts} *Int. Conf. New Delhi 4-10 Dec.*, 1984, vol. 1, pp. 31-56.

25. Miller A.K., Tanaka T.G. NONSS: A new method for integrating unified constitutive equations ander complex histories. *Trans. ASME: J. Eng. Mater. and Technol.*, 1988, vol. 110, no. 3, pp. 205-211.

26. Ohno N. A constitutive model of cyclic plasticity with a nonhardening strain region. *J. Appl. Mech.*, 1982, vol. 49, pp. 721-727.

27. Ohno N. Recent topics in constitutive modeling of cyclic and viscoplasticity. *Appl. Mech. rev*., 1990, no. 43, 283 p.

28. Ohno N., Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rulle to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions. *Int. Journal of Plasticity 7*, 1991, vol. 7, pp. 879-891.

29. Ohno N., Wang J.D. Kinematics hardening rule with critical state of dynamic recovery, Parts I and II. *Int. Journal of Plasticity*, 1993, vol. 9, pp. 375-403.

30. Hart. Uravneniia sostoianiia dlia neuprugoi deformatsii metallov [The equation of state for nonelastic deformation of metals]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov: Trudy ASME*, 1976, no. 3, pp. 1-7.

31. Chaboche J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *Inter. J. of Plasticity*, 1989, vol. 5, no. 3, pp. 247-302.

32. Chaboche J.L. Thermodynamically based viscoplastic constitutive equations: theory versus experiment. *ASME Winter Annual Meeting.* Atlanta, GA (USA), 1991, pp. 1-20.

33. Chaboche J.L. Cyclic viscoplastic constitutive equations, parts I and II. *ASME J. of Applied Mechanics*, 1993, vol. 60, pp. 813-828.

34. Chaboche J.L., Rousselier G. On the plastic an viscoplastic constitutive equations. *ASME J. of Pres. Vessel Techn.*, 1983, vol. 105, pp. 153-164.

35. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1642-1692.

36. Besson Zh., Kaeto Zh., J.-L. Chaboche, Forest T.S. Nelineinaia mekhanika materialov [Nonlinear mechanics of materials]. Sankt-Peterburg: Politekhnicheskii universitet, 2010. 397 p.

37. Kadashevich Iu.I., Mosolov A.B. O sootnosheniiakh endokhronnoi teorii plastichnosti s «novoi» meroi vnutrennego vremeni pri slozhnom tsiklicheskom nagruzhenii [Of the ratio endochronic theory of plasticity with the “new” measure of the internal time under complex cyclic loading]. *Tekhnologiia legkikh splavov*, 1990, no. 3, pp. 32-36.

38. Novozhilov V.V. O slozhnom nagruzhenii i perspektivakh fenomenologicheskogo podkhoda k issledovaniiu mikronapriazhenii [About complex loading and prospects of the phenomenological approach to the study of microstresses]. *PMM*, 1964, vol. 28 (3), pp. 393-400.

39. Chaboche J.-L., Dang–Van K., Cordier G. Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel. *Proceedings of the 5th International Conference on SMiRT. Div L,* Berlin, 1979, Paper No. L. 11/3.

40. Ishlinskii A.Ju. Obshchaia teoriia plastichnosti s lineinym uprochneniem [General theory of plasticity with linear hardening]. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal*, 1954, vol. 6 (3), pp. 314-324.

41. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic colids. *ASME J. Appl. Mech*., 1956, vol. 23, pp. 493-496.

42. Amstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical represention of the multiaxial bauscinger effect. *CEGB Report* No. RD/B/N/ 731, 1966.

43. Kadashevich Ju.I. O razlichnykh tenzorno-lineinykh sootnosheniiakh v teorii plastichnosti [About the different tensor-linear correlations in the theory of plasticity]. *Issledovanija po uprugosti i plastichnosti, Leningradskii gosudarstvennyi universitet*, 1967, iss. 6, pp. 39-45.

44. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity*, 1993, vol. 9, pp. 375-390.

45. Makarov D.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessov neizotermicheskogo neuprugogo deformirovaniia i nakopleniia povrezhdenii v konstruktsionnykh materialakh [Mathematical modeling of non-isothermal processes of inelastic deformation and damage accumulation in structural materials]. Abstract of the thesis of the candidate of physical and mathematical sciences. Moskovskii gosudarstvennyi mashinostroitelnyi universitet, 2005. 108 p.

46. Bondar V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Mathematical modelling of deformation and damage accumulation under cyclic loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 2, pp. 125-152.

47. Bondar V.S. Nekotorye novye rezul'taty issledovaniia plastichnosti materialov pri slozhnom nagruzhenii [Some new results plastic materials under complex loading]. *Uprugost' i neuprugost'*. Moscow: LENAND, pp. 94-109.

48. Bondar' V.S., Burchakov S.V., Danshin V.V. Matematicheskoe modelirovanie protsessov uprugoplasticheskogo deformirovaniia i razrusheniia materialov pri tsiklicheskikh nagruzheniiakh. [Mathematical modeling of elasto-plastic deformation and fracture of materials under cyclic loading]. *Mezhvuzovskij sbornik "Problemy prochnosti i plastichnosti"*. Nizhegorodskii gosudarstvennyi universitet, 2010, pp. 18-27.

49. Bondar V.S., Danshin V.V., Semenov P.V. Nelineinye protsessy nakopleniia povrezhdenii pri nestatsionarnykh tsiklicheskikh nagruzheniiakh [Nonlinear processes of damage accumulation in unsteady cyclic loadings]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2013, iss. 75, p. 2, pp. 96-104.

50. Benallal A., Marquis D. Constitutive equations for no proportional cyclic elasto-viscoplasticity. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1987, vol. 109, pp. 326-337.

51. Bondar V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. Version of the theory of thermoplasticity. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 2, pp. 21-35. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.02