



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.1.05

УДК 539.3

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ В РАСЧЕТАХ КОМПОЗИТНЫХ ТЕЛ

А.Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 29 мая 2021 г.
Одобрена: 15 марта 2022 г.
Принята к публикации:
01 апреля 2022 г.

Ключевые слова:

упругость, композиты, скорректированные условия прочности, фиктивные дискретные модели, многосеточные конечные элементы.

АННОТАЦИЯ

Как известно, расчет на статическую прочность упругих композитных тел (КТ) сводится к нахождению максимальных эквивалентных напряжений для этих тел. Для анализа напряженного состояния КТ широко используется метод конечных элементов (МКЭ). Базовые дискретные модели (БМ), которые учитывают в рамках микроподхода неоднородную структуру тел, имеют высокую размерность. Для понижения размерности дискретных моделей эффективно применяются многосеточные конечные элементы (МНКЭ). Однако существуют БМ КТ (например, БМ тел с микронеоднородной структурой), которые имеют такую высокую размерность, что реализация МКЭ для таких БМ с применением МНКЭ, в силу ограниченности ресурсов ЭВМ, затруднительна. Для решения данной проблемы здесь предлагается использовать фиктивные дискретные модели, размерности которых меньше размерности БМ КТ.

В данной работе предлагается метод фиктивных дискретных моделей (МФДМ) для расчета на прочность упругих тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой. Предлагаемый метод реализуется с помощью МКЭ с применением МНКЭ и скорректированных условий прочности, которые учитывают погрешность приближенных решений. В основе метода лежит положение, что решения, отвечающие БМ КТ, мало отличаются от точных.

Расчет КТ по МФДМ сводится к построению и расчету на прочность фиктивных дискретных моделей (ФМ), которые обладают следующими свойствами. ФМ отражают: форму, характерные размеры, крепление, нагружение и вид неоднородной структуры КТ, и распределение модулей упругости, отвечающее БМ КТ. Размерности ФМ меньше размерности БМ КТ. Последовательность, состоящая из ФМ, сходится к БМ, т.е. предельная ФМ совпадает с БМ. Сходимость такой последовательности обеспечивает равномерную сходимость максимальных эквивалентных напряжений ФМ к максимальному эквивалентному напряжению БМ.

Рассматриваются два типа ФМ, первый тип – масштабированные ФМ, второй – ФМ с переменными характерными размерами. Расчеты показывают, что реализация МКЭ для ФМ с применением МНКЭ приводит к большой экономии ресурсов ЭВМ, что позволяет использовать МФДМ для тел с микронеоднородной регулярной структурой. Расчет на прочность КТ по МФДМ требует в $10^3 + 10^6$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем аналогичный расчет с использованием БМ КТ, и не содержит процедуру измельчения БМ. Применение скорректированных условий прочности позволяет использовать в расчетах КТ на прочность приближенные решения с большой погрешностью, что приводит к повышению эффективности МФДМ. Приведенный пример расчета на прочность балки с неоднородной регулярной волокнистой структурой по МФДМ показывает его высокую эффективность.

© ПНИПУ

© Матвеев Александр Данилович – к.ф.-м.н., доц., с.н.с., e-mail: mtv@icm.krasn.ru.

Alexsandr D. Matveev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, e-mail: mtv@icm.krasn.ru.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE METHOD OF FICTITIOUS DISCRETE MODELS IN CALCULATIONS OF COMPOSITE BODIES

A.D. Matveev

Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 29 May 2021

Approved: 15 March 2022

Accepted for publication: 01 April 2022

Keywords:

elasticity, composites, adjusted strength conditions, fictitious discrete models, multigrid finite elements.

ABSTRACT

As is known, the calculation of the static strength of elastic composite bodies (CB) is reduced to finding the maximum equivalent stresses for these bodies. The finite element method (FEM) is widely used for the analysis of the stress state of CB. The basic discrete models (BM), which take into account the inhomogeneous structure of bodies in the framework of a micro-approach, have a high dimension. To reduce the dimension of discrete models, multigrid finite elements (MgFE) are effectively used. However, there are BM CB (for example, BM bodies with a micro-homogeneous structure), which have such a high dimension that the implementation of FEM for such BM using MgFE, due to limited computer resources, is difficult. To solve this problem, it is proposed to use fictitious discrete models whose dimensions are less than the dimension of the BM CB.

In this paper, we propose a method of fictitious discrete models (MFDM) for calculating the strength of elastic bodies with an inhomogeneous, micro-homogeneous regular structure. The proposed method is implemented using FEM with the use of MgFE and adjusted strength conditions that take into account the error of approximate solutions. The method is based on the position that the solutions that meet the BM CB differ little from the exact ones.

The calculation of CB according to MFDM is reduced to the construction and calculation of the strength of fictitious discrete models (FM), which have the following properties. The FM reflects: the shape, characteristic dimensions, attachment, loading and type of the inhomogeneous structure of the CB, and the distribution of elastic modulus corresponding to the BM CB. The FM dimension is less than the BM dimension of the CB. The sequence consisting of FM converges to BM, i.e. the limiting FM coincides with BM. The convergence of such a sequence ensures uniform convergence of the maximum equivalent voltages of the FM to the maximum equivalent voltage of the BM.

Two types of FM are considered. The first type of FM consists of scaled discrete models, the second type consists of FM with variable characteristic dimensions. Calculations show that the implementation of FEM for FM using MgFE leads to a large saving of computer resources, which allows the use of MFDM for bodies with a micro-homogeneous regular structure. The calculation of the strength of CB according to MFDM requires $10^3 \div 10^6$ times less computer memory than a similar calculation using BM CB, and does not contain a procedure for grinding BM. The use of adjusted strength conditions allows us to use approximate solutions with a large error in the calculations of CB for strength, which leads to an increase in the efficiency of MFDM. The given example of calculating the strength of a beam with an inhomogeneous regular fibrous structure according to MFDM shows its high efficiency.

© PNRPU

Введение

Статический расчет на прочность упругих конструкций (тел), который проводится по запасам прочности [1–3], сводится к определению максимальных эквивалентных напряжений конструкций. В этом случае для тела V_0 заданные условия прочности имеют вид $n_1 \leq n_0 \leq n_2$, где n_1 , n_2 заданы, n_0 – коэффициент запаса тела V_0 , $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$, σ_T – предел текучести (предельное напряжение) [1], σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение тела, отвечающее точному решению задачи упругости (построенному для тела V_0). Для максимальных эквивалентных напряжений конструкций, которые определяются приближенно, используются скорректированные условия прочности [4], учитывающие погрешность напряжений. При анализе напряженного деформированного состояния (НДС) упругих композитных тел (КТ) широко используется метод конечных элементов (МКЭ) [5–11]. Базовые дискретные модели

(БМ), которые учитывают неоднородную, микронеоднородную структуру тел в рамках микроподхода [12], имеют очень высокую размерность. Для решения задач теории упругости [13–16] эффективно используется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ) [17–23], в котором используются многосеточные конечные элементы (МнКЭ) [24–29]. Отметим, что ММКЭ является обобщением МКЭ, в котором применяются односеточные конечные элементы (КЭ), так как если в МКЭ применяются МнКЭ, то в этом случае по сути реализуется ММКЭ. МнКЭ учитывают неоднородную, микронеоднородную структуру тел в рамках микроподхода и порождают дискретные модели малой размерности. Однако существуют такие БМ КТ, например, БМ тел с микронеоднородной структурой имеют такую высокую размерность, что реализация МКЭ для таких БМ с применением МнКЭ, в силу ограниченности ресурсов ЭВМ, затруднительна. Для решения данной проблемы предлагается использовать фиктивные дискретные модели. Существующие приближенные подходы и методы расчета КТ имеют сложные формулировки, в основе

которых лежат гипотезы, и к тому же они труднореализуемы [30–38].

В данной работе предлагается метод фиктивных дискретных моделей (МФДМ) для статического расчета на прочность тел с неоднородной регулярной структурой. Предлагаемый метод реализуется с помощью МКЭ с применением МнКЭ и скорректированных условий прочности [4]. Введем определение фиктивных дискретных моделей, которые используются в МФДМ.

Определение 1. Дискретные модели КТ V с регулярной структурой будем называть фиктивными моделями (ФМ), если эти ФМ обладают следующими свойствами.

1. Неоднородные структуры ФМ отличаются (или не отличаются) от неоднородной структуры БМ КТ V .

2. ФМ отражают: форму, характерные размеры, крепление, нагружение и вид неоднородной структуры КТ V , и распределение модулей упругости, отвечающее БМ КТ V .

3. Последовательность, состоящая из ФМ, сходится к БМ КТ V , т.е. предельная ФМ последовательности совпадает с БМ КТ V .

4. Размерности ФМ меньше размерности БМ КТ V , кроме предельной ФМ, размерность которой равна размерности БМ КТ V .

В данной работе предлагается рассматривать ФМ двух типов.

Первый тип – масштабированные ФМ, которые образованы с помощью масштабированных регулярных ячеек КТ, имеют такие же характерные размеры, форму, крепления и нагружения как БМ КТ, но неоднородные структуры ФМ отличаются от неоднородной структуры БМ. Масштабированные ФМ отражают вид неоднородной структуры БМ и распределение модулей упругости, отвечающее БМ. В расчетах используется последовательность ФМ, которая сходится к БМ КТ, т.е. предельная ФМ этой последовательности совпадает с БМ. Расчеты показывают, что сходимости такой последовательности обеспечивает равномерную монотонную сходимость максимальных эквивалентных напряжений ФМ к максимальному эквивалентному напряжению БМ. Реализация МКЭ для ФМ с применением МнКЭ приводит к большой экономии ресурсов ЭВМ, что позволяет использовать МФДМ для расчетов на прочность тел с микронеоднородной регулярной структурой. В этом случае реализация МФДМ требует в $10^3 \div 10^6$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем аналогичный расчет с использованием БМ КТ, и не требует измельчения БМ КТ. Приведенный пример расчета композитной балки по МФДМ с применением масштабированных ФМ показывает его высокую эффективность.

Второй тип – это ФМ с переменными характерными размерами, которые имеют такую же неоднородную структуру, как БМ КТ, но отличаются от БМ характерными размерами. В отличие от работы [39], здесь сформулированы условия, которые обеспечивают построение для КТ ФМ первого типа, и рассмотрены процедуры построения ФМ второго типа для балок и оболочек

с постоянным поперечным сечением сложной формы, армированных непрерывными параллельными (оси балки, оболочки) волокнами, и для трехмерных тел с неоднородной регулярной структурой, которые состоят из конечного числа регулярных ячеек. Показано, что применение скорректированных условий прочности позволяет использовать в расчетах приближенные решения с большой погрешностью, что приводит к повышению эффективности МФДМ.

1. Основные положения метода фиктивных дискретных моделей

В МФДМ применяются КТ, которые удовлетворяют следующим положениям.

Положение 1. КТ состоят из разномодульных изотропных однородных упругих тел, связи между которыми идеальны, т.е. на общих границах разномодульных изотропных однородных тел функции перемещений и напряжений являются непрерывными.

Положение 2. Перемещения, деформации и напряжения разномодульных изотропных однородных тел отвечают соотношениям линейной теории упругости [40].

Положение 3. Приближенные решения (построенные по МКЭ), которые отвечают БМ КТ, мало отличаются от точных решений. Такие приближенные решения будем считать точными.

В основе МФДМ лежит теорема, формулирующая скорректированные условия прочности, которые учитывают погрешность максимальных эквивалентных напряжений.

Теорема 1. Пусть для коэффициента запаса n_0 упругого тела V_0 заданы условия прочности

$$n_1 \leq n_0 \leq n_2, \quad (1)$$

где n_1, n_2 – заданы, $n_1 > 1$, $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$, σ_T – предельное напряжение тела V_0 , σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение тела V_0 , которое отвечает точному решению задачи теории упругости, построенному для тела V_0 .

Пусть коэффициент запаса n_b тела V_0 , отвечающий приближенному решению задачи теории упругости, удовлетворяет скорректированным условиям прочности

$$\frac{n_1}{1 - \delta_\alpha} \leq n_b \leq \frac{n_2}{1 + \delta_\alpha}. \quad (2)$$

Тогда коэффициент запаса n_0 тела V_0 , отвечающий точному решению задачи теории упругости, удовлетворяет заданным условиям прочности (1), где $n_b = \sigma_T / \sigma_b$, σ_b – максимальное эквивалентное напряжение тела V_0 , отвечающее приближенному решению задачи теории упругости, построенному для тела V_0 , и найденное с такой погрешностью δ_b , что

$$|\delta_b| \leq \delta_\alpha < C_\alpha = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}, \quad (3)$$

где δ_α – верхняя оценка относительной погрешности δ_b , δ_α – задано, погрешность δ_b для напряжения σ_b определяется по формуле $\delta_b = (\sigma_0 - \sigma_b) / \sigma_0$.

Доказательство теоремы 1 изложено в работе [4]. В МФДМ при расчете КТ V можно использовать два типа ФМ – масштабированные ФМ или ФМ с переменными характерными размерами. Для практики важно построить для КТ V такую последовательность ФМ, которая сходится к БМ КТ V и обеспечивает равномерную сходимость максимальных эквивалентных напряжений ФМ последовательности к максимальному эквивалентному напряжению БМ КТ V . Согласно МФДМ приближенное решение, отвечающее БМ КТ V , является точным.

2. Масштабированные фиктивные дискретные модели

Рассмотрим ФМ первого типа, т.е. масштабированные ФМ. Не теряя общности суждений, для простоты изложения рассмотрим применение в МФДМ масштабированных ФМ на примере тела V_0 формы прямоугольного параллелепипеда с неоднородной регулярной структурой размерами $H_1 \times H_2 \times H_3$,

$$\text{где } H_1 = 6hN_1, H_2 = 6hN_2, H_3 = 6hN_3, \quad (4)$$

где N_1, N_2, N_3 – целые, $N_1 \leq N_2 \leq N_3$, $N_1, N_2, N_3 \gg 1$, h – задано и мало.

Тело V_0 расположено в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, рис. 1.

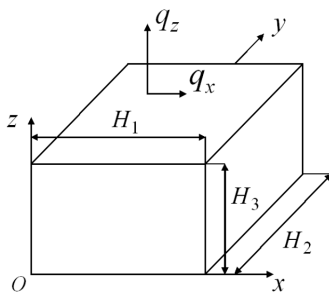


Рис. 1. Тело V_0

Fig. 1. Body V_0

При $y=0$ тело V_0 жестко закреплено, т.е. при $y=0$ имеем $u, v, w=0$. Тело V_0 армировано ортогональными непрерывными волокнами. Пусть для тела V_0 на поверхности $z=H_3$ задано статическое нагружение вида $q_x = q_1, q_z = q_2$, где $q_1(x, y), q_2(x, y)$ – гладкие функции, и заданы условия прочности (1), т.е. в соотношении (1) заданы значения n_1, n_2 . Базовая модель R_0

КТ V_0 , которая состоит из КЭ V_f^h 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС), учитывает неоднородную структуру тела V_0 и порождает равномерную (базовую) трехмерную сетку с шагом h размерности $(6N_1+1) \times (6N_2+1) \times (6N_3+1)$. Считаем, что так как h мало и $N_1, N_2, N_3 \gg 1$, то положение 3 МФДМ (см. п. 1) для КТ V_0 выполняется.

Регулярная ячейка G_0 (рис. 2) тела V_0 имеет форму куба со стороной $6h$. Таким образом, в силу (4) тело V_0 состоит из конечного числа ячеек G_0 . На рис. 2 показана базовая сетка ячейки G_0 , волокна сечением $h \times h$ расположены по ребрам ячейки G_0 , границы волокон отмечены жирными линиями, регулярная ячейка G_0 расположена в локальной декартовой системе координат $Oxyz, i, j, k = \overline{1, 7}$. Модули упругости волокон одинаковы. Модули упругости волокон и связующего материала постоянны во всей области КТ V_0 .

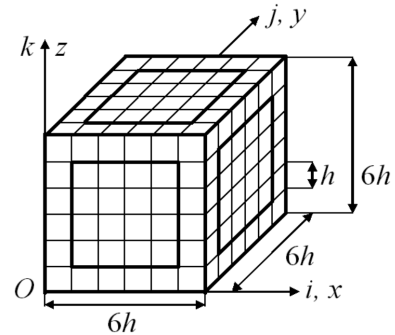


Рис. 2. Регулярная ячейка G_0

Fig. 2. Regular cell G_0

Введем следующие определения.

Определение 2. Будем говорить, что трехмерное упругое тело G образовано путем масштабирования упругого трехмерного тела G^0 с коэффициентом масштабности $p > 0$, если любой точке $A \in G^0$ отвечает такая единственная точка $B \in G$, что $x_B = px_A, y_B = py_A, z_B = pz_A$, где $x_A, y_A, z_A (x_B, y_B, z_B)$ – координаты точки A (точки B), отвечающие декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$. И, наоборот, если любой точке $B \in G$ отвечает такая единственная точка $A \in G^0$, что $x_A = x_B / p, y_A = y_B / p, z_A = z_B / p$. Модули упругости в точках $A \in G^0, B \in G$ одинаковы.

Определение 3. Трехмерное упругое тело G , полученное путем масштабирования заданного (базового) упругого трехмерного тела G^0 с заданным коэффициентом масштабности p , будем называть масштабированным. Связь между масштабированным телом G и базовым телом G^0 представляется в виде $G = p G^0, G = p G^0$ где p – коэффициент масштабности.

Согласно МФДМ масштабированная композитная дискретная модель R_n имеет такие же характерные размеры, форму, крепление и нагружение, как БМ R_0 , и

состоит из конечного числа регулярных ячеек G_n размерами $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$, т.е. модель R_n имеет равномерную сетку с шагом h_n . Для определения шага h_n используем минимальный характерный размер КТ V_0 , т.е. H_1 . Так как модель R_n состоит из конечного числа ячеек G_n размерами $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$, то выполняется равенство $6h_n n = H_1$, где n – целое. Учитывая в последнем равенстве, что $H_1 = 6hN_1$ и принимая $N = N_1$, имеем

$$h_n n = hN, \tag{5}$$

где $n = 1, \dots, N$.

Из (5) следует

$$h_n = \beta_n h, \tag{6}$$

где $\beta_n = N/n$, β_n – коэффициент масштабности, при $n \rightarrow N$: $h_n \rightarrow h$, $h_N = h$, при $n < N$: $\beta_n > 1$.

Регулярная ячейка G_n образуется путем масштабирования регулярной ячейки G_0 КТ V_0 с коэффициентом масштабности β_n (см. определение 2), т.е. тело G_n является масштабированной регулярной ячейкой (см. определение 3). Это означает, что тело G_n имеет такое же число волокон (сечением $h_n \times h_n$) и такое же их взаимное расположение, как регулярная ячейка G_0 (см. рис. 2). На рис. 3 тело G_n расположено в локальной декартовой системе координат $Oxyz$, показана его равномерная сетка с шагом h_n , границы волокон отмечены жирными линиями, $i, j, k = 1, \dots, 6$. Волокна и матрицы КТ G_n и G_0 имеют одинаковые модули упругости.

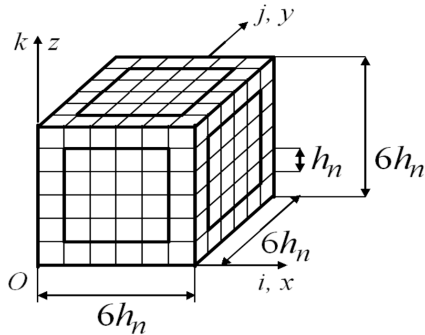


Рис. 3. Регулярная ячейка G_n

Fig. 3. Regular cell G_n

Формы и неоднородные структуры тел G_n и G_0 геометрически подобны, т.е. отличаются только масштабностью (см. рис. 2, 3). Тогда, учитывая (6) и что волокна и связующий материал КТ G_n и G_0 имеют одинаковые модули упругости, связь между телами G_n , G_0 представляется в виде (см. определение 3)

$$G_n = \beta_n G_0, \tag{7}$$

где $\beta_n = N/n$, $n = 1, \dots, N$, при $n \rightarrow N$ имеем $\beta_n \rightarrow 1$, $\beta_N = 1$, т.е. $G_N = G_0$.

Пусть

$$N_2 = k_1 N_1, N_3 = k_2 N_1, \tag{8}$$

где k_1, k_2 – целые числа.

Модель R_n состоит из КЭ V_e^n 1-го порядка формы куба со стороной h_n (в 1 с КЭ V_e^n реализуется трехмерное НДС), которые порождают равномерную сетку с шагом h_n размерности $n_1^{(n)} \times n_2^{(n)} \times n_3^{(n)}$, где $n_1^{(n)} = (6hN_1/h_n + 1)$, $n_2^{(n)} = (6hN_2/h_n + 1)$, $n_3^{(n)} = (6hN_3/h_n + 1)$. Учитывая (6), (8) в последних трех равенствах и что $N = N_1$, получаем

$$\begin{aligned} n_1^{(n)} &= 6n + 1, n_2^{(n)} = k_1 6n + 1, \\ n_3^{(n)} &= k_2 6n + 1, n = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку в регулярной ячейке G_0 учитывается неоднородная структура, то в силу (7) и в КТ G_n также учитывается неоднородная структура с помощью КЭ V_e^n формы куба со стороной h_n . Модель R_n , которая в силу (6), (7) образуется с помощью масштабированной регулярной ячейки G_n , будем называть масштабированной. Отметим, что КТ G_n по сути является регулярной ячейкой модели R_n . Так как в регулярной ячейке G_n учитывается неоднородная структура, то, следовательно, и в модели R_n учитывается неоднородная структура. Отметим, что в силу (7) при $n < N$: $\beta_n > 1$, т.е. неоднородные структуры модели R_n и БМ R_0 КТ V_0 различны.

Для модели R_n отметим следующие свойства, которые показывают достоинства МФДМ.

1. Размерность сетки модели R_n при $n < N$ в силу (8), (9) и что $N = N_1$ меньше размерности $(6N_1 + 1) \times (6N_2 + 1) \times (6N_3 + 1)$ сетки БМ R_0 . Поэтому реализация МКЭ для модели R_n (при $n < N$) требует меньше объема памяти ЭВМ, чем для БМ R_0 .

2. При построении масштабированных композитных дискретных моделей R_n не используется процедура измельчения БМ КТ.

Согласно (6), (7) при $n = N$ ($h_N = h$, $\beta_N = 1$, $G_N = G_0$) дискретные модели R_N и R_0 совпадают, т.е. $R_N = R_0$. Так как модель R_n , т.е. БМ R_0 , порождает решение, которое мало отличается от точного (см. положение 3 МФДМ), то считаем, что максимальное эквивалентное напряжение σ_N модели R_N мало отличается от точного максимального эквивалентного напряжения σ_0 КТ V_0 . Тогда полагаем $\sigma_0 = \sigma_N$, так как положение 3 МФДМ для БМ R_0 выполняется. В силу (6), (7) при $n \rightarrow N$ (при $\beta_n \rightarrow 1$) имеем $G_n \rightarrow G_0$. Отсюда, учитывая, что тела G_n , G_0 есть регулярные ячейки соответственно моделей R_n , R_0 , и что эти модели имеют одинаковую форму и характерные размеры, получаем

$$R_n \rightarrow R_N = R_0 \text{ при } n \rightarrow N. \quad (10)$$

Согласно (10) при $n \rightarrow N$ имеем $\sigma_n \rightarrow \sigma_N$ или, учитывая, что $\sigma_0 = \sigma_N$, получаем

$$\sigma_n \rightarrow \sigma_0 \text{ при } n \rightarrow N,$$

где σ_n – максимальное эквивалентное напряжение фиктивной дискретной модели R_n .

Выше по сути доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть тело V_0 с неоднородной регулярной структурой имеет форму прямоугольного параллелепипеда размерами $a \times b \times c$, где b/a , c/a – целые. Пусть БМ R_0 КТ V_0 состоит из конечного числа регулярных ячеек. Тогда для КТ V_0 можно построить такую последовательность масштабированных дискретных фиктивных моделей $\{R_n\}_{n=1}^N$, которая порождает последовательность напряжений $\{\sigma_n\}_{n=1}^N$, равномерно сходящуюся к напряжению σ_0 , т. е. $\sigma_n \rightarrow \sigma_0$ при $n \rightarrow N$, где σ_n (σ_0) – максимальное эквивалентное напряжение ФМ R_n (БМ R_0 , т.е. КТ V_0). Размерность ФМ R_n (при $n < N$) меньше размерности БМ R_0 .

Пусть $\delta_\sigma = |\sigma_n - \sigma_{n-1}| / \sigma_n$ малая величина и $|\delta_n| \leq \delta_\alpha$, где δ_n – относительная погрешность для напряжения σ_n , т. е. $\delta_n = (\sigma_0 - \sigma_n) / \sigma_0$, пусть $\delta_\alpha < C_\alpha$, см. формулу (3), $n = 2, 3, \dots$. Тогда принимаем $\sigma_b = \sigma_n$. Подставляя δ_α , n_1 , n_2 в соотношение (2), определяем скорректированные условия прочности для КТ V_0 .

Пусть коэффициент запаса n_b (где $n_b = \sigma_T / \sigma_b$, с учетом, что $\sigma_b = \sigma_n$, имеем $n_b = \sigma_T / \sigma_n$) КТ V_0 , отвечающий приближенному решению задачи упругости, удовлетворяет построенным для тела V_0 скорректированным условиям прочности (2). Тогда коэффициент запаса n_0 КТ V_0 , отвечающий точному решению задачи упругости, удовлетворяет заданным условиям прочности (1), см. теорему 1. Для понижения размерности ФМ используются МнКЭ.

3. Фиктивные дискретные модели с переменными характерными размерами

Рассмотрим ФМ второго типа, которые имеют такую же неоднородную структуру, как БМ R КТ V , но отличаются от БМ R характерными размерами. Вначале рассмотрим ФМ с одним переменным характерным размером на примере композитных балок и круговых цилиндрических оболочек с постоянным поперечным сечением сложной формы, армированных непрерывными волокнами постоянной толщины. Волокна параллельны оси балки (оболочки) и в общем случае имеют различные толщины и модули упругости.

Не теряя общности суждений, суть построения ФМ с одним переменным характерным размером для компо-

зитных балок и оболочек кратко рассмотрим на примере балки, форма поперечного сечения которой есть симметричный двутавр, состоящий из прямоугольников [1], и оболочки постоянной толщины. Рассмотрим ФМ $R_n^{(\alpha)}$ (с одним переменным характерным размером) и БМ $R_0^{(\alpha)}$ КТ $V_0^{(\alpha)}$, здесь и далее $\alpha = 1, 2$, которые расположены в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ и в плоскости Oxz жестко закреплены, т.е. при $y = 0$ для перемещений БМ $R_0^{(\alpha)}$ и ФМ $R_n^{(\alpha)}$ имеем $u = v = w = 0$.

Характерные размеры a , b , L_0 БМ $R_0^{(1)}$ балки (КТ) $V_0^{(1)}$, рис. 4, отличаются от характерных размеров a , b , L_n ФМ $R_n^{(1)}$ КТ $V_0^{(1)}$ (рис. 5), одним переменным характерным размером L_n , где a, b – характерные размеры поперечного сечения БМ $R_0^{(1)}$ и ФМ $R_n^{(1)}$, L_0 (L_n) – длина БМ $R_0^{(1)}$ (ФМ $R_n^{(1)}$), $L_n \leq L_0$. Ось Oy на рис. 4 (и на рис. 5) параллельна оси БМ $R_0^{(1)}$ балки $V_0^{(1)}$ (ФМ $R_n^{(1)}$ балки $V_0^{(1)}$). Характерные размеры R , R_b , L_0 БМ $R_0^{(2)}$ цилиндрической оболочки (КТ) $V_0^{(2)}$ постоянной толщины H (рис. 6) отличаются от характерных размеров R , R_b , L_n ФМ $R_n^{(2)}$ КТ $V_0^{(2)}$ (рис. 7) одним переменным характерным размером L_n , где R – внешний и R_b – внутренний радиусы ФМ $R_n^{(2)}$ и БМ $R_0^{(2)}$, $H = R - R_b$, L_0 (L_n) – длина БМ $R_0^{(2)}$ (ФМ $R_n^{(2)}$), $L_n \leq L_0$. На рис. 6 (и на рис. 7) ось Oy совпадает с осью БМ $R_0^{(2)}$ оболочки $V_0^{(2)}$ (ФМ $R_n^{(2)}$ оболочки $V_0^{(2)}$).

Пусть КТ $V_0^{(\alpha)}$ армировано непрерывными волокнами сечением $h \times h$, которые параллельны оси Oy и имеют одинаковые модули упругости. Для простоты изложения пусть

$$h = L_0 / N, \quad (11)$$

где L_0 , N – заданы, N – целое, $N \gg 1$, h – мало, т.е. КТ $V_0^{(\alpha)}$ армировано тонкими волокнами.

БМ $R_0^{(\alpha)}$, состоящая из КЭ V_e 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС [40]), учитывает неоднородную структуру и сложную форму КТ $V_0^{(\alpha)}$. Пусть БМ $R_0^{(\alpha)}$ (в силу малости h) порождает решение, которое мало отличается от точного. Такое приближенное решение будем считать точным (см. положение 3 МФДМ, п. 1). ФМ $R_n^{(\alpha)}$ имеет такую же неоднородную структуру, как БМ $R_0^{(\alpha)}$, т.е. ФМ $R_n^{(\alpha)}$ армирована непрерывными параллельными оси Oy волокнами сечением $h \times h$ и имеет такой же вид распределения волокон в поперечном сечении, как БМ $R_0^{(\alpha)}$. Волокна и связующий материал БМ $R_0^{(\alpha)}$ и ФМ $R_n^{(\alpha)}$ имеют одинаковые модули упругости. Модули упругости волокон и связующего материала постоянны во

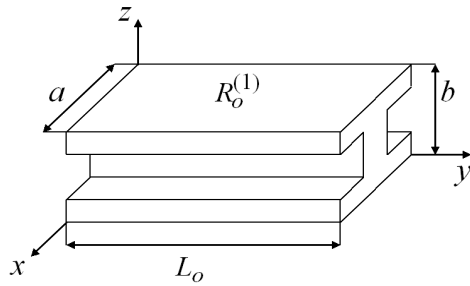


Рис. 4. БМ $R_0^{(1)}$ балки (КТ) $V_0^{(1)}$

Fig. 4 BM $R_0^{(1)}$ of beam (CB)

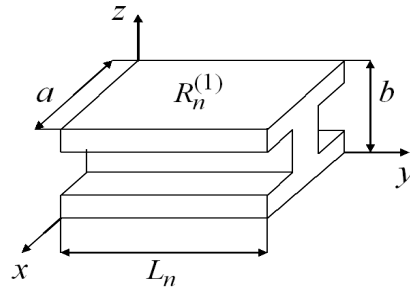


Рис. 5. ФМ $R_n^{(1)}$ балки $V_0^{(1)}$

$V_0^{(1)}$ Fig. 5 FM $R_n^{(1)}$ of beam $V_0^{(1)}$

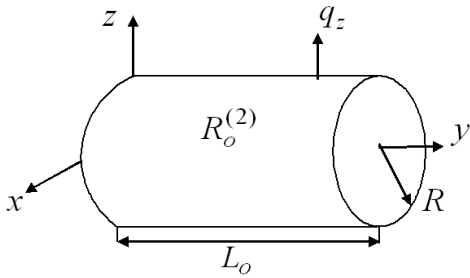


Рис. 6. БМ $R_0^{(2)}$ оболочки (КТ) $V_0^{(2)}$

Fig. 6 BM $R_0^{(2)}$ of shell (CB) $V_0^{(2)}$

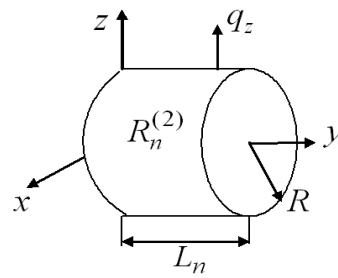


Рис. 7. ФМ $R_n^{(2)}$ оболочки $V_0^{(2)}$

Fig. 7 FM $R_n^{(2)}$ of shell $V_0^{(2)}$

всей области БМ $R_0^{(\alpha)}$ и ФМ $R_n^{(\alpha)}$. Неоднородные структуры в ФМ $R_n^{(\alpha)}$ и БМ $R_0^{(\alpha)}$ учитываются с помощью КЭ V_e 1-го порядка формы куба со стороной h . ФМ $R_n^{(\alpha)}$ имеет такое же крепление и такой же характер статического нагружения, как БМ $R_0^{(\alpha)}$. Например, если БМ $R_0^{(2)}$ имеет равномерное нагружение q_z на границе $z = R$, $x = 0$, $L_0/2 \leq y \leq L_0$, то ФМ $R_n^{(2)}$ имеет нагружение q_z на границе $z = R$, $x = 0$, $L_n/2 \leq y \leq L_n$ (рис. 6, 7). Используя (11), размер L_n ФМ $R_n^{(\alpha)}$ находим по формуле

$$L_n = L_0 n / N = hn, \quad (12)$$

где n – целое, $n = n_0, \dots, N$, n_0 – задано, имеем $L_n \leq L_0$, при $n = N$: $L_n = L_0$.

Учитывая, что ФМ $R_n^{(\alpha)}$ отличается от БМ $R_0^{(\alpha)}$ только размером L_n и что в силу (12) при $n \rightarrow N$: $L_n \rightarrow L_0$, получаем

$$R_n^{(\alpha)} \rightarrow R_0^{(\alpha)} \text{ при } n \rightarrow N, \alpha = 1, 2. \quad (13)$$

В силу (12), (13) при $n = N$ имеем $R_N^{(\alpha)} = R_0^{(\alpha)}$. Тогда из выполнения (13) следует

$$\sigma_n^{(\alpha)} \rightarrow \sigma_0^{(\alpha)} \text{ при } n \rightarrow N,$$

где $\sigma_n^{(\alpha)}$ ($\sigma_0^{(\alpha)}$) – максимальное эквивалентное напряжение ФМ $R_n^{(\alpha)}$ (БМ $R_0^{(\alpha)}$).

Поскольку ФМ $R_n^{(\alpha)}$ и БМ $R_0^{(\alpha)}$ состоят из КЭ V_e 1-го порядка формы куба со стороной h и поперечные сече-

ния этих моделей одинаковы и имеют одинаковые разбиения, то сечения ФМ $R_n^{(\alpha)}$ и БМ $R_0^{(\alpha)}$ содержат одинаковое число узлов, которое обозначим через N_0 . Число узлов сетки БМ $R_0^{(\alpha)}$ в силу (11) вдоль оси Oy равно $N + 1$. Тогда общее число узлов M_0 БМ $R_0^{(\alpha)}$ равно $M_0 = N_0(N + 1)$, общее число узлов M_n ФМ $R_n^{(\alpha)}$ в силу (12) равно $M_n = N_0(n + 1)$, отсюда следует, что $M_n < M_0$ при $n_0 \leq n < N$. Следовательно, при $n < N$ размерность ФМ $R_n^{(\alpha)}$ меньше размерности БМ $R_0^{(\alpha)}$ (с учетом выполнения кинематических граничных условий БМ и ФМ тела $V_0^{(\alpha)}$). При $n = N$ имеем $M_N = M_0$, т.е. размерности ФМ $R_n^{(\alpha)}$ и БМ $R_0^{(\alpha)}$ совпадают. Выше по сути доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть КТ $V_0^{(\alpha)}$, где $\alpha = 1, 2$, $V_0^{(1)}$ – балка и $V_0^{(2)}$ – круговая цилиндрическая оболочка с постоянным поперечным сечением, имеющие длину L_0 , армировано непрерывными волокнами (постоянной толщины), параллельными оси КТ $V_0^{(\alpha)}$ (оси балки, оболочки). Модули упругости волокон и матрицы постоянны во всей области КТ $V_0^{(\alpha)}$. Тогда для КТ $V_0^{(\alpha)}$ можно построить такую последовательность ФМ $\{R_n^{(\alpha)}\}_{n=1}^N$, которая порождает последовательность напряжений $\{\sigma_n^{(\alpha)}\}_{n=1}^N$, сходящуюся к напряжению $\sigma_0^{(\alpha)}$, т.е. $\sigma_n^{(\alpha)} \rightarrow \sigma_0^{(\alpha)}$ при $L_n \rightarrow L_0$ или при $n \rightarrow N$, где L_n – переменный характерный размер (переменная длина) ФМ $R_n^{(\alpha)}$; $\sigma_n^{(\alpha)}$ ($\sigma_0^{(\alpha)}$) – максимальное эквивалентное напряжение ФМ $R_n^{(\alpha)}$ (БМ $R_0^{(\alpha)}$), т.е. КТ

$V_0^{(\alpha)}$. При $n < N$ (т.е. при $L_n < L_0$) размерность ФМ $R_n^{(\alpha)}$ меньше размерности БМ $R_0^{(\alpha)}$.

Итак, показано, что использование ФМ $R_n^{(\alpha)}$ с переменным характерным размером L_n при расчете на прочность по МФДМ КТ $V_0^{(\alpha)}$ приводит к экономии ресурсов ЭВМ. Не теряя общности суждений, суть построения ФМ с тремя переменными характерными размерами для КТ кратко рассмотрим на примере тела $V_0^{(3)}$ с неоднородной регулярной структурой формы прямоугольного параллелепипеда размерами $a_0 \times b_0 \times c_0$, расположенного в декартовой системе координат $Oxyz$, на рис. 8 показаны размеры БМ $R_0^{(3)}$ КТ $V_0^{(3)}$. Пусть

$$a_0 = 6hN_1, b_0 = 6hN_2, c_0 = 6hN_3, \quad (14)$$

где N_1, N_2, N_3 – целые, заданы, $N_1, N_2, N_3 \gg 1$, h – задано, мало.

Пусть БМ $R_0^{(3)}$ КТ $V_0^{(3)}$, состоящее из КЭ размерами $h \times h \times h$, учитывает неоднородную структуру КТ $V_0^{(3)}$ и порождает решение, которое мало отличается от точного, т.е. положение 3 МФДМ для КТ $V_0^{(3)}$ выполняется. Пусть тело $V_0^{(3)}$ армировано ортогональной решеткой непрерывных волокон. Регулярная ячейка G_0 , имеющая размеры $6h \times 6h \times 6h$, КТ $V_0^{(3)}$ показана на рис. 2. Тогда в силу (14) КТ $V_0^{(3)}$ состоит из конечного числа регулярных ячеек G_0 . Сетка БМ $R_0^{(3)}$ КТ $V_0^{(3)}$ имеет N_0 узлов, где

$$N_0 = (6N_1 + 1) \times (6N_2 + 1) \times (6N_3 + 1). \quad (15)$$

ФМ $R_n^{(3)}$ КТ $V_0^{(3)}$ имеет форму прямоугольного параллелепипеда размерами $a_n \times b_n \times c_n$, где

$$a_n = 6hn_1, b_n = 6hn_2, c_n = 6hn_3, \quad (16)$$

где $a_n / b_n \approx a_0 / b_0, a_n / c_n \approx a_0 / c_0, n_1, n_2, n_3$ – целые, на рис. 9 даны размеры ФМ $R_n^{(3)}$.

Сетка ФМ $R_n^{(3)}$, которая состоит из конечного числа регулярных ячеек G_0 (размерами $6h \times 6h \times 6h$, см. рис. 2), имеет N узлов, где

$$N = (6n_1 + 1) \times (6n_2 + 1) \times (6n_3 + 1). \quad (17)$$

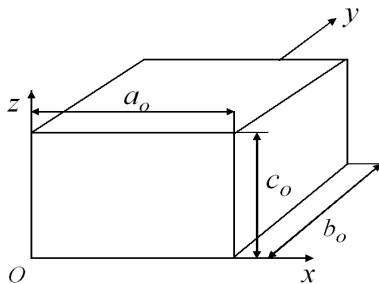


Рис. 8. БМ $R_0^{(3)}$ КТ $V_0^{(3)}$

Fig. 8. BM $R_0^{(3)}$ CB $V_0^{(3)}$

Волокна и связующий материал БМ $R_0^{(3)}$ и ФМ $R_n^{(3)}$ имеют одинаковые модули упругости. Модули упругости волокон и связующего материала постоянны во всей области БМ $R_0^{(3)}$ и ФМ $R_n^{(3)}$. Пусть при $z=0$ БМ $R_0^{(3)}$ и ФМ $R_n^{(3)}$ жестко закреплены. В силу (14), (16) при $n_1 \rightarrow N_1, n_2 \rightarrow N_2, n_3 \rightarrow N_3$ имеем

$$a_n \rightarrow a_0, b_n \rightarrow b_0, c_n \rightarrow c_0.$$

Откуда следует, что при $n_1 \rightarrow N_1, n_2 \rightarrow N_2, n_3 \rightarrow N_3$

$$R_n^{(3)} \rightarrow R_0^{(3)}. \quad (18)$$

Из выполнения (18) следует

$$\sigma_n^{(3)} \rightarrow \sigma_0^{(3)} \text{ при } a_n \rightarrow a_0, b_n \rightarrow b_0, c_n \rightarrow c_0,$$

где $\sigma_n^{(3)}$ ($\sigma_0^{(3)}$) – максимальное эквивалентное напряжение ФМ $R_n^{(3)}$ (БМ $R_0^{(3)}$ КТ $V_0^{(3)}$).

Если $n_1 < N_1, n_2 < N_2, n_3 < N_3$ (т.е. при $a_n < a_0, b_n < b_0, c_n < c_0$, где $a_n / b_n \approx a_0 / b_0, a_n / c_n \approx a_0 / c_0$), то в силу (15), (17) имеем $N < N_0$. Это означает, что размерность ФМ $R_n^{(3)}$ меньше размерности БМ $R_0^{(3)}$ КТ $V_0^{(3)}$ (с учетом выполнения кинематических граничных условий). При $n_1 = N_1, n_2 = N_2, n_3 = N_3$ имеем $N = N_0$. Выше по сути доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть КТ $V_0^{(3)}$ формы прямоугольного параллелепипеда размерами $a_0 \times b_0 \times c_0$ имеет неоднородную регулярную структуру. Пусть БМ $R_0^{(3)}$ КТ $V_0^{(3)}$ состоит из конечного числа регулярных ячеек. Тогда для КТ $V_0^{(3)}$ можно построить такую последовательность ФМ $\{R_n^{(3)}\}_{n=1}^N$, которая порождает последовательность напряжений $\{\sigma_{n=1}^{(3)}\}_{n=1}^N$, сходящуюся к напряжению $\sigma_0^{(3)}$, т.е. $\sigma_n^{(3)} \rightarrow \sigma_0^{(3)}$ при $V_n \rightarrow V_0$, где $V_n = a_n b_n c_n, V_0 = a_0 b_0 c_0, a_n, b_n, c_n$ – переменные характерные размеры ФМ $R_n^{(3)}$ формы прямоугольного параллелепипеда, удовлетворяющие условиям $a_n / b_n \approx a_0 / b_0, a_n / c_n \approx a_0 / c_0, \sigma_n^{(3)}$ ($\sigma_0^{(3)}$) – максимальное эквивалентное напряжение ФМ $R_n^{(3)}$ (БМ $R_0^{(3)}$, т.е. КТ $V_0^{(3)}$). При $a_n < a_0, b_n < b_0, c_n < c_0$ размерность ФМ $R_n^{(3)}$ меньше размерности БМ $R_0^{(3)}$.

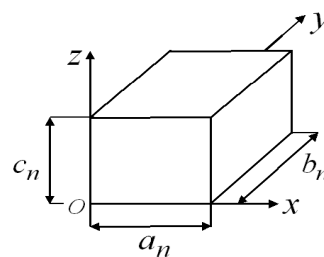


Рис. 9. ФМ $R_n^{(3)}$ КТ $V_0^{(3)}$

Fig. 9. FM $R_n^{(3)}$ CB $V_0^{(3)}$

Итак, показано, что использование ФМ $R_n^{(3)}$ с переменными характерными размерами a_n, b_n, c_n в расчетах на прочность по МФДМ КТ $V_0^{(3)}$ приводит к экономии ресурсов ЭВМ.

4. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим модельную задачу расчета на прочность балки V с неоднородной регулярной волокнистой структурой размерами $H \times 2L \times H$, расположенной в декартовой системе координат $Oxyz$, где $H = 96h, L = 1152h, h$ – задано. Торцы балки V жестко закреплены. Балка V армирована ортогональной решеткой волокон. Регулярная ячейка G_0 балки V имеет форму куба со стороной $6h$ (см. рис. 2) ячейка G_0 подробно описана в п. 2. В расчетах используем половину балки V , т.е. балку V^0 размерами $H \times L \times H$ ($96h \times 1152h \times 96h$, рис. 10), так как нагружение балки V симметрично относительно плоскости $y = L$. Для балки V^0 имеем следующие кинематические граничные условия: при $y = 0$: $u, v, w = 0$, при $y = L$: $v = 0$.

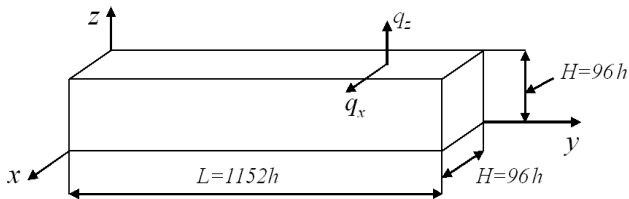


Рис. 10. Балка (тело) V^0 (модель T_n)

Fig. 10. Beam (body) V^0 (model T_n)

БМ T_0 КТ V^0 состоит из односеточных конечных элементов (1сКЭ) V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС [40]), которые учитывают неоднородную структуру тела V^0 и порождают равномерную сетку с шагом h размерности $97 \times 1153 \times 97$. Общее число неизвестных БМ T_0 равно $N_0 = 32508095$, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна $b_0 = 28524$. Считаем, что положение 3 МФДМ для БМ T_0 выполняется.

Для расчета балки V^0 (см. рис. 10) на прочность с помощью МФДМ используем масштабированные дискретные модели T_n размерами $H \times L \times H$, т.е. $96h \times 1152h \times 96h, n = 1, 2, 3, \dots$. Масштабированная композитная регулярная ячейка G_n (см. рис. 3; п. 2) размерами $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$ порождает масштабированную модель T_n , т.е. КТ G_n по сути является регулярной ячейкой модели T_n . Для определения h_n используем формулы (5), (6). В данном случае $6h_n n = H$, где $H = 96h$, т.е. $h_n n = 16h$, где $n = 1, \dots, 16$. Откуда следует

$$h_n = \beta_n h, \tag{19}$$

где $\beta_n = 16/n, \beta_n$ – коэффициент масштабности, $n = \overline{1, 16}$, при $n < 16$: $\beta_n > 1, h_n > h, h_{16} = h$.

Отметим, что КТ (регулярная ячейка) G_n (см. рис. 3) образуется путем масштабирования регулярной ячейки G_0 (см. рис. 2) БМ T_0 КТ V^0 с коэффициентом масштабности $\beta_n = 16/n, n = \overline{1, 16}$, см. определение 2 п. 2. Модель T_n , состоящая из 1сКЭ V_e^n 1-го порядка формы куба со стороной h_n (в 1сКЭ V_e^n реализуется трехмерное НДС), имеет равномерную сетку с шагом h_n размерности $n_1^{(n)} \times n_2^{(n)} \times n_3^{(n)}$, где $n_1^{(n)} = (96h/h_n + 1), n_2^{(n)} = (1152h/h_n + 1), n_3^{(n)} = (96h/h_n + 1)$. Учитывая (19) в последних трех равенствах, получаем

$$\begin{aligned} n_1^{(n)} &= 6n + 1, \quad n_2^{(n)} = 12 \times 6n + 1, \\ n_3^{(n)} &= 6n + 1, \quad n = 1, \dots, 16. \end{aligned} \tag{20}$$

В расчетах на прочность КТ V^0 по МФДМ используем последовательность масштабированных дискретных моделей, т.е. масштабированных ФМ, $\{T_n\}_{n=1}^{16}$, которая в пределе сходится к БМ T_0 , см. п. 2. Для коэффициента запаса n_0 балки V^0 заданы условия прочности вида

$$1,8 \leq n_0 \leq 3,4. \tag{21}$$

Для КТ V^0 имеем следующие исходные данные:

$$\begin{aligned} h &= 0,2083; \quad \sigma_T = 4; \quad E_c = 1, \\ E_v &= 8, \quad \nu_c = \nu_v = 0,3, \end{aligned} \tag{22}$$

где E_c, E_v (ν_c, ν_v) – модули Юнга (коэффициенты Пуассона), соответственно связующего материала и волокна, σ_T – предел текучести волокна, на поверхности $z = H, 0,5L \leq y \leq L$ действуют нагрузки $q_z = 0,00062, q_x = 0,00037$ (см. рис. 10).

Для БМ T_0 КТ V^0 используем двухсеточный КЭ (2сКЭ) $V_d^{(2)}$ размерами $6h \times 6h \times 6h$. На рис. 11 2сКЭ $V_d^{(2)}$ расположен в локальной декартовой системе координат $Oxyz$. 2сКЭ $V_d^{(2)}$ имеет две вложенные сетки: равномерную мелкую сетку h_d с шагом h размерности $7 \times 7 \times 7$ и крупную – H_d размерности $2 \times 3 \times 2$. По осям Ox, Oz сетка H_d имеет шаг $6h$, по оси Oy – шаг $3h$. На рис. 11 узлы крупной сетки H_d отмечены точками, 12 узлов. Процедура построения матрицы жесткости и вектора узловых сил 2сКЭ $V_d^{(2)}$ подробно изложена в работе [39]. На базе модели T_n строим двухсеточную модель T_n^o , которая состоит из 2сКЭ типа $V_d^{(2)}$ размерами $6h_n \times 6h_n \times 6h_n, n = 5, \dots, 12$. Для модели T_n^o определяем (по 4-й теории прочности [1]) максимальное эквивалентное напряжение $\sigma_n^o, n = \overline{5, 12}$.

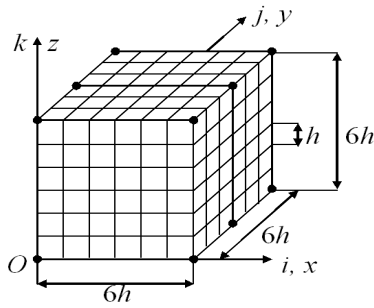


Рис. 11. Мелкая и крупная сетки 2сКЭ $V_d^{(2)}$

Fig. 11. Small and large grids 2gFE $V_d^{(2)}$

Результаты расчетов представлены в таблице, где σ_n^o – максимальное эквивалентное напряжение модели T_n^o ; N_n^o и b_n^o – размерность и ширина ленты СУ МКЭ модели T_n^o , $n = 5, \dots, 12$, погрешность δ_n (%) определяется по формуле

$$\delta_n = 100 \% \times |\sigma_n^o - \sigma_{n-1}^o| / \sigma_n^o, \quad n = 6, \dots, 12. \quad (23)$$

Анализ результатов показывает равномерную монотонную сходимость напряжений σ_n^o , $n = \overline{5, 12}$, и погрешностей δ_n (%), $n = \overline{6, 12}$, что подтверждает теорему 2, см. п. 2. Отметим, что БМ T_0 порождает максимальное эквивалентное напряжение σ_0 КТ V^0 , которое мало отличается от точного. Напряжение σ_0 считаем точным (положение 3 МФДМ, п. 1).

Результаты расчетов для моделей $T_5^o - T_{12}^o$

Calculation results for models $T_5^o - T_{12}^o$

n	T_n^o	σ_n^o	δ_n (%)	N_n^o	b_n^o	n	T_n^o	σ_n^o	δ_n (%)	N_n^o	b_n^o
5	T_5^o	1,246	–	12924	240	9	T_9^o	1,523	3,95	64700	636
6	T_6^o	1,326	6,04	21119	321	10	T_{10}^o	1,579	3,55	86999	765
7	T_7^o	1,398	5,12	32192	414	11	T_{11}^o	1,632	3,23	113904	906
8	T_8^o	1,462	4,45	46575	519	12	T_{12}^o	1,682	2,96	145847	1059

Согласно расчетам, $\sigma_{16}^o = 1,798$, где σ_{16}^o – максимальное эквивалентное напряжение модели T_{16}^o . Имеем $T_{16}^o = T_0$, см. п. 2. Так как размеры 1сКЭ БМ T_0 малы, то и размеры 2сКЭ модели T_{16}^o также малы, поэтому пусть $\sigma_0 = \sigma_{16}^o = 1,798$, т.е. точное напряжение σ_0 равно $\sigma_0 = 1,798$. Расчеты показывают, что если δ_n (%) $\leq 3\%$ (см. формулу (23)), то погрешность максимального эквивалентного напряжения σ_n^o модели T_n^o не более 10%. Так как напряжения $\sigma_{12}^o = 1,682$ и $\sigma_{11}^o = 1,632$ отличаются на $\delta_{12}(\%) = 2,96\%$ (см. таблицу), то погрешность напряжения σ_{12}^o не более 10%, т.е. имеем $\delta_\alpha \leq 0,1$. Отметим, что напряжение $\sigma_{12}^o = 1,682$ отличается от точ-

ного напряжения $\sigma_0 = 1,798$ на 6,43%. Принимаем $\delta_\alpha = 0,1$, $\sigma_b = \sigma_{12}^o = 1,682$. Условие (3) для $\delta_\alpha = 0,1$ выполняется, т. е. $\delta_\alpha = 0,1 < C_\alpha = 0,31$. Подставляя $\delta_\alpha = 0,1$, $n_1 = 1,8$, $n_2 = 3,4$ в (2), получаем скорректированные условия прочности для КТ V^0

$$2 \leq n_b \leq 3, \quad (24)$$

где n_b – коэффициент запаса КТ V^0 , отвечающий приближенному решению задачи упругости,

$$n_b = \sigma_T / \sigma_b. \quad (25)$$

Используя в (25) исходные данные (22), т. е. $\sigma_T = 4$, и найденное напряжение $\sigma_b = 1,682$, определяем коэффициент запаса n_b для КТ V^0

$$n_b = \sigma_T / \sigma_b = 4 / 1,682 = 2,38.$$

Итак, коэффициент запаса $n_b = 2,38$ КТ V^0 (отвечающий приближенному решению задачи упругости) удовлетворяет скорректированным условиям прочности (24). Тогда коэффициент запаса n_0 КТ V^0 (отвечающий точному решению задачи упругости) удовлетворяет заданным условиям прочности (21), см. теорему 1, п. 1.

Проверим выполнение теоремы 1 в данном случае, а именно то, что из выполнения скорректированных условий прочности (24) следует выполнение заданных условий прочности (21). Используя $\sigma_T = 4$, $\sigma_0 = 1,798$ в формуле $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$ (где n_0 – коэффициента запаса и σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение КТ V^0 , которые отвечают точному решению), получаем $n_0 = 4 / 1,798 = 2,22$, т.е. коэффициент запаса $n_0 = 2,22$ КТ V^0 удовлетворяет заданным условиям прочности (21), что подтверждает теорему 1.

Отметим, что БМ T_0 КТ V^0 имеет свыше 32 млн узловых неизвестных МКЭ, что затрудняет реализовать МКЭ с применением 1сКЭ 1-го порядка формы куба со стороной h для построения решения для БМ T_0 , которое считаем точным решением (см. положение 3, п. 1). В расчете на прочность по МФДМ КТ V^0 используем модель T_{12}^o , которая имеет $N_{12}^o = 145847$ узловых неизвестных, и ширина ленты СУ МКЭ которой равна $b_{12}^o = 1059$ (см. таблицу). Модель T_{12}^o требует в $k_1 = \frac{N_0 \cdot b_0}{N_{12}^o \cdot b_{12}^o} = \frac{32508095 \cdot 28524}{145847 \cdot 1059} = 6003,555$ раза меньше объема памяти ЭВМ, т.е. почти в $6 \cdot 10^3$ раз меньше, чем БМ T_0 , что показывает высокую эффективность МФДМ.

5. Применение в МФДМ приближенных решений с большой погрешностью

Рассмотрим случай расчета КТ на прочность по МФДМ, когда возможно применение упругих приближенных решений с большой погрешностью на примере

расчета КТ V^0 (см. п. 4). Расчеты показывают, что если $\delta_n (\%) \leq 5\%$ (см. формулу (23)), то погрешность максимального эквивалентного напряжения σ_n^o модели T_n^o не более 25%. Так как напряжения $\sigma_8^o = 1,462$ и $\sigma_9^o = 1,523$ отличаются на $\delta_9 (\%) = 3,95\%$ (см. таблицу), то погрешность напряжения σ_9^o не более 25%, т.е. $\delta_\alpha \leq 0,25$. Отметим, что напряжение $\sigma_9^o = 1,523$ отличается от точного напряжения $\sigma_0 = 1,798$ на 15,27%, см. п. 4. Принимаем $\delta_\alpha = 0,25$, $\sigma_b = \sigma_9^o = 1,523$. Условие (3) для оценки $\delta_\alpha = 0,25$ выполняется, т.е. имеем $\delta_\alpha = 0,25 < C_\alpha = 0,31$. Подставляя $\delta_\alpha = 0,25$, $n_1 = 1,8$, $n_2 = 3,4$ в (2), получаем следующие скорректированные условия прочности для КТ V^0

$$2,4 \leq n_b \leq 2,7. \quad (26)$$

Используя в (25) $\sigma_T = 4$, $\sigma_b = 1,523$, находим коэффициент запаса n_b для КТ V^0

$$n_b = \sigma_T / \sigma_b = 4 / 1,523 = 2,63.$$

Коэффициент запаса $n_b = 2,63$ КТ V^0 (отвечающий приближенному решению задачи упругости) удовлетворяет скорректированным условиям прочности (26). Тогда коэффициент запаса n_0 КТ V^0 (отвечающий точному решению задачи упругости) удовлетворяет заданным условиям прочности (21), см. теорему 1, п. 1. При расчете на прочность КТ V^0 по МФДМ используем модель T_9^o , которая имеет $N_9^o = 64700$ неизвестных МКЭ, и ширина ленты СУ МКЭ которой равна $b_9^o = 636$ (см. таблицу). Модель T_9^o требует в $k_2 = \frac{N_0 \times b_0}{N_9^o \times b_9^o} = \frac{32508095 \times 28524}{64700 \times 636} = 22534,12$ раз меньше объема памяти ЭВМ, т.е. почти в $22 \cdot 10^3$ раз меньше, чем БМ T_0 .

Итак, показано, что при расчете КТ V^0 возможно применение упругих приближенных решений с большой погрешностью. Применение в расчетах модели T_9^o , по-

грешность $\varepsilon_9 = 15,27\%$ напряжения σ_9^o которой почти в 2,4 раза больше погрешности $\varepsilon_{12} = 6,43\%$ напряжения σ_{12}^o , отвечающего модели T_{12}^o , приводит к повышению эффективности МФДМ. Коэффициент k_2 в 3,67 раза больше коэффициента k_1 , см. п. 4. Это связано с тем, что размерность N_9^o и ширина ленты b_9^o СУ МКЭ модели T_9^o меньше размерности N_{12}^o и ширины ленты b_{12}^o СУ МКЭ модели T_{12}^o (см. таблицу).

На основании полученных результатов можно сделать следующий вывод. Применение в расчетах скорректированных условий прочности позволяет использовать дискретные модели КТ, напряжения которых имеют большую погрешность, что приводит к повышению эффективности МФДМ.

Заключение

Предложен метод фиктивных дискретных моделей (МФДМ) для расчета на статическую прочность упругих тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой, который сводится к построению и расчету на прочность фиктивных дискретных моделей (ФМ), размерности которых меньше размерностей базовых дискретных моделей (БМ) композитных тел (КТ). Предлагаемый метод реализуется с помощью МКЭ с применением многосеточных конечных элементов и скорректированных условий прочности, которые учитывают погрешность приближенных решений. Реализация МФДМ обеспечивает большую экономию ресурсов ЭВМ, что позволяет использовать предлагаемый метод для расчета тел с микронеоднородной регулярной структурой. Рассматриваются два типа ФМ – масштабированные ФМ и ФМ с переменными характерными размерами. При построении ФМ не используется процедура измельчения БМ КТ. Применение скорректированных условий прочности позволяет использовать в расчетах приближенные решения с большой погрешностью, что приводит к повышению эффективности МФДМ. Приведенные расчеты на прочность балки с неоднородной регулярной волокнистой структурой по МФДМ показывают высокую его эффективность.

Библиографический список

1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 704 с.
2. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1993. – 640 с.
3. Москвичев В.В. Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. – Новосибирск: Наука, 2002. – 106 с.
4. Матвеев А.Д. Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности // Известия АлтГУ. – 2017. – № 4: Математика и механика. – С. 116–119. DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-21.
5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. – Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013. – 715 p.
6. Голованов А.И., Тюленева О.И., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
7. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
8. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.
9. Секулович М. Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.

10. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
11. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
12. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
13. Работнов Ю.Н. Механика деформированного твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 711 с.
14. Демидов С.П. Теория упругости. – М., Высшая школа, 1979. – 432 с.
15. Тимошенко С.П., Дж. Гудьер. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
16. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М., Высшая школа, 1968. – 512 с.
17. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия: Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 530–543.
18. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок // Вестник КрасГАУ. – 2016. – № 12. – С. 93–100.
19. Matveev A.D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2016. – Vol. 158, № 1. – Art. 012067. – P. 1–9.
20. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок сложной формы // Вестник КрасГАУ. – 2017. – № 11. – С. 131–140.
21. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов // Вестник КрасГАУ. – 2018. – № 2. – С. 90–103.
22. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных оболочек вращения и двоякой кривизны // Вестник КрасГАУ. – 2018. – № 3. – С. 126–137.
23. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в решении физических краевых задач // Информационные технологии и математическое моделирование. – Красноярск, 2017. – С. 27–60.
24. Матвеев А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов // Деп. в ВИНТИ № 2990–В00. – 2000. – 30 с.
25. Матвеев А.Д. Смешанные дискретные модели в анализе упругих трехмерных неоднородных тел сложной формы // Вестник ПНИПУ. Механика. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. Политехн. ун-та. 2013. – № 1. – С. 182–195.
26. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом наполнения // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – № 3. – С. 161–171.
27. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микро неоднородной структурой // Известия АлтГУ. Серия: Математика и механика. – 2014. – № 1/1. – С. 80–83. DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1–18.
28. Матвеев А.Д. Метод образующих конечных элементов // Вестник КрасГАУ. – 2018. – № 6. – С. 141–154.
29. Матвеев А.Д. Построение многосеточных конечных элементов для расчета оболочек, пластин и балок на основе образующих конечных элементов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 3. – С. 48–57. DOI: 10/15593/per.mech/2019.3.05.
30. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 432 с.
31. Немировский Ю.В., Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1984. – 164 с.
32. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. – М.: Наука, 1985. – 201 с.
33. Алфутов Н.А., Зиновьев А.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
34. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: МГУ, 1984. – 336 с.
35. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
36. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наукова думка, 1985. – 302 с.
37. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 269 с.
38. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Т. 3. Прикладные исследования / А.Н. Гузь, И.В. Игнатов, А.Г. Гирченко [и др.]. – Киев: Наукова думка, 1983. – 262 с.
39. Матвеев А.Д. Метод фиктивных дискретных моделей в расчетах тел с неоднородной регулярной структурой // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2021. – Т. 22, № 2. – С. 244–260. DOI: 10.31772/2712-8970-2021-22-2-244-260.
40. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.

References

1. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.V. Spravochnik po soprotivleniyu materialov [Hand book of resistance materials]. Kiev, Nauk. dumka, 1975. 704 p.
2. Birger I.A., Shorr B.F., Iosilevich G.B. Raschet na prochnost' detalej mashin [Calculation of the strength of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1993. 640 p.
3. Moskvichev V.V. Osnovy konstrukcionnoj prochnosti tekhnicheskikh sistem i inzhenernykh sooruzhenij [Fundamentals of structural strength of technical systems and engineering structures]. Novosibirsk, Nauka, 2002. 106 p.
4. Matveev A.D. Raschet uprugih konstrukcij s primeneniem skorrektirovannykh uslovij prochnosti [Calculation of elastic structures using the adjusted terms of strength]. Izvestiya AltGU, 2017, no. 4, matematika i mekhanika. pp. 116–119. DOI: 10.14258/izvasu (2017) 4-21.
5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013, 715 p.
6. Golovanov A.I., Tiuleneva O.I., Shigabutdinov A.F. Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktsii [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow, FIZMATLIT, 2006, 392 p.
7. Bate K., Wilson E. Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov [Numerical analysis methods and finite element method]. Moscow, Stroizdat, 1982, 448 p.
8. Obratsov I.F., Savel'ev L.M., Khazanov Kh.S. Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov [Finite element method in problems of aircraft structural mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola, 1985, 392 p.
9. Sekulovich M. Metod konechnykh elementov [Finite element method]. Moscow, Stroizdat, 1993, 664 p.
10. Norri D., de Friz Zh. Vvedenie v metod konechnykh elementov [Introduction to the finite element method]. Moscow: Mir, 1981. 304 p.
11. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir, 1975. 544 p.

12. Fudzii T., Dzako M. Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow: Mir, 1982. 232 p.
13. Rabotnov YU.N. Mekhanika deformirovannogo tverdogo tela [Mechanics of a deformed solid]. Moscow, Nauka, 1988. 711 p.
14. Demidov S.P. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. Moskva, Vysshaya shkola, 1979. 432 p.
15. Timoshenko S.P., Dzh. Gud'er. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1979. 560 p.
16. Bezuhov N.I. Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]. Moscow, Vysshaya shkola, 1968. 512 p.
17. Matveev A.D. Metod mnogosetochnykh konechnykh elementov v raschetakh trekhmernykh odnorodnykh i kompozitnykh tel [The method of multigrid finite elements in the calculations of three-dimensional homogeneous and composite bodies]. Uchen. zap. Kazan. un-ta. Seriya: Fiz.-matem. Nauki, 2016, vol. 158, iss. 4, pp. 530–543.
18. Matveev A.D. Metod mnogosetochnykh konechnykh elementov v raschetakh kompozitnykh plastin i balok [Multigrid method for finite elements in the analysis of composite plates and beams]. Vestnik KrasGAU, 2016, no. 12, P. 93–100.
19. Matveev A.D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016, vol. 158, no. 1, Art. 012067, pp. 1–9.
20. Matveev A.D. Metod mnogosetochnykh konechnykh elementov v raschetakh kompozitnykh plastin i balok slozhnoy formy [Multigrid finite element Method in the calculations of composite plates and beams of irregular shape]. The Bulletin of KrasGAU, 2017, no. 11, pp. 131–140.
21. Matveev A.D. Metod mnogosetochnykh konechnykh elementov [Multigrid finite element Method]. The Bulletin of KrasGAU, 2018, no. 2, pp. 90–103.
22. Matveev A.D. Metod mnogosetochnykh konechnykh elementov v raschetakh kompozitnykh obolochek vrashcheniya i dvoyakoy krivizny [The method of multigrid finite elements of the composite rotational and bi-curved shell calculations]. The Bulletin of KrasGAU, 2018, no. 3, pp. 126–137.
23. Matveev A.D. Metod mnogosetochnykh konechnykh elementov v reshenii fizicheskikh kraevykh zadach [Method of multigrid finite elements to solve physical boundary value problems]. Krasnoyarsk, Information technologies and mathematical modeling. 2017. pp. 27–60.
24. Matveev A.D. Nekotorye podhody proektirovaniya uprugikh mnogosetochnykh konechnykh elementov [Some approaches of designing elastic multigrid finite elements]. VINITI Proceedings, № 2990-B00. Krasnoyarsk. 2000, pp. 30 (In Russ.).
25. Matveev A.D. Mixed discrete models in the analysis of elastic three-dimensional inhomogeneous bodies of complex shape. PNRPU Mechanics Bulletin, 2013, no. 1, pp. 182–195.
26. Matveev A.D. Mnogosetochnoe modelirovanie kompozitov neregulyarnoy struktury s malym koeffitsientom napolneniya [Multigrid modeling of composites of irregular structure with a small filling ratio]. J. Appl. Mech. Tech. Phys., no. 3, 2004, pp. 161–171 (In Russ.).
27. Matveev A.D. Postroenie slozhnykh mnogosetochnykh konechnykh elementov s neodnorodnoy i mikroneodnorodnoy struktur [The construction of complex multigrid finite element heterogeneous and micro-inhomogeneities in structure]. Izvestiya AltGU. 2014. № 1/1, Seriya: Matematika i mekhanika. P. 80–83. DOI: 10.14258/izvasu (2014) 1.1-18.
28. Matveev A.D. Metod obrazuyushchikh konechnykh elementov [Method of generating finite elements]. The Bulletin of KrasGAU, 2018, no. 6, pp. 141–154.
29. Matveev A.D. Construction of multigrid finite elements to calculate shells, plates and beams based on generating finite elements. PNRPU Mechanics Bulletin, 2019, no. 3, pp. 48–57. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.05
30. Golushko S.K., Nemirovskiy YU.V. Pryamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugikh kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniya [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and shells of rotation]. Moscow, FIZMATLIT. 2008. 432 p.
31. Nemirovskiy YU.V., Reznikov B.S. Prochnost' elementov konstrukcij iz kompozitnykh materialov [Strength of structural elements made of composite materials]. Novosibirsk, Nauka, Sibirskoe otdelenie. 1984. 164 p.
32. Kravchuk A.S., Majboroda V.P., Urzhumcev YU.S. Mekhanika polimernykh i kompozitsionnykh materialov [Mechanics of polymer and composite materials]. Moscow, Nauka. 1985. 201 p.
33. Alfutov N.A., Zinov'ev A.A., Popov B.G. Raschet mnogoslojnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1984. 264 p.
34. Pobedrya B.E. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. Moscow, MGU. 1984. 336 p.
35. Andreev A.N., Nemirovskiy YU.V. Mnogoslojnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustojchivost', kolebaniya [Multilayer anisotropic shells and plates. Bending, stability, vibration]. Novosibirsk, Nauka, 2001. 288 p.
36. Vanin G.A. Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova dumka. 1985. 302 p.
37. Vasil'ev V.V. Mekhanika konstrukcij iz kompozitsionnykh materialov [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 269 p.
38. Mekhanika kompozitnykh materialov i elementov konstrukcij [Mechanics of composite materials and structural elements]. T. 3. Prikladnye issledovaniya. A.N. Guz', I.V. Ignatov, A.G. Girchenko i dr. Kiev, Naukova dumka. 1983. 262 p.
39. Matveev A.D. The method of fictitious discrete models in calculations bodies with inhomogeneous regular structure. Siberian Aerospace Journal. 2021, vol. 22, no. 2. pp. 244–260. DOI: 10.31772/2712-8970-2021-22-2-244-260.
40. Samul' V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaya shkola, 1982. 264 p.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Financing. The study was not sponsored.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.