



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.1.07

УДК 537.84, 537.811

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОКСИДНОЙ ПЛЁНКИ НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО РАСПЛАВА В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

И.Л. Никулин¹, В.А. Демин^{1,2}

¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

²Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 1 сентября 2021 г.

Одобрена: 15 марта 2022 г.

Принята к публикации:

01 апреля 2022 г.

Ключевые слова:

численное моделирование, индукционная плавка, переменное электромагнитное поле, вынужденная конвекция, вязкое трение, тонкая плёнка, тензор напряжений, термическое расширение, эластичность, упругая деформация.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается тонкая оксидная плёнка на поверхности расплавленного металла при индукционной плавке. Переменное электромагнитное поле возбуждает в объёме металла индукционные токи, которые нагревают его, и силу Лоренца, которая вызывает вынужденную конвекцию расплава, кратко обсуждаются вопросы, связанные с нагревом и течениями в металле. Детально рассмотрен вклад в механические напряжения в плёнке, который дают переменное электромагнитное поле, тепловое расширение плёнки и движение расплава. В осесимметричной постановке записаны уравнения диффузии магнитного поля, уравнения движения и теплопереноса в расплаве, описаны соответствующие граничные условия, указаны безразмерные управляющие критерии, определяющие структуру и интенсивность течения, в том числе у поверхности, на которой находится плёнка. Уравнение упругой деформации плёнки получено из закона Гука и записано в терминах смещений в размерной и безразмерной формах. На основании обзора литературы предложены значения недоступных для непосредственного измерения физических характеристик плёнки. Проведена верификация математической модели. Рассчитаны и приведены возможные течения в расплаве с учётом динамического и теплового действия плёнки на поверхности. Показана однозначная связь напряжённого состояния плёнки с этими течениями. Продемонстрировано влияние параметра диффузии магнитного поля и числа Гартмана, определяющих соответственно структуру и интенсивность вынужденного течения, на деформации плёнки. Построена карта режимов, связывающая интегральную деформацию плёнки с параметрами магнитного поля и начальными размерами плёнки. Обнаружено, что возможны ситуации, когда плёнка в напряжённо-деформированном состоянии не меняет свой размер как целое и остаётся в устойчивом равновесии на поверхности движущегося расплава. Даны рекомендации использования представленных результатов.

© ПНИПУ

© Никулин Илларион Леонидович – к.т.н., доц., e-mail: nil@pstu.ru.

Демин Виталий Анатольевич – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., 15, e-mail: demin@psu.ru.

Illarion L. Nikulin – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: nil@pstu.ru.

Vitaly A. Demin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, e-mail: demin@psu.ru.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

MATHEMATICAL MODEL OF OXIDE FILM DEFORMATION ON THE SURFACE OF A METALLIC MELT IN AN ALTERNATING MAGNETIC FIELD

I.L. Nikulin¹, V.A. Demin^{1,2}

¹Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

²Perm State University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 September 2021
Approved: 15 March 2022
Accepted for publication: 01 April 2022

Keywords:

numerical simulation, induction melting, alternating electromagnetic field, forced convection, viscous friction, thin film, stress tensor, thermal expansion, elasticity, elastic deformation.

ABSTRACT

We consider a thin oxide film on the surface of a molten metal during induction melting. The alternating electromagnetic field excites eddy currents in the metal volume, which heat it, and Lorentz force, which causes the forced convection of the melt, the heating and the flows in the metal are discussed briefly. The contribution to the mechanical stresses in the film that gives the alternating electromagnetic field, the thermal expansion of the film, and the melt motion are considered in detail. The equations system describing magnetic field diffusion, equations of motion and heat transfer in the melt are written in the axisymmetric formulation. The corresponding boundary conditions are described, the governing dimensionless criteria, which determine the structure and intensity of the melt flow, including those at the surface where the film is located, are given. The film elastic deformation equation is derived from Hooke's law and written in terms of displacement in dimensional and dimensionless forms. On the base of literature review, the values of physical characteristics of the film, which are not available for direct measurement, are proposed. The verification of the mathematical model is given. Possible flows in the melt are calculated, taking into account the action of dynamic and thermal action of the film on the surface. The unambiguous relation of the film stress state with these flows is shown. The influence of the magnetic field diffusion parameter and the Hartmann number, which determine, respectively, the structure and intensity of the forced flow, on the film deformations is demonstrated. The mode map of regimes is constructed that relates the integral deformation of the film to the parameters of the magnetic field and the initial size of the film. It is found that the situations are possible when the film in the stress-strain state does not change its total size and remains in stable equilibrium on the surface of the moving melt. Recommendations for the usage of the presented results are given.

© PNRPU

1. Анализ современного состояния описания тонких плёнок применительно к индукционной плавке

1.1. Тонкие плёнки при индукционной плавке

В настоящее время технология индукционной плавки широко используется в производственных процессах машиностроения, например в точном литье деталей газотурбинных двигателей. Индукционная плавка заключается в нагреве металла вихревыми токами, которые возбуждаются в нём переменным магнитным полем (далее ПМП) индуктора (водоохлаждаемая медная катушка с переменным током). Кроме того, магнитное поле, взаимодействуя с вихревыми токами, создает объемную силу Лоренца, которая перемешивает расплав. Схема теплового узла индукционной печи показана на рис. 1, геометрические и физические параметры материалов, взятые на основе работ [1–3] приведены в табл. 1. Следует отметить, что в настоящей работе свойства материалов считаются постоянными, так как зависимость физических свойств от температуры следует учитывать при её значительных перепадах внутри объекта или если температура сильно изменяется со временем; в нашем случае перепады температуры невелики, а процессы стационарны, т.е. можно использовать уравнения с постоянными свойствами, взятыми при соответствующей температуре (1500 °C).

Технологический процесс происходит в техническом вакууме, однако на поверхности расплава при температурах более 1500 °C может образоваться тонкая (до 0,5 мкм) оксидная пленка, которая может привести к негативным металлургическим эффектам: попадание плёнки в отливку приводит к образованию дефекта, который в металлургии называется «пленой». Кроме того, имея большую, чем чистый металл, излучательную способность, пленка может исказить показания яркостного пирометра. Наиболее склонны к образованию оксидных плёнок сплавы на основе никеля с добавлением алюминия или хрома, а доля дефектов, связанных с оксидными плёнками, для некоторых изделий достигает 10 %.

Для удаления оксидной пленки с поверхности расплава применяют «разгон пленки» – технологическую процедуру, заключающуюся в интенсификации течений металла, которые разрывают пленку и выталкивают её на стенку тигля. Кусочки плёнки зацепляются за стенку тигля и остаются на ней, затем расплав металла переливают через них форму. Интенсификация потока достигается увеличением тока индуктора от 250 до 300 А. Одновременно с интенсификацией перемешивания расплава увеличивается и тепловыделение, в ходе разгона расплав дополнительно нагревается до 80...100 °C, такой регулярный перегрев снижает срок службы тигля.

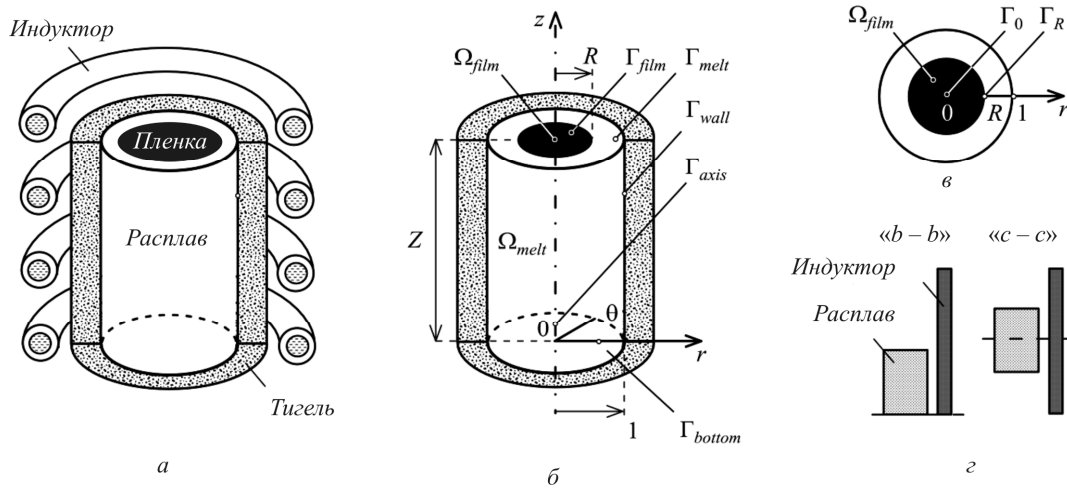


Рис. 1. Принципиальная схема индукционной печи (а), формализованная схема с указанием границ, соответствующих граничным условиям для расплава (б) и плёнки (в), относительное положение расплава и индуктора (з): при «b – b» совпадают донные (bottoms) части расплава и идеализированного индуктора, при «c – c» – центры (centers) симметрии.

Fig. 1. Schematic diagram of induction furnace (a), formalized diagram showing boundaries corresponding to boundary conditions for melt (б) and film (в), relative position of inductor melt (з): "b – b" the bottom parts of the melt and the idealized inductor coincide and "c – c" the centers of symmetry coincide

Таблица 1 / Table 1

Геометрические и физические параметры при индукционной плавке
 Geometric and physical parameters during induction melting

Параметр	Символ	Значение
<i>Технологический процесс</i>		
Внутренний радиус тигля (масштаб длины)	R_c	0,1 м
Высота цилиндра, занятого металлом	Z	0,2 м
Высота индуктора	Z_{ind}	0,35 м
Ток индуктора	I_c	250 А
Число витков в индукторе	N	10
Температура расплава	T_{melt}	1773 К
Температура вакуумной камеры	T_{cham}	323 К
<i>Свойства расплава</i>		
Температуропроводность	a	$1,92 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$
Коэффициент температурного расширения	β	$38,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$
Удельная электропроводность	ζ	0,85 См/м
Теплопроводность	λ	10 Вт/(м·К)
Кинематическая вязкость	ν	$5,28 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$
Плотность	ρ	7900 кг/м ³
Температурный коэффициент поверхностного натяжения	α_T	$1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н/(м·К)}$
Излучательные способности расплава / плёнки	m	0,1 / 0,2
<i>Некоторые характеристические величины</i>		
Коэффициент излучения	C	$3,37 \cdot 10^{-10} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Характерное магнитное поле	H_c	2000 А/м
Характерная плотность потока излучения	q_c	3328 Вт/м ²

Исходя из вышесказанного, исследование условий формирования и стабильности оксидной плёнки на поверхности расплава при индукционной плавке актуально. Закрытая вакуумная камера, высокая температура, дороговизна материалов и неконтролируемое вероятностное появления плёнок диктуют метод исследования – математическое моделирование.

В рассматриваемом случае всю систему можно описывать в осесимметричной постановке, это допустимое приближение, поскольку геометрия тигля – это цилиндр, соосный с катушкой индуктора, магнитное поле которого имеет с хорошей точностью осевую симметрию (отличие наблюдается только вблизи токоподводящих проводов). Этот подход является весьма общим

[4–6], однако существуют работы в которых процессы рассматриваются в полностью 3D-постановке [7–9].

В работе [10] показано, что поле скоростей за несколько секунд (в указанной работе – за 6 с) подстраивается под распределение силы Лоренца, определяемое переменным магнитным полем. Поскольку в процессе плавки расплав металла выдерживается до 5 мин для полного плавления всей шихты, распределение скорости у поверхности является установившимся, следовательно, задачу можно решать в стационарной постановке: $t \rightarrow \infty$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, т.е. течения, тепловые потоки и состояние упругого напряжения не меняются со временем; процессы, связанные с пластической деформацией, текучестью плёнки и её разрушением не моделируются.

Поверхность расплава можно считать плоской и недеформируемой в поперечном сечении, поскольку магнитное поле недостаточно сильно для образования выпуклого мениска, как в технологии плавки с холодным тиглем [11]. Кроме того, на данном этапе не рассматриваются возможные эффекты генерации волн плёнки, рассмотренные, например, в работах [12–14]. При этом соответственно не учитывается и влияние волн на механическое равновесие плёнки.

1.2. Подходы к описанию тонких плёнок

Существуют различные подходы к описанию тонких плёнок, при выборе между ними авторы руководствовались определёнными соображениями. Описание состояния пленки на микроуровне *методом молекулярной динамики*, как это сделано в [15; 16], неприменимо из-за большой вычислительной ёмкости для рассматриваемого объёма вещества. Модель оксидной плёнки как *молекулярного монослоя*, упругие свойства которого определяются *энергией Гиббса* [17], эффективна для медленного потока, где скорости движения жидкости и переноса молекул за счет поверхностной диффузии сопоставимы [18]. Однако наблюдаемая толщина пленки 0,5 мкм не позволяет рассматривать её как монослой, а скорость переноса вещества за счет вынужденной конвекции, значительно превышающая поверхностную диффузию, делает этот подход неприменимым. Существуют работы, в которых тонкая пленка рассматривается как *жидкость Максвелла* [19]. Учет взаимодействия структурных наночастиц позволяет моделировать упругие и пластические свойства пленки: математически это выражается дополнительными членами в тензоре напряжений и позволяет исследовать устойчивость поверхности в электрическом [20] и магнитном [21] полях. В приближении твердой плёнки из математического описания исключается уравнение движения материи в самой плёнке, однако её механическое равновесие по-прежнему удобно вести в терминах тензора напряжений, как в [22] для магнитной мембраны в переменном магнитном поле.

Одним из эффективных и хорошо проработанных методов расчёта напряжённо-деформированного состояния композиционных материалов, содержащих в своей структуре отличные по механическим свойствам тонкие слои или волокна, является *градиентная теория упругости*, построенная на вариационных методах расчёта. Эта теория обобщает классический закон Гука, включает гипотезу Дюамеля – Неймана о термических напряжениях [23] и уточняет классические представления о напряжённо-деформированных состояниях сложных по структуре материалов, учитывая *масштабные эффекты*. Так, в работе [24] показаны деформации и напряжения, возникающие на границе контакта двух сред с различающимися на порядок коэффициентами Пуассона. Интересной особенностью указанной теории является возможность нахождения масштабных коэффициентов из моделирования поведения микроструктуры вышеупомянутыми методами молекулярной динамики [25; 26]. Однако при всей привлекательности градиентной теории упругости существуют некоторые сложности её применения к поставленной задаче – неизвестность масштабных параметров: расплавленный металл имеет структуру жидкости, формирующаяся на поверхности движущегося металла плёнка состоит из различных оксидов никеля, хрома и алюминия и также имеет аморфную структуру, поскольку формированию кристаллической структуры окисла на поверхности препятствует перемешивание металла. Определение упругих свойств такой крайне нерегулярной структуры дискретно-атомистическими методами, как в [26], может быть предметом отдельного исследования.

Исходя из вышесказанного, макроскопический подход в терминах механических напряжений к описанию оксидной пленки на всей поверхности расплава в условиях интенсивной конвекции представляется наиболее перспективным.

1.3. Теплоперенос в тонкой плёнке

В силу малой толщины плёнки пренебрежём её способностью аккумулировать тепло. В этом случае равны плотности потока тепловой энергии: приносимая от расплава к плёнке конвекцией q_{conv} , диффузионная внутри плёнки q_{dif} и уносимая с поверхности электромагнитным излучением q_{rad} – эти плотности потока определяются законами Ньютона – Рихмана, Фурье и Стефана – Больцмана соответственно

$$\begin{cases} q_{conv} = q_{dif} = q_{rad}, \\ q_{conv} = \alpha_{conv} (T_{melt} - T_1), \\ q_{dif} = \frac{\lambda_{film}}{h} (T_1 - T_2), \\ q_{rad} = C_{rad} (T_2^4 - T_{cham}^4), \end{cases} \quad (1)$$

где α_{conv} – конвективный коэффициент теплоотдачи (Вт/(м²·К)), T_{melt} , T_1 , T_2 , T_{cham} – температуры расплава,

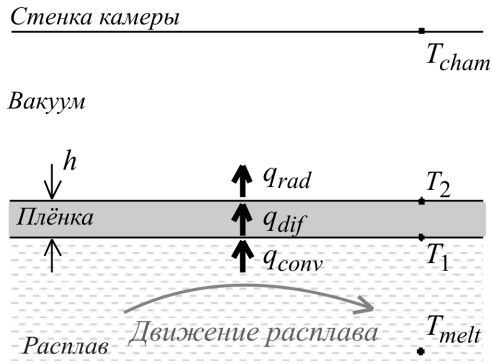


Рис. 2. Схема, поясняющая теплопередачу через плёнку на поверхности расплава

Fig. 2. Scheme explaining the heat transfer through the film on the melt surface

нижней и верхней поверхностей плёнки и вакуумной камеры соответственно (К), λ_{film} – коэффициент теплопроводности плёнки (Вт/(м·К)), C_{rad} – коэффициент излучения (Вт/(м²·К⁴)); схема, поясняющая систему уравнений (1), показана на рис. 2. Величины T_{melt} , T_{cham} и C_{rad} приведены в табл. 2, температуры T_1 , T_2 подлежат определению. Коэффициент теплоотдачи может быть определён из числа Нуссельта

$$\langle Nu \rangle = \frac{\alpha_{conv} l}{\lambda}, \quad (2)$$

здесь $\langle Nu \rangle$ – среднее значение числа Нуссельта, определённое для пластины длиной l , λ – коэффициент теплопроводности расплава (см. табл. 1). В соответствии с работой [27]

$$\langle Nu \rangle = 1,1 \sqrt{(1 - Pr^{1/3}) \cdot Pe}, \quad (3)$$

где $Pr = \frac{\nu}{a}$ – число Прандтля, характеризующее отношение вязкого и температурного пограничных слоёв, a – температуропроводность (см. табл. 1), $Pe = \frac{ul}{a}$ – число Пекле, характеризующее относительный вклад конвективного переноса тепла в движущемся расплаве по сравнению с диффузионным. Подставляя в уравнение (3) число Прандтля $Pr = 0,282$, определённое по свойствам сплава, и число Пекле $Pe = 5263$, соответствующее средней скорости движения расплава $u = 0,1$ м/с и размеру пластины равному радиусу тигля $l = 0,1$ м, получим среднее число Нуссельта $\langle Nu \rangle = 46,82$. Коэффициент теплоотдачи, полученный из формулы (2), равен $\alpha_{conv} = 4682$. Решая систему уравнений (1) с $\lambda_{film} = 6$ Вт/(м·К) (это среднее значение между коэффициентами теплопроводности оксидов NiO и Cr₂O₃ при температуре 1700 К [28]) и толщиной плёнки $h = 50$ мкм, получим искомые температуры на поверхностях плёнки $T_1 = 1699,4$ К и $T_2 = 1699,38$ К. Таким образом, в квазистационарном состоянии тем-

пературное поле внутри плёнки можно считать однородным по толщине (перепад $T_1 - T_2 = 0,02$ К), а температура плёнки в некоторой точке соответствует температуре расплава под плёнкой; погрешность такой аппроксимации составляет не более 1 К или $1/1700 \approx 0,06\%$.

1.4. Действие электромагнитного поля на плёнку

Мгновенная объёмная сила, действующая со стороны ПМП на плёнку, выражается из законов Кулона и Ампера

$$\mathbf{f}_{EM} = \rho_{el} \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (4)$$

где \mathbf{f}_{EM} – объёмная сила (Н/м³), ρ_{el} – объёмная плотность зарядов в плёнке (Кл/м³), \mathbf{E} – напряжённость электрического поля (Н/Кл), \mathbf{J} – плотность тока в плёнке (А/м²), \mathbf{B} – индукция магнитного поля (Тл). Плотности зарядов и токов можно определить по теореме Гаусса для электрического поля и теореме о циркуляции магнитного поля:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{el}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5)$$

здесь \mathbf{D} – электрическое смещение (Кл/м²), \mathbf{H} – напряжённость магнитного поля (А/м), ∇ – дифференциальный оператор набла.

Для расчёта вклада отдельно магнитного [22] или электрического поля (без учёта электрострикции) [29] подходят соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mag} &= \nabla \sigma_{mag}, \quad \sigma_{mag} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \bar{\mathbf{I}}, \\ \mathbf{f}_{el} &= \nabla \sigma_{el}, \quad \sigma_{el} = \mathbf{E} \otimes \mathbf{D} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \bar{\mathbf{I}}, \end{aligned} \quad (6)$$

которые могут быть объединены и с учётом вклада электромагнитной индукции дадут

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{EM} &= \nabla \left(\mathbf{E} \otimes \mathbf{D} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \bar{\mathbf{I}} + \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \bar{\mathbf{I}} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\bar{\mathbf{I}}$ – единичный тензор, \otimes обозначает тензорное произведение. Уравнение (7) связывает объёмную силу в плёнке с электромагнитным полем, пронизывающим её, электрические и магнитные свойства плёнки (электрическая и магнитная проницаемости) включены неявно через связи $D(E)$ и $B(H)$.

При температурах выше 1500 °С оксидная плёнка парамагнитна ($\mu \approx 1$) и является диэлектриком, поэтому в ней нет токов проводимости (\mathbf{J} в (4)). Плёнка тонкая и находится на электропроводной поверхности расплава, поэтому она не способна накопить значительный объёмный электрический заряд, следовательно, членом $\rho_{el} \mathbf{E}$ можно пренебречь.

Проанализируем чисто электромагнитный вклад $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{H})$ в объёмную силу (7). Осесимметричное магнитное поле индуктора $\mathbf{H} = (H_r, 0, H_z)$ возбуждает в пространстве вихревое электрическое поле, которое имеет только азимутальную компоненту $\mathbf{D} = (0, D_\theta, 0)$. Векторное произведение $\mathbf{D} \times \mathbf{H}$ в этом случае имеет как радиальную, так и осевую компоненты, однако в соответствии с уравнением Максвелла $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ и гармонически изменяющиеся магнитное поле индуктора $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos \omega t$ и вихревое электрическое поле \mathbf{D} колеблются со сдвигом фаз $\pi/2$, так что среднее значение $\langle \mathbf{D} \sin \omega t \times \mathbf{H} \cos \omega t \rangle_{2\pi/\omega}$ за период $2\pi/\omega$ равно нулю. Таким образом, в применяемом приближении (осесимметричность, температура выше точки Кюри, тонкая диэлектрическая плёнка, гармонические поля) электромагнитное поле не оказывает влияния на напряжения в плёнке.

1.5. Упругие свойства оксидной плёнки

Поскольку к образованию оксидных плёнок склонны сплавы, содержащие хром и алюминий, логично предположить, что плёнка образована именно оксидами этих элементов. Однако с выбором свойств плёнки существуют сложности: во-первых, свойства оксидных плёнок, образующихся на поверхности расплава во время индукционной плавки при температуре выше 1500 °С в техническом вакууме, недоступны для непосредственного измерения, во-вторых, после открытия вакуумной камеры и остывания тигля, к которому прицепилась плёнка после процедуры «разгона плены», её химический состав и механические свойства в твёрдом окисленном остывшем состоянии будут иные, нежели у только что образовавшейся. Тем не менее обобщим известные в литературе данные.

Для описания упругих свойств плёнок удобно пользоваться эластичностью ℓ (Н/м), которая равна силе, необходимой для удлинения плёнки на единицу длины (м):

$$\ell = \gamma h. \quad (8)$$

При всём многообразии: от бета-лактоглобулина (молочный белок) до шлаковых пен и ферромагнитных плёнок эластичность плёнок лежит в некоторых пределах. Так, в работах [12; 13] эластичность плёнки принята в интервале $20 \leq \ell \leq 40$ мН/м, в работе [30] приводятся данные $60 \leq \ell \leq 100$ мН/м и указывается, что разрушение плёнки наступает при уровне деформации $1,5 \leq \xi_{кр} \leq 2,5$ %. Оценка эластичности по методикам [31], применяемым для шлаковой пены и размерам пузырьков 10...20 мм, даёт значения $29 \leq \ell \leq 230$ мН/м.

Коэффициент линейного температурного расширения (далее КЛТР) плёнок, хотя и определяется по кос-

венным данным, имеет следующие общие черты [32–36]. Во-первых, величина КЛТР в зависимости от химического состава плёнки составляет $7,5 \cdot 10^{-6}$ 1/К для Al_2O_3 [36], $5,4 \cdot 10^{-6}$ 1/К для Cr_2O_3 [36], $10,35 \cdot 10^{-6}$ 1/К для $Cr-Al_2O_3$ [34]. Во-вторых, и в экспериментальных [32; 33], и в теоретических [35] работах указывается, что с уменьшением толщины плёнки КЛТР увеличивается. Коэффициент Пуассона на основании [32; 37] можно принять $\gamma = 0,35$.

Подводя итог вышесказанному, можно утверждать, что тонкая плёнка является достаточно сложным объектом, и выбор её описания диктуется условиями решаемой задачи. В настоящий момент авторам не известны работы других научных коллективов, в которых рассматривались бы взаимное влияние конвекции металлического расплава в переменном магнитном поле и напряжённо-деформированное состояние тонкой оксидной плёнки на его поверхности. Представленная статья является эволюционным развитием работы [38], в которой рассматривалось напряжённо-деформированное состояние оксидной плёнки, полностью покрывающей поверхность расплава, без учёта термических напряжений для единственной конфигурации расплава-индуктор. Целями настоящей работы являются:

- 1) формулировка математической модели, описывающей напряжённо-деформированное состояние тонкой пленки конечного размера на поверхности расплава в ПМП с учётом термического расширения;
- 2) оценка точности вычислительного алгоритма;
- 3) моделирование взаимодействия расплава с упругой пленкой на поверхности, перемешиваемого в ПМП в системах различной геометрии (см. рис. 1, 2) при варьировании управляющих параметров;
- 4) описание влияния ПМП на напряжённо-деформированное состояние пленки конечного размера.

2. Математическая модель взаимного влияния движения расплава и напряжённо-деформированного состояния плёнки на его поверхности

2.1. Уравнение упругих деформаций в плёнке на поверхности расплава

При формулировке математической модели приняты следующие допущения:

1. Вся задача рассматривается в осесимметричной постановке.
2. Плёнка представляет собой диск равной толщины радиусом R , расположенный в центре поверхности расплава, движение плёнки по поверхности не рассматривается.
3. Анализируются только стационарные состояния.
4. Поверхность расплава предполагается плоской и недеформируемой.
5. Оксидная пленка, покрывающая поверхность расплава, представляет собой непрерывную однородную упругую среду.

6. Сдвиговые деформации отсутствуют: в силу малости толщины плёнки пренебрегаем возможным сдвигом в плоскости $r-z$, равенство нулю сдвиговых деформаций в плоскостях $r-\theta$ и $\theta-z$ следует из осесимметричности.

В осесимметричном приближении уравнение баланса сил в плёнке имеет вид [39]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_V = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \end{aligned} \right\} \Omega \in \Omega_{film}, \quad (9)$$

где σ и τ – нормальное и сдвиговое механические напряжения (Па), r, θ, z – цилиндрические координаты (м), f_V – объемная радиальная сила (Н/м³), вид которой будет обсуждаться ниже. Как уже упоминалось ранее, в силу малости толщины плёнки $\tau_{rz} = 0$ также не учитываем вес плёнки. В результате во втором уравнении системы (9) отсутствует объемная сила, поэтому система (9) может быть сведена к следующему виду

$$\frac{\partial(r \cdot \sigma_r)}{\partial r} - \sigma_\theta + r \cdot f_V = 0, \quad \Omega \in \Omega_{film}. \quad (10)$$

Для учёта температурных воздействий использована классическая гипотеза Дюамеля – Неймана: напряжения в среде связаны законом Гука только с упругой деформацией, которая в осесимметричном приближении имеет следующее представление

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_r - \kappa \cdot \Delta T &= \frac{1}{Y} (\sigma_r - \gamma \sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta - \kappa \cdot \Delta T &= \frac{1}{Y} (\sigma_\theta - \gamma \sigma_r), \end{aligned} \right. \quad (11)$$

здесь ε_r и ε_θ – радиальная и азимутальная компоненты нормальной деформации, κ – коэффициент температурного расширения (1/К), ΔT – перепад температур (К), Y – модуль Юнга (Па). Используя определение деформаций

$$\varepsilon_r = \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\xi}{r}, \quad (12)$$

где ξ – смещение (м), уравнения для механических напряжений приводятся к виду

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Y}{1-\gamma^2} (\varepsilon_r + \gamma \varepsilon_\theta - (1+\gamma) \cdot \kappa \cdot \Delta T), \\ \sigma_\theta &= \frac{Y}{1-\gamma^2} (\varepsilon_\theta + \gamma \varepsilon_r - (1+\gamma) \cdot \kappa \cdot \Delta T). \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Используя выражения (12) и (13), уравнение (10) можно привести к виду

$$r^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \xi}{\partial r} - \xi = r^2 \left((1+\gamma) \cdot \kappa \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1-\gamma^2}{Y} f_V \right), \quad \Omega \in \Omega_{film}. \quad (14)$$

В настоящей работе плёнка представлена как неподвижный диск радиусом R , поэтому граничные условия ставятся для центра и края плёнки. Смещения в неподвижном центре отсутствуют:

$$\xi_\Gamma = 0, \quad \Gamma \in \Gamma_0. \quad (15)$$

Край плёнки находится в равновесии, если на нём отсутствует радиальное напряжение

$$\sigma_{r,\Gamma} = 0, \quad \Gamma \in \Gamma_R. \quad (16)$$

В терминах смещения, с учётом соотношений (12), (13), условие (16) принимает вид

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)_\Gamma + \gamma \frac{\xi_\Gamma}{R} = (1+\gamma) \cdot \kappa \cdot \Delta T, \quad \Gamma \in \Gamma_R. \quad (17)$$

Следует отметить, что граничное условие (15) приводит к следующим равенствам для напряжений и деформаций на оси

$$(\sigma_r = \sigma_\theta, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta)_\Gamma, \quad \Gamma \in \Gamma_0. \quad (18)$$

Как было показано в п. 1.4, переменное электромагнитное поле не оказывает силового действия на плёнку, таким образом, объёмная сила в уравнении (14) может быть вызвана вязким трением со стороны движущегося под плёнкой расплава и термическим расширением.

Расплав металла является ньютоновской жидкостью, для которой закон вязкого трения создаёт поверхностную силу (касательное механическое напряжение) f_S^{melt} (Н/м²)

$$f_S^{melt} = \rho \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\Gamma_{film}}, \quad \Gamma \in \Gamma_{film}, \quad (19)$$

в результате чего плёнка тормозит расплав, здесь ρ и ν – плотность (кг/м³) и кинематическая вязкость (м²/с) расплава, u – радиальная компонента скорости (м/с). Градиент скорости вычисляется вблизи покрытой плёнкой поверхности. Движение расплава, в свою очередь, создает в плёнке касательные напряжения f_S^{film} , которые распространяются по всему её объёму, причём в соответствии с третьим законом Ньютона

$$f_S^{film} = -f_S^{melt}. \quad (20)$$

В силу малой толщины объёмная сила f_V (Н/м³) равномерно распределена по толщине плёнки и быть выражена через поверхностную f_S^{film} следующим образом

$$f_V = \frac{1}{h} f_S^{film}, \quad (21)$$

где h – толщина плёнки. Таким образом, объёмная сила вязкой природы, действующая со стороны движущего расплава на плёнку, имеет вид

$$f_V = -\frac{\rho \nu}{h} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\Gamma_{film}}. \quad (22)$$

Влияние термических напряжений будет рассмотрено в следующем пункте на основе результатов численного моделирования.

2.2. Движение металла в переменном электромагнитном поле

Опишем кратко характер течений металла. В расплаве, помещённом в ПМП, возбуждаются индукционные вихревые токи, что приводит к двум механизмам движения. Первый – свободная тепловая конвекция, которая имеет место при неоднородном нагреве расплава индукционными токами (джоулевы источники теплоты). Второй – вынужденная конвекция, возбуждаемая объёмной силой Лоренца $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, которая возникает при взаимодействии индукционных токов с магнитным полем. Система уравнений, определяющих течения в расплаве, включает уравнения электродинамики сплошной среды, неразрывности, переноса импульса и тепловой энергии, неразрывности:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \\ \mathbf{J} &= \zeta (\mathbf{E} + \mu\mu_0 \mathbf{u} \times \mathbf{H}), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \beta (T - T_L) + \\ &+ \frac{\mu\mu_0}{\rho} \mathbf{J} \times \mathbf{H}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) &= \lambda \nabla^2 T + \frac{1}{\zeta} J^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где μ_0 – магнитная постоянная (Гн/м), μ – магнитная проницаемость, t – время (с), ζ – удельная электропроводность (См/м), p – давление (Па), \mathbf{g} – ускорение свободного падения (м/с^2), β – коэффициент объёмного расширения (1/К), T и T_L – температуры (К) локальная и ликвидус сплава соответственно, λ – коэффициент теплопроводности (Вт/(м·К)), ∇^2 – оператор Лапласа.

Используя масштабы, приведённые работе [40], уравнения электромагнетизма из системы (23) приводятся к безразмерным уравнениям диффузии магнитного поля

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H}_1 &= D_H (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_0), \quad \nabla^2 \mathbf{H}_2 = -D_H \mathbf{H}_1, \\ r = 0: \quad H_{1,2(r)} &= \frac{\partial H_{1,2(z)}}{\partial r} = 0, \\ r, z \rightarrow \infty: \quad \mathbf{H}_{1,2} &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где \mathbf{H}_0 – амплитуда магнитного поля индуктора, \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 – амплитуды гармоник представления поля индукционных токов $\mathbf{H}_1 \cos \omega t + \mathbf{H}_2 \sin \omega t$, ω – циклическая частота тока индуктора (рад/с),

$$D_H = \mu\mu_0 \zeta R_c^2 \omega \quad (25)$$

параметр диффузии магнитного поля, R_c – характерный размер, в качестве такового взят внутренний радиус тигля.

Параметр D_H при фиксированных свойствах металла (электропроводность) и геометрии установки (внутренний радиус тигля) пропорционален частоте ω поля индуктора, которая является единственным доступным для управления во время плавки параметром. Как это видно из уравнений (24), параметр D_H определяет структуру индукционного магнитного поля (\mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2), а значит и распределение джоулевых источников

$$J^2 = \frac{1}{2} \left((\nabla \times \mathbf{H}_1)^2 + (\nabla \times \mathbf{H}_2)^2 \right), \quad (26)$$

влияющих на тепловую конвекцию, и распределение объёмной силы Лоренца

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{2} \left((\mathbf{H}_1 \cdot \nabla) \mathbf{H}_1 + (\mathbf{H}_2 \cdot \nabla) \mathbf{H}_2 \right), \quad (27)$$

возбуждающей вынужденную конвекцию, таким образом распределения джоулевых источников теплоты и силы Лоренца для конкретной установки определяются частотой.

Уравнения движения и неразрывности можно решать в терминах функции тока ψ и вихря скорости $\varphi = \nabla \times \mathbf{u}$, в осесимметричной постановке они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r\varphi)}{\partial r} - u_r \varphi \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - u_z \varphi \right) + \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial r} + \text{Hm}^2 \cdot (\nabla \times \mathbf{f}_L) \\ \varphi &= \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= -r\varphi, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\text{Gr} = \frac{g\beta q_c R_c^4}{\lambda \nu^2}$ – число Грасгофа, характеризующее тепловую конвекцию, q_c – характерный тепловой поток,

$\text{Hm} = \frac{H_c R_c}{\nu} \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\rho}}$ – модифицированное число Гартмана, определяющее интенсивность течений, H – характерное магнитное поле. Следует отметить, что вихрь скорости φ и ротор силы Лоренца $\nabla \times \mathbf{f}_L$ в осесимметричном случае имеют только азимутальную компоненту. Граничные условия для замыкания системы уравнений (28) включают условие свободного течения на оси симметрии, прилипания на твёрдых границах (плёнка, стенка и дно тигля) и термокапиллярного вклада в конвекцию на свободной от плёнки поверхности расплава:

$$\begin{aligned} \varphi_\Gamma &= 0, \quad \Gamma \in \Gamma_{axis}, \\ (u_r)_\Gamma &= (u_z)_\Gamma = 0, \quad \Gamma \in \Gamma_{film} \cup \Gamma_{wall} \cup \Gamma_{bottom}, \\ \varphi_\Gamma &= -\text{Ma} \frac{\partial T_\Gamma}{\partial r}, \quad \Gamma \in \Gamma_{melt}, \end{aligned} \quad (29)$$

здесь $\text{Ma} = \frac{\alpha_T q_c R_c^2}{\lambda \nu^2 \rho}$ – число Марангони, характеризующее интенсивность термокапиллярной конвекции,

α_T – температурный коэффициент (1/К) из разложения коэффициента поверхностного натяжения $\alpha(T) = \alpha_L - \alpha_T \cdot (T - T_L)$, индекс L относится к температуре ликвидус.

Уравнение переноса тепловой энергии из (23) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{Pr} \frac{\partial T}{\partial r} - u_r r T \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial T}{\partial z} - u_z T \right) + \frac{Q}{Pr} J^2, \quad \Omega \in \Omega_{melt}, \\ \frac{\partial T_\Gamma}{\partial z} &= Bi(T^4 - T_{cham}^4), \quad \Gamma \in \Gamma_{film} \cup \Gamma_{melt}, \\ \frac{\partial T_\Gamma}{\partial r} &= 0, \quad \Gamma \in \Gamma_{wall}, \\ \frac{\partial T_\Gamma}{\partial z} &= 0, \quad \Gamma \in \Gamma_{bottom}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $Q = \frac{H_c^2}{\zeta q_c R_c}$ – параметр тепловыделения, показывающий отношение мощностей тепловыделения и теплового излучения с поверхности, $Bi = \frac{C q_c^3 R_c^4}{\lambda^3}$ – радиационное

число Био, равное отношению характерного перепада температуры внутри металла к разности температур между поверхностью металла и окружающей средой, C – коэффициент излучения, учитывающий излучательные способности материалов и геометрию области радиационного теплообмена.

Примеры рассчитанных распределений скорости и температуры, реализующихся при разных значениях параметра D_H , приведены на рис. 3, а соответствующие им распределения скорости вблизи поверхности и температуры – на рис. 4. Из рис. 3 видно, что при изменении параметра D_H течения изменяют свою структуру от двухвихревого (а) (наблюдается при $D_H < 18$) к четырёхвихревому (б) ($D_H > 52$), что объясняется распределениями силы Лоренца [41]. Следует отметить, что конвекция в условиях индукционной плавки полностью вынужденная [42]. В интервале $18 \leq D_H \leq 52$ в зависимости от взаимного расположения расплава и индуктора могут реализовываться режимы, при которых течение в центральной части поверхности направлено к оси симметрии, как на рис. 3 (б) и рис. 4 (а), кривая $D_H = 40$. Такие режимы наиболее «опасны» с точки зрения формирования и устойчивости оксидных плёнок на поверхности расплава.

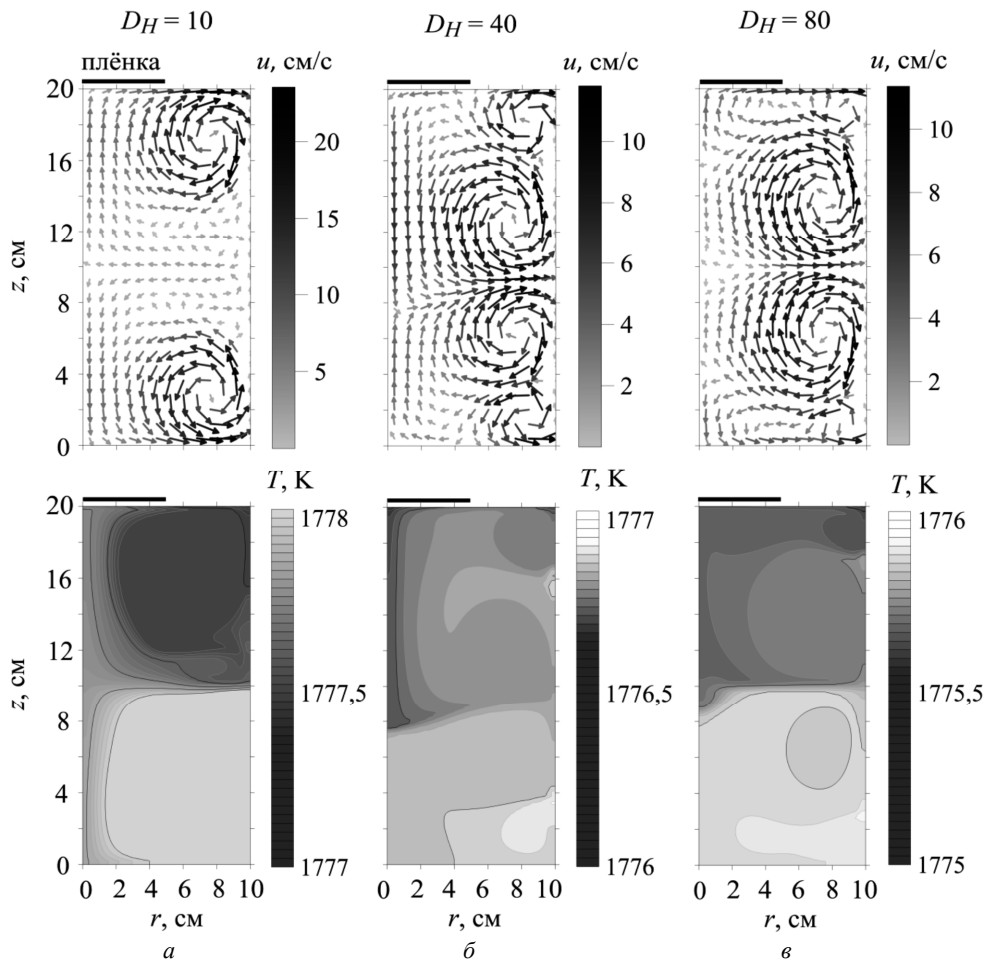


Рис. 3. Распределения скоростей и температур в расплаве при различных значениях параметра диффузии магнитного поля (геометрия $c - c$)

Fig. 3. Velocity and temperature distributions in the melt at different values of the magnetic field diffusion parameter (geometry $c - c$)

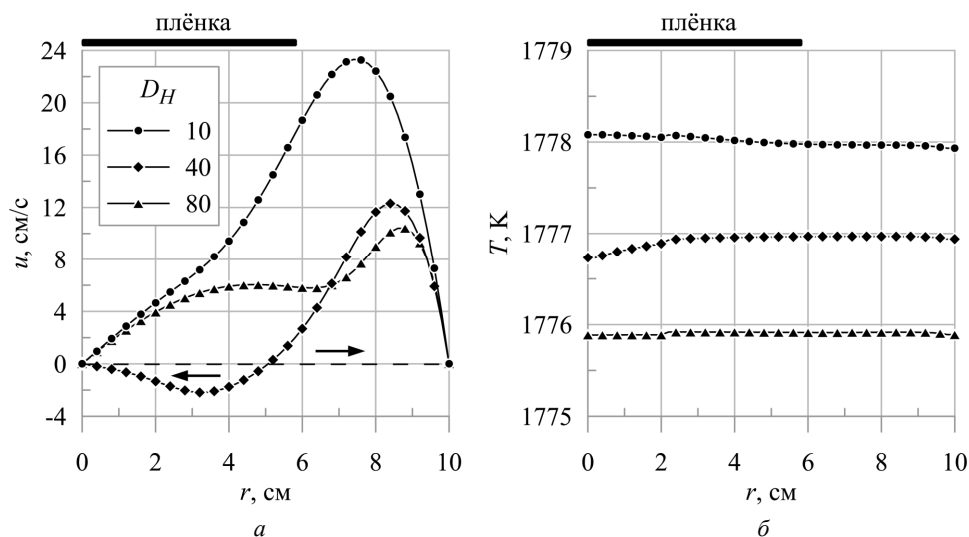


Рис. 4. Профили скорости вблизи поверхности (а) и температуры на поверхности (б), рассчитанные при различных значениях параметра диффузии магнитного поля. Стрелки на профиле скорости показывают направление течения расплава

Fig. 4. Velocity profiles near the surface (a) and temperature at the surface (b), calculated at different values of the magnetic field diffusion parameter. The arrows on the velocity profile show the direction of melt flow

Распределение температуры неоднородно (см. рис 3) и соответствует структуре течения, что характерно для интенсивной вынужденной конвекции, при этом перепады температуры невелики по абсолютной величине (не более 1 К) вследствие интенсивного перемешивания. Из рис. 4 (б) видно, что для режимов, где скорость направлена в одну сторону, поверхность расплава с плёнкой можно считать изотермической. Для режимов со сменой направления ($18 \leq D_H \leq 52$) в центральной части наблюдаются градиенты температуры до 10 К/м.

Объёмные силы, создаваемые в плёнке движущимся у поверхности расплавом, имеют вязкую природу. Вынужденные течения, разгоняемые ПМП, определяются его параметрами: в первую очередь, параметром диффузии магнитного поля D_H , отвечающим за структуры индукционных токов и силы Лоренца, во вторую – модифицированным числом Гартмана N_m , которое влияет на интенсивность течения. Таким образом, состояние плёнки косвенно определяется параметрами магнитного поля D_H и N_m .

Для выяснения вклада термического расширения оценим и сравним слагаемые в правой части уравнения (14) на основании рассчитанных распределений скорости и температуры, представленных на рис. 4 для $D_H = 40$.

В слагаемое с объёмной силой $\frac{1-\gamma^2}{\gamma} f_V$, как было показано ранее, даёт вклад только вязкое трение, которое определяется соотношением (22), а с учётом определения эластичности (8) приводится к виду $(1-\gamma^2) \cdot \frac{\rho V}{\ell} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$.

Параметры расплава в соответствии с работами [43; 44] представлены в табл. 1. Значение градиента скорости можно оценить из рис. 4 (а): максимальная скорость в узлах, отстоящих на 2 мм от поверхности, составляет

0,12 м/с, таким образом $\partial u / \partial z = 0,12 / 0,002 = 60$ (1/с). При варьировании ℓ в интервале от 20 до 230 мН/м получим интервал значений вязкого слагаемого $0,95 \div 11$ 1/м. Взяв максимальное значение КЛТР для плёнки $\kappa = 10,35 \cdot 10^{-6}$ 1/К [34] и градиент температуры из рис. 4 (б) около оси симметрии $\partial T / \partial r = 0,2 / 0,02 = 10$ К, имеем вклад температурного расширения $(1+\gamma) \cdot \kappa \cdot (\partial T / \partial r) = 1,4 \cdot 10^{-4}$ 1/м. Таким образом, в случае индукционной плавки, когда развивается вынужденное интенсивное течение, а градиенты температур невелики, влиянием теплового расширения на деформацию плёнки можно пренебречь.

Кроме того, при свободном крае плёнки тепловое расширение само по себе не может привести к разрушению плёнки.

При таком же градиенте температуры и свойствах материалов слагаемые сравниваются при скорости $1,5 \cdot 10^{-3}$ мм/с, для эластомерных плёнок с КЛТР $\kappa \sim 10^{-3}$ – при 0,15 мм/с, т.е. тепловое расширение может играть некоторую роль только при слабом ползущем течении.

2.3. Обобщённое уравнение равновесия и интегральная деформация

Итак, объёмные силы, создающие напряжения в тонкой плёнке на поверхности, определяются в основном вязкими силами, термическое расширение может проявить себя только в случае неразвитой конвекции и больших температурных градиентов. Хотя связанное с термическим расширением слагаемое при индукционной плавке пренебрежимо мало, сохраним его для сохранения общности модели. В этом случае уравнение

баланса (14) с учётом объёмной силы (22) и эластичности (8) принимает вид

$$r^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \xi}{\partial r} - \xi = r^2 \left((1 + \gamma) \cdot \kappa \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1 - \gamma^2}{\ell} \cdot \rho v \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\Gamma_{film}} \right), \quad \Omega \in \Omega_{film}, \quad (31)$$

а с применением масштабов длины R_c , скорости v/R_c и температуры $q_c R_c / \lambda$ преобразуется к безразмерному виду

$$r^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \xi}{\partial r} - \xi = r^2 \left(K \frac{\partial T}{\partial r} + L \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\Gamma_{film}} \right), \quad \Omega \in \Omega_{film}, \quad (32)$$

где K – безразмерный параметр температурного расширения, L – вязкоэластичный параметр, характеризующий отношение напряжения вязкого трения в жидкости к упругому напряжению, возникающему в плёнке, определяемые как

$$K = (1 + \gamma) \cdot \kappa \cdot \frac{q_c R_c}{\lambda}, \quad L = \frac{1 - \gamma^2}{\ell} \cdot \frac{\rho v^2}{R_c}. \quad (33)$$

Уравнение (32) замыкается на оси граничным условием (15), вид которого остаётся прежним, для края плёнки уравнение (17) преобразуется к безразмерному виду

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)_{\Gamma} + \gamma \frac{\xi_{\Gamma}}{R} = K \cdot \Delta T, \quad \Gamma \in \Gamma_R, \quad (34)$$

в котором ξ и R берутся безразмерными с масштабом R_c , а температура – с масштабом $q_c R_c / \lambda$.

Изменение размера плёнки приводит к изменению граничного условия для скорости у поверхности (29): $\Gamma_{film} \leftrightarrow \Gamma_{melt}$, размер плёнки можно рассчитать как

$$R = R_0 + \int_{\Omega_{film}} \epsilon_r dr, \quad (35)$$

где R_0 – начальный размер плёнки. Рассматривая только стационарные состояния (установившееся движение и размер плёнки), можно рассчитывать движение при неподвижной плёнке, полагая её радиус R финальным состоянием, а начальный радиус R_0 восстанавливать из уравнения (35). При этом изменение размера плёнки, интегральная деформация рассчитываются из соотношения

$$\Delta R = R - R_0 = \int_{\Omega_{film}} \epsilon_r dr. \quad (36)$$

3. Численная реализация, верификация и оценка погрешности

Математическая модель реализована в оригинальном авторском коде на языке FORTRAN-95 с применением математической библиотеки Intel MKL. Уравнения диффузии магнитного поля, переноса энергии и импульса, механического баланса дискретизированы

методом конечных разностей схемами второго порядка точности [45] по координате и первого по времени. Задача о диффузии ПМП и вынужденного движения расплава в нём верифицированы в работах [46–48].

Численный алгоритм расчета перемещений и деформаций основан на решении конечно-разностного аналога уравнений (31)–(33) с граничными условиями с аппроксимацией всех производных формулами второго порядка точности. Для проверки данного этапа была рассмотрена модельная задача

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \xi}{\partial r} - \xi &= r^2 (r^2 - r), \\ \xi_{r=0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \gamma \frac{\xi}{r} \right)_{r=R} &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Функция в правой части (37) является по смыслу объёмной силой, аналогичной таковой в уравнении (32), и выбрана так, чтобы примерно соответствовать по величине и профилю силе, действующей в реальных потоках расплава. Задача (37) имеет следующее точное решение:

$$\begin{aligned} \xi &= ar^4 + br^3 + cr + d \frac{1}{r}, \\ a &= \frac{1}{15}, \quad b = -\frac{1}{8}, \quad c = R^2 \frac{45 + 15\gamma - (32 + 8\gamma)R}{120(1 + \gamma)}, \quad d = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Сравнение аналитически и численно рассчитанных распределений смещений и деформаций представлено на рис. 5 (а). Зависимости относительных погрешностей расчета

$$E_{\xi} = \max_{0 < r \leq R} \left\{ \left| 1 - \frac{\xi_{num}}{\xi_{exact}} \right| \right\}, \quad E_r = \max_{0 < r \leq R} \left\{ \left| 1 - \frac{\epsilon_r^{num}}{\epsilon_r^{exact}} \right| \right\}. \quad (39)$$

от количества узлов сетки – на рис. 5 (б). В соответствии с определением (12) погрешность расчёта азимутальной деформации E_{θ} совпадает с таковой для смещения E_{ξ} .

На рис. 5 представлено решение модельной задачи (37), полученное при $R = 0,5$ и $\gamma = 0,25$; видно, что численное решение и для смещения ξ , следовательно, и азимутальной деформации, и радиальной деформации хорошо совпадает с точным, погрешности расчёта E_{ξ} и E_{θ} экспоненциально убывают при сгущении сетки (увеличении числа разбиений N). Однако погрешность E_r на рис. 5 (б) на порядок выше E_{ξ} и E_{θ} и убывает немонотонно. Это можно объяснить тем, что смещение ξ имеет максимум в точке $r^* \approx 0,457$, в этой точке деформация ϵ_r , определяемая уравнением (12), равна нулю. Когда знаменатель в формуле (39) мал, и ошибка E_r становится большой, периодическое возрастание погрешности обусловлено совпадением узла сетки и r^* , которое происходит, если величина r^* кратна шагу сетки.

В работе [40] было показано, что оптимальное число разбиения $N = 50$, так как оно обеспечивает как бли-

зость решения к пределу сходимости, так и малую скорость, т.е. устойчивость структуры потока. Таким образом, при таких параметрах сетки погрешности расчета можно оценить по рис. 5 (б): E_ξ , E_r и $E_\theta < 10^{-3}$, т.е. не превышают 0,1 % от абсолютной величины.

4. Результаты моделирования деформации плёнки при индукционной плавке

Вычислительные эксперименты проведены с параметрами, приведёнными в табл. 2, в них устанавливалось влияние размеров плёнки и параметров магнитного поля, т.е. фактически течений, реализующихся при указанных условиях, на упругонапряжённое состояние плёнки. Алгоритм экспериментов был следующий. Задавались параметр D_H и финальный радиус плёнки R , который (радиус) соответствовал квазистационарному состоянию – установившимся течениям расплава, потокам тепла и напряжённо-деформированному состоянию плёнки. Радиус R определял твёрдую границу (условие полного прилипания) для расплава и условие радиаци-

онного теплообмена (излучательную способность и соответствующее число Био), с этим радиусом решалась задача тепломассопереноса в расплаве, помещённом в ПМП, где вычислялись установившиеся распределения скоростей под плёнкой и распределение температуры на поверхности, т.е. в плёнке (см. п. 6). По известным профилям скорости и температуры определялись объёмная сила, действующая на плёнку, и решалась задача упругости (32) с граничными условиями (15) и (17), определялись смещения ξ , локальные ϵ и интегральная ΔR деформации. Следует отметить, что смещение ξ , радиусы R и R_0 , а также интегральная деформация ΔR представлены в безразмерном виде (масштаб R_c), локальные деформации ϵ безразмерные по определению (12), рассчитанные при решении безразмерного уравнения (32), не зависят от масштаба и не требуют пересчёта.

На рис. 6 показаны профили скорости течения расплава при $D_H = 40$ непосредственно под плёнкой для двух её финальных радиусов, и соответствующие им смещения и радиальная и азимутальная локальные деформации. Распределения скорости и температуры

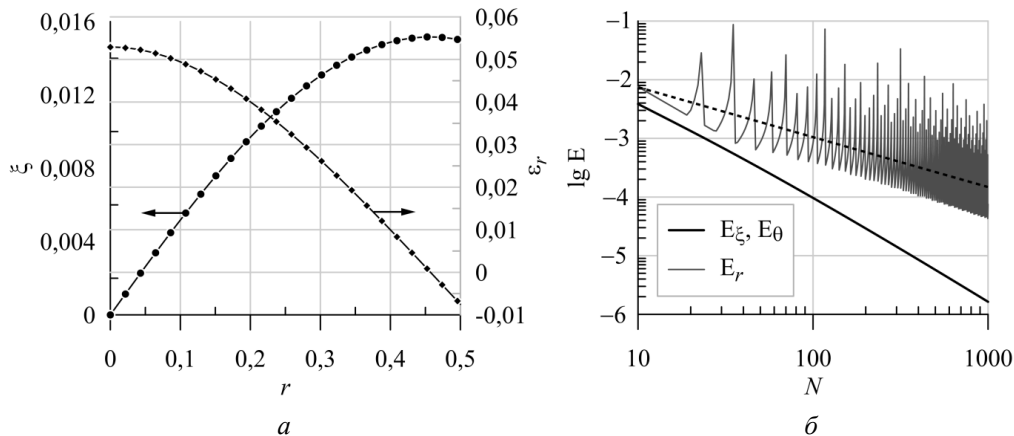


Рис. 5. Профили смещения и деформации (а) и зависимости погрешностей расчёта смещения E_ξ , радиальной E_r и азимутальной E_θ компонент деформации от числа разбиений N (б). Штриховая линия – линейная аппроксимация погрешности E_r

Fig. 5. Profiles of displacement and deformation (a) and the dependencies of the calculation errors of the displacement E_ξ , radial E_r and azimuthal E_θ deformation components on the grid number N (b). The dashed line is a linear approximation of the error E_r

Таблица 2 / Table 2

Управляющие параметры, использованные при расчётах

Governing parameters used in the calculations

Параметр	Символ	Значение
Числа Био для расплава/плёнки	Bi	$1,24 \cdot 10^{-7} / 2,48 \cdot 10^{-7}$
Параметр диффузии магнитного поля	D_H	1...150
Число Грасгофа	Gr	$4,13 \cdot 10^7$
Модифицированное число Гартмана	Hm	4581
Параметр температурного расширения	K	$4,31 \cdot 10^{-4}$
Вязкоэластичный параметр	L	$2,57 \cdot 10^{-7}$
Число Марангони	Ma	$2,31 \cdot 10^5$
Число Прандтля	Pr	0,269
Параметр тепловыделения	Q	0,014
Коэффициент Пуассона	γ	0,35

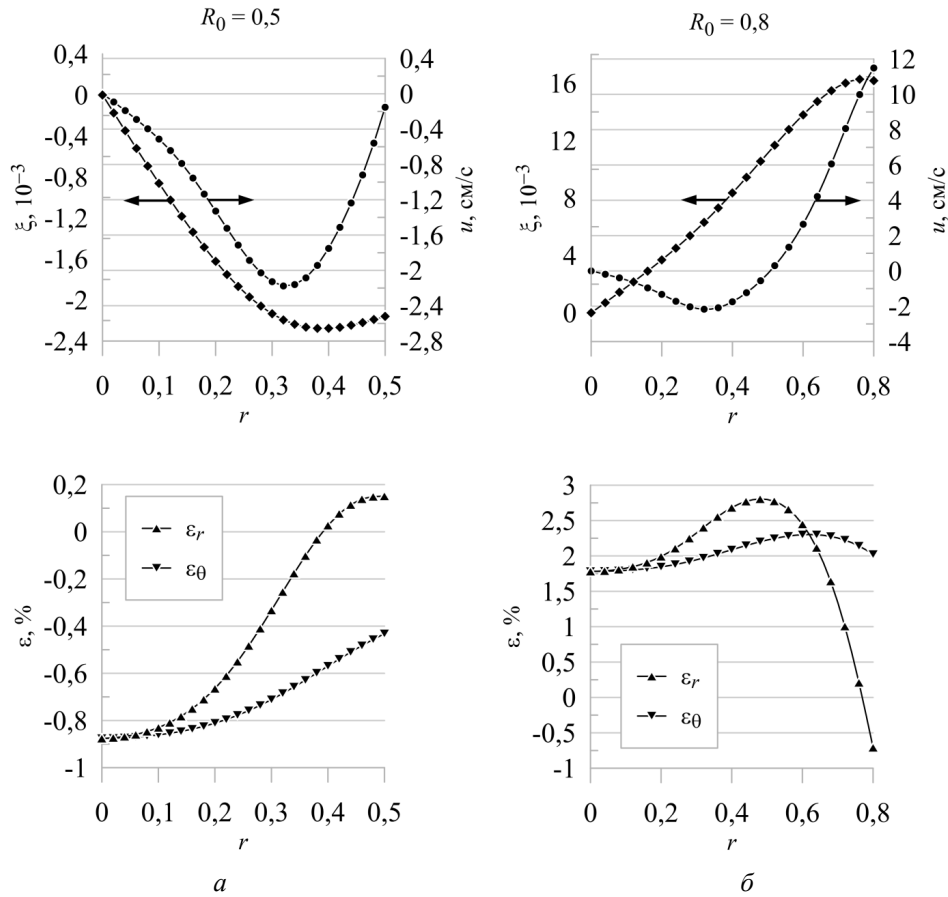


Рис. 6. Профили скорости u , смещения ξ и локальных деформаций ϵ при $D_H = 40$ и различных финальных радиусах плёнки R : 0,5 (а) и 0,8 (б)

Fig. 6. Velocity profiles u , displacement ξ , and local deformations ϵ at $D_H = 40$ and different final film radii R : 0.5 (a), and 0.8 (b)

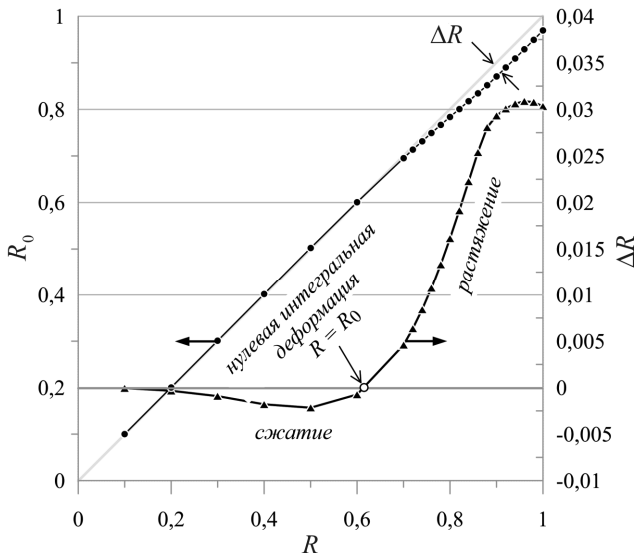


Рис. 7. Зависимости начального радиуса R_0 и интегральной деформации ΔR от финального радиуса R , рассчитанные при $D_H = 40$

Fig. 7. Dependences of the initial radius R_0 and the integral deformation ΔR on the final radius R calculated at $D_H = 40$

в объёме расплава показаны на рис. 3 (б), а их характерные профили на поверхности – на рис. 4. Из рис. 6 видно, что когда течение расплава под плёнкой направлено

к центру (отрицательные скорости – на рис. 6, а, в ней возникают деформации сжатия: ξ и $\epsilon < 0$, если течение от центра (рис. 6, б), она растягивается в центральной части ξ и $\epsilon > 0$, а у края наблюдается значительная деформация сжатия $\epsilon_r < 0$.

Связь финального радиуса R в напряжённо-деформированном состоянии с начальным радиусом ненагруженной плёнки R_0 показана на рис. 7, там же приведена зависимость интегральной деформации ΔR . Из рисунка видно, что существует такой финальный радиус плёнки R , при котором её размер не изменяется, а радиус равен таковому в ненагруженном состоянии $R = R_0$. Такое возможно, только когда течение расплава на поверхности направлено в разные стороны, это реализуется в интервале значений параметра диффузии магнитного поля $18 \leq D_H \leq 52$ и некоторых геометриях «индуктор – расплав» [47; 48].

Результаты вычислительных экспериментов, в которых рассчитывались локальная радиальная деформация ϵ_r в центре плёнки и интегральная деформация ΔR при варьировании финального радиуса в интервале $0,1 \leq R \leq 1$ (при $R = 1$ край плёнки считается свободным) и параметра диффузии магнитного поля в интервале $1 \leq D_H \leq 150$ для двух геометрий «индуктор – расплав» (см. рис. 1, з), представлены на рис. 8.

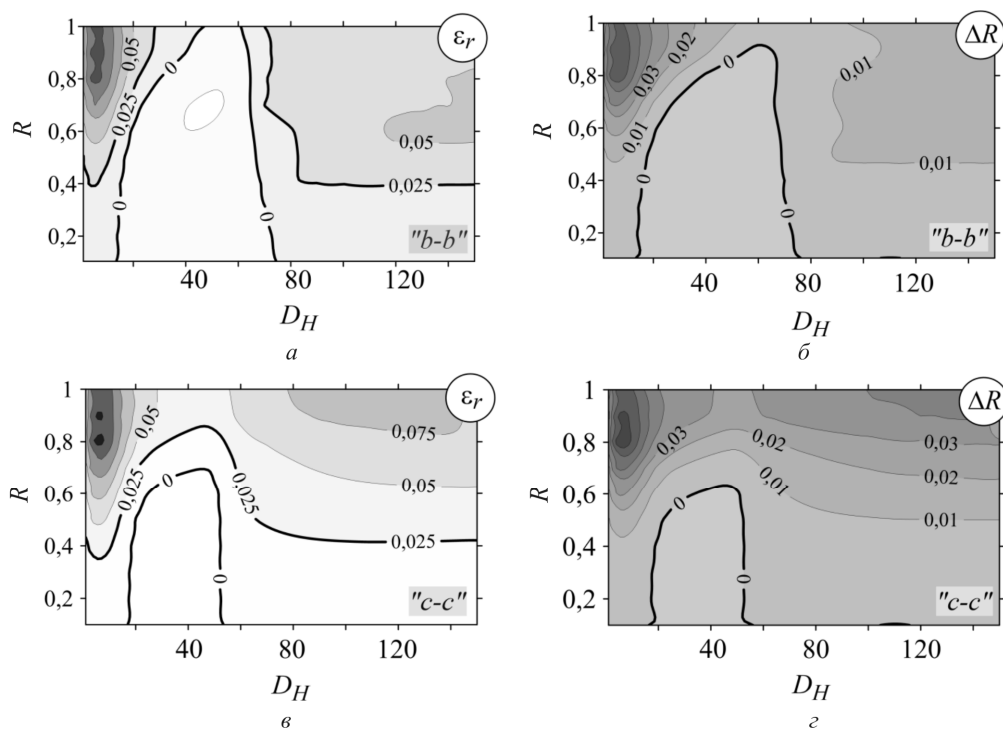


Рис. 8. Карты локальной радиальной деформации ε_r в центре плёнки и интегральной деформации ΔR на плоскости «финальный радиус плёнки R – параметр диффузии магнитного поля D_H », рассчитанные для геометрии « $b - b$ » (а, б) и « $c - c$ » (в, з)

Fig. 8. Maps of the local radial deformation ε_r in the center of the film and the integral deformation ΔR on the plane "final film radius R – magnetic field diffusion parameter D_H " calculated for the geometry " $b - b$ " (а, б) and " $c - c$ " (в, з)

Из рис. 8 (а) видно, что существует область параметров $R - D_H$, ограниченная изолинией $\varepsilon_r = 0$, в которой плёнка оказывается ненагруженной в центре, другая выделенная изолиния $\varepsilon_r = 0,025$ показывает предел 2,5 %, при котором плёнка рвётся [30]. Наличие области нулевых и отрицательных локальных деформаций объясняется течением расплава, направленным к центру, при этом плёнка сама тормозит течение, снижая его скорость, и тем самым уменьшает деформирующие силы вязкой природы, что делает её ещё более устойчивой. Для геометрии « $b - b$ » в интервале $17 \leq D_H \leq 74$ нулевая деформация плёнки определяется её радиусом, а при $45 \leq D_H \leq 60$ плёнка не нагружена в центре при любых R . По изолинии $\varepsilon_r = 0,025$ можно сказать следующее: при $D_H \leq 27$ радиус R^* , при котором плёнка рвётся в центре, зависит от D_H , при $28 \leq D_H \leq 70$ плёнка не рвётся в центре при любых R , при $71 \leq D_H \leq 82$ R^* также зависит от D_H , а при $D_H > 83$ $R^* \approx 0,4$ и не зависит от D_H .

Из рис. 8 (б) видно, что интегральная деформация $\Delta R = 0$ возможна при $15 \leq D_H \leq 75$, при этом радиус не меняющей размер плёнки зависит от D_H .

Попарное сравнение карт ε_r и ΔR на рис. 8, построенных для различных геометрий, позволяет выявить влияние взаимного положения индуктора и расплава на состояние плёнки. Видно, что симметричное расположение « $c - c$ » более выгодно с точки зрения противодействия образованию поверхностных оксидных плё-

нок, чем геометрия с общим дном « $b - b$ »: области параметров, в которых возможны плёнки с недеформированным центром $\varepsilon_r = 0$, в которых не достигается деформация, необходимая для разрыва $\varepsilon_r = 0,025$, и с нулевой интегральной деформацией $\Delta R = 0$, сократилась как по оси D_H , так и по R .

Интересно отметить, что для плёнок радиусом $R \leq 0,4$ деформация ε_r в центре не превышает порога разрыва 2,5 % при любых D_H , т.е. они могут быть стабильны при любых D_H . Кроме того, для геометрии « $c - c$ » в интервале $18 \leq D_H \leq 52$ движение расплава на части поверхности направлено к центру (см. на рис. 3 (б)), в этой части плёнка будет удерживаться в центре поверхности течением, не испытывая сколько-нибудь значительных нагрузок. За пределами указанного интервала течения всегда направлены от центра, и плёнка может существовать с точки зрения уровня ε_r , однако она будет находиться в состоянии неустойчивого равновесия, и отклонения от осевой симметрии реальных течений или плёнки может привести к её удалению с поверхности расплава.

Заключение

Разработана математическая модель, описывающая напряжённо-деформированное состояние тонкой плёнки, находящейся на поверхности расплава металла во время индукционной плавки. Показано, что основной

вклад в механическое нагружение даёт вязкое трение, которое возникает на границе плёнки и расплава, перемешиваемого переменным электромагнитным полем. Таким образом, параметры магнитного поля, такие как параметр диффузии магнитного поля D_H , пропорциональный частоте и отвечающий за распределения в расплаве источников теплоты и силы Лоренца, т.е. за структуру течения, и число Гартмана N_m , пропорциональное напряжённости поля и отвечающее за интенсивность вынужденной конвекции, через движение расплава влияют на состояние плёнки.

Приведены данные о верификации предложенной математической модели как для гидродинамической её части, так и для упругой. Показано, что вычислительная погрешность деформаций не превышает 0,1 %.

На основании обзора литературы установлены возможные упругие параметры плёнки и проведены вычислительные эксперименты, в которых установлено влияние геометрии «индуктор – расплав», размера плёнки и параметра диффузии магнитного поля на деформацию плёнки. Показано, что при геометрии “ $b - b$ ” уровень напряжений в плёнке ниже, чем при “ $c - c$ ”, что связано с характером течений: при “ $b - b$ ” движение расплава менее интенсивное и в более широких интервалах D_H направлено к центру. Выявлено, что течения расплава во всём исследованном диапазоне D_H слабо

деформируют плёнки радиусами $R \leq 0,4$, уровень деформации растяжения в центре плёнки для таких плёнок ниже порога разрыва 2,5 %; существуют диапазоны значений D_H , при которых плёнка не разрывается при любых радиусах в случае “ $b - b$ ” и достигает $R = 0,85$ при “ $c - c$ ”. Обнаружены интервалы параметра D_H с нулевой интегральной деформацией плёнки, т.е. находясь в напряжённо-деформированном состоянии, плёнка не меняет своего радиуса.

Таким образом, геометрия «индуктор – расплав» “ $c - c$ ” менее склонна к формированию и стабилизации оксидных плёнок на поверхности расплава во время индукционной плавки; для интервала $18 \leq D_H \leq 52$ для разрыва и удаления плёнки $R > 0,4$ можно рекомендовать уменьшения D_H (понижение частоты магнитного поля), для $R \leq 0,4$ в указанном диапазоне удаление плёнки возможно при нарушении симметрии течения (наклон тигля с расплавом или включение дополнительных катушек, создающих магнитное поле).

Таким образом, представленная модель позволяет анализировать напряжённо-деформированное состояние пленки на поверхности металлического расплава при индукционной плавке. Это полезно при разработке эффективных технологических режимов и устройств для предотвращения образования плёнок при плавке и повышения качества продукции.

Библиографический список

1. Свойства элементов: справочник / под ред. М.Е. Дрица. – М.: Металлургия, 1985, 672 с.
2. Measurement and estimation of thermophysical properties of nickel based superalloys / P.N. Queded [et al.] // Mater. Sci. Technol. – 2009. – Vol. 25, № 2. – P. 154–162.
3. Ниженко В.И., Флока Л.И. Поверхностное натяжение жидких металлов и сплавов (одно- и двухкомпонентные системы): справочник. – М.: Металлургия, 1981. – 208 р.
4. Approximate analytical solution for induction heating of solid cylinders / T.A. Jankowski [et al.] // Appl. Math. Model. Elsevier Inc. – 2016. – Vol. 40. – P. 2770–2782.
5. Numerical analysis of a transient non-linear axisymmetric eddy current model / A. Bermúdez [et al.] // Comput. Math. with Appl. Elsevier Ltd. – 2015. – Vol. 70, № 8. – P. 1984–2005.
6. Numerical and experimental investigation of heat transfer process in electromagnetically driven flow within a vacuum induction furnace / P. Buliński [et al.] // Appl. Therm. Eng. – 2017. – Vol. 124. – P. 1003–1013.
7. Numerical study of titanium melting by high frequency inductive heating / L. Lu [et al.] // Int. J. Heat Mass Transf. Elsevier Ltd. – 2017. – Vol. 108. – P. 2021–2028.
8. Beckstein P., Galindo V., Vukčević V. Efficient solution of 3D electromagnetic eddy-current problems within the finite volume framework of OpenFOAM // J. Comput. Phys. – 2017. – Vol. 344, № December 2016. – P. 623–646.
9. Simulation of multi-frequency-induction-hardening including phase transitions and mechanical effects / D. Hömberg [et al.] // Finite Elem. Anal. Des. Elsevier. – 2016. – Vol. 121. – P. 86–100.
10. Nikulin I.L. Numerical simulation of melt flow control by controlling averaged electromagnetic forces generated in high frequency magnetic field // Magnetohydrodynamics. – 2016. – Vol. 52, № 4.
11. Numerical analysis for electromagnetic field influence on heat transfer behaviors in cold crucible used for directional solidification / Y. Yang [et al.] // Int. J. Heat Mass Transf. Elsevier Ltd. – 2018. – Vol. 122. – P. 1128–1137.
12. Parfenyev V.M., Vergeles S.S., Lebedev V.V. Effects of thin film and Stokes drift on the generation of vorticity by surface waves // Phys. Rev. E. – 2016. – Vol. 94, № 5.
13. Parfenyev V.M., Vergeles S.S. Influence of a thin compressible insoluble liquid film on the eddy currents generated by interacting surface waves // Phys. Rev. FLUIDS. – 2018. – Vol. 3, № 6.
14. Numerical simulation of MHD natural convection flow in a wavy cavity filled by a hybrid Cu-Al₂O₃-water nanofluid with discrete heating / C. Revnic [et al.] // Appl. Math. Mech. (English Ed. – 2020. – Vol. 41, № 9. – P. 1345–1358.
15. Godawat R. [et al.] Structure, stability, and rupture of free and supported liquid films and assemblies in molecular simulations // Ind. Eng. Chem. Res. – 2008. – Vol. 47, № 10. – P. 3582–3590.
16. Zhang Y., Sprittles J.E., Lockerby D.A. Molecular simulation of thin liquid films: Thermal fluctuations and instability // Phys. Rev. E. American Physical Society. – 2019. – Vol. 100, № 2. – P. 1–7.
17. Cagna A., Lucassen-Reynders E.H.L.-R. Gibbs elasticity, surface dilational modulus and diffusional relaxation in non-ionic surfactant monolayers Gibbs elasticity, surface dilational modulus and diffusional // Colloids Surfaces A Physicochem. Eng. Asp. – 2016. – Vol. 186, № September. – P. 63–72.
18. Phase transitions on partially contaminated surface under the influence of thermocapillary flow / A.V. Shmyrov [et al.] // J. Fluid Mech. – 2019. – Vol. 877. – P. 495–533.
19. Ahmed J., Khan M., Ahmad L. Radiative heat flux effect in flow of Maxwell nanofluid over a spiraling disk with chemically reaction // Phys. A Stat. Mech. its Appl. Elsevier B.V. – 2020. – Vol. 551. – P. 123948.

20. Espín L., Corbett A., Kumar S. Electrohydrodynamic instabilities in thin viscoelastic films - AC and DC fields // *J. Non-newton. Fluid Mech.* – 2013. – Vol. 196. – P. 102–111.
21. Conroy D., Matar O.K. Dynamics and stability of three-dimensional ferrofluid films in a magnetic field // *J. Eng. Math.* Springer Netherlands. – 2017. – Vol. 107, № 1. – P. 253–268.
22. Barham M., White D. Finite element simulation of permanent magnetoelastic thin films // *IEEE Trans. Magn.* IEEE. – 2011. – Vol. 47, № 5. – P. 1402–1405.
23. Лурье С.А., Дудченко А.А., Нгуен Д.К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры // *Труды МАИ.* – 2014. – № 75. – P. 1–16.
24. Моделирование напряжённо-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости для слоя / С.А. Лурье [и др.] // *Вестник ПНИПУ. Механика.* – 2013. – № 1. – P. 162–182.
25. Eremeyev V.A. Numerical investigation of thin films with strain gradient elasticity // *Proc. XLIII Int. Summer Sch.* – 2015. – P. 10–16.
26. Лурье С.А., Соляев Ю.О. Метод идентификации параметров градиентных моделей неоднородных структур с использованием дискретно-атомистического моделирования // *Вестник ПНИПУ. Механика.* – 2014. – Т. 2014, № 3. – С. 89–112.
27. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367 p.
28. Физические величины: справочник / под ред. И.С. Зинovieва, Е.З. Мейлиховой. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 p.
29. Bandopadhyay A., Ghosh U. Electrohydrodynamic Phenomena // *J. Indian Inst. Sci.* Springer India. – 2018. – Vol. 98, № 2. – P. 201–225.
30. Lexis M., Willenbacher N. Relating foam and interfacial rheological properties of beta-lactoglobulin solutions // *Soft Matter.* Royal Society of Chemistry, 2014. Vol. 10, № 48. P. 9626–9636.
31. Physical modelling of slag-foaming phenomenon resulted from inside-origin gas formation reaction Physical modelling of slag-foaming phenomenon resulted from inside-origin gas formation reaction / G. Qiu [et al.] // *Ironmak. Steelmak.* – 2017. – Vol. 44, № 4. – P. 246–254.
32. Liou H., Pretzer J. Effect of Film Thickness and Cure Temperature on the Mechanical Properties of FOx® Flowable Oxide Thin Films // *MRS Proc.* – 1999. – Vol. 565. – P. 239.
33. Fang W., Lo C.Y. On the thermal expansion coefficients of thin films // *Sensors Actuators, A Phys.* – 2000. – Vol. 84, № 3. – P. 310–314.
34. Cverna F. and A.I.M.P.D.C. ASM Ready Reference: Thermal properties of metals / ed. Cverna F. ASM International, 2002. – 300 p.
35. Thermal Expansion Coefficients of Thin Crystal Films / S.S. Cell [et al.] // *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China). – 2005. – Vol. 44, № 1. – P. 921–924.
36. Phase transformations in face centered cubic (Al 0.32Cr 0.68) 2O 3 thin films / A. Khatibi [et al.] // *Surf. Coatings Technol.* Elsevier B.V. – 2012. – Vol. 206, № 14. – P. 3216–3222.
37. Poisson's ratio and residual strain of freestanding ultrathin films / G.K. Cuddalorepatta [et al.] // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2020. – Vol. 137. – P. 103821.
38. Никулин И.Л., Демин В.А., Перминов А.В. Движение металлического расплава и упруго-напряжённые состояния оксидной пленки при индукционной плавке // *Инженерно-физический журнал.* – 2021. – Т. 94, № 6. – С. 1477–1488.
39. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1970.
40. Perminov A.V., Nikulin I.L. Mathematical Model of the Processes of Heat and Mass Transfer and Diffusion of the Magnetic Field in an Induction Furnace // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 2016. – Vol. 89, № 2. – P. 397–409.
41. Cramer A., Galindo V., Zennaro M. Frequency dependence of an alternating magnetic field driven flow // *Magneto hydrodynamics.* – 2015. – Vol. 51, № 1. – P. 133–147.
42. Nikulin I.L., Perminov A.V. International Journal of Heat and Mass Transfer Mathematical modelling of frequency and force impacts on averaged metal flows in alternating magnetic field // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2019. – Vol. 128. – P. 1026–1032.
43. Measurement of viscosities of metals and alloys with an oscillating viscometer / R.F. Brooks [et al.] // *High Temp. – High Press.* – 2001. – Vol. 33, № 1. – P. 73–82.
44. Properties of Elements, Reference book in 2 vols., (in Russian), Book 1, 2nd edn. revised and enlarged / ed. Drits. – Moscow: Metallurgiya, GUP “Zhurnal Tsvetnye Metally,” 1997. – 627 p.
45. Fornberg B. Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids // *Math. Comput.* – 1988. – Vol. 51, № 184. – P. 699.
46. Nikulin I.L. Analysis of AMF impact on oxide scab rupture and surface cleaning in induction melting technology // *Magneto hydrodynamics.* – 2019. – Vol. 55, № 1–2. – P. 141–148.
47. Nikulin I.L. Analysis of possibilities of melt surface cleaning by controlling AMF frequency and distribution // *Magneto hydrodynamics.* – 2017. – Vol. 53, № 3. – P. 537–546.
48. Nikulin I.L. Mathematical modelling of amf geometry and frequency impacts on volume and surface melt flows at induction melting // *Magneto hydrodynamics.* – 2016. – Vol. 52, № 4. – P. 513–526.

References

1. Dric M.E. Svoystva elementov. Spravochnik pod red. Drica M.E. [Element properties. Handbook]. Moscow, Metallurgiya, 1985, 672 p.
2. Queded P.N. Measurement and estimation of thermophysical properties of nickel based superalloys. *Mater. Sci. Technol.*, 2009, vol. 25, no. 2, pp. 154–162.
3. Nizhenko V.I., Floka L.I. Poverhnostnoe natyazhenie zhidkih metallov i splavov (odno- i dvuhkomponentnye sistemy): spravochnik. [Surface Tension of liquid metals and alloys (mono- and bicomponent systems)]. Moscow, Metallurgiya, 1981, 208 p.
4. Jankowski T.A. et al. Approximate analytical solution for induction heating of solid cylinders. *Appl. Math. Model. Elsevier Inc.*, 2016, vol. 40, pp. 2770–2782.
5. Bermúdez A. et al. Numerical analysis of a transient non-linear axisymmetric eddy current model. *Comput. Math. with Appl. Elsevier Ltd*, 2015, vol. 70, no 8, pp. 1984–2005.
6. Buliński P. et al. Numerical and experimental investigation of heat transfer process in electromagnetically driven flow within a vacuum induction furnace. *Appl. Therm. Eng.*, 2017, vol. 124, pp. 1003–1013.
7. Lu L. Numerical study of titanium melting by high frequency inductive heating. *Int. J. Heat Mass Transf. Elsevier Ltd*, 2017, vol. 108, pp. 2021–2028.
8. Beckstein P., Galindo V., Vukčević V. Efficient solution of 3D electromagnetic eddy-current problems within the finite volume framework of OpenFOAM. *J. Comput. Phys.*, 2017, vol. 344, no. December 2016, pp. 623–646.
9. Hömberg D. et al. Simulation of multi-frequency-induction-hardening including phase transitions and mechanical effects. *Finite Elem. Anal. Des. Elsevier*, 2016, vol. 121, pp. 86–100.
10. Nikulin I.L. Numerical simulation of melt flow control by controlling averaged electromagnetic forces generated in high frequency magnetic field. *Magneto hydrodynamics*, 2016, vol. 52, no. 4.
11. Yang Y. et al. Numerical analysis for electromagnetic field influence on heat transfer behaviors in cold crucible used for

directional solidification. *Int. J. Heat Mass Transf. Elsevier Ltd*, 2018, vol. 122, pp. 1128-1137.

12. Parfenyev V.M., Vergeles S.S., Lebedev V.V. Effects of thin film and Stokes drift on the generation of vorticity by surface waves. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, no. 5.

13. Parfenyev V.M., Vergeles S.S. Influence of a thin compressible insoluble liquid film on the eddy currents generated by interacting surface waves. *Phys. Rev. FLUIDS*, 2018, vol. 3, no. 6.

14. Revnic C. et al. Numerical simulation of MHD natural convection flow in a wavy cavity filled by a hybrid Cu-Al₂O₃-water nanofluid with discrete heating. *Appl. Math. Mech.*, vol. 41, no. 9, pp. 1345-1358.

15. Godawat R. et al. Structure, stability, and rupture of free and supported liquid films and assemblies in molecular simulations. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 2008, vol. 47, no. 10, pp. 3582-3590.

16. Zhang Y., Sprittles J.E., Lockerby D.A. Molecular simulation of thin liquid films: Thermal fluctuations and instability. *Phys. Rev. E. American Physical Society*, 2019, vol. 100, no. 2, pp. 1-7.

17. Cagna A., Lucassen-Reynders E.H.L.-R. Gibbs elasticity, surface dilational modulus and diffusional relaxation in non-ionic surfactant monolayers Gibbs elasticity, surface dilational modulus and diffusional. *Colloids Surfaces A Physicochem. Eng. Asp.*, 2016, vol. 186, no. September, pp. 63-72.

18. Shmyrov A.V. et al. Phase transitions on partially contaminated surface under the influence of thermocapillary flow. *J. Fluid Mech.*, 2019, vol. 877, pp. 495-533.

19. Ahmed J., Khan M., Ahmad L. Radiative heat flux effect in flow of Maxwell nanofluid over a spiraling disk with chemically reaction. *Phys. A Stat. Mech. its Appl. Elsevier B.V.*, 2020, vol. 551, pp. 123948.

20. Espín L., Corbett A., Kumar S. Electrohydrodynamic instabilities in thin viscoelastic films - AC and DC fields. *J. Nonnewton. Fluid Mech.* 2013, vol. 196, pp. 102-111.

21. Conroy D., Matar O.K. Dynamics and stability of three-dimensional ferrofluid films in a magnetic field. *J. Eng. Math. Springer Netherlands*, 2017, vol. 107, no. 1, pp. 253-268.

22. Barham M., White D. Finite element simulation of permanent magnetoelastic thin films. *IEEE Trans. Magn. IEEE*, 2011, vol. 47, no 5, pp. 1402-1405.

23. Lurie S.A., Dudchenko A.A., Nguen D.K. Gradientnaya model' termouprugosti dlya sloistoj kompozitnoj struktury [Gradient model of the thermoelasticity for layer composite structure]. *Elektronnyj zhurnal "Trudy MAI."*, 2014, no. 75, pp. 1-16.

24. Lurie S.A., Solyaev Y.O., Rabinsky L.N., Kondratova Y.N., Volov M.I. Simulation of the stress-strain state of thin composite coatings based on solutions of the plane problem of strain-gradient elasticity for a layer. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 1, pp. 162-182.

25. Eremeyev V.A. Numerical investigation of thin films with strain gradient elasticity. *Proc. XLIII Int. Summer Sch. APM 2015*, 2015, pp. 10-16.

26. Lurie S.A., Solyaev Y.O. Identification method of gradient models parameters of inhomogeneous structures based on discrete atomistic simulations. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 89-112.

27. Kutateladze S.S. Teploperedacha i gidrodinamicheskoe soprotivlenie. [Heat transfer and hydrodynamical resistance]. *Moscow, Energoatomizdat*, 1990, 367 p.

28. Zinov'ev I.S., Mejlihovala E.Z. Fizicheskie velichiny. Spravochnik [Physical measures. Handbook]. *Moscow, Energoatomizdat*, 1991, 1232 p.

29. Bandopadhyay A., Ghosh U. Electrohydrodynamic Phenomena. *J. Indian Inst. Sci. Springer India*, 2018, vol. 98, no. 2, pp. 201-225.

30. Lexis M., Willenbacher N. Relating foam and interfacial rheological properties of beta-lactoglobulin solutions. *Soft Matter. Royal Society of Chemistry*, 2014, vol. 10, no. 48, pp. 9626-9636.

31. Qiu G. et al. Physical modelling of slag-foaming phenomenon resulted from inside-origin gas formation reaction Physical modelling of slag-foaming phenomenon resulted from inside-origin gas formation reaction. *Ironmak. Steelmak*, 2017, vol. 44, no. 4, pp. 246-254.

32. Liou H., Pretzer J. Effect of Film Thickness and Cure Temperature on the Mechanical Properties of F₀X® Flowable Oxide Thin Films. *MRS Proc.*, 1999, vol. 565, pp. 239.

33. Fang W., Lo C.Y. On the thermal expansion coefficients of thin films. *Sensors Actuators, A Phys.*, 2000, vol. 84, no. 3, pp. 310-314.

34. Cervera F. and A.I.M.P.D.C. ASM Ready Reference: Thermal properties of metals. *ASM International*, 2002. 300 p.

35. Cell S.S. et al. Thermal Expansion Coefficients of Thin Crystal Films. *Commun. Theor. Phys*, 2005, vol. 44, no. I, pp. 921-924.

36. Khatibi A. et al. Phase transformations in face centered cubic (Al 0.32Cr 0.68) 2O 3 thin films. *Surf. Coatings Technol. Elsevier B.V.*, 2012, vol. 206, no. 14, pp. 3216-3222.

37. Cuddalorepatta G.K. et al. Poisson's ratio and residual strain of freestanding ultra-thin films. *J. Mech. Phys. Solids*, 2020, vol. 137, pp. 103821.

38. Nikulin I.L., Demin V.A., and Perminov A.V. Movement of a melt and elastic-stressed state of its oxide film in the process of induction melting. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2021, vol. 94, no. 6, 2021, pp. 1444-1455. DOI 10.1007/s10891-021-02449-9

39. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. *New York: McGraw-Hill*, 1970.

40. Perminov A.V., Nikulin I.L. Mathematical Model of the Processes of Heat and Mass Transfer and Diffusion of the Magnetic Field in an Induction Furnace. *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2016, vol. 89, no. 2, pp. 397-409.

41. Cramer A., Galindo V., Zennaro M. Frequency dependence of an alternating magnetic field driven flow. *Magnetohydrodynamics*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 133-147.

42. Nikulin I.L., Perminov A.V. International Journal of Heat and Mass Transfer Mathematical modelling of frequency and force impacts on averaged metal flows in alternating magnetic field. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2019, vol. 128, pp. 1026-1032.

43. Brooks R.F. et al. Measurement of viscosities of metals and alloys with an oscillating viscometer. *High Temp. - High Press.* 2001, vol. 33, no. 1, pp. 73-82.

44. Properties of Elements, Reference book in 2 vols., (in Russian), Book 1, 2nd edn. revised and enlarged / ed. Drits. Moscow: Metallurgiya, GUP "Zhurnal Tsvetnye Metally," 1997. 627 p.

45. Fornberg B. Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids. *Math. Comput.*, 1988, vol. 51, no. 184, pp. 699.

46. Nikulin I.L. Analysis of AMF impact on oxide scab rupture and surface cleaning in induction melting technology. *Magnetohydrodynamics*, 2019, vol. 55, no. 1-2, pp. 141-148.

47. Nikulin I.L. Analysis of possibilities of melt surface cleaning by controlling AMF frequency and distribution. *Magnetohydrodynamics*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 537-546.

48. Nikulin I.L. Mathematical modelling of amf geometry and frequency impacts on volume and surface melt flows at induction melting. *Magnetohydrodynamics*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 513-526.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Financing. The study was not sponsored.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.