



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.1.08

УДК 539.3

О ВЫПУКЛОСТИ ПОТЕНЦИАЛА МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ТЕНЗОРНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

И.А. Пантелеев¹, В. Ляховский²

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

²Геологическая служба Израиля, Иерусалим, Израиль

О СТАТЬЕ

Получена: 10 декабря 2021 г.

Одобрена: 25 марта 2022 г.

Принята к публикации:

01 апреля 2022 г.

Ключевые слова:

нелинейная упругость, условие выпуклости, тензор поврежденности, ортотропная среда.

АННОТАЦИЯ

Для решения задач теории упругости с использованием нелинейных моделей определяющее значение имеет вопрос выпуклости используемого потенциала и доказательство единственности решения. Настоящая работа посвящена определению условий локальной строгой выпуклости потенциала для модели нелинейной упругости, обеспечивающих единственность решения задачи в достаточно малой окрестности искомого решения. Рассматриваемая модель представляет собой обобщение скалярной нелинейной реологической модели деформирования хрупкого твердого тела на случай тензорного параметра поврежденности, главные значения которого описывают сокращение площади поперечного сечения материала в трех ортогональных направлениях. Дополнительное слагаемое второго порядка по деформации в упругом потенциале позволяет описывать зависимость упругих модулей от вида напряженно-деформированного состояния, дилатансию материала при сдвиговой деформации, а также нелинейный деформационный отклик уже при малых нагрузках. Введенный тензор поврежденности второго ранга позволяет описать индуцированную трещиноватостью анизотропию упругих свойств материала.

В работе получены условия локальной строгой выпуклости в главных осях тензора деформации для общего случая несоосных тензора деформации и поврежденности. Для иллюстрации полученных условий выпуклости рассмотрены два частных случая вида тензора поврежденности: трансверсально-изотропная трещиноватая среда с соосными тензорами деформации и поврежденности, трансверсально-изотропная среда с наклонно-ориентированной трещиноватостью. Для обоих случаев показана зависимость предельных значений поврежденности от параметра степени анизотропии. Показано, что в случае слабой анизотропии поврежденности условия выпуклости потенциала для скалярного параметра поврежденности дают минорантную оценку предельно допустимой поврежденности для различных типов напряженно-деформированного состояния. Для наклонно-ориентированной трещиноватости построены зависимости предельной допустимой поврежденности от степени анизотропии, угла наклона и вида напряженно-деформированного состояния.

© ПНИПУ

© Пантелеев Иван Алексеевич – к.ф.-м.н., зав. лаб., e-mail: pia@icmm.ru, ID: 0000-0002-7430-3667

Ляховский Владимир – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: vladimir.lyakhovsky@gmail.com, ID: 0000-0001-9438-4292

Ivan A. Panteleev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Head of laboratory, e-mail: pia@icmm.ru,

ID: 0000-0002-7430-3667

Lyakhovsky Vladimir - PhD, Senior Researcher, e-mail: vladimir.lyakhovsky@gmail.com, ID: 0000-0001-9438-4292



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ON THE CONVEXITY OF POTENTIAL OF NONLINEAR ELASTIC MEDIA MODEL WITH TENSOR DAMAGE PARAMETER

I.A. Pantelev¹, V. Lyakhovsky²

¹Institute of continuous media mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

²Geological survey of Israel, Jerusalem, Israel

ARTICLE INFO

Received: 10 December 2021

Approved: 25 March 2022

Accepted for publication: 01 April 2022

Keywords:

nonlinear elasticity, convexity condition, damage tensor, orthotropic medium.

ABSTRACT

For solving problems of the theory of elasticity using nonlinear models, the question of the convexity of the potential used and the proof of the uniqueness of the solution are of decisive importance. The present work is devoted to the determination of conditions for the local strict convexity of the potential for the nonlinear elasticity model, which ensure the uniqueness of the solution to the problem in a sufficiently small neighborhood of the desired solution. The considered model is a generalization of a scalar nonlinear rheological model of brittle solid deformation for the case of the tensor damage parameter, the principal values of which describe the reduction in the cross-sectional area of the material in three orthogonal directions. An additional term of the second order in deformation in the elastic potential makes it possible to describe the dependence of the elastic moduli on the type of the stress-strain state, the dilatancy of the material under shear deformation, as well as the nonlinear deformation response even at low loads. The introduced damage tensor of the second rank makes it possible to describe the damage-induced anisotropy of the elastic properties of the material.

Conditions of local strict convexity in the principal axes of the strain tensor are obtained in this work for the general case of misaligned strain and damage tensors. To illustrate the obtained convexity conditions, two special cases of the damage tensor type are considered: a transversely isotropic fractured medium with coaxial strain and damage tensors, and a transversely isotropic medium with obliquely oriented fracturing. For both cases, the dependence of the limiting values of damage on the parameter of the degree of anisotropy is shown. It is shown that in the case of weak damage anisotropy, the potential convexity conditions for the scalar damage parameter give a minorant estimate of the maximum allowable damage for various types of stress-strain state. For obliquely oriented fracturing, the dependences of the maximum permissible damage on the degree of anisotropy, the angle of inclination and the type of stress-strain state are plotted.

© PNRPU

Введение

Нелинейным деформационным откликом на приложенное усилие обладает большинство горных пород [1–8], сыпучих сред [9–10] и волокнистых/зернистых композитов [11–14]. Для геоматериалов нелинейный отклик не зависит от пространственного масштаба и наблюдается вплоть до геологических структур километровых размеров [15–18]. Еще одной отличительной особенностью материалов такого типа является их разномодульность, в общем случае зависимость упругих свойств от вида напряженно-деформированного состояния. Для природных материалов зависимость свойств от вида напряженно-деформированного состояния обусловлена развитой дефектностью, сформированной как на стадии литогенеза, так и на стадии активного деформирования в тех или иных геологических условиях. В условиях сжатия/растяжения трещиноподобные дефекты, ориентированные нормально к действию максимального/минимального сжимающего напряжения, схлопываясь/открываясь, дают дополнительный вклад в общую деформацию материала.

Для описания деформационного поведения нелинейных разномодульных сред используются различные подходы, которые можно разделить на два класса: модели с упругими модулями, зависящими от типа

напряженно-деформированного состояния [19–26], модели с постулированием упругого потенциала особой формы [27–34]. В независимости от способа описания нелинейного деформационного отклика при решении краевых задач определяющее значение имеет вопрос устойчивости материала, которая определяется, в свою очередь, выпуклостью используемого потенциала, обеспечивающую единственность решения, и эллиптичностью уравнения движения. Игнорирование проверки обеспечения в моделях данного класса фундаментальных принципов (выпуклости потенциала, условия эллиптичности) приводит к проблемам сходимости при численной реализации решения конкретной краевой задачи [35; 36].

Настоящая работа посвящена исследованию условий локальной строгой выпуклости потенциала в неклассической модели нелинейной упругости с тензорным параметром поврежденности, обеспечивающих единственность решения упругой задачи в достаточно малой окрестности искомого решения (единственность в малом). Получены соотношения в общем случае несосных тензора деформации и поврежденности. В качестве примера рассмотрен случай трансверсально-изотропной среды с трещиноватостью, ориентированной произвольно относительно эллипсоида действующих деформаций.

1. Нелинейная неклассическая модель деформирования хрупкого тела со скалярным параметром поврежденности

В работе [37] на основе множества экспериментальных данных предложен общий вид упругой энергии в предположении, что это функция второго порядка инвариантов тензора деформации. Приведенные в работе выкладки обеспечили строгую математическую основу для формулировки энергии упругой деформации твердого тела, обсуждавшейся ранее в работах [32–33; 38–41]:

$$W = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \gamma I_1 \sqrt{I_2} \right), \quad (1)$$

где λ , μ – параметр Ламе, γ – дополнительный упругий модуль, определяющий степень нелинейности материала, $I_1 = \varepsilon_{ii}$, $I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ – первый и второй инвариант тензора деформации соответственно. Отличительной особенностью соотношения (1) от традиционных моделей нелинейной упругости является то, что дополнительное слагаемое имеет тот же порядок, что и основные слагаемые. Традиционные модели нелинейной упругости базируются на включении в выражение для упругой энергии слагаемых более высоких порядков по деформации [49]. В исследовании [33] показано, что дополнительное слагаемое $\gamma I_1 \sqrt{I_2}$ является следствием принятия гипотезы об избирательной активизации микротрещин при приложении нагрузки: активизируются только микротрещины, берега которых субпараллельны направлению действия максимального сжимающего напряжения. Дополнительное слагаемое второго порядка обеспечивает нелинейную связь компонент тензора напряжения и компонент тензора деформации и позволяет описать нелинейный отклик материала уже при малых нагрузках:

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda - \frac{\gamma}{\xi} \right) I_1 \delta_{ij} + 2 \left(\mu - \frac{\gamma \xi}{2} \right) \varepsilon_{ij}. \quad (2)$$

Упругие модули $\lambda_{\text{eff}} = \lambda - \frac{\gamma}{\xi}$, $\mu_{\text{eff}} = \mu - \frac{\gamma \xi}{2}$ зависят от вида напряженно-деформированного состояния, определяемого параметром $\xi = \frac{I_1}{\sqrt{I_2}}$. Параметр ξ меняется

от $-\sqrt{3}$ для всестороннего сжатия до $\sqrt{3}$ при всестороннем растяжении; $\xi = \pm 1$ соответствует одноосному сжатию/растяжению, а $\xi = 0$ – чистому сдвигу. В работах [32; 42] в модель введена зависимость упругих свойств от скалярного параметра поврежденности α , описывающего плотность микротрещин, в виде $\lambda_\alpha = \lambda$, $\mu_\alpha = \mu_0 + \gamma_0 \xi_0 \alpha$, $\gamma_\alpha = \gamma_0 \alpha$, где ξ_0 – материальный параметр, контролирующий переход от залечивания микротрещин к их росту. Параметр ξ_0 связан с упругими модулями и углом внутреннего трения φ соотношением:

$$\xi_0 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{9 + 2k^2 \left(2 + 3 \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right)}}, \quad (3)$$

где $k = \frac{\sin \varphi}{1 - \frac{\sin \varphi}{3}}$ и определяется по результатам традиционных испытаний материала по схеме Кармана.

Устойчивость материала в процессе деформирования определяется двумя типами условий. Первый тип – условия выпуклости упругого потенциала, обеспечивающие единственность решения статической задачи теории упругости [47]. Формулировка и обобщение этих условий, в том числе для случая нелинейных моделей, представлены в работах [29; 32; 43; 48]. Второй тип условий – условия эллиптичности уравнения движения теории упругости [49]. Условия выпуклости и эллиптичности не всегда идентичны, особенно для нелинейной упругости [50]. Условия выпуклости являются более сильными, и выпуклость может быть потеряна раньше, чем эллиптичность. Настоящая работа посвящена исследованию условий выпуклости потенциала, обеспечивающих единственность решения статической задачи теории упругости.

Необходимыми и достаточными условиями локальной строгой выпуклости потенциала (1) являются условия положительной определенности матрицы Гессе функции W

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{11} \partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{11} \partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{11} \partial \varepsilon_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{11} \partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{22} \partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{22} \partial \varepsilon_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{11} \partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{22} \partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{33} \partial \varepsilon_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{12} \partial \varepsilon_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{13} \partial \varepsilon_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{23} \partial \varepsilon_{23}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

В свою очередь матрица G будет положительно определенной в случае положительности всех ее собственных значений [51]. В работах [32; 43] показано, что условия положительной определенности матрицы Гессе для потенциала вида (1) имеют вид

$$\begin{cases} L_1 \equiv 2\mu_\alpha - \gamma_\alpha \xi > 0 \\ L_2 \equiv 4\mu_\alpha + 3\lambda_\alpha - 3\gamma_\alpha \xi > 0 \\ L_3 \equiv 6\mu_\alpha \lambda_\alpha + 4\mu_\alpha^2 - \lambda_\alpha \gamma_\alpha \xi^3 - 6\mu_\alpha \gamma_\alpha \xi + 3\gamma_\alpha^2 \xi^2 - 3\gamma_\alpha^2 > 0 \end{cases}, \quad (5)$$

где $\lambda_\alpha = \lambda_0$, $\mu_\alpha = \mu_0 + \gamma_0 \xi_0 \alpha$, $\gamma_\alpha = \gamma_0 \alpha$ – эффективные упругие модули среды, α – параметр поврежденности. Условия (5) накладывают ограничения как на дополни-

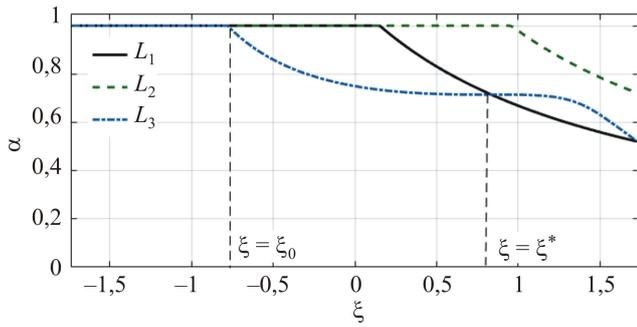


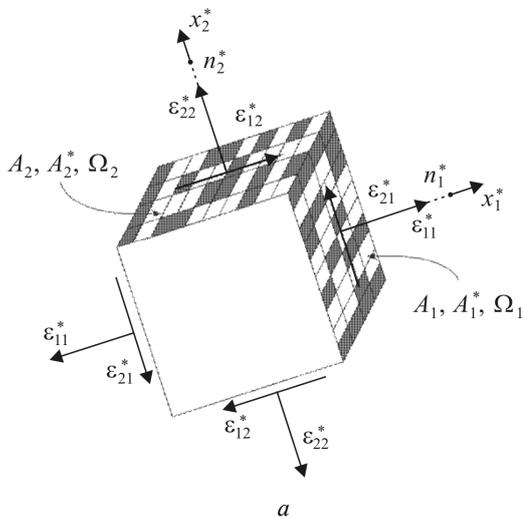
Рис. 1. Зависимость допустимых значений поврежденности α , определяемых условиями (5) локальной выпуклости потенциала, от вида напряженно-деформированного состояния

Fig. 1. Dependence of the permissible values of damage α , determined by the conditions (5) of the local potential convexity, on the type of stress-strain state

тельный упругий модуль γ_0 , так и на допустимые максимальные (предельные) значения поврежденности α в зависимости от параметра вида напряженно-деформированного состояния ξ . Это обстоятельство является отличительной чертой нелинейных моделей. В моделях классической континуальной механики поврежденности разрушение материала происходит при $\alpha = 1$, тогда как в нелинейных моделях максимальная поврежденность, характеризующая макроразрушение материала, определяется условием выпуклости потенциала.

Нетрудно показать, что наиболее строгим условием для дополнительного упругого модуля γ_0 является третье неравенство L_3 в (5). Минимальное допустимое значение γ_0 определяется этим неравенством при $\xi = \xi_0$ и $\alpha = 1$:

$$\gamma_0 = \frac{\xi_0 \left((\xi_0^2 - 6)\lambda_0 - 2\mu_0 \right)}{2(\xi_0^2 - 3)} - \frac{\sqrt{(6\xi_0\lambda_0 - \xi_0^3\lambda_0 + 2\xi_0\mu_0)^2 - 8\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0)(\xi_0^2 - 3)}}{2(\xi_0^2 - 3)} \quad (6)$$



Для определения зависимости допустимого максимального значения поврежденности от параметра вида напряженно-деформированного состояния построим решения уравнений $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0$ в случае $\lambda_0 = \mu_0 = 1$, $\varphi = 30^\circ$ и γ_0 , вычисленного из (6). Найденные зависимости представлены на рис. 1.

Из рисунка видно, что при $\xi \leq \xi_0$ локальная выпуклость потенциала имеет место при $\alpha \in [0, 1]$. В случае $\xi_0 \leq \xi \leq \xi^*$ максимальное допустимое значение поврежденности определяется неравенством $L_3 > 0$. После точки ξ^* – условием $L_1 > 0$. При этом вторая критическая величина ξ^* следует из равенства $L_1 = L_3$ и имеет вид

$$\xi^* = \xi_0 + \sqrt{\xi_0^2 + 2\frac{\mu_0}{\lambda_0}} \quad (7)$$

2. Нелинейная модель деформирования хрупкого тела с тензорным параметром поврежденности

Следуя классической теории анизотропной поврежденности [44–45] зададим параметр поврежденности материала в виде симметричного тензора второго ранга Ω_{ij} . Главные направления этого тензора задают направления ортотропии материала, а главные значения $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ определяют изменение эффективной площади поперечных сечений, перпендикулярных к каждой из осей ортотропии (рис. 2, а):

$$\Omega_i = \frac{(A_i - A_i^*)}{A_i} \quad (8)$$

где A_i и A_i^* – площади поперечного сечения неповрежденного и поврежденного материала в плоскости с нормалью n_i .

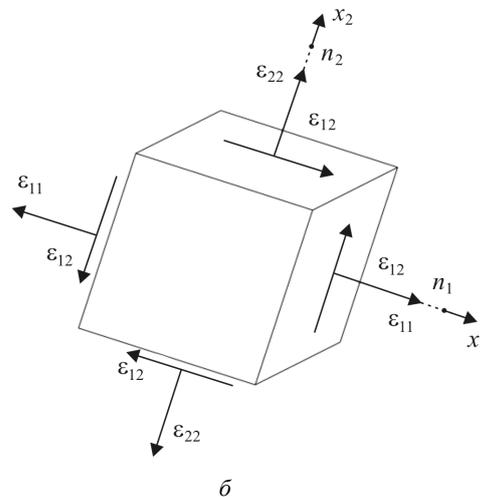


Рис. 2. Представительный объем материала в поврежденном (а) и фиктивном неповрежденном состоянии (б)

Fig. 2. Representative volume of material in damaged (a) and fictitious undamaged state (b)

Для перехода от поврежденного состояния (характеризующегося несимметричными тензорами напряжения и деформации) к фиктивному неповрежденному состоянию примем гипотезу эквивалентности упругой энергии этих состояний [45]. При этом предположим, что ориентация тензора Ω_{ij} в поврежденной конфигурации не совпадает с ориентацией тензора деформации ε_{ij} в конфигурации фиктивной неповрежденной (см. рис 2). Переход от одного состояния к другому подразумевает переход от несимметричных мер напряженного и деформированного состояния к симметричным. Введем симметризованный тензор фиктивной деформации, представляющий собой разность между деформацией в фиктивном неповрежденном состоянии и эффективной деформацией в поврежденном состоянии в виде

$$\varepsilon_{ij}^{(\Omega)} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ik}\Omega_{kj} + \varepsilon_{jk}\Omega_{ki}), \quad (9)$$

характеризующий деформацию поврежденного материала. Инварианты тензора фиктивной деформации определяются как $I_1^{(\Omega)} = \varepsilon_{ij}^{(\Omega)}\delta_{ij}$, $I_2^{(\Omega)} = \varepsilon_{ij}^{(\Omega)}\varepsilon_{ij}^{(\Omega)}$ и в частном случае в главных осях тензора деформации имеют вид

$$\begin{aligned} I_1^{(\Omega)} &= \Omega_{11}\varepsilon_1 + \Omega_{22}\varepsilon_2 + \Omega_{33}\varepsilon_3 \\ I_2^{(\Omega)} &= \Omega_{11}^2\varepsilon_1^2 + \Omega_{22}^2\varepsilon_2^2 + \Omega_{33}^2\varepsilon_3^2 + \frac{\Omega_{12}^2}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + \\ &+ \frac{\Omega_{23}^2}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + \frac{\Omega_{13}^2}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Обобщим потенциал, предложенный в [46], и представим энергию упругой деформации анизотропного поврежденного материала в виде

$$\begin{aligned} W(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\Omega}) &= \left[\frac{\lambda_0}{2} I_1^2 + \mu_0 I_2 \right] + \left[\lambda_1 \left(I_1^{(\Omega)} \right)^2 + \mu_1 I_2^{(\Omega)} \right] - \\ &- \gamma_0 I_1^{(\Omega)} \sqrt{I_2^{(\Omega)}} \end{aligned} \quad (11)$$

где λ_0 , μ_0 – параметры Ламе исходного неповрежденного изотропного материала, λ_1 , μ_1 параметры, характеризующие деградацию упругих модулей при росте поврежденности, γ_0 – дополнительный модуль, ответственный за нелинейность при накоплении повреждений. Первое слагаемое в (11) представляет собой энергию деформирования исходного неповрежденного изотропного материала, второе слагаемое – энергию деформации материала с анизотропией, индуцированной поврежденностью, а третье слагаемое отвечает за нелинейность и разномодульность деформационного отклика материала, зависимость его свойств от вида напряженно-деформированного состояния. В случае нулевой поврежденности $\tilde{\Omega} = 0$ выражение (11) сводит-

ся к классической гукковской энергии упругого изотропного тела. Частный вид потенциала (11) для случая соосных тензоров деформации и поврежденности ранее был предложен в работе [46].

Дифференцируя потенциал (11) по компонентам тензора деформации получим выражения для компонент тензора напряжений Коши (следуя [46], примем $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \gamma_0 \xi_0$):

$$\begin{aligned} \sigma_{im} &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{im}} = [\lambda_0 I_1 \delta_{im} + 2\mu_0 \varepsilon_{im}] - \gamma \frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{im}} \sqrt{I_2^{(\Omega)}} + \\ &+ \gamma_0 \left(\xi_0 - \frac{1}{2} \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right) \frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{im}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{im}} = \Omega_{im}$, $\frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{im}} = \frac{1}{2}(\Omega_{li}\varepsilon_{ik}\Omega_{km} + \Omega_{mi}\varepsilon_{ik}\Omega_{kl}) + \frac{1}{2}(\Omega_{lj}\varepsilon_{mk}\Omega_{kj} + \Omega_{mj}\varepsilon_{lk}\Omega_{kl})$. Из соотношения (12) следу-

ет особенность, присущая всем анизотропным моделям. При несоосных тензорах поврежденности и деформации тензор напряжения будет не соосен им обоим. Например, в случае диагонального тензора поврежденности при сдвиговом деформировании представительного объема (только ненулевых недиагональных компонентах) тензор напряжений будет иметь как недиагональные компоненты, связанные с характером приложенной деформации, так и диагональные компоненты, связанные с дилатансией за счет роста поврежденности. Необходимо также отметить, что при $\Omega_1 \neq \Omega_2 \neq \Omega_3$ поврежденный материал будет ортотропным с упругими модулями, зависящими от компонент тензора поврежденности, вида напряженно-деформированного состояния и величины приложенных главных деформаций. В случае $\Omega_{ij} = \Omega \delta_{ij}$ соотношение (11) редуцируется к нелинейной реологической модели (1) с модулями, линейно зависящими от скалярного параметра поврежденности $\alpha = \Omega^2$. Различие в степенях α и Ω является спецификой анизотропной формулировки и обусловлено использованием гипотезы эквивалентности энергии.

Как было сказано ранее, для строгой выпуклости потенциала $W(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\Omega})$ необходимо и достаточно, чтобы матрица Гессе была положительно определенной. Матрица Гессе для потенциала (11) в главных осях тензора деформации имеет вид:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 & 0 & 0 \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} & 0 & 0 & 0 \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{66} \end{pmatrix}.$$

$$G_{11} = \lambda_0 + 2\mu_0 - \frac{\gamma_0 \Omega_{11} A_1}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \left(\frac{\Omega_{12}^2}{2} + \Omega_{11}^2 + \frac{\Omega_{13}^2}{2} \right) \gamma_0 \left[2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] + \frac{\gamma_0 A_1}{(I_2^{(\Omega)})^{3/2}} \left[I_1^{(\Omega)} A_1 - \Omega_{11} I_2^{(\Omega)} \right];$$

$$G_{22} = \lambda_0 + 2\mu_0 - \frac{\gamma_0 \Omega_{22} A_2}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \left(\frac{\Omega_{12}^2}{2} + \Omega_{22}^2 + \frac{\Omega_{23}^2}{2} \right) \gamma_0 \left[2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] + \frac{\gamma_0 A_2}{(I_2^{(\Omega)})^{3/2}} \left[I_1^{(\Omega)} A_2 - \Omega_{22} I_2^{(\Omega)} \right];$$

$$G_{33} = \lambda_0 + 2\mu_0 - \frac{\gamma_0 \Omega_{33} A_3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \left(\frac{\Omega_{13}^2}{2} + \Omega_{33}^2 + \frac{\Omega_{23}^2}{2} \right) \gamma_0 \left[2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] + \frac{\gamma_0 A_3}{(I_2^{(\Omega)})^{3/2}} \left[I_1^{(\Omega)} A_3 - \Omega_{33} I_2^{(\Omega)} \right];$$

$$G_{12} = \lambda_0 - \frac{\gamma_0 \Omega_{11} A_2}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma_0 \Omega_{12}^2}{2} \left[2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] + \frac{\gamma_0 A_1}{(I_2^{(\Omega)})^{3/2}} \left[I_1^{(\Omega)} A_2 - \Omega_{22} I_2^{(\Omega)} \right];$$

$$G_{13} = \lambda_0 - \frac{\gamma_0 \Omega_{11} A_3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma_0 \Omega_{13}^2}{2} \left[2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] + \frac{\gamma_0 A_1}{(I_2^{(\Omega)})^{3/2}} \left[I_1^{(\Omega)} A_3 - \Omega_{33} I_2^{(\Omega)} \right];$$

$$G_{23} = \lambda_0 - \frac{\gamma_0 \Omega_{22} A_3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma_0 \Omega_{23}^2}{2} \left[2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] + \frac{\gamma_0 A_2}{(I_2^{(\Omega)})^{3/2}} \left[I_1^{(\Omega)} A_3 - \Omega_{33} I_2^{(\Omega)} \right];$$

$$G_{44} = 2\mu_0 - \frac{\gamma_0 \Omega_{12} A_4}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma_0}{2} \left(\frac{\Omega_{13}^2}{2} + \frac{\Omega_{11}^2}{2} + 2\Omega_{12}^2 + \Omega_{11} \Omega_{22} + \frac{\Omega_{22}^2}{2} + \frac{\Omega_{23}^2}{2} \right) \left[2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] + \frac{\gamma_0 A_4}{(I_2^{(\Omega)})^{3/2}} \left[I_1^{(\Omega)} A_4 - \Omega_{12} I_2^{(\Omega)} \right];$$

$$G_{55} = 2\mu_0 - \frac{\gamma_0 \Omega_{13} A_5}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma_0}{2} \left(\frac{\Omega_{12}^2}{2} + \frac{\Omega_{11}^2}{2} + 2\Omega_{13}^2 + \Omega_{11} \Omega_{33} + \frac{\Omega_{33}^2}{2} + \frac{\Omega_{23}^2}{2} \right) \left[2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] + \frac{\gamma_0 A_5}{(I_2^{(\Omega)})^{3/2}} \left[I_1^{(\Omega)} A_5 - \Omega_{13} I_2^{(\Omega)} \right];$$

$$G_{66} = 2\mu_0 - \frac{\gamma_0 \Omega_{23} A_6}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma_0}{2} \left(\frac{\Omega_{13}^2}{2} + \frac{\Omega_{12}^2}{2} + 2\Omega_{23}^2 + \Omega_{22} \Omega_{33} + \frac{\Omega_{22}^2}{2} + \frac{\Omega_{33}^2}{2} \right) \left[2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] + \frac{\gamma_0 A_6}{(I_2^{(\Omega)})^{3/2}} \left[I_1^{(\Omega)} A_6 - \Omega_{23} I_2^{(\Omega)} \right];$$

$$A_1 = \left(\Omega_{11}^2 \varepsilon_1 + \frac{\Omega_{12}^2}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{\Omega_{13}^2}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \right);$$

$$A_2 = \left(\Omega_{22}^2 \varepsilon_2 + \frac{\Omega_{12}^2}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{\Omega_{23}^2}{2} (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right);$$

$$A_3 = \left(\Omega_{33}^2 \varepsilon_3 + \frac{\Omega_{13}^2}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \frac{\Omega_{23}^2}{2} (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right);$$

$$A_4 = \frac{1}{2} \left(\Omega_{11} \Omega_{12} (3\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \Omega_{22} \Omega_{12} (\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2) + \Omega_{13} \Omega_{23} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3) \right);$$

$$A_5 = \frac{1}{2} \left(\Omega_{11} \Omega_{13} (3\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \Omega_{33} \Omega_{13} (\varepsilon_1 + 3\varepsilon_3) + \Omega_{12} \Omega_{23} (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right);$$

$$A_6 = \frac{1}{2} \left(\Omega_{22} \Omega_{23} (3\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \Omega_{33} \Omega_{23} (\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3) + \Omega_{12} \Omega_{13} (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right).$$

Для положительной определенности матрица Гессе необходимо и достаточно выполнение следующих условий [51]:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 \equiv G_{11} > 0 \\ L_2 \equiv G_{11} G_{22} - G_{12}^2 > 0 \\ L_3 \equiv G_{11} G_{22} G_{33} - G_{11} G_{23}^2 - G_{33} G_{12}^2 + \\ \quad + 2G_{12} G_{13} G_{23} - G_{22} G_{13}^2 > 0 \\ L_4 \equiv G_{44} > 0 \\ L_5 \equiv G_{55} > 0 \\ L_6 \equiv G_{66} > 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

В случае $\Omega_{ij} = \Omega \delta_{ij}$ неравенства L_4, L_5, L_6 совпадают и редуцируются к условию $2\mu_\alpha - \gamma_\alpha \xi > 0$ с $\alpha = \Omega^2$. Система неравенств (13) является необходимым и достаточным условием строгой локальной выпуклости потенциала (11) и единственности решения статической задачи нелинейной теории упругости. Рассмотрим несколько частных случаев вида тензора поврежденности и найдем предельные значения его компонент из условий (13).

Трансверсально-изотропная трещиноватая среда. Широко распространенным типом анизотропии горных пород является трансверсальная изотропия, связанная с процессами осадконакопления и уплотнения материала. Анизотропия может быть вызвана не только слоистым строением среды, но и определенно ориентированной трещиноватостью, появившейся в процессе ее формирования. Рассмотрим представительный объем материала с ансамблем одинаково ориентированных микротрещин (рис. 3, а) – представительный объема трансверсально-изотропной среды. Трещиноватость описывается тензором поврежденности с главными значениями $\Omega_3 = \Omega > \Omega_1 = \Omega_2 = q\Omega, q \in [0,1]$. Параметр q определяет степень анизотропии поврежденности материала. Ориентация трещиноватости определяется эллипсоидом поврежденности (рис. 3, б).

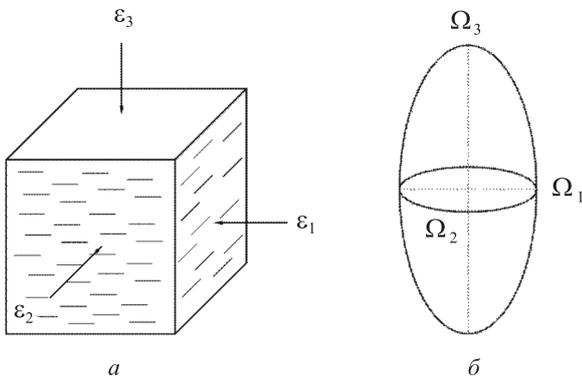


Рис. 3. Представительный объем трансверсально-изотропного трещиноватого материала (а) и соответствующей вид эллипсоида поврежденности (б)

Fig. 3. Representative volume of transversely isotropic fractured material (a) and the corresponding view of the damage ellipsoid (b)

Конфигурация действующих на образец механических воздействий описывается тензором деформации $\tilde{\epsilon}$ с главными значениями $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$. Рассмотрим случай, когда тензоры деформации и поврежденности соосны. Для анализа условий строгой локальной выпуклости потенциала при различных видах напряженно-деформированного состояния будем варьировать ϵ_1 в диапазоне $[-0.1, 0.1]$, определяя $\epsilon_2 = \epsilon_3$ из выражения для параметра вида напряженно-деформированного состояния, который с заданным шагом изменяется от $-\sqrt{3}$ (случай

всестороннего сжатия) до $\sqrt{3}$ (случай всестороннего растяжения). Количество шагов для деформации и параметра ξ совпадают.

На рис. 4 представлены предельные значения поврежденности Ω^2 для различной степени ее анизотропии от величины параметра, характеризующего тип напряженно-деформированного состояния $\xi = \frac{I_1}{\sqrt{I_2}}$.

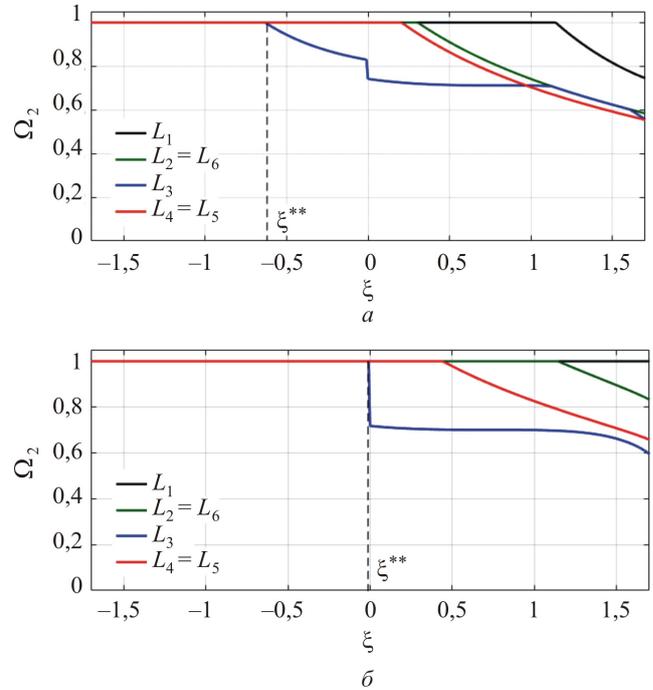


Рис. 4. Зависимости допустимых значений поврежденности Ω^2 , определяемых условиями (13), от вида напряженно-деформированного состояния, для параметра анизотропии поврежденности $q = 0,95$ (а) и $q = 0,8$ (б)

Fig. 4. Dependences of the permissible values of damage Ω^2 , determined by conditions (13), on the type of stress-strain state, for the parameter of damage anisotropy $q = 0,95$ (a) and $q = 0,8$ (b)

Из данных рис. 4 видим, что независимо от величины q пары условий L_2 и L_6, L_4 и L_5 дают тождественные результаты. При $\xi \leq \xi^{**}$ максимальное допустимое значение поврежденности равно единице, так же, как и в модели со скалярной поврежденностью. Начиная с ξ^* допустимое значение поврежденности определяется условием $L_3 > 0$. При этом для малых степеней анизотропии есть еще одна критическая величина, начиная с которой допустимое значение поврежденности контролируется условием $L_4 > 0$. Величина ξ^{**} зависит от степени анизотропии поврежденности, при этом при любой величине $q \leq 1$ выполняется условие $\xi^{**} \geq \xi_0$. На рис. 5 представлена зависимость критической величины ξ^{**} от степени анизотропии материала q . Видно, что в целом анизотропия поврежденности приводит к упроч-

нению материала (точка ξ^{**} смещается в область больших значений ξ). При этом при слабой анизотропии $q \geq 0,85$ критическая величина находится в области преимущественного сжатия материала, тогда как при $q < 0,85$ величина ξ^{**} асимптотически приближается к нулю, т.е. потеря устойчивости материала будет наблюдаться в условии чистого сдвига.

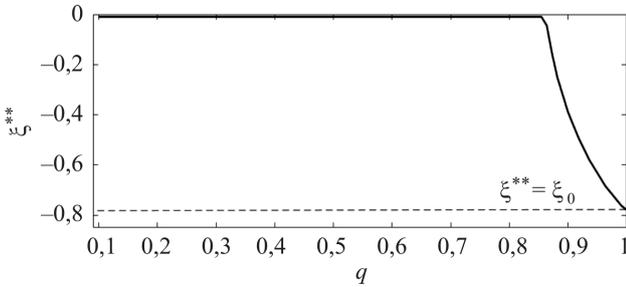


Рис. 5. Зависимости критической величины ξ^{**} от степени анизотропии поврежденности

Fig. 5. Dependences of the critical value ξ^{**} on the degree of damage anisotropy

Сравнение полученных допустимых значений поврежденности для различной степени анизотропии с изотропным случаем (скалярная поврежденность) показывает, что условия строгой локальной выпуклости (5) дают минорантную оценку только в области $\xi \leq 0$ (см. рис. 6). В случае обстановки преимущественного растяжения ($\xi > 0$) допустимые значения параметра поврежденности Ω^2 определяются из условия $L_3 > 0$ системы неравенств (13).

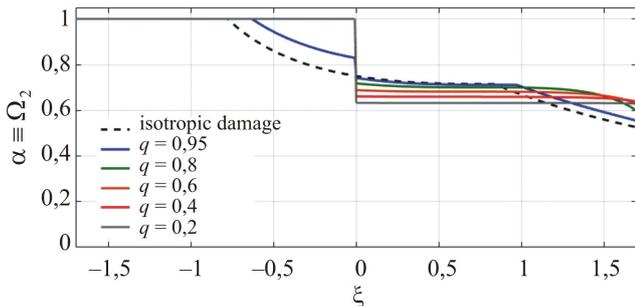


Рис. 6. Зависимости допустимых значений поврежденности $\alpha \equiv \Omega^2$ от параметра ξ для случаев скалярной и анизотропной поврежденности

Fig. 6. Dependences of the admissible values of damage $\alpha \equiv \Omega^2$ on the parameter ξ for cases of scalar and anisotropic damage

Трансверсально-изотропная среда с наклонно-ориентированной трещиноватостью. Рассмотрим обобщение предыдущей постановки на случай несоосных тензора поврежденности и тензора деформации. Как и ранее, примем, что трещиноватость описывается тензором поврежденности с главными значениями

$\Omega_3 = \Omega > \Omega_1 = \Omega_2 = q\Omega, q \in [0,1]$. Ее наклон задается вращением эллипсоида поврежденности вокруг оси OY на угол $\beta \in [0^0, 90^0]$ между осью максимальной главной деформации ε_1 и главной осью, соответствующей максимальной главной поврежденности Ω_3 (рис. 7).

Будем работать в системе координат главных осей тензора деформации. Компоненты тензора поврежденности в этой системе координат будут определяться из ортогонального преобразования $\mathbf{O}^T \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{O}$, где \mathbf{O} – ортогональный тензор, поворачивающий систему координат главных осей поврежденности в систему координат главных осей деформации. В случае $\beta \neq 0^0$ и $\beta \neq 90^0$ тензор поврежденности помимо диагональных будет иметь одну ненулевую недиагональную компоненту Ω_{xz} .

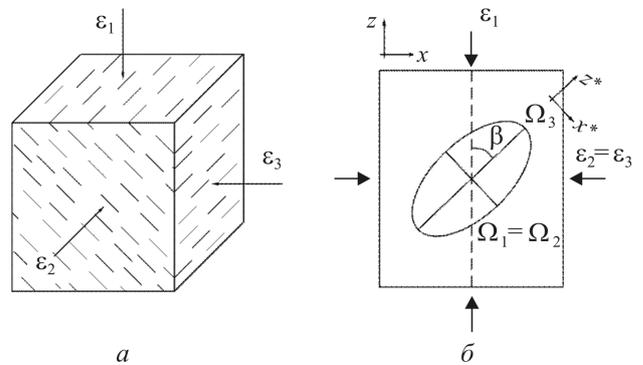


Рис. 7. Представительный объем трансверсально-изотропного материала с наклонно-ориентированной трещиноватостью (а) и соответствующий вид эллипсоида поврежденности (б)

Fig. 7. Representative volume of transversely isotropic material with obliquely oriented fracturing (a) and the corresponding view of the damage ellipsoid (b)

Используя выражения для компонент матрицы Гессе и условия ее положительной определенности (13), построим допустимые предельные значения поврежденности для различных углов ориентации трещиноватости β , степени ее анизотропии q и вида напряженно-деформированного состояния ξ . Полученные зависимости для трех различных значений параметра анизотропии представлены на рис. 8.

Из рисунка видно, что и вариация угла наклона эллипсоида поврежденности β , и степень анизотропии приводят к существенному изменению характера зависимости допустимой предельной поврежденности от параметра вида напряженно-деформированного состояния поврежденного материала. Так, при $q = 0,9$ условия (5) для случая изотропной поврежденности являются минорантными, тогда как при уменьшении параметра q допустимая кривая для углов $\beta = 0^0$ и $\beta = 90^0$ лежит ниже кривой для изотропной поврежденности.

Необходимо отметить, что при вариации угла наклона трещиноватости в материале максимальная воз-

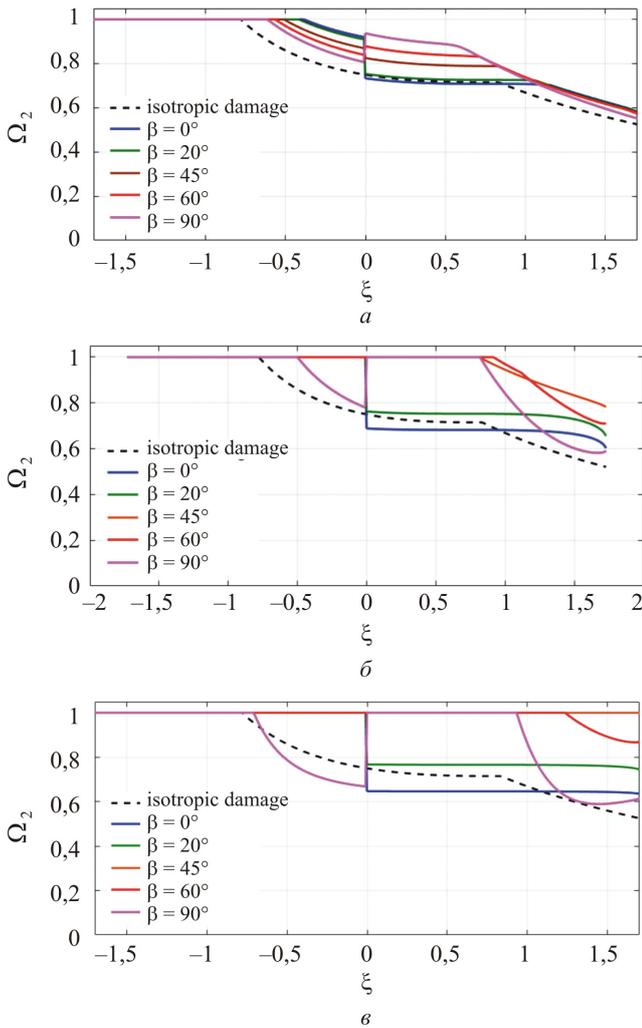


Рис. 8. Зависимости допустимых значений поврежденности Ω^2 , определяемых условиями (13), от вида напряженно-деформированного состояния и углов наклона для параметров анизотропии поврежденности $q = 0,9$ (а), $q = 0,6$ (б) и $q = 0,3$ (в)

Fig. 8. Dependences of the permissible values of damage Ω^2 , determined by conditions (13), on the type of stress-strain state, and slope angles for the parameters of damage anisotropy $q = 0,9$ (a), $q = 0,6$ (б) and $q = 0,3$ (в)

можная поврежденность, обеспечивающая его устойчивое поведение, изменяется немонотонно с изменением типа напряженно-деформированного состояния. Эта немонотонность связана с ролью трещиноватости при деформировании материала. Проиллюстрируем это на примере рис. 8, б. Так, при $\beta = 0^\circ$ (случай трещиноватости, ориентированной перпендикулярно направлению максимальной главной деформации) наиболее сильные ограничения (относительно $\Omega^2 = 1$) имеют место для $\xi > 0$, т.е. для случая преимущественного растяжения образца. Это вызвано тем, что трещины, раскрываясь, обеспечивают дополнительную деформацию материала, которая может расти лавинообразно. В случае $\beta = 90^\circ$ (случай трещиноватости, ориентированной перпендику-

лярно направлению минимальной главной деформации) мы видим два интервала с наименьшими значениями допустимой поврежденности. Интервал $\xi \in [1, \sqrt{3}]$ соответствует случаю пропорционального или непропорционального многоосного растяжения, существующая трещиноватость в этом случае также дает вклад в общую деформацию. Второй интервал $\xi \in [-0.7, 0]$ соответствует ситуации одноосного сжатия со свободной от напряжений боковой поверхностью или одноосного сжатия с принудительным растяжением в двух других ортогональных направлениях. Вертикальная трещиноватость в этом случае ориентирована нормально к направлению минимальной и/или промежуточной главной деформации, что способствует ее раскрытию и дополнительному деформационному вкладу.

Роль ориентации трещиноватости также можно проследить на зависимости критической величины от угла наклона для различных степеней анизотропии поврежденности (рис. 9). Так, для слабой анизотропии ($q \geq 0.85$) наблюдается разупрочнение материала при увеличении угла ориентации трещиноватости. Разупрочнение заключается в уменьшении критической величины ξ^{**} при стремлении угла наклона к $\beta = 90^\circ$. В случае существенной анизотропии поврежденности ($q < 0.5$) можно выделить три характерных интервала изменения величины ξ^{**} . Первый интервал к $\beta \leq 30^\circ$ характеризуется потерей устойчивости материала при деформировании в условиях чистого сдвига. Второй интервал $30^\circ < \beta \leq 65^\circ$ соответствует случаю, когда материал теряет устойчивость в случаях преимущественного растяжения. При $\beta > 65^\circ$ (третий интервал) деформирование материала становится неустойчивым в условиях преимущественного сжатия ($\xi^{**} < 0$). Важно отметить, что в случае наклона трещиноватости субнормально действию минимальной главной деформации (угол β близок к 90°) и высокой степени анизотропии $q < 0.2$ критическая величина ξ^{**} будет меньше ξ_0 .

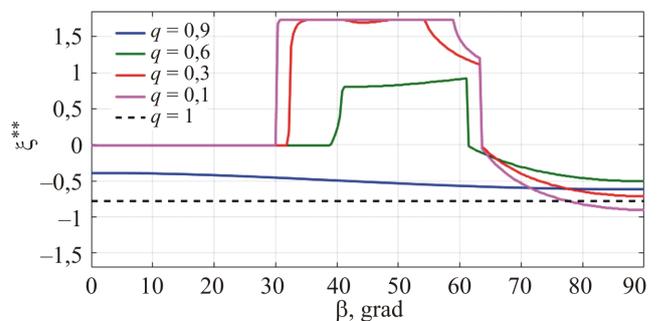


Рис. 9. Зависимости критической величины ξ^{**} от угла наклона β для различных степеней анизотропии поврежденности

Fig. 9. Dependences of the critical value ξ^{**} on the inclination angle β for different degrees of damage anisotropy

Заключение

В данной работе осуществлен вывод условий локальной строгой выпуклости потенциала в неклассической модели нелинейной упругости с тензорным (второй ранг) параметром поврежденности. Получены условия выпуклости в главных осях тензора деформации для общего случая несоосных тензора деформации и поврежденности. Найденные условия обеспечивают единственность решения статической задачи теории упругости. Для иллюстрации полученных условий выпуклости рассмотрены два частных случая вида тензора поврежденности: трансверсально-изотропная трещиноватая среда с соосными тензорами деформации и поврежденности, трансверсально-изотропная среда с наклонно-ориентированной трещиноватостью. Обе конфигурации

помимо поврежденности характеризуются также параметром степени анизотропии поврежденности, показывающем, насколько отличаются площади поперечных сечений в трех ортогональных направлениях, соответствующих главным осям тензора поврежденности. Для обоих случаев установлены наиболее строгие неравенства, показана зависимость предельных значений поврежденности от параметра степени анизотропии. Для наклонно-ориентированной трещиноватости построены зависимости предельной допустимой поврежденности от степени анизотропии, угла наклона и вида напряженно-деформированного состояния. Показано, что ориентация поврежденности в совокупности при разной степени ее анизотропии может приводить как к упрочнению материала, так и разупрочнению относительно случая изотропной трещиноватости.

Библиографический список

- Капустянский С.М. Анизотропия геоматериалов // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – 1987. – Т. 18. – С. 53–113.
- Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах. – М.: Недра, 1985. – 271 с.
- Experimental investigation of the anisotropic mechanical behavior of phyllite under triaxial compression / Guowen Xu [et al.] // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2018. – Vol. 104. – P. 100–112. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2018.02.017
- Динамическое деформирование мягких грунтовых сред: экспериментальные исследования и математическое моделирование / В.В. Баландин [и др.] // МТТ. – 2015. – № 3. – С. 69–77.
- Lockner D.A., Stanchits S.A. Undrained poroelastic response of sandstones to deviatoric stress change // J. Geophys. Res. – 2002. – Vol. 107. – P. B12. DOI: 10.1029/2001JB001460
- Basaran C., Nie S. An irreversible thermodynamics theory for damage mechanics of solids. // Int. J. Damage Mech. – 2004. – Vol. 13. – P. 205–223. DOI: 10.1177/1056789504041058
- Nonlinear and nonequilibrium dynamics in geomaterials / TenCate J.A. [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 93, № 6. – P. 065501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.065501
- Nonequilibrium and nonlinear dynamics in Berea and Fontainebleau sandstones: Low-strain regime / D. Pasqualini [et al.] // J. Geophys. Res. – 2007. – Vol. 112. – P. B01204. DOI: 10.1029/2006JB004264
- Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams: application of the mechanics of cellular solids and of porous materials / X. Badiche [et al.] // Materials Science and Engineering. – 2000. – Vol. 289. – P. 276–288. DOI: 10.1016/S0921-5093(00)00898-4
- Краснощеков П.И., Федотов А.Ф. Упругие модули изотропных порошковых и пористых материалов // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2006. – Вып. 43. – С. 81–87. DOI: 10.14498/vsgtu455
- Капитонов А.М., Редькин В.Е. Физико-механические свойства композиционных материалов. Упругие свойства. – Красноярск: Изд-во Сиб. федер. ун-та, 2013. – 532 с.
- Березин А.В. Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел. – М.: Наука, 1990. – 135 с.
- Бессонов Д.Е., Зезин Ю.П., Ломакин Е.В. Разно-сопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, вып. 4, ч. 2. – С. 9–13.
- Lomakin E.V., Fedulov B.N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. – 2015. – Vol. 50, iss. 6. – P. 1527–1535. DOI: 10.1007/s11012-015-0104-5
- Johnson P.A., Jia X. Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering. Nature. – 2005. – Vol. 473. – P. 871–874. DOI: 10.1038/nature04015
- Wu C., Peng Z., Ben-Zion Y. Non-linearity and temporal changes of fault zone site response associated with strong ground motion // Geophys. J. Int. – 2009. – Vol. 176, № 1. – P. 265–278. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2008.04005.x
- Water-level oscillations caused by volumetric and deviatoric dynamic strains / E. Shalev [et al.] // Geophys. J. Int. – 2016. – Vol. 204. – P. 841–851. DOI: 10.1093/gji/ggv483
- Imaging and monitoring temporal changes of shallow seismic velocities at the Garner Valley near Anza, California, in relation to the M7.2 2010 El Mayor-Cucapah earthquake / L. Qin [et al.] // J. Geophys. Res. – 2020. – Vol. 125, № 1. – P. e2019JB018070. DOI: 10.1029/2019JB018070
- Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Изв. АН СССР. МТТ. – 1966. – № 2. – С. 44–53.
- Jones R.M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15, № 1. – P. 16–23. DOI: 10.2514/3.7297
- Lomakin E.V., Rabotnov Yu.N. A theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression // Mechanics of Solids. – 1978. – Vol. 13, № 6. – P. 25–30.
- Medri G. A nonlinear elastic model for isotropic materials with different behavior in tension and compression // Journal of Engineering Materials and Technology. – 1982. – Vol. 104, № 1. – P. 26–28. DOI: 10.1115/1.3225031
- A new computational framework for materials with different mechanical responses in tension and compression and its applications / Z. Du [et al.] // International Journal of Solids and Structures. – 2016. – Vol. 100. – P. 54–73. DOI: 10.1016/j.ijssolstr.2016.07.009
- Vijayakumar K., Ashoka J.G. A bilinear constitutive model for isotropic bimodulus materials // Journal of Engineering Materials and Technology. – 1990. – Vol. 112, № 3. – P. 372–379. DOI: 10.1115/1.2903341

25. Ломакин Е.В. Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10, № 5. – С. 41–52.

26. Пахомов Б.М. Вариант модели изотропного разномодульного материала // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Машиностроение. – 2017. – № 6, Вып. 117. – С. 35–48. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-6-35-48

27. Мясников В.П., Топалэ В.И. Моделирование сейсмической анизотропии в литосфере как разномодульным упругим телом // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1987. – № 5. – С. 22–30.

28. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – № 6. – С. 66–75.

29. Мясников В.П., Олейников А.И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. – Владивосток: Дальнаука, 2007. – 172 с.

30. Пирогов С.А. Модель динамического деформирования и разрушения разнотвердых материалов при интенсивных ударных воздействиях // Проблемы прочности и пластичности. – 2012. – Вып. 74. – С. 40–48.

31. Fedorenko A.N., Fedulov B.N., Lomakin E.V. Buckling problem of composite thin-walled structures with properties dependent on loading types // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2019. – № 3. – P. 104–111. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.11

32. Lyakhovsky V., Ben-Zion Y., Agnon A. Distributed damage, faulting, and friction // J. Geophys. Res. – 1997b. – Vol. 102, № 27. – P. 635–649.

33. Non-linear elastic behavior of damaged rocks / V. Lyakhovsky [et al.] // Geophys. J. Int. – 1997a. – Vol. 130. – P. 157–166. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb00995.x

34. Dudko O.V., Lapteva A.A., Ragozina V.E. Nonstationary 1D Dynamics Problems for Heteromaterial Elasticity with Piecewise-Linear Approximation of Boundary Conditions // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2019. – № 4. – P. 37–47. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.04

35. Convergence analysis of a finite element method based on different moduli in tension and compression / X. He [et al.] // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – Vol. 46, № 20. – P. 3734–3740. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.07.003

36. An efficient finite element formulation for nonlinear analysis of clustered tensegrity / L. Zhang [et al.] // Engineering Computations. – 2016. – Vol. 33, № 1. – P. 252–273. DOI: 10.1108/EC-08-2014-0168

37. Hamiel Y., Lyakhovsky V., Ben-Zion Y. The elastic strain energy of damaged solids with applications to nonlinear

deformation of crystalline rocks // Pure Appl. Geophys. – 2011. – Vol. 168. – P. 2199–2210. DOI: 10.1007/S00024-011-0265-7.

38. Ляховский В.А., Мясников В.П. О поведении упругой среды с микронарушениями // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1984. – № 10. – С. 71–75.

39. Lyakhovsky V., Myasnikov V.P. Acoustics of theoretically non-linear solids // PEPIAM. – 1988. – Vol. 50. – P. 60–64.

40. Ляховский В.А., Мясников В.П. Поведение вязкоупругой среды с микронарушениями при растяжении и сдвиге // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1985. – № 4. – С. 28–35.

41. Ben-Zion Y., Lyakhovsky V. Analysis of aftershocks in a lithospheric model with seismogenic zone governed by damage rheology // Geophys. Int. J. – 2006. – Vol. 165. – P. 197–210. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2006.02878.x

42. Agnon A., Lyakhovsky V. Damage distribution and localization during dyke intrusion // The physics and chemistry of dykes / eds. G. Baer, A. Heimann. – Rotterdam: Balkema, 1995. – P. 65–78.

43. Олейников А.И., Могильников Е.В. Единственность решения краевых задач и устойчивость для разномодульного нелинейного материала // Дальневосточный математический журнал. – 2002. – Т. 3, № 2. – С. 242–253.

44. Voyiadjis G.Z., Kattan P.I., Yousef M.A. Some basic issues of isotropic and anisotropic continuum damage mechanics // Handbook of Damage Mechanics. – Berlin: Springer, 2015. – P. 3–42. DOI: 10.1007/978-1-4614-8968-9_1-1

45. Zhang W., Cai Y. Continuum Damage Mechanics and Numerical Applications. – Berlin: Springer, 2010. – 1000 p. DOI: 10.1007/978-3-642-04708-4

46. Non-linear anisotropic damage rheology model: theory and experimental verification / I. Panteleev [et al.] // European journal of mechanics: A. Solids. – 2021. – Vol. 85. – P. 104085. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2020.104085

47. Eklund I., Temam R. Convex Analysis and Variational Problems. – New York: Elsevier, 1976. – 390 p.

48. Bazant Z.P., Cedolin L. Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. – New York: Oxford Univ. Press. 1991 – 984 p.

49. Rudnicki J.W., Rice J.R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive, dilatant materials // J. Mech. Phys. Solids. – 1975. – Vol. 23. – P. 371–394.

50. Schreyer H.L., Neilsen M.K. Analytical and numerical tests for loss of material stability // Int. J. Num. Methods Eng. – 1996. – Vol. 39. – P. 1721–1736.

51. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1965. – 431 с.

References

1. Kapustianskii S.M. Anizotropiia geomaterialov [Geomaterial anisotropy]. *Itogi nauki i tekhniki. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* (Results of Science and Technology. Mechanics of a deformable solid), 1987, vol. 18, pp. 53–113.

2. Stavrogin A.N., Protosenia A.G. Prochnost' gornykh porod i ustoychivost' vyrabotok na bol'shikh glubinakh [The strength of rocks and the stability of workings at great depths]. *Moscow, Nedra*, 1985, 271 p.

3. Guowen Xu, Chuan He, Ang Su, Ziquan Chen. Experimental investigation of the anisotropic mechanical behavior of phyllite under triaxial compression. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2018, vol. 104, pp. 100–112, doi: 10.1016/j.ijrmms.2018.02.017

4. Balandin V.V., Bragov A.M., Igumnov L.A., Konstantinov A.Iu., Kotov V.L., Lomunov A.K. Dinamicheskoe deformirovanie miagkikh gruntovykh sred: eksperimental'nye issledovaniia i

matematicheskoe modelirovanie [Dynamic deformation of soft soil media: experimental research and mathematical modeling]. *Mechanics of solids*, 2015, no. 3, pp. 69–77.

5. Lockner D.A., Stanchits S.A. Undrained poroelastic response of sandstones to deviatoric stress change. *J. Geophys. Res.*, 2002, vol. 107, pp. B12, DOI: 10.1029/2001JB001460

6. Basaran C., Nie S. An irreversible thermodynamics theory for damage mechanics of solids. *Int. J. Damage Mech.*, 2004, vol. 13, pp. 205–223, DOI: 10.1177/1056789504041058

7. TenCate J.A., Pasqualini D., Habib S., Heitmann K., Higdon D., Johnson P.A. Nonlinear and nonequilibrium dynamics in geomaterials. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, no. 6, pp. 065501, DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.065501

8. Pasqualini D., Heitmann K., TenCate J.A., Habib S., Higdon D., Johnson P.A. nonequilibrium and nonlinear dynamics in

Berea and Fontainebleau sandstones: Low-strain regime. *J. Geophys. Res.*, 2007, vol. 112, pp. B01204, DOI: 10.1029/2006JB004264

9. Badiche X., Forest S., Guibert T., Bienvenu Y., Bartout J. et al. Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams: application of the mechanics of cellular solids and of porous materials. *Materials Science and Engineering*, 2000, vol. 289, pp. 276-288, DOI: 10.1016/S0921-5093(00)00898-4

10. Krasnoshchekov P.I., Fedotov A.F. Uprugie moduli izotropnykh poroshkovykh i poristykh materialov [Elastic modulus of isotropic powder and porous materials] *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* (Bulletin of the Samara State Technical University. Series Physics and Mathematics), 2006, iss. 43, pp. 81-87, DOI: 10.14498/vsgtu455

11. Kapitonov A.M., Red'kin V.E. Fiziko-mekhanicheskie svoystva kompozitsionnykh materialov. Uprugie svoystva [Physical and mechanical properties of composite materials. Elastic properties]. *Krasnoyarsk, Publishing house of the Siberian Federal University*, 2013, 532 p.

12. Berezin A.V. Vliianie povrezhdenii na deformatsionnye i prochnostnye kharakteristiki tverdykh tel [Influence of damage on deformation and strength characteristics of solids]. *Moscow, Science*, 1990, 135 pp.

13. Bessonov D.E., Zezin Iu.P., Lomakin E.V. Raznosoprotivliaemost' zernistykh kompozitov na osnove nenasyshchennykh poliefirov [Differential resistance of granular composites based on unsaturated polyesters]. *Izvestiia Saratovskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika* (Bulletin of the Saratov University. Series Mathematics. Mechanics. Computer science), 2009, vol. 9, Iss. 4, Part. 2., pp. 9-13.

14. Lomakin E.V., Fedulov B.N. nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites. *Meccanica*, 2015, vol. 50, iss. 6, pp. 1527-1535, DOI: 10.1007/s11012-015-0104-5

15. Johnson P.A., Jia X. nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering. *Nature*, 2005, vol. 473, pp. 871-874, DOI: 10.1038/nature04015

16. Wu C., Peng Z., Ben-Zion Y. non-linearity and temporal changes of fault zone site response associated with strong ground motion. *Geophys. J. Int.*, 2009, vol. 176, no. 1, pp. 265-278, DOI: 10.1111/j.1365-246X.2008.04005.x

17. Shalev E., Kurzon I., Doan M.-L., Lyakhovsky V. Water-level oscillations caused by volumetric and deviatoric dynamic strains. *Geophys. J. Int.*, 2016, vol. 204, pp. 841-851, DOI: 10.1093/gji/ggv483

18. Qin L. Ben-Zion Y., Bonilla L.F., Steidl J.H. Imaging and monitoring temporal changes of shallow seismic velocities at the Garner Valley near Anza, California, in relation to the M7.2 2010 El Mayor-Cucapah earthquake. *J. Geophys. Res.*, 2020, vol. 125, no. 1, pp. e2019JB018070, DOI: 10.1029/2019JB018070

19. Ambartsumian S.A., Khachatryan A.A. Osnovnye uravneniia teorii uprugosti dlia materialov, raznosoprotivliaushchikh-sia rastiazheniiu i szhatiiu [Basic equations of the theory of elasticity for materials that resist tensile and compressive forces]. *Izvestiia akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* (Mechanics of solids), 1966, no. 2, pp. 44-53.

20. Jones R.M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression. *AIAA Journal.*, 1977, vol. 15, no. 1, pp. 16-23. 10.2514/3.7297

21. Lomakin E.V., Rabotnov Yu.N. A theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression. *Mechanics of Solids*, 1978, vol. 13, no. 6, pp. 25-30.

22. Medri G. A nonlinear elastic model for isotropic materials with different behavior in tension and compression. *Journal of*

Engineering Materials and Technology, 1982, vol. 104, no. 1, pp. 26-28, DOI: 10.1115/1.3225031

23. Du Z., Zhang Y., Zhang W., Guo X. A new computational framework for materials with different mechanical responses in tension and compression and its applications. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, vol. 100, pp. 54-73, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.07.009

24. Vijayakumar K., Ashoka J.G. A bilinear constitutive model for isotropic bimodulus material. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1990, vol. 112, no. 3, pp. 372-379, DOI: 10.1115/1.2903341

25. Lomakin E.V. Mekhanika sred s zavisiaschimi ot vida napriazhennogo sostoiianiia svoistvami [Mechanics of media with stress-state dependent properties]. *Fizicheskaiia mezomekhanika* (Physical Mesomechanics), 2007, vol. 10, no 5-6. pp. 255-264.

26. Pakhomov B.M. Variant modeli izotropnogo raznomodul'nogo materiala [A variant of the model of an isotropic multimodular material]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya Mashinostroenie* (Bulletin of the Moscow State Technical University. N.E. Bauman. Series Mechanical Engineering), 2017, no. 6, Iss. 117, pp. 35-48, DOI: 10.18698/0236-3941-2017-6-35-48

27. Miasnikov V.P., Topale V.I. Modelirovanie seismicheskoi anizotropii v litosfere kak raznomodul'nom uprugom tele [Modeling of seismic anisotropy in the lithosphere as a multimodulus elastic body]. *Izvestiia akademii nauk SSSR. Fizika Zemli* (Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Earth), 1987, no. 5. pp. 22-30.

28. Lomakin E.V. Opredeliaiushchie sootnosheniia deformatsionnoi teorii dlia dilatiruiushchikh sred [Constitutive relations of the deformation theory for dilating media]. *Izvestiia akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* (Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of Solids), 1991, no. 6. pp. 66-75.

29. Miasnikov V.P., Oleinikov A.I. Osnovy mekhaniki geterogenno-soprotivliaiushchikh sred [Fundamentals of mechanics of heterogeneous resisting media]. *Vladivostok: Dal'nauka*, 2007, 172 p.

30. Pirogov S.A. Model' dinamicheskogo deformirovaniia i razrusheniia raznosoprotivliaiushchikh materialov pri intensivnykh udarnykh vozdeistviiakh [Model of dynamic deformation and fracture of materials with different resistance under intense shock effects]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* (Problems of strength and plasticity), 2012, Iss. 74, pp. 40-48.

31. Fedorenko A.N., Fedulov B.N., Lomakin E.V. Buckling problem of composite thin-walled structures with properties dependent on loading types. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 3, pp. 104-111, DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.11

32. Lyakhovsky V., Ben-Zion Y., Agnon A. Distributed damage, faulting, and friction. *J. Geophys. Res.*, 1997b, vol. 102, no. 27, pp. 635-649.

33. Lyakhovsky V., Reches Z. Weinberger R., Scott T.E. nonlinear elastic behavior of damaged rocks. *Geophys. J. Int.*, 1997a, vol. 130, pp. 157-166, DOI: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb00995.x

34. Dudko O.V., Lapteva A.A., Ragozina V.E. nonstationary 1D Dynamics Problems for Heteromodular Elasticity with Piecewise-Linear Approximation of Boundary Conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 37-47, DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.04

35. Convergence analysis of a finite element method based on different moduli in tension and compression / He X. [et al.]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, vol. 46, no. 20, pp. 3734-3740. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.07.003

36. He X., Zheng Z. et al. An efficient finite element formulation for nonlinear analysis of clustered tensegrity. *Engineer-*

ing Computations, 2016, vol. 33, no. 1, pp. 252-273, DOI: 10.1108/EC-08-2014-0168

37. Hamiel Y., Lyakhovsky V., Ben-Zion Y. The elastic strain energy of damaged solids with applications to nonlinear deformation of crystalline rocks. *Pure Appl. Geophys.*, 2011, vol. 168, pp. 2199-2210, DOI: 10.1007/S00024-011-0265-7

38. Liakhovskii V.A., Miasnikov V.P. O povedenii uprugoi sredy s mikronarusheniiami [On the behavior of an elastic medium with micro-damage]. *Izvestiia akademii nauk SSSR. Fizika Zemli* (Izvestia of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Earth), 1984, no. 10, pp. 71-75.

39. Lyakhovsky V., Myasnikov V.P. Acoustics of theologically non-linear solids. *PEPIAM*, 1988, vol. 50, pp. 60-64.

40. Liakhovskii V.A., Miasnikov V.P. Povedenie viazkouprugoi sredy s mikronarusheniiami pri rastiazhenii i sdvige [Behavior of a viscoelastic medium with micro-fractures under tension and shear]. *Izvestiia akademii nauk SSSR. Fizika Zemli* (Izvestia of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Earth), 1985, no. 4, pp. 28-35.

41. Ben-Zion Y., Lyakhovsky V. Analysis of aftershocks in a lithospheric model with seismogenic zone governed by damage rheology. *Geophys. Int. J.*, 2006, vol. 165, pp. 197-210, DOI: 10.1111/j.1365-246X.2006.02878.x

42. Agnon A., Lyakhovsky V. Damage distribution and localization during dyke intrusion. *The physics and chemistry of dykes*. Eds. G. Baer, A. Heimann. Rotterdam: Balkema, 1995, pp. 65-78.

43. Oleinikov A.I., Mogil'nikov E.V. Edinstvennost' resheniia kraevykh zadach i ustoychivost' dlia raznomodul'nogo nelineinogo

materiala [Uniqueness of the solution of boundary value problems and stability for a multi-modular nonlinear material]. *Dal'nevostochnyi matematicheskiy zhurnal* (Far Eastern Mathematical Journal), 2002, vol. 3, no. 2, pp. 242-253.

44. Voyiadjis G.Z., Kattan P.I., Yousef M.A. Some basic issues of isotropic and anisotropic continuum damage mechanics. *Handbook of Damage Mechanics*, Berlin: Springer, 2015, pp. 3-42, DOI: 10.1007/978-1-4614-8968-9_1-1

45. Zhang W., Cai Y. Continuum Damage Mechanics and Numerical Applications. Berlin: Springer, 2010, 1000 p., DOI: 10.1007/978-3-642-04708-4

46. Panteleev I., Lyakhovsky V., Browning J. et al. non-linear anisotropic damage rheology model: theory and experimental verification. *European journal of mechanics: A. Solids*, 2021, vol. 85, pp. 104085, DOI: 10.1016/j.euromechsol.2020.104085

47. Eklund I., Temam R. Convex Analysis and Variational Problems, *Elsevier*, 1976, 390 p.

48. Bazant Z.P., Cedolin L. Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories, *Oxford Univ. Press*, 1991, 984 p.

49. Rudnicki J.W., Rice J.R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive, dilatant materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1975, vol. 23, pp. 371-394.

50. Schreyer H.L., Neilsen M.K. Analytical and numerical tests for loss of material stability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, vol. 39, pp. 1721-1736.

51. Kurosh A.G. Kurs vysshej algebrы [Higher Algebra Course]. Moscow, Nauka, 1965, 431.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (грант № 19-77-3008).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Financing. The work has been made with the financial support of The Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 19-77-3008).

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.