



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.2.09

УДК 593.3

О РАССЛОЕНИИ ПОЛОСЫ ПО ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА УПРУГИХ СВОЙСТВ ЧАСТЬ 2. СЛУЧАЙ СДВИГОВОЙ ТРЕЩИНЫ

К.Б. Устинов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. Москва, Россия
Московский авиационный институт, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 22 марта 2016 г.

Принята: 25 мая 2016 г.

Опубликована: 30 июня 2016 г.

Ключевые слова:

отслоение, интерфейсная трещина, факторизация, упругая заделка

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача о полосе, образованной двумя изотропными упругими полосами меньшей и в общем случае различной толщины, обладающими различными упругими свойствами, с полубесконечной трещиной, проходящей по границе раздела упругих свойств и нагружаемой на бесконечности системой усилий. В первой части работы [1] представлена математическая формулировка, и с помощью преобразования Лапласа задача сведена к однородной задаче Римана-Гильберта с матричным коэффициентом. В предположении возможности пренебрежения влиянием нормальных напряжений на сдвиговые смещения и сдвиговых напряжений на нормальные смещения задача сведена к двум скалярным задачам Римана-Гильберта. Данная постановка может рассматриваться как приближенная для общего случая (данное приближение при этом заведомо не хуже общепринятого приближения, заключающегося в рассмотрении узкого слоя в рамках теории балок либо стержней) и как точная – для случая, когда прилегающие слои могут скользить друг относительно друга, но удерживаются силами адгезии от нормального отрыва.

Путем факторизации получено точное аналитическое решение одной из сформулированных в [1] задач, а именно задачи о сдвиге. Получены асимптотические выражения для смещений берегов трещины вдали от ее вершины. Показано, что ведущие члены асимптотики смещений берегов трещины вдали от вершины соответствуют смещению стержня при граничных условиях типа упругой заделки, т.е. условиях пропорциональности смещения в точке заделки приложенному усилию. Для данного коэффициента пропорциональности получено аналитическое выражение. Также получены асимптотические выражения для поля напряжений вблизи вершины трещины (коэффициент интенсивности напряжений и скорость высвобождения энергии).

© ПНИПУ

© **Устинов Константин Борисович** – доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, e-mail: ustinov@ipmnet.ru

Konstantin B. Ustinov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, e-mail: ustinov@ipmnet.ru

ON DELAMINATION OF A STRIP ALONG THE BOUNDARY BETWEEN TWO ELASTIC LAYERS. PART 2, CASE OF SHEAR CRACK

K.B. Ustinov

A. Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS. Moscow, Russian Federation
Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 22 March 2016
Accepted: 25 May 2016
Published: 30 June 2016

Keywords:

delamination,
interface crack,
factorization,
elastic clamping

ABSTRACT

The problem of a strip, composed by two isotropic elastic layers of different elastic properties and thicknesses, separated by a semi-infinite crack located along the line between the layers is considered. The mechanical load is supposed to be applied at infinity. In the first part of the study [1] the mathematical formulation of the problem and its reduction to a homogeneous Riemann-Hilbert problem by application Laplace transform was presented. Under the assumption of possibility to neglect the cross-terms related to the influence of the normal stresses to the shear displacements and the shear stresses to the normal displacements, the problem is reduced to two scalar Riemann-Hilbert problems. Such a formulation may be considered as an approximation for the general case (which is not worse than the traditional beam or rode approximation) and as the exact one for the case, where the two layers may slide but may not separate due to cohesion.

By means of factorization procedure the exact analytical solution has been obtained for one of the formulated in [1] scalar problems, namely, the problem of a shear crack. The asymptotical expression has been derived for the relative displacements of the crack faces far from the crack tip. It is shown, that the leading asymptotic terms of these relative displacements correspond to a rode under the boundary condition of the type of elastic clamping. i.e. the proportionality of the displacement of the clamping point to the applied force. The analytical expression for this coefficient has been obtained under the accepted assumptions. The asymptotical expression for the stress field near the crack tip (stress intensity factor and energy release rate) is also derived.

© PNRPU

1. Постановка задачи. Исходная конфигурация

В первой части работы [1] была сформулирована задача теории упругости в постановке плоской деформации о полубесконечной трещине, проходящей вдоль части границы, разделяющей два изотропных упругих слоя с произвольными соотношениями толщин и упругих свойств. Самоуравновешенная нагрузка, характеризуемая главным вектором и изгибающим моментом, предполагалась приложенной на бесконечности со стороны трещины. Путем применения преобразования Лапласа задача была сведена к задаче Римана-Гильберта с матричным коэффициентом. Там же в предположении возможности пренебрежения влиянием нормальных напряжений на сдвиговые смещения и сдвиговых напряжений на нормальные смещения задача сведена к двум скалярным задачам Римана-Гильберта. Одна из задач – задача о нормальном отрыве – была решена.

Далее рассматривается вторая из намеченных задач – задача о сдвиговой трещине. Для решения используется та же постановка [2], а именно – предположение о возможности пренебречь указанным перекрестным влиянием нормальных напряжений на касательные смещения и касательных напряжений на нормальные смещения. Данный подход может рассматриваться как приближенный, причем рассматриваемое приближение заведомо не хуже общепринятого приближения, заключающегося в рассмотрении узкого слоя в рамках теории балок либо стержней [3–7]. Однако существует прототип данной математической формулировки, для которого получаемое решение является точным, а именно

для случая, когда прилегающие слои могут скользить друг относительно друга, но удерживаются силами адгезии от нормального отрыва. В любом случае для граничных условий, получаемых исходя из указанной постановки, решение получено строго.

Исходная конфигурация задачи представлена на рис. 1.

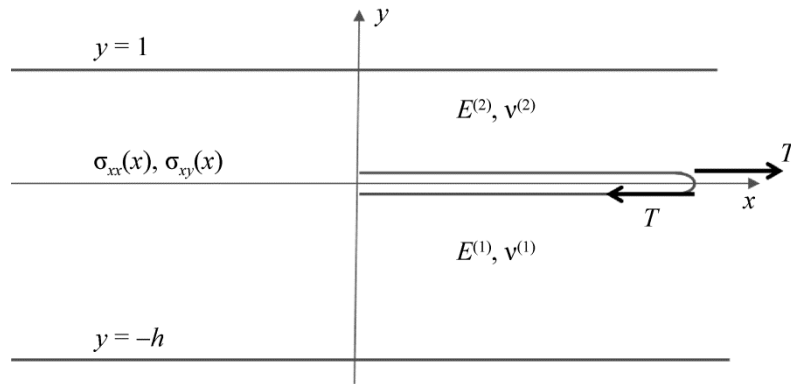


Рис. 1. Расслоение составного слоя сдвиговой трещиной. Геометрия задачи

В условиях плоской деформации рассматривается неоднородная упругая полоса $-h < y < 1$, составленная из двух изотропных частей с различными упругими свойствами. Вдоль части границы $y = 0, x < 0$ имеется полный контакт, вдоль оставшейся части границы $-y = 0, x > 0$ контакт отсутствует. Все величины, относящиеся к нижней полосе $0 < y < -h$, обозначаются индексом 1, относящиеся к верхней $0 < y < 1$ – индексом 2. Предполагается, что все поверхности свободны от напряжений,

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad \text{при } y = 1, \quad y = -h, \quad \text{и при } y = 0, \quad x > 0, \quad (1)$$

а нагрузка с эквивалентными главным вектором T приложена на бесконечности, так что

$$T = \int_{-\infty}^0 \sigma_{xy}(x, 0) dx. \quad (2)$$

Здесь u, v – компоненты вектора смещения; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений. Условие (2), безусловно, не охватывает весь класс однородных задач для рассматриваемой конфигурации, оставляя в стороне рассмотрение, например, однородного нагружения на бесконечности. Однако для большинства подобных задач решения могут быть получены элементарными методами [8].

Условия сопряжения на границе имеют вид

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)} \quad \text{при } y = 0, \quad x < 0. \quad (3)$$

Модифицированные для условий плоской деформации модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов обозначим $E^{(i)}, \nu^{(i)}, i = 1, 2$ соответственно. С обычными модулями Юнга $E_0^{(i)}$ и коэффициентами Пуассона $\nu_0^{(i)}$ они связаны соотношениями

$$E^{(i)} = \frac{E_0^{(i)}}{(1 - \nu_0^{(i)})(1 + \nu_0^{(i)})}, \quad \nu^{(i)} = \frac{\nu_0^{(i)}}{1 - \nu_0^{(i)}} \quad (4)$$

Предположение о возможности пренебрежения влиянием нормальных напряжений, действующих на линии продолжения трещины, на сдвиговые смещения равносильно пренебрежению самими нормальными напряжениями. Это приводит к дополнительному условию

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)} = 0 \text{ при } y = 0, \quad \exists x. \quad (5)$$

Данное условие неявно используется при моделировании узкого слоя стержнем при контакте с другим телом [3–7].

Для каждой из полос выполняются основные уравнения теории упругости, применение преобразования Лапласа к которым приводит к задаче Римана-Гильберта на мнимой оси ($p \in L$) (см. Приложение):

$$F_+(p) = K(p)F_-(p), \quad p \in L, \quad (6)$$

$$F_+(p) = \frac{E^{(2)}}{2} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} [u^{(2)}(x, 0) - u^{(1)}(x, 0)] e^{-px} dx, \quad (7)$$

$$F_-(p) = \int_{-\infty}^0 \sigma_{xy}(x, 0) e^{-px} dx, \quad (8)$$

$$K(p) = (\sin p \cos p - p) / d_2 + \eta (\sin h p \cos h p - h p) / d_1, \quad (9)$$

$$d_1 = \sin^2(h p) - (h p)^2, \quad d_2 = \sin^2 p - p^2, \quad (10)$$

$$\eta = E^{(2)} / E^{(1)}. \quad (11)$$

Кроме того, должны выполняться условия в опорных точках (в рассматриваемом случае – в нуле и на бесконечности), характеризующие возможность наличия, тип и порядок сингулярностей в данных точках. Так, для p , стремящегося к нулю, из уравнения (2) следует

$$F_-(p) = T + o(1), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow 0-. \quad (12)$$

Для p , стремящегося к бесконечности, исходя из наличия корневой особенности в нуле оригинала в напряжениях, на основании теоремы абелевого типа [9] следует

$$F_+(p) = \frac{1}{\sqrt{-2p}} K_{II} + O(p^{-3/2}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow -\infty. \quad (13)$$

Кроме того, из элементарных соображений следует, что горизонтальные смещения верхней полосы при $x \rightarrow \infty$ будут расти как $4Tx / E^{(2)}$, а нижней – как $-4Tx / hE^{(1)}$, что в Лаплас-образах согласно [10], (7) даст

$$F_+(p) = \frac{2(1 + \eta/h)T}{p} + o(1), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow 0+. \quad (14)$$

Для решения поставленной задачи необходимо представить ее коэффициент $K(p)$ в виде произведения двух функций, аналитических в правой и левой полуплоскостях комплексного переменного p :

$$K(p) = \Lambda_-^{-1}(p) \Lambda_+(p). \quad (15)$$

После нахождения $\Lambda_{\pm}(p)$ окончательное решение дается с помощью теоремы Лиувилля

$$\begin{aligned} F_+(p) &= \Lambda_+(p)\Pi(p), \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \\ F_-(p) &= \Lambda_-(p)\Pi(p), \quad \operatorname{Re}(p) < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\Pi(p)$ – функция, подлежащая определению. Поскольку индекс (в определении [11]) коэффициента краевой задачи, определяемой уравнением (10), равен минус единице, данная функция может содержать лишь одну константу и имеет вид

$$\Pi(p) = \Pi_0 p^n. \quad (17)$$

Здесь n – целая постоянная, определяемая характером поведения решения в нуле либо на бесконечности, Π_0 – постоянная, определяемая из граничных условий.

2. Решение задачи Римана-Гильберта для сдвиговой трещины

Уравнения (10), (15) могут быть записаны в виде

$$\Lambda_-^{-1}(p)\Lambda_+(p) = -(1+\eta)\operatorname{ctg} p G_1(p), \quad p \in L, \quad (18)$$

$$G_1(p) = -\frac{1}{1+\eta} \operatorname{tg} p \left[\frac{\sin p \cos p - p}{\sin^2 p - p^2} + \eta \frac{\sin hp \cos hp - hp}{\sin^2 hp - (hp)^2} \right], \quad p \in L. \quad (19)$$

Здесь L – мнимая ось.

Применением стандартного приема факторизации арктангенса через гамма-функцию решение (18) может быть выражено следующим образом:

$$\Lambda_+(p) = \sqrt{1+\eta} \frac{\Gamma(1+p/\pi)}{\Gamma(1/2+p/\pi)} J_+(p), \quad \Lambda_-(p) = \frac{1}{\sqrt{1+\eta}} \frac{\Gamma(1/2-p/\pi)}{\Gamma(-p/\pi)} J_-(p). \quad (20)$$

$$J_{\pm}(p) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{1}{1+\eta} \operatorname{th} p \left[\frac{\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - s}{\operatorname{sh}^2 s - s^2} + \eta \frac{\operatorname{sh} hs \operatorname{ch} hs - hs}{\operatorname{sh}^2 hs - (hs)^2} \right] \right] \frac{ds}{is-p} \right\}. \quad (21)$$

Асимптотические разложения вблизи $p = 0$ имеют вид

$$\Lambda_-(p) = i \frac{1}{\sqrt{1+\eta/h}} \frac{p}{\sqrt{2\pi}} + O(p^2), \quad (22)$$

$$\Lambda_+(p) = i \sqrt{1+\eta/h} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \left(\frac{4 \ln 2}{\pi} + \delta_1 \right) p \right] + O(p^2). \quad (23)$$

Здесь

$$\delta_1(\eta) = \left. \frac{d \ln J_+(p)}{dp} \right|_{p=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \ln \left[\frac{\operatorname{th} s}{1+\eta} \left(\frac{\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - s}{\operatorname{sh}^2 s - s^2} + \eta \frac{\operatorname{sh} hs \operatorname{ch} hs - hs}{\operatorname{sh}^2 hs - (hs)^2} \right) \right] \frac{ds}{s}. \quad (24)$$

Интегрирование последнего выражения по частям с учетом свойств интеграла Коши [12, 13] дает

$$\delta_1(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \left[\frac{\operatorname{th} s}{2(1+\eta/h)} \left(\frac{\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - s}{\operatorname{sh}^2 s - s^2} + \eta \frac{\operatorname{sh} hs \operatorname{ch} hs - hs}{\operatorname{sh}^2 hs - (hs)^2} \right) \right] \frac{ds}{s^2}. \quad (25)$$

Обе формы (24), (25) не представляют сложности для численного интегрирования. Однако для анализа последнее выражение полезно преобразовать, разбив на два интеграла, первый из которых вычисляется в замкнутой форме

$$\delta_1(\eta) = \delta_2(\eta) + \delta_3(\eta) / 4, \quad (26)$$

$$\delta_2(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \left[\frac{\operatorname{th} s}{s} \right] \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\operatorname{sh} s} - \frac{1}{s} \right] \frac{ds}{s} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{2 \ln 2}{\pi}, \quad (27)$$

$$\delta_3(\eta, h) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \left[\frac{s}{2(1+\eta/h)} \left(\frac{\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - s}{\operatorname{sh}^2 s - s^2} + \eta \frac{\operatorname{sh} h s \operatorname{ch} h s - h s}{\operatorname{sh}^2 h s - (h s)^2} \right) \right] \frac{ds}{s^2}. \quad (28)$$

Из (22) на основании (16) находим

$$\Pi(p) = -i\sqrt{2\pi} \sqrt{1 + \eta/h} T p^{-1}. \quad (29)$$

Подстановка (29) и (23) в (16) и разложение для $p \rightarrow 0$ дает

$$F_+(p) = 2T(1 + \eta/h) \left[\frac{1}{p} + \delta_3 \right] + O(p) \quad (30)$$

Выражение (30) есть асимптотика образа Лапласа от производной скачка смещения. На основании свойств преобразования Лапласа (например, [10]) образ самого смещения получается делением его на p . Члены разложения высшего порядка могут быть получены дальнейшим умножением на p произвольное число раз, применением обратного преобразования Лапласа с последующим дифференцированием оригинала такое же число раз. Ограничиваясь двумя членами, с учетом (7), окончательно получаем для $x \rightarrow \infty$

$$E^{(2)}u = 4T(1 + \eta/h)x + K_{uT}T, \quad (31)$$

$$K_{uT} = (1 + \eta/h)\delta_3(\eta, h). \quad (32)$$

В формуле (31) первый член соответствует смещению, посчитанному в стержневом приближении. Коэффициент 4 появляется за счет того, что сила приложена не по центрам верхней и нижней полосы (как при расчетах в стержневом приближении), вызывая изгибы, сопровождающиеся дополнительными смещениями нижнего края верхней полосы на величину $3T/E^{(2)}$ и верхнего края нижней полосы на величину $3T/E^{(1)}$. Оставшийся член, деленный на T , может рассматриваться как коэффициент упругой заделки, т.е. как коэффициент пропорциональности между смещением в точке заделки и приложенным усилием. Численные значения представлены на рис. 2, 3. Для больших η/h соотношение приближенно описывается формулой

$$K_{uT} = 0,3h + 0,84\eta. \quad (33)$$

Знание коэффициента упругой заделки полезно при решении задач, связанных с отслоением покрытий [14–19].

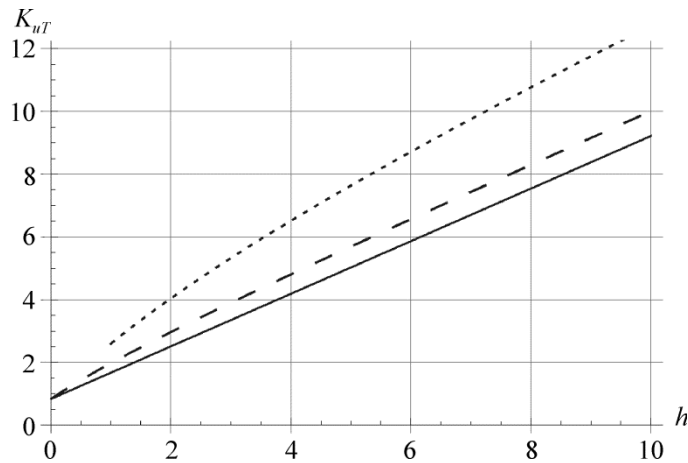


Рис. 2. Значение коэффициента упругой заделки в зависимости от отношения модулей: сплошная линия – $h = 1$; пунктирная линия – $h = 5$; точечная линия – $h = 20$

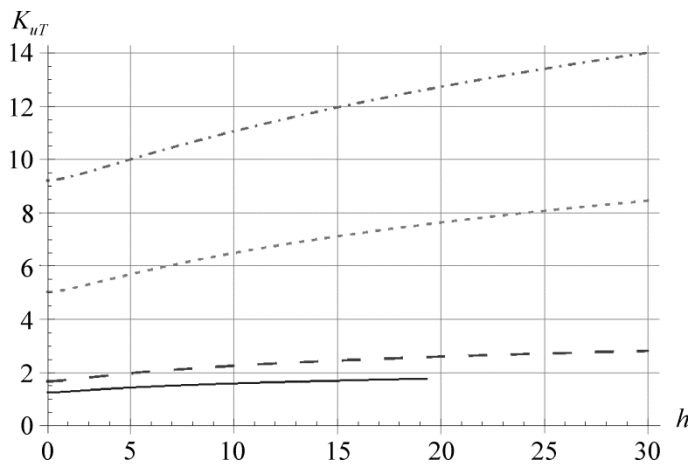


Рис. 3. Значение коэффициента упругой заделки в зависимости от h : сплошная линия – $\eta = 0,5$; пунктирная – $\eta = 1$; точечная – $\eta = 5$; штрих-пунктирная – $\eta = 10$

3. Определение параметров разрушения

При $p \rightarrow -\infty$ для (20) справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\Lambda_-(p) = i \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{\pi(1+\eta)}} + o(\sqrt{-p}). \quad (34)$$

Подстановка (34) и (29) в (16) и разложение для больших по абсолютной величине отрицательных $p \rightarrow -\infty$ дает

$$F_-(p) = \frac{T}{\sqrt{-p}} \sqrt{\frac{2(1+\eta/h)}{1+\eta}} + o(-p^{-1/2}). \quad (35)$$

Последнее выражение немедленно дает асимптотику напряжений при $x \rightarrow -0$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sqrt{2}T}{\sqrt{\pi|x|}} \sqrt{\frac{1+\eta/h}{1+\eta}} + o(|x|^{-1/2}). \quad (36)$$

Отсюда коэффициент интенсивности напряжений (КИН)

$$K_{II} = 2T \sqrt{\frac{1+\eta/h}{1+\eta}}. \quad (37)$$

С другой стороны, из первого члена (31) находим изменение упругой энергии системы при продвижении трещины:

$$J = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} T \frac{4T}{E^{(2)}} x + \frac{1}{2} T \frac{4T}{hE^{(1)}} x \right) = \frac{2T^2}{E^{(2)}} (1+\eta/h). \quad (38)$$

Сравнение (37) и (38) показывает, что связь между параметрами разрушения имеет традиционный вид [20, 21]

$$J = K_{II}^2 \frac{1+\eta}{2E^{(2)}} = K_{II}^2 \frac{E^{(1)} + E^{(2)}}{2E^{(1)}E^{(2)}}. \quad (39)$$

Полученные выражения для КИН (37) и скорости высвобождения энергии (38) для $\eta=1$, $h=1$ совпадает с решением, полученным элементарным методом (например [22]). Для $\eta=1$, $h \rightarrow \infty$, что соответствует полубесконечной трещине параллельной границе полуплоскости, значение выражения для скорости высвобождения энергии (38) совпадает с выражением, полученным в [23, 24]. Однако в общем случае для тел с классическим условием контакта (3) в точном решении будут присутствовать обе моды, поэтому приведенный анализ для определения параметров разрушения может рассматриваться только как приближенный.

Согласно (36) поле напряжений вблизи вершины трещины описывается простой корневой особенностью: осцилляции не наблюдаются. Очевидно, что отсутствие осциллирующих членов следует из принятых в постановке задачи условий.

Заключение

Получено решение однородной задачи о полубесконечной сдвиговой трещине, проходящей вдоль интерфейса, разделяющей два упругих слоя с отличающимися свойствами. В предположении возможности пренебрежения влияния нормальных напряжений на сдвиг с помощью применения преобразования Лапласа задача сведена к задаче Римана-Гильберта. Путем факторизации получены асимптотические выражения для смещений берегов трещины вблизи и вдали от ее вершины. Показано, что ведущие члены асимптотики смещений берегов трещины вдали от вершины трещины соответствуют смещению стержня при граничных условиях типа упругой заделки, т.е. условиях пропорциональности смещения в точке заделки продольному усилию. Получена асимптотика поля напряжений вблизи вершины трещины, имеющего корневую особенность, соответствующая коэффициенту интенсивности напряжений. Показано, что принятые при постановке задачи допущения приводят к отсутствию осциллирующих членов в поле напряжений и смещений при приближении к вершине трещины. Вычислена скорость высвобождения энергии при росте трещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-01-00855.

Вывод основного уравнения рассматриваемой задачи Римана-Гильберта

В декартовой системе координат рассматривается плоскодеформированное состояние полосы $y \in [0, 1]$, верхняя граница $y = 1$ которой свободна от напряжений,

$$\sigma_{yy}(x, 1) = \sigma_{xy}(x, 1) = 0, \quad (40)$$

а к нижней границе $y = 0$ приложена система нагрузок

$$\sigma_{xy}(x, 0) = q_x(x), \quad (41)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = q_y(x). \quad (42)$$

Здесь $q_x(x)$, $q_y(x)$ – заданные функции. Изложение следует в основном в [11].

Полная система уравнений теории упругости включает:

1) уравнения равновесия при отсутствии объемных сил

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (44)$$

Здесь σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} – компоненты тензора напряжений;

2) уравнения Закона Гука, выраженные через компоненты смещений u , v ,

$$E^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - (1 + \nu^{(2)}) \sigma_{yy}, \quad (45)$$

$$E^{(2)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2(1 + \nu^{(2)}) \sigma_{xy}. \quad (46)$$

Здесь $E^{(2)}$, $\nu^{(2)}$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона полосы;

3) уравнение совместности, выраженное через компоненты тензора напряжений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (47)$$

Применим к уравнениям (43)–(47) и граничным условиям (40)–(42) двустороннее преобразование Лапласа, определяющее образ $\hat{f}(p)$ функции $f(x, y)$ как

$$\hat{f}(p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-px} dx. \quad (48)$$

Обратное преобразование при этом определяется как

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(p, y) e^{px} dp \quad (49)$$

где направление обхода по контуру L , соответствующему мнимой оси, осуществляется сверху вниз.

После этого находим связь между действующими на нижней границе полосы нагрузками и производными от компонент смещений $\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x, 0)$ (подробнее [1]):

$$\begin{aligned} \frac{E^{(2)}}{2} g_x^{(2)}(p) &= \frac{\sin p \cos p - p}{d} q_x(p) + \frac{p^2}{d} q_y(p) + \frac{1 - \nu^{(2)}}{2} q_y(p), \\ \frac{E^{(2)}}{2} g_y^{(2)}(p) &= -\frac{1 - \nu^{(2)}}{2} q_x(p) - \frac{p^2}{d} q_x(p) + \frac{\sin p \cos p + p}{d} q_y(p), \end{aligned} \quad (50)$$

$$d = \sin^2 p - p^2. \quad (51)$$

Здесь

$$g_x^{(2)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u(x, 0) e^{-px} dx, \quad g_y^{(2)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} v(x, 0) e^{-px} dx. \quad (52)$$

В силу условия (5), которое согласно (48) приводит к обнулению $q_y(p) = 0$, система (50)–(51) распадается, первое из уравнений (50) преобразуется к скалярному уравнению, связывающему образы касательных напряжений и производной тангенциальных смещений

$$\frac{E^{(2)}}{2} g_x^{(2)}(p) = \frac{\sin p \cos p - p}{d} q_x(p). \quad (53)$$

Продельвая аналогичную процедуру для полосы $y \in [-h, 0]$, вычисляем связь Лаплас-образов от величин напряжения и разности смещения (6)–(10). Здесь использовано свойство равенства нулю скачка смещения для отрицательной полуоси и равенства нулю напряжений для положительной полуоси.

Более подробный вывод представлен в [1], где выведено матричное уравнение, которое можно свести к скалярному при выполнении условия (5), т.е. положив в (7) из [1] $K_{12} = K_{21} = 0$.

Библиографический список

1. Устинов К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Ч. 1. Постановка задачи, случай нормального отрыва // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 226–245.
2. Устинов К.Б. О сдвиговом отслоении тонкой полосы от полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – № 6. – С. 141–152.
3. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1955. – Vol. 8. – Part 2. – P. 164–178.
4. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании // ПММ. – 1961. – № 25, Вып. 2. – С. 342–355.
5. Alblas J.B., Kuypers W.J.J. On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate // Appl. Sci. Research, Sec. A. – 1965–1966. – Vol. 15. – Iss. 1. – P. 429–439.
6. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 303 с.
7. Салганик Р.Л., Устинов К.Б. Задача об упругозаделанной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // Изв. РАН МТТ. – 2012. – № 4. – С. 50–62.

8. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface Crack Between Two Elastic Layers // *Int. J. Fract.* – 1990. – Vol. 43. – P. 1–18.
9. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
10. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1958. – 207 с.
11. Khrapkov A.A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. – Sait Petersburg, 2001.
12. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – 2-е изд. – М.: Наука, 1962. – 600 с.
13. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
14. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // *Int. J. Fract.* – 2002. – Vol. 113. – P. 39–55.
15. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // *Int. J. Fract.* – 2000. – Vol. 104. – No. 2. – P. 169–179.
16. Effect of substrate compliance on the global unilateral post-buckling of coatings: AFM observation and finite element calculations / G. Parry, J. Colin, C. Coupeau, F. Foucher, A. Cimetière, J. Grilhé // *Acta materialia.* – 2005. – Vol. 53. – P. 441–447.
17. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б., Ченцов А.В. Оценка влияния податливости подложки на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия // *Вычисл. мех. сплошных сред.* – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 48–57.
18. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Eng. Fail. Analys.* – 2015. – Vol. 48B – P. 338–344.
19. Устинов К.Б., Каспарова Е.А. Оценка влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения покрытия // *Деформация и разрушение материалов.* – 2015. – № 3. – С. 28–35.
20. Салганик Р.Л. О хрупком разрушении склеенных тел // *ПММ.* – 1963. – Т. 27, № 5. – С. 957–962.
21. Malyshev B.M., Salganik R.L. The strength of adhesive joints using the theory of crack // *Int. J. Fracture Mechanics.* – 1965. – Vol. 1. – No. 2. – P. 114–128.
22. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed Mode Cracking in Layered Materials // *Advances in Applied Mechanics.* Eds. J.W. Hutchinson, T.Y. Wu. – 1992. – Vol. 29. – P. 63–191.
23. Златин А.Н., Храпков А.А. Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // *Докл. АН СССР.* – 1986. – Т. 31. – С. 810–813.
24. Златин А.Н., Храпков А.А. Упругая полуплоскость, ослабленная трещиной, параллельной ее границе // *ЛГУ. Исследования по упругости и пластичности.* – 1990. – Т. 16. Проблемы современной механики разрушения. – С. 68–75.

References

1. Ustinov K.B. O rassloenii polosy po granice razdela uprugikh svoistv. Chast' 1. Postanovka zadachi, sluchai normal'nogo otryva [On delamination of a stipe along the boundary between two elastic layers. Part 1. Problem formulation, the case of normal crack] *Vestnik PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015. no. 4, pp. 226-245.
2. Ustinov K.B., On Shear Separation of a Thin Strip from the Half-Plane. *Mech. Solids.*, 2014, vol. 49, no. 6, pp. 713-724.
3. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1955, vol. 8, pt 2, pp. 164-178.
4. Popov G.Ya. Bending of a semi-infinite plate resting on a linearly deformable foundation *J. Appl. Math. Mech.*, 1961, vol. 25, iss. 2, pp. 502–520.

5. Alblas J.B., Kuypers W.J.J. On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate. *Appl. Sci. Research*, Sec. A., 1965-1966, vol. 15, iss. 1, pp. 429-439.
6. Kalandia A.I. Matematicheskie metody dvumernoi uprugosti [Mathematical methods of 2-D elasticity]. Moscow: Nauka. 1973. 303 p.
7. Salganik R.L., Ustinov K.B. Deformation problem for an elastically fixed plate modeling a coating partially delaminated from the substrate (plane strain). *Mech. of Solids.*, 2012, vol. 47, no. 4, pp. 415-425.
8. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface Crack Between Two Elastic Layers. *Int. J. Fract.* 1990, vol. 43, pp. 1-18.
9. Noble B., Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations (Pergamon Press, London etc., 1958; Mir, Moscow, 1962).
10. Doetsch G. Handbook der Laplace-Transformation (Birkhäuser, Basel, 1946; Fizmatlit, Moscow, 1958).
11. Khrapkov A.A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. Sait Petersburg, 2001.
12. Muskhelishvili N.I. Singular integral equations; boundary problems of function theory and their application to mathematical physics. Groningen: P. Noordhoff, 1953. 600 p.
13. Gakhov F.D. Boundary Value Problems. (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics. Vol. 85). Oxford/London/Edinburgh/New York/Paris/Frankfurt: Pergamon Press, 1966. 564 p.
14. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *Int. J. Fract.*, 2002, vol. 113, pp. 39-55.
15. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression. *Int. J. Fract.*, 2000, vol. 104, no. 2, pp. 169-179.
16. Parry G., Colin J., Coupeau C., Foucher F., Cimetière A., Grilhé J., Effect of substrate compliance on the global unilateral post-buckling of coatings: AFM observation and finite element calculations. *Acta materialia*, 2005, vol. 53, pp. 441-447.
17. Goldstein R.V., Ustinov K.B., Chentsov A.V. Otsenka vliianiia podatlivosti podlozhki na napriazheniia poteri ustoiichivosti otsloivshegosia pokrytiya [Influence of substrate compliance on stresses generating stability loss of a delaminated coating. Comput. continuum mech]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred*, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 48-57.
18. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings. *Eng. Fail. Analys*, 2015, vol. 48B, pp. 338-344.
19. Ustinov K. B., Kasparova E. A. Otsenka vliianiia krivizny i podatlivosti osnovaniia na parametry otsloeniia pokrytiia [Influence assessment of curvature and yielding of substrate on parameters of coating delamination]. *Deformatsiia i razrushenie materialov*, 2015, no. 3, pp. 28-35.
20. Salganik R.L. The Brittle Fracture of Cemented Bodies. *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, no. 5, pp. 1468-1478.
21. Malyshev B.M., Salganik R.L. The strength of adhesive joints using the theory of crack. *Int. J. Fracture Mechanics*, 1965, vol. 1, no. 2, pp. 114-128.
22. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed Mode Cracking in Layered Materials. *Advances in Applied Mechanics*. Eds. J.W. Hutchinson, T.Y. Wu, 1992, vol. 29, pp. 63-191.
23. Zlatin A.N., Khrapkov A.A. A Semi-Infinite Crack Parallel to the Boundary of the Elastic Half-Plane, *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1986, vol. 31, pp. 1009-1010.
24. Zlatin A.N., Khrapkov A.A. Uprugaia poluploskost, oslablennaia treschinou, paralelnoi eio granitse [Elastic Half-Plane Weakened by a Crack Parallel to Its Boundary]. *Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti*, vol. 16. *Problemy sovremennoi mekhaniki razrusheniya*. Leningradskii gosudarstvennyi universitet, 1990, pp. 68-75.