

Наседкин А.В., Шпрайзер Е.И. Конечно-элементное исследование эффективности трубчатого пьезоэлектрического вибрационного гироскопа в зависимости от типа поляризации и граничных условий // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 275–288. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.16

Nasedkin A.V., Shprayzer E.I. Finite element investigation of the effectiveness of the tubular piezoelectric vibratory gyroscope depending on the type of polarization and boundary conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 4. Pp. 275-288. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.16



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.16

УДК 539.3

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТРУБЧАТОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВИБРАЦИОННОГО ГИРОСКОПА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТИПА ПОЛЯРИЗАЦИИ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

А.В. Наседкин¹, Е.И. Шпрайзер²

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 25 сентября 2016 г.
Принята: 09 декабря 2016 г.
Опубликована: 30 декабря 2016 г.

Ключевые слова:

пьезоэлектричество, электроупругость, пьезокерамика, неоднородная поляризация, установившиеся колебания, вибрационный гироскоп, сила Кориолиса, частота вращения, метод конечных элементов, ANSYS.

АННОТАЦИЯ

В работе проведен анализ динамического поведения вибрационного гироскопа в форме полый пьезокерамической трубки с двумя парами электродов, расположенными крестообразно на ее внешней боковой поверхности. Для случая одного жестко закрепленного торца трубки рассмотрены два варианта поляризации пьезокерамического материала: полная радиальная поляризации и частичная радиальная поляризация только под электродами внешней боковой поверхности. Для полностью поляризованного материала кроме консольного закрепления рассматривались также два других варианта крепления торцов, имитирующих условия шарнирного опирания. Изучался режим установившихся колебаний гироскопа в рамках линейной теории пьезоэлектричества (электроупругости) с учетом механического демпфирования и эффектов вращения в относительной системе координат. Все исследуемые варианты допускают наличие электрически активных мод изгибных колебаний в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, которыми можно управлять электрическими потенциалами на двух парах электродов. В таких конфигурациях при работе вблизи соответствующих резонансных частот генерируются первичные изгибные колебания в одной плоскости, а за счет осевого вращения гироскопа возбуждаются вторичные изгибные движения в другой перпендикулярной плоскости, которые и можно эффективно зарегистрировать. При проведении численных расчетов использовались метод конечных элементов, вычислительный комплекс ANSYS и специально разработанные компьютерные программы, написанные на макроязыке APDL ANSYS. Результаты вычислительных экспериментов показали, что вариант с жестко закрепленным торцом и полной радиальной поляризацией пьезокерамического материала дает наибольшие максимумы выходного потенциала при вращении гироскопа. Обнаружено, что варианты гироскопа с закреплениями торцов, имитирующими условия шарнирного опирания, также достаточно перспективны для практического использования.

© ПНИПУ

© Наседкин Андрей Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: nasedkin@math.sfedu.ru
Шпрайзер Евгения Игоревна – аспирант, ассистент, e-mail: shprayzer@gmail.com

Andrey V. Nasedkin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: nasedkin@math.sfedu.ru
Evgenia I. Shprayzer – Graduate Student, Assistant, e-mail: shprayzer@gmail.com

FINITE ELEMENT INVESTIGATION OF THE EFFECTIVENESS OF THE TUBULAR PIEZOELECTRIC VIBRATORY GYROSCOPE DEPENDING ON THE TYPE OF POLARIZATION AND BOUNDARY CONDITIONS

A.V. Nasedkin¹, E.I. Shprayzer²

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

²Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 25 September 2016

Accepted: 09 December 2016

Published: 30 December 2016

Keywords:

piezoelectricity, electroelasticity, piezoceramics, inhomogeneous polarization, harmonic vibration, vibratory gyroscope, Coriolis force, rotation frequency, finite element method, ANSYS.

ABSTRACT

In the present paper, a dynamic behavior of piezoelectric vibratory gyroscope in the form of a hollow piezoelectric cylinder with two pairs of electrodes placed crosswise on the outer side surface has been analyzed. In the case of one fixed end, two variants of the piezoceramic material polarization have been considered, namely, full radial polarization and partial radial polarization only under the electrodes on the outer side surface. For a completely polarized material (in addition to the case of a cantilevered end) two other variants of the fixations simulating the conditions of hinged opening were also considered. The behavior of the harmonic oscillation of gyroscope has been studied in the framework of linear theory of piezoelectricity (electroelasticity) which takes into account mechanical damping and rotational effects in the relative coordinate system. All of the investigated variants admit the availability of electrically active bending oscillation modes in two perpendicular planes which can be controlled by given electric potentials on the two pairs of electrodes. In such configurations when the gyroscope operates near to the corresponding resonance frequencies the primary flexural vibrations are generated in one plane and the secondary flexural motions are created due to the axial gyroscope rotation in the perpendicular plane. These secondary oscillations can be a measure to determine the value of the rotation frequency. The finite element method, ANSYS finite element package and specially designed computer programs written in the macro language APDL ANSYS were used for numerical calculations. The results of computational experiments have shown that the variant with one fixed end and with a full radial polarization of the piezoceramic material gives the largest maximum of the output potential in the presence of gyroscope rotation. It has been found that the variant of the gyroscope with the fixations simulating the conditions of hinged opening is also quite promising for application.

© PNRPU

Введение

Пьезоэлектрические вибрационные гироскопы успешно используются в современной технике в качестве миниатюрных датчиков угловой скорости [1–4]. Для эффективной работы вибрационного гироскопа желательно наличие у него по крайней мере двух ярко выраженных мод колебаний в различных, а лучше всего в перпендикулярных плоскостях. Тогда при колебаниях устройства на одной моде гироскопическое вращение за счет эффекта Кориолиса вызовет дополнительные движения на другой моде колебаний. Регистрация этого вторичного движения и позволяет определить частоту вращения. В пьезоэлектрическом вибрационном гироскопе, как правило, и возбуждение первичных колебаний, и регистрация вторичных осуществляются за счет пьезоэлектрического эффекта. Для этого в гироскопическом датчике необходимо иметь электроды как для возбуждения, так и для приема колебательных движений.

Пьезоэлектрические вибрационные гироскопы могут быть выполнены полностью из пьезоэлектрического материала, но могут иметь и сложные конструкции, состоящие из упругих и пьезоэлектрических сред.

Одними из наиболее известных вибрационных пьезоэлектрических гироскопов являются конструкции камертонного вида с двумя или с четырьмя вилками (Н-тип). Несмотря на то, что камертонные гироскопы известны достаточно давно [5], их исследования продолжаются

и в настоящее время [6, 7]. Актуальными остаются задачи разработки и анализа других эффективных конструкций вибрационных гироскопов как канонических типов в форме балок [8, 9], пластин [10], цилиндров [11] и других, так и усложненных конфигураций [12–15].

Для расчета пьезоэлектрических вибрационных гироскопов во многих работах с успехом использовался метод конечных элементов, техника которого применительно к пьезоэлектрическим вращающимся телам была описана в [16–18]. При этом если частота вращения много меньше частоты первичных колебаний, то для решения можно также использовать метод конечных элементов, но в совокупности с асимптотическим разложением по малому параметру отношения частот [19].

В [20–26] рассматривался трубчатый вибрационный гироскоп из радиально поляризованной пьезокерамики с двумя парами электродов, расположенными на внешней боковой поверхности, и с одним сплошным электродом на внутренней поверхности. В этих работах трубчатый гироскоп был исследован с использованием приближенных теорий изгиба, метода конечных элементов (МКЭ) и экспериментальных данных. Тем не менее ряд важных вопросов остался невыясненным. Так, были недостаточно изучены модификации устройства при различных граничных условиях на торцах, допускающих наличие электрически активных кратных собственных частот с модами колебаний в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Кроме того, для пьезокерамического материала в полый трубке с электродами, не полностью покрывающими ее боковые поверхности, возможны различные структуры неоднородности, обусловленные технологией процесса поляризации. Последнее, как известно [11], может существенно изменить характеристики гироскопа. Отмеченные вопросы изучаются в настоящей работе на основе [25, 26]. При этом здесь рассматриваются варианты гироскопа с одной и той же геометрией трубки, тогда как в [25, 26] длина трубки подбиралась так, чтобы обеспечить приблизительное равенство основной резонансной частоты изгибных колебаний.

Таким образом, в настоящей работе проводятся исследования по двум основным направлениям. Во-первых, изучается эффективность гироскопа с полной радиальной поляризацией пьезокерамики в сравнении с гироскопом с частичной поляризацией только под электродами на внешней поверхности. Во-вторых, анализируется влияние условий закрепления на торцах на возможности регистрации вращения на соответствующих резонансных частотах. Данные вопросы актуальны при использовании гироскопа рассматриваемого типа на практике, поскольку позволяют выбрать наиболее эффективные технологии его поляризации и условия закрепления. Подобные исследования могут представлять интерес и для многих других видов вибрационных пьезоэлектрических гироскопов.

1. Описание задачи

Пусть полый цилиндр V имеет длину L , внешний радиус R и толщину h . Введем относительную декартовую систему координат $Ox_1x_2x_3$, направив ось Ox_3 вдоль центральной оси цилиндра так, чтобы гироскоп занимал положение $0 \leq x_3 \leq L$ (рис. 1, а). Будем использовать также цилиндрическую систему координат $Or\theta z$, связанную с исходной системой соотношениями $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $x_3 = z$.

Примем, что на внешнюю боковую поверхность $r = R$, $0 \leq z \leq L$, нанесены четыре электрода S_{φ_j} ($j = 1, 2, 3, 4$) с углами раствора 2α , причем $S_{\varphi_j} = \{r = R,$

$\theta \in [\pi(2-j)/2 - \alpha, \pi(2-j)/2 + \alpha], 0 \leq z \leq L$. Расположение электродов в плоскости поперечного сечения показано на рис. 1, б. Наконец, имеется еще электрод $S_{\varphi 5}$ с нулевым потенциалом $\varphi = 0$, который покрывает всю внутреннюю боковую поверхность цилиндра: $S_{\varphi 5} = \{r = R - h, 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq z \leq L\}$.

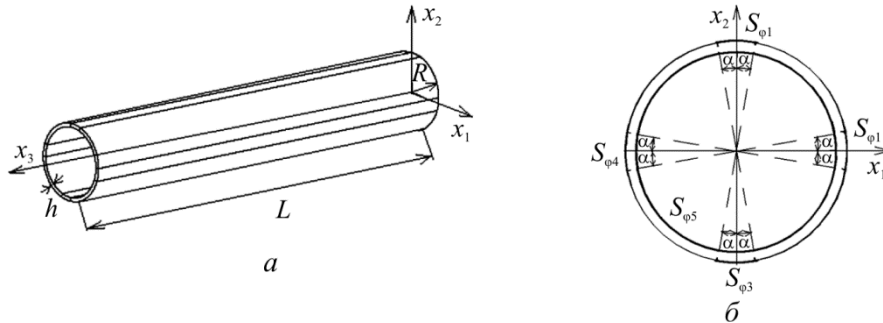


Рис. 1. Геометрия трубчатого гироскопа (а) и его поперечное сечение (б)
 Fig. 1. Geometry of the tube gyroscope (a) and its cross section (b)

Гироскоп работает в режиме установившихся колебаний на некоторой частоте $f = \omega / (2\pi)$. При подаче входного потенциала $\varphi = \pm \Phi_{imp} \exp(i\omega t)$ на электроды $S_{\varphi 1}$ и $S_{\varphi 3}$ соответственно за счет пьезоэффекта и различий в направлениях векторов наводимого электрического поля и поляризации пьезоэлектрический материал под $S_{\varphi 1}$ сжимается, а под $S_{\varphi 3}$ расширяется или наоборот, и цилиндр совершает изгибные колебания в плоскости $x_2 x_3$ (первичное движение). При вращении всего устройства вокруг оси x_3 с постоянной угловой скоростью Ω сила Кориолиса, действующая перпендикулярно направлениям первичного движения (Ox_2) и вектора угловой скорости (Ox_3), вызывает деформации в направлении x_1 (вторичное движение). В режиме вторичного движения материал под электродом $S_{\varphi 2}$ сжимается, а под $S_{\varphi 4}$ – растягивается или наоборот, что приводит к изгибным колебаниям в плоскости $x_1 x_3$. В итоге на свободных электродах $S_{\varphi 2}$ и $S_{\varphi 4}$ за счет пьезоэффекта появляются выходные электрические потенциалы $\varphi = \pm \Phi_{out} \exp(i\omega t)$, регистрация которых позволяет определить частоту вращения гироскопа Ω . (Отметим, что для более прецизионного анализа нужно, вообще говоря, ввести в рассмотрение внешние электрические цепи [27], позволяющие определять электрические потенциалы и токи на выходных электродах, но эти усложненные постановки задач пьезоэлектричества здесь не рассматриваются.)

Для анализа влияния структуры поля поляризации будем считать, что грань $x_3 = 0$ гироскопа жестко закреплена, а остальные его грани – свободны от напряжений. Примем также, что полый цилиндр выполнен из пьезокерамики, причем рассмотрим два варианта его поляризации. В варианте 1 примем, что весь пьезокерамический материал цилиндра поляризован в радиальном направлении. Однако в этом случае для радиальной поляризации цилиндра нужен сплошной технологический электрод на всей внешней поверхности $r = R$. Этот электрод после завершения процесса поляризации должен быть «сравнен» до электродов $S_{\varphi j}$ ($j = 1, 2, 3, 4$), что приводит к некоторым дополнительным затратам.

Технологически более просто сразу создать четыре электрода S_{φ_j} ($j=1, 2, 3, 4$) на внешней поверхности и затем их использовать для поляризации пьезокерамического материала цилиндра. Тогда материал будет поляризован в цилиндрической системе координат неоднородно, но можно приближенно принять, что в секторах под электродами S_{φ_j} ($j=1, 2, 3, 4$) пьезокерамика поляризована в радиальных направлениях, а вне этих секторов – не поляризована. Такой случай кусочно-однородной поляризации назовем вариантом 2 постановки задачи.

2. Математические и конечно-элементные модели

Постановка задачи для гироскопа базируется на теории пьезоэлектричества и учете эффектов, вызванных вращением [16–19]. В задаче об установившихся колебаниях пьезоэлектрического тела неизвестными принимаются вектор-функция амплитуды перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ и функция амплитуды электрического потенциала $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$. В неинерциальной (относительной) системе отчета, связанной с вращающимся телом V , уравнения теории пьезоэлектричества в отсутствие массовых сил и объемных зарядов можно записать в виде

$$\mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T} = \rho(-\omega^2 \mathbf{u} + 2i\omega \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u})), \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = (1 + i\omega \beta_d) \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (3)$$

$$\mathbf{L}^*(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla = \begin{Bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

В (1)–(3) использованы следующие обозначения: ρ – плотность; $\mathbf{T} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$ – массив компонент тензора напряжений σ_{ij} ; \mathbf{D} – вектор электрической индукции; $\mathbf{S} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\}$ – массив компонент тензора деформаций ε_{ij} ; \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля; $\mathbf{c}^E = \mathbf{c}^E(\mathbf{x})$ – матрица упругих жесткостей, измеренных при постоянном электрическом поле, размерностью 6×6 ; $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{x})$ – матрица пьезомодулей, размерностью 3×6 ; $\boldsymbol{\varepsilon}^S = \boldsymbol{\varepsilon}^S(\mathbf{x})$ – матрица диэлектрических проницаемостей, измеренных при постоянных деформациях, размерностью 3×3 ; β_d – параметр демпфирования; $(\dots)^*$ – операция транспонирования для матриц и векторов.

К системе уравнений (1)–(4) необходимо присовокупить краевые условия на границе $S = \partial V$, которые подразделяются на механические и электрические. При формулировке механических краевых условий примем, что торец $x_3 = 0$, обозначаемый через S_u , жестко закреплен, а остальная часть границы $S_\sigma = S / S_u$ свободна от напряжений, т.е.

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_u; \quad \mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma, \quad (5)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней единичной нормали к S .

Электрические граничные условия включают задание значений потенциала на электродах $S_{\varphi 1}$, $S_{\varphi 3}$ и $S_{\varphi 5}$; нулевые заряды на $S_{\varphi 2}$ и $S_{\varphi 4}$; а также свободную неэлектропроводную поверхность $S_D = S / S_{\varphi}$ ($S_{\varphi} = \cup_{j=1}^5 S_{\varphi j}$). Математически эти условия можно записать следующим образом:

$$\varphi = \Phi_{inp}, \mathbf{x} \in S_{\varphi 1}; \varphi = -\Phi_{inp}, \mathbf{x} \in S_{\varphi 3}; \varphi = 0, \mathbf{x} \in S_{\varphi 5}, \quad (6)$$

$$\varphi = \Phi_{out}, \mathbf{x} \in S_{\varphi 2}; \varphi = -\Phi_{out}, \mathbf{x} \in S_{\varphi 4}, \quad (7)$$

$$\int_{S_{\varphi j}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} d\varphi = 0, j = 2, 4; \int_{S_D} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} d\varphi = 0, \quad (8)$$

причем не зависящие от \mathbf{x} значения $\pm\Phi_{out}$ изначально неизвестны, а определяются из решения задачи.

Для решения задач электроупругости (1)–(8) можно перейти к их слабым постановкам и использовать технику конечно-элементных аппроксимаций. Пусть V_h – область, занимаемая соответствующей конечно-элементной сеткой, $V_h \subseteq V$, $V_h = \cup_k V^{ek}$, где V^{ek} – отдельный конечный элемент с номером k . Для задач об установившихся колебаниях можно искать приближенное решение $\{\mathbf{u}_h \approx \mathbf{u}, \varphi_h \approx \varphi\}$ в форме

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_u^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}, \varphi_h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_{\varphi}^*(\mathbf{x}) \cdot \Phi, \quad (9)$$

где \mathbf{N}_u^* – матрица базисных функций для перемещений; \mathbf{N}_{φ}^* – вектор-строка базисных функций для электрического потенциала; \mathbf{U} , Φ – векторы узловых амплитуд перемещений и электрического потенциала.

В соответствии с обычной конечно-элементной техникой аппроксимируем континуальную слабую постановку задачи пьезоэлектричества в конечномерных пространствах, связанных с базисными функциями \mathbf{N}_u^* , \mathbf{N}_{φ}^* . Подставляя (9) и аналогичные представления для проекционных функций в слабую постановку задачи пьезоэлектричества для V_h , имеем следующую конечно-элементную систему [18]:

$$-\omega^2 \mathbf{M}_{uu} \cdot \mathbf{U} + i\omega(\mathbf{C}_{uu} + \mathbf{G}_{uu}) \cdot \mathbf{U} + (\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{uu}^c) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_u, \quad (10)$$

$$-\mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_{\varphi}, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{M}_{uu} = \int_{V_h} \rho \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{N}_u^* dV, \mathbf{C}_{uu} = \beta_d \mathbf{K}_{uu}, \mathbf{G}_{uu} = 2 \int_{V_h} \rho \mathbf{N}_u \cdot \Theta \cdot \mathbf{N}_u^* dV, \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{V_h} \mathbf{B}_u^* \cdot \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{B}_u dV, \mathbf{B}_u = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{N}_u^*, \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_{u\varphi} = \int_{V_h} \mathbf{B}_u^* \cdot \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{B}_{\varphi} dV, \mathbf{K}_{\varphi\varphi} = \int_{V_h} \mathbf{B}_{\varphi}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{B}_{\varphi} dV, \mathbf{B}_{\varphi} = \nabla \mathbf{N}_{\varphi}^*, \quad (14)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{uu}^c = \int_{V_h} \rho \mathbf{N}_u \cdot \Theta^* \cdot \Theta \cdot \mathbf{N}_u^* dV. \quad (15)$$

Здесь \mathbf{M}_{uu} – матрица масс; \mathbf{C}_{uu} – матрица демпфирования; \mathbf{K}_{uu} – матрица жесткости; $\mathbf{K}_{u\phi}$ – матрица пьезоэлектрической связности; $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ – матрица диэлектрической проницаемости; \mathbf{G}_{uu} – кориолисова матрица демпфирования; \mathbf{K}_{uu}^c – матрица жесткости за счет центробежных сил; \mathbf{F}_u , \mathbf{F}_ϕ – векторы обобщенных узловых сил и зарядов, получающиеся при учете неоднородных главных граничных условий.

3. Варианты постановки задачи с различными граничными условиями

Для случая полностью радиально поляризованного пьезокерамического материала трубки рассмотрим еще различные варианты граничных условий на торцах $x_3 = 0$ и $x_3 = L$.

Как и раньше, в варианте 1 грань $x_3 = 0$ считается жестко закрепленной, а грань $x_3 = L$ – свободной от напряжений. В варианте 3 на каждый торец $x_3 = 0$ и $x_3 = L$ жестко прикрепляются упругие стержни, направленные от границ электродов до оси цилиндра (рис. 2, а), а в варианте 4 – стержни, направленные от центральных точек электродов до точек на оси цилиндра (рис. 2, б). Все стержни в вариантах 3 и 4 моделируются как упругие брусы и учитывают задачи растяжения, кручения и пространственного изгиба. Для точек, лежащих на оси симметрии, т.е. в центральных точках пересечения упругих стержней, в вариантах 3 и 4 ставятся условия равенства нулю перемещений и углов поворота по всем трем осям декартовой системы координат. Очевидно, что все описанные выше варианты допускают равноправные изгибные движения системы в плоскостях $x_2 x_3$ и $x_1 x_3$.

Отметим, что принятые варианты закрепления стержней при нулевых углах поворота в точках на оси цилиндра обеспечивают дополнительную жесткость всей конструкции. Это допущение не дает стержням вращаться в точности, как при их классическом шарнирном опирании, но зато затрудняет случайные вращения гироскопа при изгибных колебаниях, что важно для практики. Тем не менее принятые здесь варианты закрепления 3 и 4 позволяют приблизительно реализовать условия шарнирного опирания торцов трубки гироскопа, использовавшиеся ранее в [20, 24] при анализе аналогичного гироскопа в рамках балочной теории изгиба.

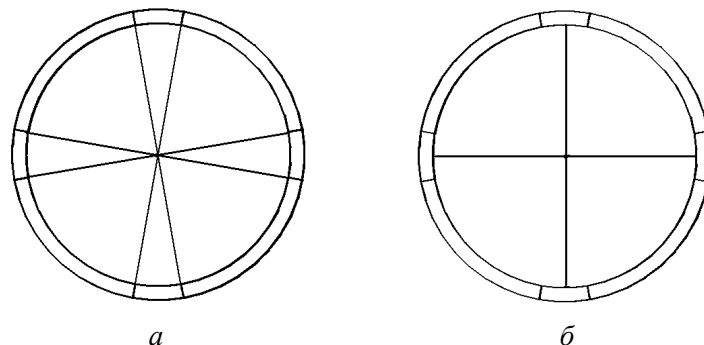


Рис. 2. Варианты крепления стержней на торцах
Fig. 2. Variants of the rod end fixation

4. Конечно-элементное моделирование

Для решения задачи использовался КЭ пакет ANSYS версии 11.0 [28]. В полном цилиндре создавалась каноническая сетка из пьезоэлектрических конечных элементов (КЭ) SOLID226 (гексаэдры с 20 узлами). Их материальные свойства модифицировались для каждого КЭ SOLID226 так, чтобы векторы поляризации в центрах элементов были направлены по соответствующему радиальному направлению $r = r(\theta)$. В варианте 2 данная процедура применялась только для секторов под верхними электродами, а в остальных областях для КЭ SOLID226 принимались материальные свойства неполяризованной пьезокерамики, рассчитываемые по формулам гомогенизации материала кристаллографического класса $6mm$ до изотропного [29]: $c_{11}^i = c_{22}^i = c_{33}^i = (2c_{11}^E + c_{33}^E)/3$; $c_{12}^i = c_{13}^i = c_{23}^i = (c_{12}^E + 2c_{13}^E)/3$; $c_{44}^i = c_{55}^i = c_{66}^i = (c_{11}^i - c_{12}^i)/2$; $\varepsilon_{11}^i = \varepsilon_{22}^i = \varepsilon_{33}^i = (2\varepsilon_{11}^S + \varepsilon_{33}^S)/3$, а также пренебрежимо малые значения пьезомодулей.

Входные данные, общие при всех расчетах: константы пьезокерамики PZT-5Н – $\rho = 7,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_{11}^E = 12,72 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{12}^E = 8,02 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{13}^E = 8,47 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{33}^E = 11,74 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{44}^E = 2,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $e_{31} = -6,62$ Кл/м², $e_{33} = 23,24$ Кл/м², $e_{15} = 17,03$ Кл/м², $\varepsilon_{11}^S = 1704\varepsilon_0$, $\varepsilon_{33}^S = 1434\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м (ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума); геометрические размеры – $L = 20$ (мм); $R = 1$ (мм); $h = 0,1$ (мм); $\alpha = 20^\circ$; $\Phi_{inp} = 10$ (В). В вариантах 3, 4 упругие стержни считались выполненными из стали плотностью $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м² и с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. Принималось, что поперечные сечения стержней являются квадратными со стороной $b_3 = 0,05$ (мм) для варианта 3 и со стороной $b_4 = 0,165$ (мм) для варианта 4. Стержни моделировались упругими КЭ BEAM4.

Для полого цилиндра была построена каноническая КЭ гексаэдральная сетка с разбиением длины L на 20 пьезоэлектрических элементов, толщины – на 2 элемента, окружного направления под электродами – на 4 элемента и окружного направления между электродами – на 8 элементов. Стержни по радиальным направлениям от точки на оси до внутренней поверхности трубки разбивались на 10 упругих балочных элементов. Данная густота сетки обеспечивала достаточную стабилизацию и точность КЭ расчетов.

Вначале решалась задача модального анализа об определении первых частот электрических резонансов $f_{rj} = \omega_{rj}/(2\pi)$ и антирезонансов $f_{aj} = \omega_{aj}/(2\pi)$, причем запоминались первые две частоты изгибных колебаний. Для этого задача (10), (11) относительно частоты $f = \omega/(2\pi)$, узловых перемещений \mathbf{U} и потенциалов Φ при $\mathbf{C}_{uu} = 0$, $\mathbf{F}_u = 0$, $\mathbf{F}_\varphi = 0$ каждый раз решалась дважды с различными граничными условиями. Для поиска частот электрических резонансов f_{rj} принималось, что $\varphi = 0$ на $S_{\varphi 1}$, $S_{\varphi 3}$ и $S_{\varphi 5}$, а электроды $S_{\varphi 2}$ и $S_{\varphi 4}$ считались свободными. Во второй задаче о поиске частот электрических антирезонансов f_{aj} принималось, что $\varphi = 0$ на $S_{\varphi 5}$, а все остальные электроды считались свободными. Подчеркнем, что при ненулевой скорости вращения Ω кориолисова матрица \mathbf{G}_{uu} также не равна нулю, и поэтому при использовании решателей ANSYS DAMP или QRDAMP [28, 30, 31] в задаче (10), (11) при $\mathbf{C}_{uu} = 0$, $\mathbf{F}_u = 0$, $\mathbf{F}_\varphi = 0$ собственные частоты оказывались ком-

плексными. Кроме того, в силу симметрии устройства относительно плоскостей $x_2 x_3$ и $x_1 x_3$, а также возможности равноправных изгибных движений в этих плоскостях, первые антирезонансные частоты изгибных колебаний будут кратными при $\Omega = 0$. Если же $\Omega \neq 0$, то кратные частоты будут трансформироваться в две однократные резонансные частоты, расположенные тем ближе друг к другу, чем меньше частота вращения Ω .

На следующем шаге решалась задача (10), (11) о вынужденных колебаниях s , вообще говоря, ненулевыми $\mathbf{C}_{ин}$, \mathbf{F}_u , \mathbf{F}_φ на нескольких интервалах частот, причем стыковочные границы частотных интервалов совпадали с вещественными частями первых частот электрических резонансов и антирезонансов, найденных из задачи модального анализа. Здесь при известных частотах $f = \omega / (2\pi)$ решались задачи (10), (11) при частотно-независимом коэффициенте затухания $\beta_d = 1 / (\omega Q_d)$ с добротностью $Q_d = 1000$.

5. Обсуждение и результаты

Результаты расчетов задачи (10), (11) при $\Omega = 10$ (Гц) для двух типов поляризации в виде зависимостей от частоты наведенного потенциала Φ_{out} , точнее отношения $|\Phi_{out} / \Phi_{inr}|$, приведены на рис. 3, а. Кривые 1 и 2 получены для задач с соответствующими номерами вариантов типа поляризации. Как можно заметить, максимумы Φ_{out} достигаются на резонансных частотах изгибных колебаний, причем вариант 1 с полной радиальной поляризацией дает наибольшие максимумы на первых двух частотах изгибных колебаний. Вариант 2 (с частичной поляризацией пьезокерамики под верхними электродами) также дает достаточно большие максимумы, лишь немного уступающие максимумам варианта 1. Для варианта 2 также несколько меньше коэффициенты электромеханических связей, чем для варианта 1. Таким образом, на основании проведенных вычислений можно сделать вывод о предпочтительности гироскопа с полной радиальной поляризацией, хотя и более простой в изготовлении гироскоп с частичной поляризацией под верхними электродами также достаточно эффективен.

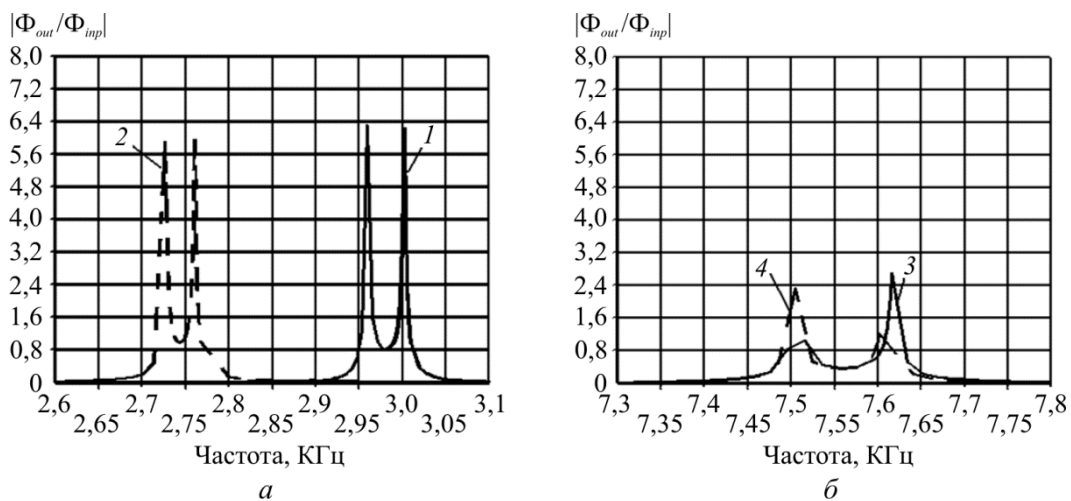


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики выходного потенциала
 Fig. 3. The gain-frequency characteristics of the output electric potential

На рис. 3, б приведены аналогичные результаты расчетов задачи (11), (12) при $\Omega = 10$ Гц для граничных условий по вариантам 3 и 4, имитирующих условия шарнирного опирания. Кривые 3, 4 получены для задач с соответствующими номерами вариантов граничных условий.

Как видно из рис. 3, б, максимумы Φ_{out} в вариантах 3 и 4 также достигаются на резонансных частотах изгибных колебаний, причем эти резонансные частоты выше соответствующих резонансных частот для трубки той же длины, но с одним жестко защемленным торцом. Между тем из сравнения рис. 3, а и б, можно заключить, что вариант 1 с жестким закреплением дает существенно большие максимумы сразу на двух соответствующих частотах изгибных колебаний. При этом оба максимума для варианта 1 приблизительно одинаковы, а для вариантов 3 и 4 пары максимумов достаточно существенно различаются. Основным преимуществом вариантов 3 и 4, имитирующих условия шарнирного опирания, по сравнению с вариантом 1 с одним закрепленным торцом является более широкая полоса рабочих частот, для которых значения выходного потенциала Φ_{out} достаточны для регистрации частоты вращения.

Отметим, что дополнительно были проведены также расчеты гироскопа с граничными условиями по вариантам 3 и 4, но с частичной поляризацией пьезокерамики под электродами на внешней боковой поверхности. Полученные результаты показали, что максимальные значения выходного потенциала на первых частотах изгибных колебаний трубки с частичной поляризацией могут как возрастать, так и быть меньшими по сравнению с приведенными на рис. 3, б. Но даже наибольший максимум отношения $|\Phi_{out} / \Phi_{imp}|$, равный 2,93 для варианта 4 с частичной поляризацией, оказался более чем в два раза меньше минимального максимума 5,87 для трубки с одним закрепленным концом. Таким образом, гироскоп с граничными условиями по вариантам 3 и 4, как при полной, так при частичной поляризации пьезокерамического материала трубки, оказался менее эффективным по амплитуде выходного потенциала.

Во всех рассмотренных случаях наличие двух близко расположенных резонансных частот обусловлено симметрией конструкции гироскопа. Например, для варианта 1 при отсутствии вращения ($\Omega = 0$) при модальном конечно-элементном анализе были найдены две первые частоты электрических резонансов $f_{r1} = 2962,2$ Гц, $f_{r2} = 3000,5$ Гц, и две кратные частоты электрических антирезонансов $f_{a1} = f_{a2} = 3000,5$ Гц. На этих частотах трубка изгибается в плоскостях $x_2 x_3$ и $x_1 x_3$. В задаче для частот электрических резонансов электроды вдоль оси x_2 закорочены, а электроды вдоль оси x_1 – свободны. Данное различие в электрических граничных условиях определяет и небольшое отличие собственных частот f_{r1} и f_{r2} . Между тем в задаче для частот антирезонансов все электроды на внешней поверхности считаются свободными. Таким образом, для антирезонансных частот имеется полная симметрия задачи модального анализа относительно плоскостей $x_2 x_3$ и $x_1 x_3$, что определяет наличие кратных изгибных мод колебаний. Появление вращения нарушает симметрию задачи, и при $\Omega = 10$ (Гц) частоты электрических резонансов и антирезонансов немного сдвигаются и уже не являются кратными: $f_{r1} = 2959,7$ Гц, $f_{r2} = 3002,9$ Гц, $f_{a1} = 2990,5$ Гц, $f_{a2} = 3010,4$ Гц. Именно на частотах f_{r1} и f_{r2} наблюдаются максимумы и минимумы выходного потенциала на свободных электродах, расположенных вдоль оси x_1 (кривая 1 на рис. 3, а). Наведенное силами Кориолиса за счет прямого пьезоэффекта электрическое поле

вдоль оси x_1 , в свою очередь, в силу обратного пьезоэффекта вызывает вторичные колебательные движения в плоскости $x_1 x_3$. Эти движения могут даже превосходить по амплитуде первичные колебательные движения в плоскости $x_2 x_3$. Так, на рис. 4 приведены в одном и том же масштабе формы амплитуд смещений $\text{Re} \mathbf{u}$ для частот f_{r1} (рис. 4, а) и f_{r2} (см. рис. 4, б). Видно, что колебания на обеих резонансных частотах происходят преимущественно в плоскости вторичных движений $x_1 x_3$, и в меньшей степени – в плоскости первичных движений $x_2 x_3$. Этот феномен проявляется в большей степени для второй резонансной частоты (рис. 4, б). Доминирование вторичных движений над первичными позволяет рекомендовать рабочую частоту гироскопа выбрать вблизи второй резонансной частоты f_{r2} , поскольку тогда чувствительность конструкции к частоте вращения будет возрастать.

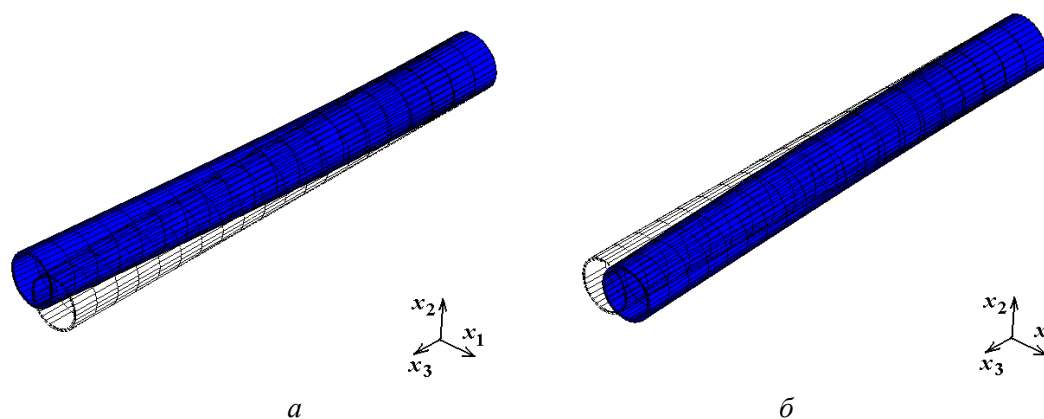


Рис. 4. Формы колебаний для варианта 1 вблизи резонансных частот
 Fig. 4. Vibration modes for case 1 near resonance frequencies

Подводя итог сравнения различных вариантов трубчатого пьезоэлектрического вибродвижущего гироскопа, можно сделать вывод о предпочтительности конструкции с одним жестким торцом, хотя аналогичные устройства со стержнями на торцах, имитирующими условия шарнирного опирания, также вполне работоспособны и имеют некоторые преимущества по ширине полосы частот. Заметим, что аналогичные выводы о преимуществах гироскопа с полной радиальной поляризацией и варианта с жестким закреплением были сделаны в [25, 26] при сравнении трубчатых гироскопов различной длины, но с приблизительно одинаковыми первыми резонансными частотами изгибных колебаний.

Работа первого автора в части разработки методологии анализа пьезопреобразователей выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-19-10008).

Библиографический список

1. Apostolyuk V. Coriolis vibratory gyroscopes: Theory and design. – Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2016. – 117 p.
2. A review of vibratory gyroscopes / J.S. Burdess, A.J. Harris, J. Cruickshank, D. Wood, G. Cooper // Eng. Sci. Educ. J. – 1994. – Vol. 3. – No. 6. – P. 249–254. DOI: 10.1049/esej:19940603
3. Singh A.K. Piezoelectric gyro sensor technology // Def. Sci. J. – 2007. – Vol. 57. – No. 1. – P. 95–103. DOI: 10.14429/dsj.57.1735

4. Yang J. A review of analyses related to vibrations of rotating piezoelectric bodies and gyroscopes // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect. and Freq. Control. – 2005. – Vol. 52. – No. 5. – P. 698–706. DOI: 10.1109/TUFFC.2005.1503958
5. Hunt G.H., Hobbs A.E.W. Development of an accurate tuning fork gyroscope // Proc. Inst. Mech. Eng., Conf. Proc. – 1964. – Vol. 179. – No. 5. – P. 129–139. DOI: 10.1243/PIME_CONF_1964_179_116_02
6. Fan M., Zhang L. Research progress of quartz tuning fork micromachined gyroscope // Proc. 2015 Int. Conf. Artificial Intelligence and Industrial Engineering, Atlantis Press, 2015. – P. 361–364. DOI:10.2991/aiie-15.2015.100
7. Quartz rate gyro sensor for automotive control / Y. Nonomura, M. Fujiyoshi, Y. Omura [et al.] // Sensors and Actuators A. – 2004. – Vol. 110. – P. 136–141. DOI:10.1016/j.sna.2003.10.048
8. Bhadbhade V., Jalili N., Mahmoodi S.N. A novel piezoelectrically actuated flexural/torsional vibrating beam gyroscope // J. Sound and Vibration. – 2008. – Vol. 311. – P. 1305–1324. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.10.017
9. Seok J., Scarton H.A. Dynamic characteristics of a beam angular-rate sensor // Int. J. Mech. Sci. – 2006. – Vol. 48. – P. 11–20. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2005.09.015
10. Seok J., Tiersten H.F., Scarton H.A. An analysis of a vibratory angular-rate gyroscope using polarized piezoceramic bimorph plates. Part 2: Solution procedure for the gyroscope with superposed angular velocity // J. Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 280. – P. 289–310. DOI:10.1016/j.jsv.2003.12.031
11. Effect of polarized electric field on piezoelectric cylinder vibratory gyroscope / Y. Ting, J.-S. Huang, J.-L. Huang, C.-M. Yang // Sensors and Actuators. A. – 2006. – Vol. 128. – No. 2. – P. 248–256. DOI: 10.1016/j.sna.2006.02.034
12. Optimization and analysis of novel piezoelectric solid micro-gyroscope with high resistance to shock / Y. Lu, X. Wu, W. Zhang, W. Chen, F. Cui, W. Liu // Microsyst. Technol. – 2010. – Vol. 16. – No. 4. – P. 571–584. DOI: 10.1007/s00542-009-0963-6
13. Vibration analysis of a piezoelectric micromachined modal gyroscope (PMMG) / X.S. Wu, W.Y. Chen, Y.P. Lu, Q.J. Xiao, G.Y. Ma, W.P. Zhang, F. Cui // J. Micromech. Microeng. – 2009. – Vol. 19. – No. 12. – P. 125008. DOI: 10.1088/0960-1317/19/12/125008
14. Wu X., Chen W., Reza A. Optimal design of piezoelectric micromachined modal gyroscope (PMMG) with modes matched: modal analysis // Microsyst. Technol. – 2014. – Vol. 21. – No. 1. – P. 101–108. DOI: 10.1007/s00542-014-2156-1
15. Yang J.S., Fang H.Y., Jiang Q. A vibrating piezoelectric ceramic shell as a rotation sensor // Smart Mater. Struct. – 2000. – Vol. 9. – P. 445–451. DOI: 10.1088/0964-1726/9/4/307
16. Kagawa Y., Tsuchiya T., Kawashima T. Finite element simulation of vibrator gyroscopes // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control. – 1996. – Vol. 43. – P. 509–518. DOI: 10.1109/58.503709
17. Kagawa Y., Tsuchiya T., Sakai T. Three-dimensional finite element simulation of a piezoelectric vibrator under gyration // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control. – 2001. – Vol. 48. – P. 180–188. DOI: 10.1109/58.895931
18. Наседкин А.В. Моделирование пьезоэлектрических преобразователей в ANSYS: Учеб. пособие. – Ростов н/Д: Изд-во Юж. федер. ун-та, 2015. – 176 с.
19. Nasedkin A.V. Some finite element methods and algorithms for solving acousto-piezoelectric problems // Piezoceramic materials and devices, ed. I.A. Parinov. – N.-Y.: Nova Science Publishers. – 2010. – P. 177–218.
20. Yang J.S., Fang H.Y. A new ceramic tube piezoelectric gyroscope // Sensors and Actuators. A. – 2003. – Vol. 107. – No. 1. – P. 42–49. DOI: 10.1016/S0924-4247(03)00209-7
21. Левицкий А.А., Маринушкин П.С. Численное моделирование пьезоэлектрического вибрационного гироскопа // Датчики и системы. – 2009. – № 9. – С. 11–14.
22. Левицкий А.А., Маринушкин П.С. Исследование режимов работы пьезоэлектрического вибрационного гироскопа осцилляторного типа // Датчики и системы. – 2011. – № 3. – С. 55–59.
23. Левицкий А.А., Маринушкин П.С. Анализ погрешностей миниатюрного пьезоэлектрического гироскопа // Успехи современной радиоэлектроники. – 2012. – № 9. – С. 34–38.
24. Marinushkin P.S. Dynamic analysis of tubular piezoelectric gyroscopes // XI International Conference and Seminar on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices EDM'2010: Conference Proceedings. – Novosibirsk, 2010. – P. 168–171. DOI: 10.1109/EDM.2010.5568838

25. Наседкин А.В., Шпрайзер Е.И. Конечно-элементный анализ пьезокерамического вибрационного гироскопа в форме полого цилиндра при различных условиях закрепления // Инновационные технологии в науке и образовании. ИТНО-2015: сб. науч. тр. междунар. науч.-метод. конф. Ростов-на-Дону – пос. Дивноморское, 7–10 сентября, 2015. – Ростов-на-Дону – зерноград, 2015. – С. 203–208.
26. Наседкин А.В., Шпрайзер Е.И. Анализ вибрационного гироскопа в форме полого цилиндра из неоднородно поляризованной пьезокерамики // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения. – 2015. – Т. 15, № 4. – С. 57–60.
27. Юрлов М.А., Юрлова Н.А. Стратегии демпфирования колебаний конструкций с пьезоэлементами и внешними электрическими цепями и их экспериментальная иллюстрация // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 4. – С. 240–270. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.10
28. ANSYS. Theory reference for ANSYS and ANSYS Workbench. Rel.11. Ed. P. Kothnke. – Canonsburg, ANSYS Inc., 2007. – 1072 p.
29. Шермергор Т.Д. Теория упругости микроненормодных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
30. Numerical recipes: The art of scientific computing / W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery. – New York, Cambridge University Press, 2007. – 1256 p.
31. Peters G., Wilkinson J.H. The calculation of specified eigenvectors by inverse iteration // Handbook for Automatic Computation. Vol. 2. Linear Algebra, eds. J.H. Wilkinson, C. Reinsch. – New York, Springer-Verlag, 1971. – P. 418–439. DOI: 10.1007/978-3-642-86940-2_29

References

1. Apostolyuk V. Coriolis vibratory gyroscopes: Theory and design. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2016, 117 p.
2. Burdess J.S., Harris A.J., Cruickshank J., Wood D., Cooper G. A review of vibratory gyroscopes. *Eng. Sci. Educ. J.*, 1994, vol. 3, no. 6, pp. 249-254. DOI: 10.1049/esej:19940603
3. Singh A.K. Piezoelectric gyro sensor technology. *Def. Sci. J.*, 2007, vol. 57, no. 1, pp. 95-103. DOI: 10.14429/dsj.57.1735
4. Yang J. A review of analyses related to vibrations of rotating piezoelectric bodies and gyroscopes. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect. and Freq. Control.*, 2005, vol. 52, no. 5, pp. 698-706. DOI: 10.1109/TUFFC.2005.1503958
5. Hunt G.H., Hobbs A.E.W. Development of an accurate tuning fork gyroscope. *Proc. Inst. Mech. Eng., Conf. Proc.*, 1964, vol. 179, no. 5, pp. 129-139. DOI: 10.1243/PIME_CONF_1964_179_116_02
6. Fan M., Zhang L. Research progress of quartz tuning fork micromachined gyroscope. *Proc. 2015 Int. Conf. Artificial Intelligence and Industrial Engineering, Atlantis Press.*, 2015, pp. 361-364. DOI:10.2991/aiie-15.2015.100
7. Nonomura Y., Fujiyoshi M., Omura Y., [et al.] Quartz rate gyro sensor for automotive control. *Sensors and Actuators. A*, 2004, vol. 110, pp. 136-141. DOI:10.1016/j.sna.2003.10.048
8. Bhadbhade V., Jalili N., Mahmoodi S.N. A novel piezoelectrically actuated flexural/torsional vibrating beam gyroscope. *J. Sound and Vibration*, 2008, vol. 311, pp. 1305–1324. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.10.017
9. Seok J., Scarton H.A. Dynamic characteristics of a beam angular-rate sensor. *Int. J. Mech. Sci.*, 2006, vol. 48, pp. 11-20. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2005.09.015
10. Seok J., Tiersten H.F., Scarton H.A., An analysis of a vibratory angular-rate gyroscope using polarized piezoceramic bimorph plates. Part 2: Solution procedure for the gyroscope with superposed angular velocity. *J. Sound and Vibration*, 2005, vol. 280, pp. 289-310. DOI:10.1016/j.jsv.2003.12.031
11. Ting Y., Huang J.-S., Huang J.-L., Yang C.-M. Effect of polarized electric field on piezoelectric cylinder vibratory gyroscope. *Sensors and Actuators. A*, 2006, vol. 128, no. 2, pp. 248-256. DOI: 10.1016/j.sna.2006.02.034
12. Lu Y., Wu X., Zhang W., Chen W., Cui F., Liu W. Optimization and analysis of novel piezoelectric solid micro-gyroscope with high resistance to shock. *Microsystem Technologies*, 2010, vol. 16, no. 4, pp. 571-584. DOI: 10.1007/s00542-009-0963-6

13. Wu X.S., Chen W.Y., Lu Y.P., Xiao Q.J., Ma G.Y., Zhang W.P., Cui F. Vibration analysis of a piezoelectric micromachined modal gyroscope (PMMG). *J. Micromech. Microeng.*, 2009, vol. 19, no. 12, p. 125008. DOI: 10.1088/0960-1317/19/12/125008
14. Wu X., Chen W., Reza A. Optimal design of piezoelectric micromachined modal gyroscope (PMMG) with modes matched: modal analysis. *Microsyst. Technol.*, 2014, vol. 21, no. 1, pp. 101-108. DOI: 10.1007/s00542-014-2156-1
15. Yang J.S., Fang H.Y., Jiang Q. A vibrating piezoelectric ceramic shell as a rotation sensor. *Smart Mater. Struct.*, 2000, vol. 9, pp. 445-451. DOI: 10.1088/0964-1726/9/4/307
16. Kagawa Y., Tsuchiya T., Kawashima T. Finite element simulation of vibrator gyroscopes. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control.*, 1996, vol. 43, pp. 509-518. DOI: 10.1109/58.503709
17. Kagawa Y., Tsuchiya T., Sakai T. Three-dimensional finite element simulation of a piezoelectric vibrator under gyration. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control.*, 2001, vol. 48, pp. 180-188. DOI: 10.1109/58.895931
18. Nasedkin A.V. Modelirovanie p'ezoelektricheskikh preobrazovatelei v ANSYS [Modeling of piezoelectric transducers in ANSYS.] Rostov-na-Donu: Iuzhnyi Federal'nyi universitet, 2015, 173 p.
19. Nasedkin A.V. Some finite element methods and algorithms for solving acousto-piezoelectric problems. *Piezoceramic materials and devices*, Ed. I. A. Parinov. New-York: Nova Science Publishers, 2010, pp. 177-218.
20. Yang J.S., Fang H.Y. A new ceramic tube piezoelectric gyroscope. *Sensors and Actuators. A*, 2003, vol. 107, pp. 42-49.
21. Levitskiy A.A., Marinushkin P.S. Chislennoe modelirovanie p'ezoelektricheskogo vibratsionnogo giroskopa [Numerical modeling of piezoelectric vibratory gyroscope]. *Datchiki i sistemy*, 2009, no. 9, pp. 11-14.
22. Levitskiy A.A., Marinushkin P.S. Issledovanie rezhimov raboty p'ezoelektricheskogo vibratsionnogo giroskopa ostsillyatornogo tipa [Research of the modes of operation of the oscillatory type piezoelectric vibratory gyroscope]. *Datchiki i sistemy*, 2011, no. 3, pp. 55-59.
23. Levitskiy A.A., Marinushkin P.S. Analiz pogreshnostey miniatyurnogo p'ezoelektricheskogo giroskopa [Error analysis of the miniature piezoelectric gyroscope]. *Uspekhi sovremennoy radioelektroniki*, 2012, no. 9, pp. 34-38.
24. Marinushkin P.S. Dynamic analysis of tubular piezoelectric gyroscopes. *International Conference and Seminar on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices EDM'2010: Conf. Proc.*, Novosibirskij gosudarstvennyj tehnikeskij universitet, 2010, pp. 168-171.
25. Nasedkin A.V., Shprayzer E.I. Konechno-elementnyi analiz p'ezokeramicheskogo vibratsionnogo giroskopa v forme pologo tsilindra pri razlichnykh usloviakh zakrepleniia. [Finite element analysis of piezoceramic vibratory gyroscope in the form of a hollow cylinder with a various fixations]. *Sbornik nauchnykh trudov mezhdunarodnoi nauchno-metodicheskoi konferentsii «Innovatsionnye tekhnologii v nauke i obrazovanii. ITNO-2015»*, 7–10 September. Rostov-na-Donu, Zernograd, 2015, pp. 203-208.
26. Nasedkin A.V., Shprayzer E.I. Analiz vibratsionnogo giroskopa v forme pologo tsilindra iz neodnorodno poliarizovannoi p'ezokeramiki [Analysis of the vibratory gyroscope in the form of a hollow cylinder made from inhomogeneous polarized piezoceramics.] *Fundamental'nye problemy radioelektronnogo priborostroeniia*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 57–60.
27. Yurlov M.A., Yurlova N.A. Strategii dempfirovaniia kolebaniia konstruktssii s p'ezoelementami i vneshnimi elektricheskimi tsepiami i ikh eksperimental'naia illiustratsiia [Strategy of damping vibration of structures with piezoelectric elements and external electrical circuits and their experimental illustration]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 4, pp. 240-270. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.10
28. ANSYS. Theory reference for ANSYS and ANSYS Workbench. Rel.11. Ed. P. Kothnke. Canonsburg: ANSYS Inc., 2007, 1072 p.
29. Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Theory of Elasticity of Micro-inhomogeneous Media]. Moscow: Nauka, 1977, 400 p.
30. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical recipes: The art of scientific computing. New York: Cambridge University Press, 2007, 1256 P.
31. Peters G., Wilkinson J.H. The calculation of specified eigenvectors by inverse iteration. *Handbook for Automatic Computation. Vol. 2. Linear Algebra*, New York: Springer-Verlag, 1971, pp. 418-439. DOI: 10.1007/978-3-642-86940-2_29