

Рычков Б.А., Гончарова И.В., Волков А.В. О деформационном упрочнении чугуна при пропорциональном и сложном нагружении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.– 2016. – № 1. – С. 113–128. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.08

Rychkov B.A., Goncharova I.V., Volkov A.V. On strain hardening of cast iron with proportional and complex loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 1. Pp. 113-128. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.08



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.1.08

УДК 539.3

О ДЕФОРМАЦИОННОМ УПРОЧНЕНИИ ЧУГУНА ПРИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ И СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Б.А. Рычков, И.В. Гончарова, А.В. Волков

Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызстан

О СТАТЬЕ

Получена: 8 января 2016 г.
Принята: 1 февраля 2016 г.
Опубликована: 30 марта 2016 г.

Ключевые слова:

напряженно-деформированное состояние, упругость, пластичность, разрыхление, концепция скольжения, упрочнение, пропорциональное и сложное нагружение

АННОТАЦИЯ

Моделируется поведение тонкостенных трубчатых образцов чугуна СЧ 15-32 (экспериментальные данные для которого получены В.М. Жигалкиным и О.М. Усольцевой) при нагружении растяжением с внутренним давлением. По экспериментальным диаграммам осевого и окружного растяжений установлено, что данный материал является ортотропным. Рассмотрено пропорциональное и сложное нагружение. Осуществленное в опыте двухосное растяжение соответствовало состоянию чистого сдвига (характеризуемого параметром Лоде-Надаи), когда преобладало либо осевое, либо окружное напряжение. Траектория сложного нагружения задавалась в виде двухзвенной ломаной в пространстве напряжений; первому звену траектории соответствовало осевое растяжение, второму – окружное растяжение либо при постоянном осевом напряжении, либо при определенном отношении приращения осевого напряжения к приращению окружного напряжения. В последнем случае производилась промежуточная полная разгрузка, затем сложное нагружение повторялось при задании большей величины первого звена траектории. С учетом начальной упругой анизотропии определены пределы текучести, которые находились по достаточно малому допуску на остаточную максимальную главную деформацию. Деформационное упрочнение отображается на основе концепции скольжения и разрыхления. Показано, что вследствие исходной анизотропии материала реализуется механизм плоскопластической деформации в виде (идеализированных) скольжений по площадкам действия главных касательных напряжений. Очередность «включения в работу» этих площадок характеризуется уровнем и видом напряженного состояния. Для максимальной главной чисто пластической составляющей неупругой деформации предложена единая (не зависящая от вида напряженного состояния) зависимость от главных напряжений. Данная зависимость представляет собой монотонно растущую функцию, она отображает смену площадок скольжения при изменении вида напряженного состояния. С пластической деформацией связана деформация разрыхления, которая, в соответствии с гипотезой В.В. Новожилова, считается происходящей равномерно и одновременно во всех направлениях. Из сопоставления продольной и поперечной деформаций при одноосном растяжении определен коэффициент разрыхления. Взаимодействие локальных скольжений и разрыхления проявилось в том, что во

© Рычков Борис Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: rychkovba@mail.ru
Гончарова Ирина Витальевна – кандидат физико-математических наук, доцент e-mail: goncharovaiv@mail.ru
Волков Александр Вячеславович – e-mail: cds_2019@mail.ru

Boris A. Rychkov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: rychkovba@mail.ru
Irina V. Goncharova – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, e-mail: goncharovaiv@mail.ru
Aleksandr V. Volkov – e-mail: cds_2019@mail.ru

всех случаях растяжения за пределы упругости поперечная деформация оставалась близкой к соответствующему упругому ее значению. Выявленные особенности деформационного упрочнения чугуна отображаются предлагаемыми определяющими соотношениями в виде единых зависимостей между конечными значениями напряжений и деформаций как при простом, так и при сложном нагружении.

© ПНИПУ

ON STRAIN HARDENING OF CAST IRON WITH PROPORTIONAL AND COMPLEX LOADING

B.A. Rychkov, I.V. Goncharova, A.V. Volkov

Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyzstan

ARTICLE INFO

Received: 8 January 2016
Accepted: 1 February 2016
Published: 30 March 2016

Keywords:

stress and strain state, elasticity, plasticity, loosening, the concept of slipping, strain hardening, proportional and complex loading

ABSTRACT

The behavior of thin-walled tubular specimens of cast iron SCH 15-32 are modeled using loaded tension with internal pressure. The experimental data for this iron has been obtained by V.M. Zhigalkin and O.M. Usoltseva. This material is orthotropic according to the experimental diagrams of the axial and circumferential strains. Proportional and complex loadings are considered. Biaxial tension which has been carried out in the experiment corresponded to pure shear (characterized by the parameter of Lode-Nadai), where axial or circumferential stress prevailed. The trajectory of complex loading is given as a two-tier sloping in stress space; the first link path is consistent with axial tension, the second one is consistent with the circumferential tensile either under constant axial strain, or at a certain ratio of the increment of axial tension to the circumferential stress. In the latter case it produces an intermediate full unloading, then repeated complex loading at a high value of the first link path. Yield points are defined according to the initial elastic anisotropy, which is detected at a sufficiently small limit for residual maximum principal strain. Strain strengthening is described based on the concept of slipping and loosening. It is shown that the mechanism of flat plastic deformation is realized in the form of an idealized slipping on the plane of main shear stresses due to the initial anisotropy of materials. Priority inclusion in the work of these planes is characterized by the level and kind of stress. Single dependence on the principal stresses is proposed for maximum principal purely plastic component inelastic deformation (independent of the type of stress state). This dependence is a monotonically increasing function. It describes the change planes of slipping when changing the state of stress. The deformation loosening is considered occurring simultaneously and uniformly in all directions in accordance with V.V. Novozhilov's hypothesis, which is associated with the plastic deformation. The coefficient of loosening is defined by comparing the longitudinal and lateral strain in uniaxial tension. In all the cases of tension beyond the elasticity, the lateral strain is remained close to its corresponding elastic value according to the interaction of local slipping and loosening. The revealed features of cast iron strain hardening are reflected with the proposed defining relations in the form of uniform relationships between the finite values of the stress and strain both under proportional and complex loadings.

© PNRPU

1. Экспериментальные данные

Экспериментально полученные диаграммы деформаций чугуна (представленные, например, в [1]) используются для определения упругих констант материала [2; 3], при расчете колонн [4; 5] (опираясь на собственные опытные данные), для установления соответствия между деформационным упрочнением (определяемого при растяжении и сжатии) и твердостью материала [6], при формулировке определяющих соотношений [7; 8]. Однако во всех подобных публикациях отсутствуют сведения об исходных первичных (табличных) экспериментальных данных при сложном напряженном состоянии и тем более при сложном нагружении. Такая ситуация затрудняет моделирование поведения хрупкого материала за пределами упругости [8]. В настоящем исследовании использова-

ны первичные данные, предоставленные авторами работ [9, 10]*, которые провели испытания на растяжение с внутренним давлением тонкостенных трубчатых образцов чугуна марки СЧ 15-32.

Напряжения и деформации в рабочей части образца вычислялись по известным формулам через заданные значения растягивающей силы, внутреннего давления и геометрические параметры образца (толщина стенки в рабочей части $t = (3,00 \pm 0,02)$ мм, внутренний диаметр $d = (28 \pm 0,02)$ мм, длина рабочей части образца 90 мм).

На рис. 1, а для четырех образцов (№ 15, 7, 6, 4) представлены траектории пропорционального нагружения, которые задавались в пространстве осевого (σ_z) и окружного (σ_φ) напряжений.

Программа сложного нагружения (рис. 1, б) образца № 16 состояла из двух этапов. На первом этапе осуществлялась траектория нагружения OAB , затем следовала полная разгрузка (линия BO), после чего (второй этап) повторялось нагружение по траектории $ОСД$.

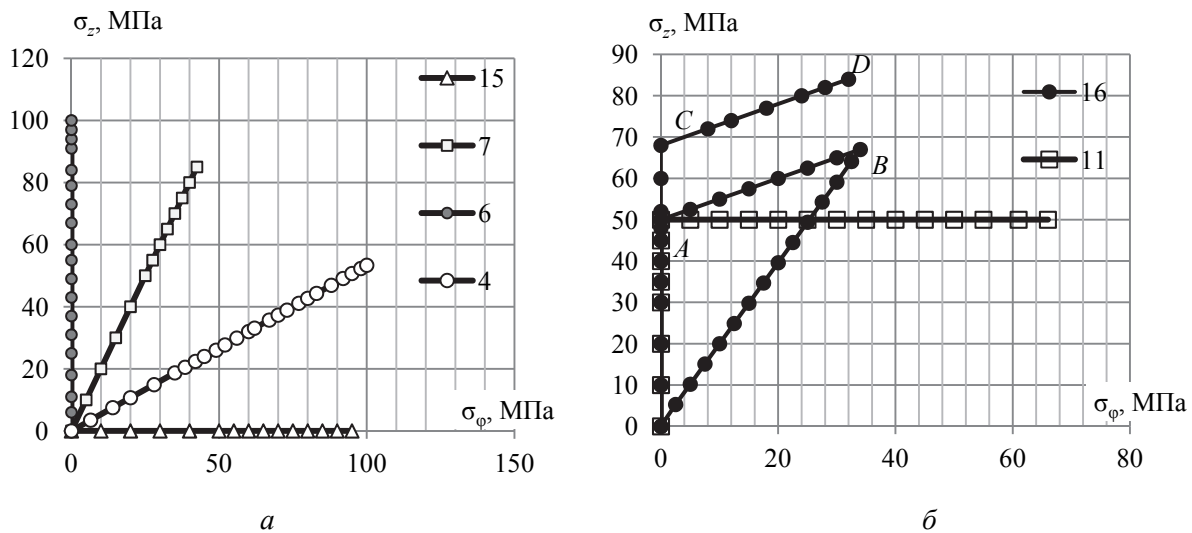


Рис. 1. Программы простого (а) и сложного (б) нагружений

При испытании образца № 11 реализована («ортогональная») догрузка окружным растяжением после предварительного осевого растяжения до напряжения $\sigma_z = 50$ МПа.

Скорость нагружения при пластическом деформировании составляла 0,1 МПа/с. Если ее значения не превышали 1 МПа/с, временные эффекты практически не наблюдались.

2. Определение упругих постоянных

Для определения модуля Юнга рассмотрены случаи осевого (рис. 2) и окружного (рис. 3) растяжений. На рис. 2 замеренные в опыте при осевом напряжении (σ_z) ε_z – продольная (осевая) деформация; ε_φ – поперечная деформация. На рис. 3 ε_φ – окружная деформация; ε_z – поперечная (относительно ε_φ) деформация при окружном напряжении σ_φ .

* Выражаем благодарность В.М. Жигалкину и О.М.Усольцевой за оказанное доверие и неоценимую помощь.

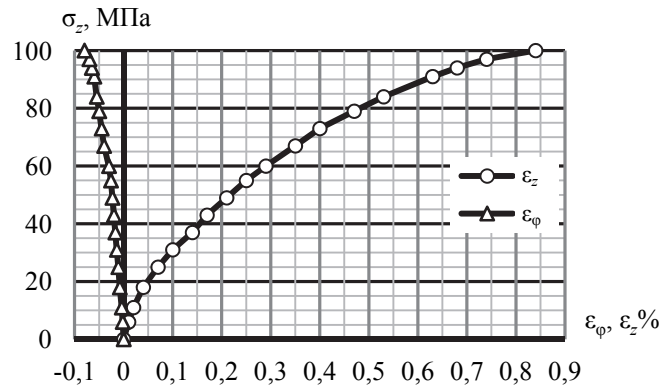


Рис. 2. Осевое растяжение (образец № 6)

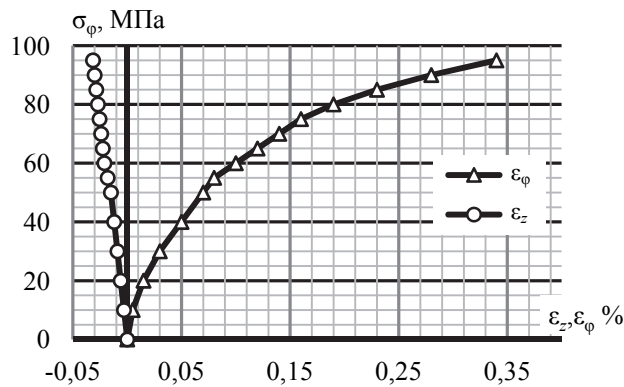


Рис. 3. Окружное растяжение (образец № 15)

По диаграммам максимальной главной деформации определялись упругие модули осевого и окружного растяжений (E_z, E_ϕ) по начальному участку диаграммы с использованием стандартной программы аппроксимации его в виде линейной зависимости. Начальный участок ограничивается напряжением, отвечающим условному пределу пропорциональности при одноосном растяжении. Этот предел определяется точкой на диаграмме для продольной деформации, в которой тангенс угла наклона касательной к кривой деформации уменьшается на 50 % по сравнению с начальным его значением (при проведении касательной к кривой из начала координат) [11].

В результате найдены следующие константы:

при осевом растяжении

$$E_z = \frac{\sigma_z}{\epsilon_z} = 52885 \text{ (МПа)}, \quad (1)$$

при окружном растяжении

$$E_\phi = \frac{\sigma_\phi}{\epsilon_\phi} = 78947 \text{ (МПа)}. \quad (2)$$

Определены также соответствующие коэффициенты Пуассона:

$$\nu_{z\phi} = \frac{|\epsilon_\phi|}{\epsilon_z} = 0,1655, \quad (3)$$

$$v_{\varphi z} = \frac{|\varepsilon_z|}{\varepsilon_\varphi} = 0,2368. \quad (4)$$

По значениям найденных таким образом упругих констант видно, что предположение об исходной изотропии материала не выполняется ($E_z \neq E_\varphi$). Поэтому была сделана проверка условия ортотропии материала:

$$E_z \cdot v_{\varphi z} = E_\varphi \cdot v_{z\varphi}. \quad (5)$$

Это условие выполняется с точностью до 5 %. Так как упругие константы определяются примерно с такой же точностью, то можно считать, что данный материал является ортотропным.

Согласно обобщенному закону Гука в рассматриваемом случае напряженно-деформированного состояния при наличии ортотропной симметрии компоненты тензора упругих деформаций (e_z, e_φ) определяются (как и ранее [12]) по формулам

$$e_z = \frac{1}{E_z} \sigma_z - \frac{v_{\varphi z}}{E_\varphi} \sigma_\varphi; \quad e_\varphi = \frac{1}{E_\varphi} \sigma_\varphi - \frac{v_{z\varphi}}{E_z} \sigma_z. \quad (6)$$

Здесь учтено, что радиальное напряжение σ_r пренебрежимо мало по сравнению с напряжениями σ_z и σ_φ . Поэтому, как это принято [13, 14, 15] при анализе рассматриваемых экспериментов, полагается $\sigma_r = 0$, т.е. напряженное состояние считается однородным.

3. Моделирование деформационного упрочнения

Как показал эксперимент В.А. Паняева [16; 17], трубчатый образец такой же марки чугуна (но изотропного в исходном состоянии) при испытании на чистое кручение за пределом упругости удлинялся в осевом направлении. Эта осевая деформация (как продемонстрировано в [18; 19]) оказалась равной полусумме неупругих главных деформаций (Γ_1, Γ_3) при данном напряженном состоянии. Если бы эти главные деформации были равны по модулю, то значение осевой деформации было бы равно нулю. Именно такое значение получается в таком эксперименте для пластичных материалов (поскольку для них $\Gamma_1 = -\Gamma_3$). Следовательно, кроме чисто пластической деформации, в чугуне возникает разрыхление материала (при котором $\Gamma_1 \neq |\Gamma_3|$). Это разрыхление подчиняется гипотезе В.В. Новожилова [20] (подтвержденной экспериментально [21]), согласно которой оно развивается одновременно и равномерно во всех направлениях. Кроме того, отмеченный факт означает, что в состоянии чистого сдвига реализуется плоскопластическая деформация. Такая деформация (как показано в [12]) происходит в пластичных ортотропных материалах при всех видах напряженного состояния, создаваемых в опытах на двусное растяжение. Это объясняется локализацией (идеализированных) скольжений поочередно по площадкам действия главных касательных напряжений, поскольку пределы текучести в главных направлениях тензора напряжений существенно различные.

Таким образом, полные неупругие деформации (Γ_z, Γ_φ) в осевом и окружном направлении определяются по формулам

$$\Gamma_z = \varepsilon_z - e_z, \quad \Gamma_\varphi = \varepsilon_\varphi - e_\varphi, \quad (7)$$

где $\varepsilon_z, \varepsilon_\varphi$ – суммарные (замеренные в опыте) деформации.

В соответствии с указанными особенностями полухрупких тел (к которым относят чугун [9; 10]) и на основе используемой концепции скольжения деформация дилатансии (разрыхления) в рассматриваемых случаях пропорционального нагружения вследствие реализации плоскопластической деформации принимается равной полусумме главных неупругих деформаций Γ_z и Γ_φ :

$$\Gamma_d = \frac{\Gamma_z + \Gamma_\varphi}{2}. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что чисто пластическая деформация ($\Gamma_z^{\text{пл}}, \Gamma_\varphi^{\text{пл}}$) определяется по формулам

$$\Gamma_z^{\text{пл}} = \Gamma_z - \Gamma_d, \quad \Gamma_\varphi^{\text{пл}} = \Gamma_\varphi - \Gamma_d. \quad (9)$$

По исходным табличным данным образцов № 4, 6, 7 и 15 построены соответствующие диаграммы деформации $\varepsilon(\sigma)$, затем, пользуясь формулами (6), определили их (расчетные) упругие деформации (e_z, e_φ).

Используя полученные данные вышеуказанных образцов, определили их пределы текучести ($\sigma_i^T, i = z, \varphi$). Эти пределы находились (как это практикуется для анизотропных материалов [12; 22; 23]) по допуску на остаточную максимальную главную деформацию, который ввиду малости аппроксимированного упругого участка деформации в данном случае принят равным 0,025 %.

Найденные пределы текучести: при осевом растяжении $\sigma_z^T = 26$ МПа; при окружном растяжении $\sigma_\varphi^T = 60$ МПа; при двухосном растяжении, когда $k = \frac{\sigma_z}{\sigma_\varphi} = 2$, $\sigma_z^T = 51$ МПа; при $k = 0,53$ $\sigma_\varphi^T = 57$ МПа.

По указанным значениям пределов текучести построена поверхность текучести (рис. 4), которая характеризует деформационное упрочнение материала в начальный период развития пластической деформации. Как видно из рис. 4, у исследуемого чугуна такое упрочнение при двухосном растяжении оказалось существенно выше упрочнения в осевом направлении, когда реализуется состояние чистого сдвига при $\sigma_z = 2\sigma_\varphi$; такая ситуация характерна для подобных анизотропных материалов [24, 25].

По записанным выше формулам определили компоненты неупругой деформации. Затем была проверена гипотеза, имеется ли единая зависимость для чисто пластической максимальной главной деформации относительно разности между наибольшим главным напряжением и его значением на пределе упругости (который отождествляется с пределом текучести), т.е. зависимость в координатах $\Gamma_i^{\text{пл}} \sim (\sigma_i - \sigma_i^T)$. Здесь σ_i^T ($i = z, \varphi$) – главное напряжение, соответствующее развитию главной пластической деформации от скольжения по площадке Π_{ij} ($j = z, \varphi, r$) действия главного касательного напряжения $\tau_{ij} = 0,5(\sigma_i - \sigma_j)$, на которой превышает предел текучести σ_i^T при заданном напряженном состоянии.

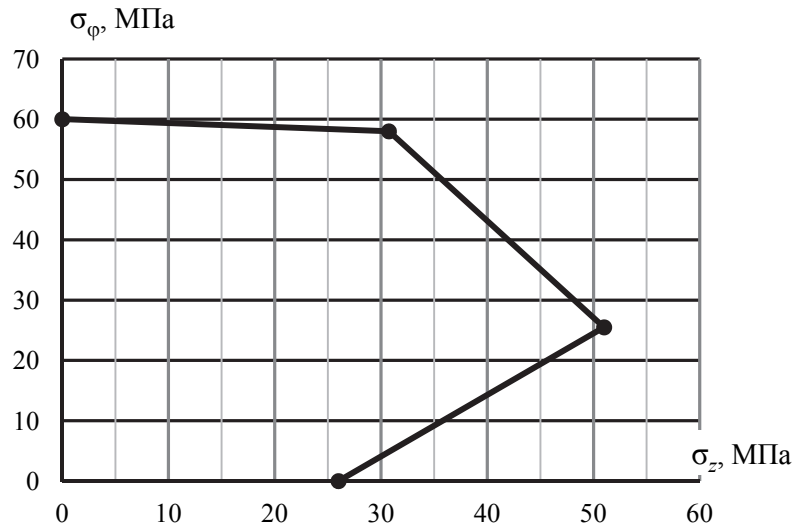


Рис. 4. Поверхность текучести

В соответствии с указанными выше пределами текучести определена зависимость $\Gamma_i^{пл}(\sigma_i - \sigma_i^T)$ для четырех исходных случаев пропорционального нагружения.

Для случая осевого растяжения такая зависимость построена в координатах $\Gamma_z^{пл} \sim (\sigma_z - \sigma_z^T)$; для случая окружного растяжения – в координатах $\Gamma_\phi^{пл} \sim (\sigma_\phi - \sigma_\phi^T)$. В случае когда $k = 2$, $\sigma_1 = \sigma_z$, соответственно, $\Gamma_1^{пл} = \Gamma_z^{пл}$; когда $k = 0,53$, $\sigma_1 = \sigma_\phi$ и, соответственно, $\Gamma_1^{пл} = \Gamma_\phi^{пл}$.

Полученные значения пластических деформаций $\Gamma_i^{пл}$ представлены в виде единого ряда как функция от $(\sigma_i - \sigma_i^T)$. Эта функция аппроксимирована с помощью линии тренда ($y = \Gamma_i^{пл}$, $x = \sigma_i - \sigma_i^T$), что представлено на рис. 5.

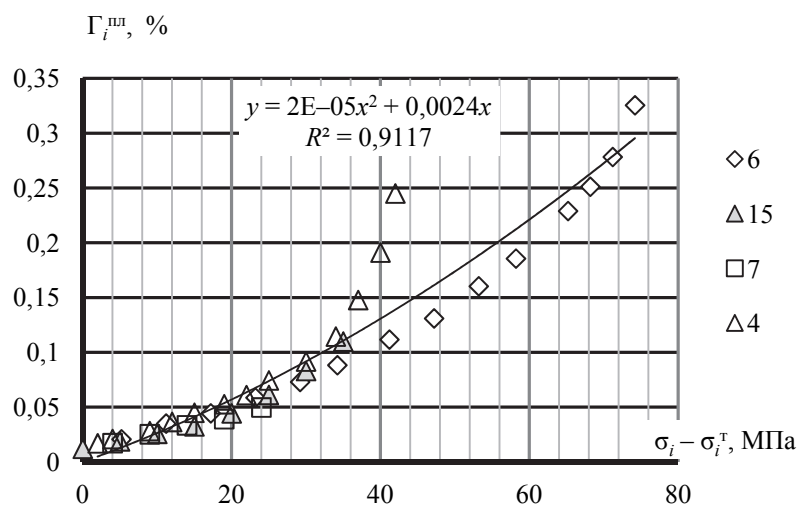


Рис. 5. Аппроксимация единой зависимости для чисто пластической деформации

Согласно проведенной таким образом аппроксимации уравнение для чисто пластической деформации имеет вид (величина достоверности аппроксимации $R^2 = 0,9117$)

$$\Gamma_i^{\text{пл}} = 2 \cdot 10^{-5} (\sigma_i - \sigma_i^{\text{r}})^2 + 0,24 \cdot 10^{-3} (\sigma_i - \sigma_i^{\text{r}}). \quad (10)$$

Если ввести коэффициент дилатансии λ как отношение деформации дилатансии Γ_d к компоненте чисто пластической главной деформации $\Gamma_i^{\text{пл}}$, то в общем случае он зависит от вида напряженного состояния. Однако, как показал проведенный анализ, в первом приближении для случаев одноосного и двухосного растяжений можно полагать $\lambda = 1$. Этот вывод вытекает из рассмотрения соотношения между продольной и поперечной деформациями при одноосном растяжении. Как видно из рис. 3, при окружном растяжении поперечная деформация (ε_z) подчиняется закону Гука и за пределами упругости. Если бы при данном напряженном состоянии плоскопластическая деформация происходила на площадке, содержащей радиальное направление, то наблюдалось бы следующее. Поскольку скольжения сопровождаются всесторонним разрыхлением, оно вызвало бы уменьшение (по модулю) значения поперечной деформации за пределом упругости, чего в эксперименте не наблюдается. Следовательно, скольжения в данном случае происходят на площадке $\Pi_{z\varphi}$. Если при этом коэффициент разрыхления полагать отличным от единицы, то это приводило бы к отклонению величины поперечной деформации (ε_z) за пределом упругости от упругого ее значения в сторону увеличения (по модулю). Этого также не наблюдается. Итак, считая, что во всех случаях вида напряженного состояния происходит плоскопластическая деформация, имеем:

при осевом растяжении

$$\Gamma_z = 2\Gamma_z^{\text{пл}}, \quad \Gamma_\varphi = 0, \quad \Gamma_d = \Gamma_z^{\text{пл}}, \quad (11)$$

при окружном растяжении

$$\Gamma_\varphi = 2\Gamma_\varphi^{\text{пл}}, \quad \Gamma_z = 0, \quad \Gamma_d = \Gamma_\varphi^{\text{пл}}, \quad (12)$$

при двухосном растяжении, $k = 2$,

$$\Gamma_z = 2\Gamma_z^{\text{пл}}, \quad \Gamma_\varphi = 0, \quad \Gamma_d = \Gamma_z^{\text{пл}}, \quad (13)$$

при двухосном растяжении, $k = 0,53$,

$$\Gamma_\varphi = 2\Gamma_\varphi^{\text{пл}}, \quad \Gamma_z = 0, \quad \Gamma_d = \Gamma_\varphi^{\text{пл}}. \quad (14)$$

В результате при таком соотношении между деформацией дилатансии и чисто пластической деформацией полная деформация ε_i ($i = z, \varphi$), рассчитанная с использованием приведенных формул, достаточно хорошо отражает поведение испытанных образцов при всех четырех программах пропорционального нагружения. Экспериментальные (точки) и расчетные (сплошные линии) зависимости деформации от напряжения представлены на рис. 6–9.

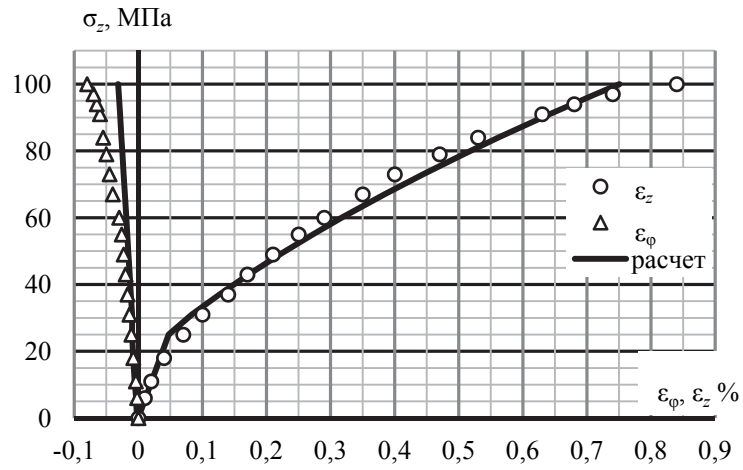


Рис. 6. Осевое растяжение (образец № 6)

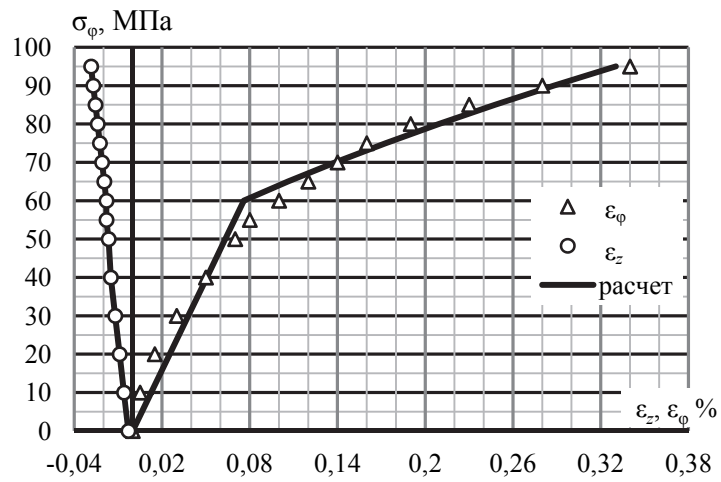


Рис. 7. Окружное растяжение (образец № 15)

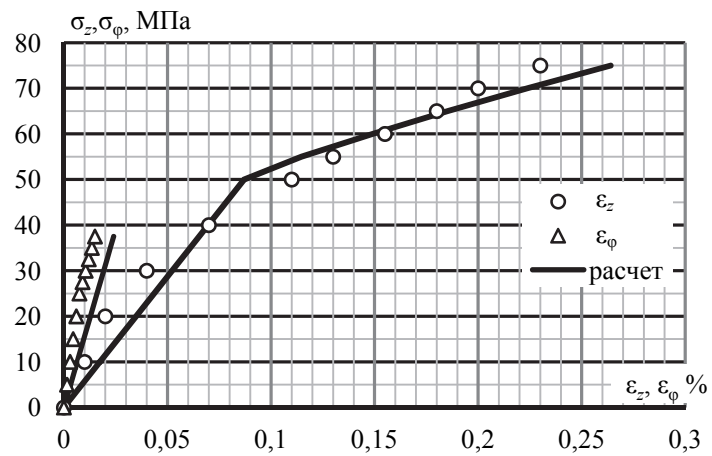


Рис. 8. Растяжение с внутренним давлением, $\sigma_z = 2\sigma_\phi$ (образец № 7)

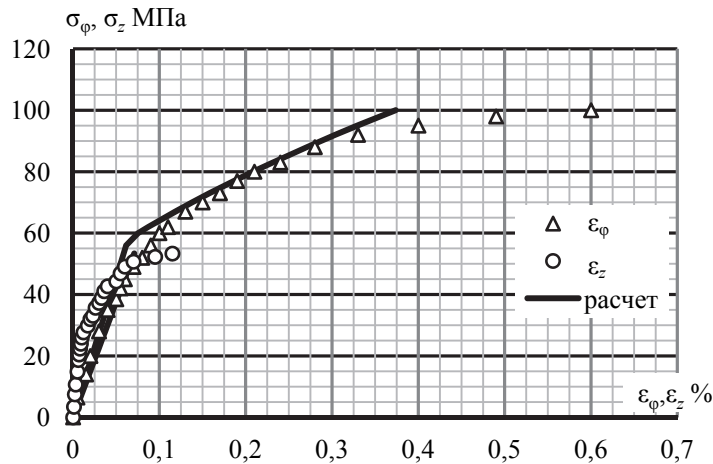


Рис. 9. Растяжение с внутренним давлением, $\sigma_z = 0,53\sigma_\phi$
(образец № 4)

4. Сложное нагружение растяжением с внутренним давлением

Траектория нагружения образца № 16 представлена на рис. 1, б. Образец вначале растягивался за предел текучести до напряжения $\sigma_z^* = 50$ МПа (участок OA на рис. 1, б)), затем прикладывалось внутреннее давление так, что $\frac{\Delta\sigma_z}{\sigma_\phi} = 0,5$ (участок AB на рис. 1, б)).

При этом (на участке AB) главное касательное напряжение $\tau_{z\phi}$ получает отрицательное приращение. Это означает, что по площадке действия этого касательного напряжения ($\Pi_{z\phi}$) скольжения (имевшие место при нагружении на участке OA) прекращаются. Но поскольку (экспериментально наблюдаемая) неупругая осевая деформация продолжает увеличиваться, то возникают скольжения по площадке действия другого главного касательного напряжения. Этим напряжением является напряжение τ_{zr} . Из этого, в свою очередь, вытекает, что предел текучести $\tau_{zr}^T = 0,5\sigma_z^* \left(\tau_{zr} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_r), \sigma_r = 0 \right)$. Тогда на диаграмме единой зависимости $\Gamma_i^{III}(\sigma_i - \sigma_i^T)$ главное напряжение $\sigma_1 = \sigma_z^*$ получит приращение $\Delta\sigma_z = 0,5\sigma_\phi$, а разность $\sigma_i - \sigma_i^T$ начинает отсчитываться от значения $\Delta\sigma_1 = \sigma_z^* - 26$ МПа при пределе текучести $\sigma_1^T = \sigma_z^* = 50$ МПа.

Иначе говоря, при $\sigma_z > \sigma_z^*$ имеем $(\sigma_1 - \sigma_1^T) = \Delta\sigma_1$; $\Delta\sigma_1 = \sigma_z - 50$ МПа. На этом участке траектории нагружения $\Delta\Gamma_z^{III}$ определяется по полученной единой кривой (10) через только что указанную разность. Таким образом, приращение окружной деформации ε_ϕ будет состоять из приращения упругой деформации e_ϕ и деформации дилатансии, вызываемой скольжениями по площадке Π_{zr} .

После разгрузки при повторном нагружении (по траектории ОСД, показанной на рис. 1, б)) в эксперименте наблюдалось отклонение от упругого закона за счет проявления отрицательного эффекта Баушингера, который пока нами не рассматривается. Четко проявляется работа площадок скольжения, а именно: при первоначальном нагружении из исходного состояния работала площадка $\Pi_{z\varphi}$, до напряжения $\sigma_z^* = 50$ МПа, поэтому при повторном нагружении, начиная с этого же напряжения, по площадке $\Pi_{z\varphi}$ снова начинают происходить скольжения до тех пор, пока σ_z не станет равным значению, полученному в начале разгрузки: $\sigma_z = 68$ МПа. Далее площадка $\Pi_{z\varphi}$ «замораживается», поскольку появляется напряжение σ_φ и касательное напряжение $\tau_{z\varphi}$ уменьшается. При сопоставлении с экспериментальной диаграммой деформации ε_z видно, что действительно на участке от $\sigma_z = 50$ до $\sigma_z = 68$ МПа работает площадка $\Pi_{z\varphi}$ (характер упрочнения в расчетах такой же, как в эксперименте). При этом если проанализировать деформацию ε_φ , то видно, что по этой компоненте деформации происходит только упругая составляющая деформации, поскольку в указанном интервале $\sigma_z \in [50, 68]$ $\Gamma_\varphi^{nl} = -\Gamma_z^{nl}$, а $\Gamma_d = \Gamma_z^{nl}$, поэтому $\varepsilon_\varphi = e_\varphi + \Gamma_\varphi^{nl} + \Gamma_d \equiv e_\varphi$, что тоже подтверждается в эксперименте (т.е. и в этом случае срабатывает механизм плоскопластической деформации). При $\sigma_z > 68$ МПа, так же как при первоначальном нагружении, включается в работу площадка Π_{zr} , но характер упрочнения материала несколько отличается от наблюдаемого в эксперименте за счет принятой аппроксимации для чисто пластической деформации.

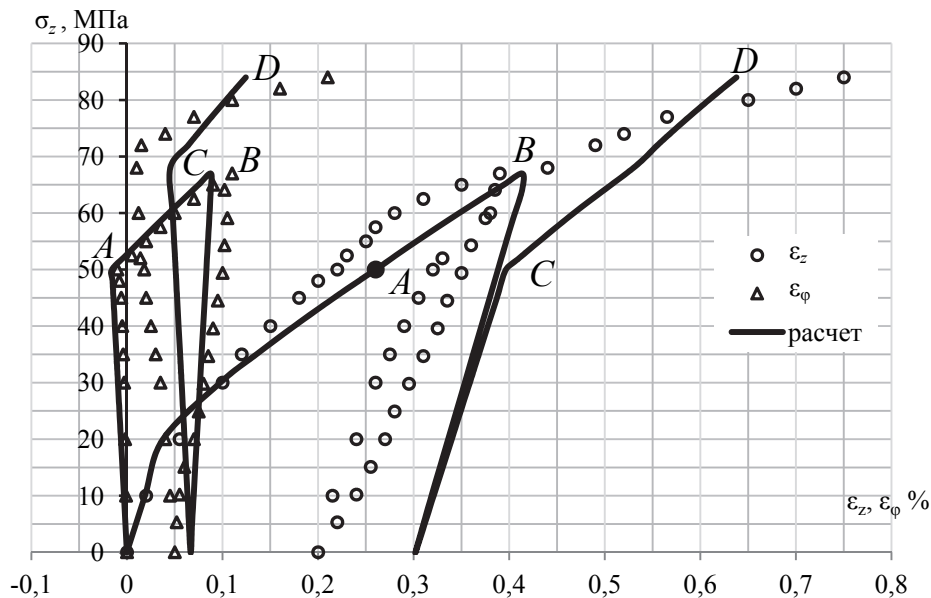


Рис. 10. Сложное нагружение растяжением с внутренним давлением (образец № 16)

Образец № 11 растягивался за пределы упругости до напряжения $\sigma_z^* = 50$ МПа, далее прикладывалось окружное напряжение σ_φ с шагом 5 МПа, а осевое напряжение оставалось постоянным $\sigma_z = \sigma_z^*$. До «угловой» точки $\sigma_z = \sigma_z^*$ (которая соответствует точке из-

лома двузвенной траектории нагружения) пластическая деформация развивается на площадках скольжения $\Pi_{z\varphi}$, а максимальным главным напряжением является напряжение σ_z ; после угловой точки касательное напряжение $\tau_{z\varphi}$ начинает уменьшаться, главным напряжением, ответственным за приращение пластической деформации, становится σ_φ , и развитие пластической деформации начинает происходить по площадкам $\Pi_{\varphi r}$. На диаграмме единой кривой (см. рис. 5) пластическая деформация $\Gamma_\varphi^{\text{пл}}$ получит приращение $\Delta\Gamma_\varphi^{\text{пл}}$ от σ_φ , как и деформация дилатансии $\Delta\Gamma_d^{(2)}$, а разность $(\sigma_1 - \sigma_1^T)$ в текущих напряжениях будет отсчитываться от угловой точки σ_z^* . Кроме того, сразу после излома траектории нагружения оказывается задействованной площадка скольжений Π_{zr} ввиду следующего обстоятельства.

Согласно закону Гука (6), при воздействии напряжения σ_φ (при $\sigma_z = \text{const}$) упругая деформация e_z начинает уменьшаться. Поскольку по напряжению σ_z разгрузка не происходит, это означает, что общая деформация ($\varepsilon_z = e_z + \Gamma_z$) не должна убывать. Следовательно, в этом случае деформация Γ_z будет увеличиваться, т.е. возникает перераспределение вклада составляющих Γ_z и e_z в (суммарную) деформацию ε_z (при условии, что $\varepsilon_z = \varepsilon_z^*$). Такое состояние возможно, так как именно достигнутое значение σ_z^* соответствует пределу текучести для реализации скольжений по площадке Π_{zr} (что продемонстрировано при анализе поведения образца № 16) (рис. 10). В результате приращение деформации $\Gamma_z^{\text{пл}}$ на втором звене рассматриваемой траектории нагружения сопровождается приращением деформации дилатансии $\Delta\Gamma_d$ ($\Delta\Gamma_d^{(1)} = \Delta\Gamma_z^{\text{пл}}$), которое суммируется с упругой деформацией e_φ еще до подключения площадки $\Pi_{\varphi r}$. Последняя, судя по экспериментальным данным, становится активной несколько раньше, чем это следует из используемого модельного представления. При этом расчетный характер упрочнения (рис. 11) от действия деформации ε_φ соответствует наблюдаемому в опыте, но значение неупругой деформации Γ_φ при достигнутом уровне напряжения σ_φ немного занижается; это объясняется принятой аппроксимацией (10) для чисто пластической деформации. Наличие влияния разрыхления ($\Delta\Gamma_d^{(1)}$) на приращение деформации ε_φ подтверждается отклонением от упругого закона ее изменения (на втором звене траектории нагружения), наблюдаемого в опыте уже при достаточно малых уровнях напряжения σ_φ (см. пунктирную линию на рис. 11, которая соответствует деформации e_φ).

Таким образом, при нагружении до σ_z^* : $\Gamma_\varphi = 0$; $\Gamma_z = 2\Gamma_z^{\text{пл}}$; $\Gamma_d = \Gamma_z^{\text{пл}}$; $\Gamma_\varphi^{\text{пл}} = -\Gamma_z^{\text{пл}}$ ($\Delta\Gamma_d = \Delta\Gamma_d^{(1)}$, $\Delta\Gamma_d^{(1)} = \Delta\Gamma_z^{\text{пл}}$).

После догрузки напряжением σ_φ : $\Delta\Gamma_\varphi = \Delta\Gamma_\varphi^{\text{пл}} + \Delta\Gamma_d^{(2)}$; $\Delta\Gamma_d^{(2)} = \Delta\Gamma_\varphi^{\text{пл}}$; $\Delta\Gamma_\varphi^{\text{пл}} = \Gamma_\varphi^{\text{пл}} - \Gamma_\varphi^{*\text{пл}}$; $\Delta\Gamma_d = \Delta\Gamma_d^{(1)} + \Delta\Gamma_d^{(2)}$.

Здесь $\Gamma_\varphi^{*\text{пл}}$ – значение чисто пластической деформации при $\sigma_z = \sigma_z^*$.

В итоге пропорциональное и сложное нагружения описываются едиными зависимостями. Отмеченное чередование «вступающих в работу» площадок скольжения однозначно устанавливается соответствующими значениями главных касательных напряжений. Этим обеспечивается монотонное развитие пластической деформации на каждом этапе реализованного сложного нагружения, а также учитывается вклад разрыхления в суммарную неупругую деформацию.

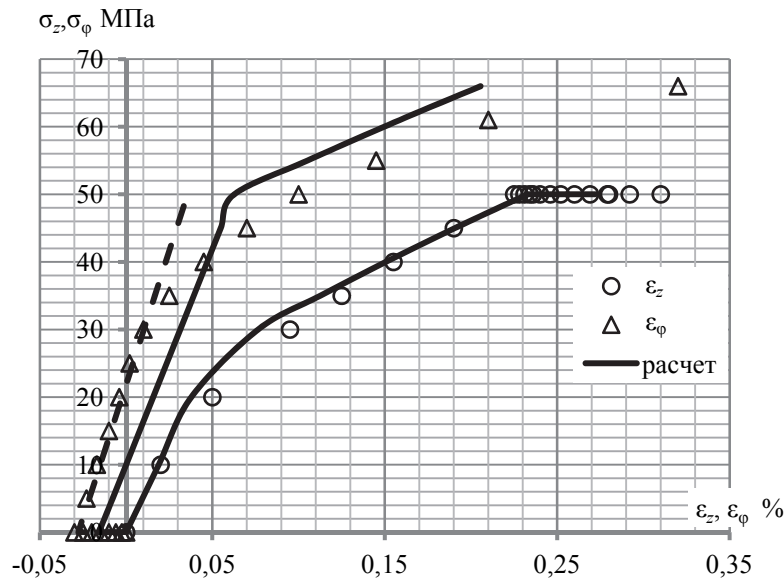


Рис. 11. Сложное нагружение растяжением с внутренним давлением (образец № 11)

На рис. 11 окружная и осевая деформации представлены (для большей наглядности) как функции только соответствующих одноименных напряжений.

Общие выводы

Рассмотрение упругих деформаций при осевом и окружном растяжениях позволило сделать вывод, что материал является начально-анизотропным (по своим свойствам близким к ортотропному материалу).

Поведение материала в упругопластической области смоделировано на основе концепции скольжения и разрыхления. Локализация неупругой деформации происходила в основном по площадкам главных касательных напряжений (Π_{ij}). Таким образом, считалось, что во всех случаях напряженного состояния при пропорциональном нагружении происходит плоскопластическая деформация.

В случае осевого растяжения задействованной оказалась площадка $\Pi_{z\varphi}$ в результате действия главного касательного напряжения $\tau_{z\varphi} = 0,5(\sigma_z - \sigma_\varphi)$; при окружном растяжении – площадка $\Pi_{\varphi z}$ (от действия главного касательного напряжения $\tau_{\varphi z} = 0,5(\sigma_\varphi - \sigma_z)$).

При состоянии чистого сдвига $\sigma_z = 2\sigma_\varphi$ «работает» площадка $\Pi_{z\varphi}$. При состоянии, близком к чистому сдвигу, $\sigma_\varphi \approx 2\sigma_z$ ($\sigma_z = 0,53\sigma_\varphi$), работает площадка $\Pi_{\varphi z}$.

Один из самых важных результатов состоит в том, что поперечная деформация как при осевом, так и при окружном растяжении по расчету (и с определенным приближением в опыте) равна соответствующей упругой деформации. Это объясняется тем, что в этом направлении расчетная чисто пластическая деформация по модулю равна деформации дилатансии (разрыхления). Такой же эффект обнаружился при сложном нагружении образца № 16, у которого вначале, при осевом растяжении, работает площадка $\Pi_{z\varphi}$, деформация $\varepsilon_{\varphi} = e_{\varphi}$ (поскольку $\Gamma_{\varphi}^{III} = -\Gamma_z^{III}$; $\Gamma_r^{III} = 0$; $\Gamma_d = \Gamma_z^{III}$; и $\varepsilon_{\varphi} = \Gamma_{\varphi}^{III} + \Gamma_d + e_{\varphi}$), затем, когда к осевому растяжению добавилось внутреннее давление, заработала площадка Π_{zr} , и деформация $\varepsilon_{\varphi} = \Delta\Gamma_d + e_{\varphi}$; $\Delta\Gamma_d = \Delta\Gamma_z^{III}$; $\tau_{zr}^T = \frac{1}{2}\sigma_z^*$. Подобная картина скольжений у образца № 11 дополняется возможностью включения в работу (на определенном этапе нагружения) одновременно двух площадок скольжения. В итоге проявляется характер деформационного упрочнения как при пропорциональном, так и при сложном нагружении.

Предложенные определяющие соотношения сопоставимы по структуре с деформационной теорией пластичности, поскольку отражают кусочно-монотонную деформацию от скольжений по площадкам главных касательных напряжений. Как и для пластичных материалов [12], чередование активных площадок скольжения соответствует (по терминологии Христиановича–Шемякина) смене одного состояния неполной пластичности другим (подобным состоянием) в зависимости от вида напряженного состояния. В особом случае (реализованном при сложном нагружении образца № 11) достигается состояние полной пластичности, когда активными становятся две площадки скольжений. У хрупких материалов пластическая деформация сопровождается разрыхлением, которое также поддается моделированию наглядными механическими представлениями.

Библиографический список

1. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / А.А. Лебедев, Б.И. Ковальчук, Ф.Ф. Гигиняк, В.П. Ламашевский. – Киев: Ин Юре, 2003. – 540 с.
2. Олейников А.И., Овчаров И.О. Определяющие уравнения связи напряжений с деформациями для чугуна // Учен. зап. Комсомольского-на-Амуре гос. техн. ун-та. – 2013. – № III-1(15). – С. 42–46.
3. Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разномодульной среды // ПММ. – 1993. – Т. 57, № 5. – С. 153–159.
4. Rasmussen K.J.R., Rondal J. Strength Curves for Metal Columns // Journal of Structural Engineering. American Society of Civil Engineers. – 1997. – Vol. 123(6). – P. 721–728.
5. Rasmussen K.J.R., Rondal J. On the Strength of Cast Iron Columns // Research Report. – The University of Sydney, 2003. – No. R829. – 25 p.
6. Седоков Л.М. Об упрочняемости серого чугуна // Изв. Том. политехн. ин-та. – 1961. – Т. 96. – С. 54–58.
7. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Ламашевский В.П. О коэффициенте поперечной деформации углеродистой стали и серого чугуна при нормальной и низкой температурах // Проблемы прочности. – 1971. – № 3. – С. 51–56.
8. Ковальчук Б.И. О деформировании полухрупких тел // Проблемы прочности. – 1982. – № 9. – С. 51–57.

9. Жигалкин В.М., Усольцева О.М. Экспериментальное исследование деформации полухрупких материалов. Сообщение I: Разрыхление при пропорциональном нагружении // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2001. – № 6. – С. 38–45.
10. Жигалкин В.М., Усольцева О.М. Экспериментальное исследование деформации полухрупких материалов. Сообщение II: Упрочнение и разрыхление при сложном нагружении // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2002. – № 6. – С. 39–46.
11. Михайлов-Михеев П.Б. Справочник по металлическим материалам турбино- и машиностроения. – М.-Л.: Гос. изд-во науч.-техн. машиностроит. лит., 1961. – 839 с.
12. Рычков Б.А. Концепция скольжения и механика ортотропного материала // Изв. РАН. МТТ. – 1996. – № 1. – С. 70–79.
13. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 376 с.
14. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1962. – 456 с.
15. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
16. Леонов М.Я., Паняев В.А., Русинко К.Н. Зависимость между деформациями и напряжениями для полухрупких тел // Инженерный журнал. МТТ. – 1967. – № 6. – С. 26–32.
17. Паняев В.А. О деформациях и разрушении полухрупких тел: дис. ... канд. техн. наук. – Фрунзе, 1970.
18. Рычков Б.А., Гончарова И.В. Пластическая деформация и дилатансия серого чугуна // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Механика деформируемого твердого тела. – 2011. – № 4 (4). – С. 1743–1744.
19. Рычков Б.А., Паняев В.А., Гончарова И.В. Упругость и неупругость серого чугуна // Вестн. Кыргызско-Российского Славянского ун-та. – 2012. – Т. 12, № 10. – С. 70–75.
20. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // ПММ. – 1965. – Т. 29. – Вып. 4. – С. 681–689.
21. Рыбакина О.Г., Сидорин Я.С. Экспериментальное исследование закономерностей пластического разрыхления металлов // Инженерный журнал. МТТ. – 1966. – № 5. – С. 103–111.
22. Dafalias Y.F. Anisotropic hardening of initially orthotropic materials // ZAMM. – 1979. – Bd.59. – N.9. – P. 437–446.
23. Рычков Б., Гончарова И. Деформационная анизотропия конструкционных материалов // Условия текучести и деформационное упрочнение. – LAPLAMBERT Academic Publishing, 2011. – 131 с.
24. Бабел Х., Эйтман Д., Макайвер Р. Двухосное упрочнение анизотропных титановых сплавов // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1967. – № 1. – С. 15–23.
25. Hill R. Constitutive modeling of orthotropic plasticity in sheet metals // J. Mech. and Phys. Solids. – 1990. – Vol. 38. – No. 3. – P. 405–417.

References

1. Lebedev A.A., Koval'chuk B.I., Giginiak V.P., Lamashevskii F.F. Mekhanicheskie svoistva konstruktsionnykh materialov pri slozhnom napriazhennom sostoianii [The mechanical properties of structural materials under complex stress state]. Kiev: In Iure, 2003. 540 p.
2. Oleinikov A.I., Ovcharov I.O. Opredel'iaushchie uravneniia svyazi napriazhenii s deformatsiiami dlia chuguna [Constitutive equations relating stresses to strains for cast iron]. *Uchenye zapiski Komsov'mol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2013, no. III-1(15), pp. 42-46.
3. Oleinikov A.I. Osnovnye obshchie sootnosheniia modeli izotropno-uprugoi raznomodul'noi sredy [Major general relations of isotropic elastic multimodulus medium model]. *PMM – Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, vol. 57, no. 5, pp. 153-159.
4. Rasmussen K.J.R., Rondal J. Strength Curves for Metal Columns. *Journal of Structural Engineering. American Society of Civil Engineers*, 1997, vol. 123(6). pp. 721-728.
5. Rasmussen K.J.R., Rondal J. On the Strength of Cast Iron Columns. *Research Report the University of Sydney*, 2003, no. R829, 25 p.

6. Sedokov L.M. Ob uprochniaemosti serogo chuguna [On the hardenability of cast iron]. *Izvestiia Tomskogo politekhnicheskogo instituta*, 1961, vol. 96, pp. 54-58.
7. Lebedev A.A., Koval'chuk B.I., Lamashevskii V.P. O koeffitsiente poperechnoi deformatsii uglerodistoi stali i serogo chuguna pri normal'noi i nizkoi temperaturakh [On the lateral deformation coefficient of carbon steel and cast iron under normal and low temperatures]. *Problemy prochnosti*, 1971, no. 3, pp. 51-56.
8. Koval'chuk B.I. O deformirovanii polukhrupkikh tel [On deformation of semifraikle bodies]. *Problemy prochnosti*, 1982, no. 9, pp. 51-57.
9. Zhigalkin V.M., Usol'tseva O.M. Eksperimental'noe issledovanie deformatsii polukhrupkikh materialov. Soobshchenie I. Razrykhlenie pri proporsional'nom nagruzhennii [Experimental research of semifraikle materials deformation. Report I. Loosening under the proportional loading]. *Fiziko-tekhnikheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 2001, no. 6, pp. 38-45.
10. Zhigalkin V.M., Usol'tseva O.M. Eksperimental'noe issledovanie deformatsii polukhrupkikh materialov. Soobshchenie II. Uprochnenie i razrykhlenie pri slozhnom nagruzhennii [Experimental research of semifraikle materials deformation. Report II. Strengthening and loosening under complex loading]. *Fiziko-tekhnikheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 2002, no. 6, pp. 39-46.
11. Mikhailov-Mikheev P.B. Spravochnik po metallicheskim materialam turbino- i mashinostroeniia [Metallic materials of turbine and mechanical engineering reference book]. Moscow-Leningrad: Gosudarstvennoe izdatelstvo nauchno-tekhnikheskoi mashinostroitel'noi literatury, 1961. 839 p.
12. Rychkov B.A. Kontsepsiia skol'zheniia i mekhanika ortotropnogo materiala [The concept of slipping and mechanics of orthotropic material]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mechanics of solid*, 1996, no. 1, pp. 70-79.
13. Il'iushin A.A. Plastichnost' [Plasticity]. Moscow-Leningrad: OGIZ, 1948. 376 p.
14. Rabotnov Iu.N. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Moscow: Fizmatgiz, 1962. 456 p.
15. Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti [Bases of the plasticity theory]. Moscow: Nauka, 1969. 420 p.
16. Leonov M.Ia., Paniaev V.A., Rusinko K.N. Zavisimost' mezhdou deformatsiiami i napriazheniiaimi dlia polukhrupkikh tel [The relationship between the strains and stresses to semifraikle bodies]. *Inzhenernyi zhurnal. Mechanics of solid*, 1967, no. 6, pp. 26-32.
17. Paniaev V.A. O deformatsiiakh i razrushenii polukhrupkikh tel [On the strains and fracture of semifraikle bodies]. Thesis of doctor's degree dissertation. Frunze, 1970.
18. Rychkov B.A., Goncharova I.V. Plasticheskaia deformatsiia i dilatansiia serogo chuguna [Plastic strain and dilatancy of gray cast iron]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*, 2011, no. 4 (4), pp. 1743-1744.
19. Rychkov B.A., Paniaev V.A., Goncharova I.V. Uprugost' i neuprugost' serogo chuguna [Elasticity and inelasticity of gray cast iron]. *Vestnik Kyrgyzsko-Rossiiskogo Slavianskogo universiteta*, 2012, vol. 12, no. 10, pp. 70-75.
20. Novozhilov V.V. O plasticheskom razrykhlenii [About plastic loosening]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 29, no. 4, pp. 681-689.
21. Rybakina O.G., Sidorin Ia.S. Eksperimental'noe issledovanie zakonomernostei plasticheskogo razrykhleniia metallov [Experimental research the regularities plastic loosening of metals]. *Inzhenernyi zhurnal. Mechanics of solid*, 1966, no. 5, pp. 103-111.
22. Dafalias Y.F. Anisotropic hardening of initially orthotropic materials. *ZAMM*, 1979, bd.59, H.9, pp. 437-446.
23. Rychkov B., Goncharova I. Deformatsionnaia anizotropiia konstruktsionnykh materialov [Deformation anisotropy of structural materials]. *Usloviia tekuchesti i deformatsionnoe uprochnenie. LAPLAMBERT Academic Publishing*, 2011. 131 p.
24. Babel X., Eitman D., Makaiver R. Dvukhosnoe uprochnenie anizotropnykh titanovykh splavov [Biaxial hardening of anisotropic titanium alloys]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov*, 1967, no. 1, pp. 15-23.
25. Hill R. Constitutive modeling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. and Phys. Solids*, 1990, vol. 38, no. 3, pp. 405-417.