



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.19

УДК 539.3

## ГРАФОВАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

**А.А. Тырымов**

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 20 июля 2016 г.  
Принята: 25 сентября 2016 г.  
Опубликована: 30 сентября 2016 г.

#### Ключевые слова:

математическое моделирование, теория упругости, ориентированный граф, напряжения, деформация, матрица жесткости, законы Кирхгофа

### АННОТАЦИЯ

Теория графов представляет собой один из разделов дискретной математики с широким диапазоном приложений. Основываясь на простых идеях и элементах (точки и линии), теория графов строит из них богатые разнообразные формы, обеспечивает простой и доступный инструмент построения моделей и средство решения широкого круга проблем.

В работе рассматривается численный метод расчета полей деформаций и напряжений трехмерных упругих тел, дискретной моделью которых служит ориентированный граф как идеализация гипотетических приборов, необходимых для измерения деформированного состояния тела. В соответствии с предлагаемым методом упругая среда разделяется на отдельные элементы плоскостями, параллельными координатным. Для каждого элемента, полученного при декомпозиции, строим элементарную ячейку (подграф), являющуюся его моделью. Она представляет комплект измерителей, установленных на элемент для определения его деформированного состояния. Уравнение элементарной ячейки получаем, пользуясь инвариантом, сохраняющимся при преобразовании элемента в ячейку. В качестве инварианта используем энергию деформации. Описана процедура определения параметров элементарной ячейки. Граф тела конструируем с помощью операции объединения элементарных ячеек. Он отражает характер декомпозиции и является дискретной моделью анализируемого сплошного тела.

Графовый метод позволяет построить линейную аппроксимацию деформаций (соответствует квадратичной функции перемещений) на восьмиузловом шестигранном элементе с 24 степенями свободы. В методе конечных элементов (МКЭ) для такой аппроксимации требуется элемент, имеющий 20 узлов (60 степеней свободы). В результате определяющая система уравнений графового метода содержит уравнений примерно в 3 раза меньше по сравнению с системой, выведенной традиционным способом МКЭ.

Показано, что уравнения равновесия и совместности деформаций на графовой модели обеспечиваются автоматически, как следствие фундаментальных законов Кирхгофа (вершинного и контурного).

© ПНИПУ

© Тырымов Александр Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: tyrymov2010@yandex.ru

Alexander A. Tyrymov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: tyrymov2010@yandex.ru

## GRAPH MODEL OF THREE-DIMENSIONAL ELASTIC SOLIDS IN CARTESIAN COORDINATES

A.A. Tyrymov

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 20 July 2016  
Accepted: 25 September 2016  
Published: 30 September 2016

#### Keywords:

mathematical simulation,  
elasticity, directed graph,  
stress, strain, stiffness matrix,  
Kirchhoff's laws

### ABSTRACT

The theory of graphs represents an unsophisticated section of mathematics with a wide range of applications. It is based on the simple ideas and elements such as points and lines. The theory of graphs builds a rich diversity of forms from that, providing efficient tools for construction of models and means of solution to a wide range of problems.

The method of a numerical analysis of the mechanical fields in the deformable body, based on the graph model of an elastic medium in the form of the directed graph, is considered. According to the method applied the elastic medium along coordinate planes divides into separate elements. In line with this notion we establish an elementary cell configuration, a subgraph of an element, by installing hypothetical meters on an element of a solid. Derivation of cell equations, which is based on conversion of an element to a cell, relies on an invariant. We use the deformation energy as the invariant. A procedure to determine parameters of the elementary cell is described. The graph of a whole body is built following the same rule as in an elementary cell. With the use of a unit cell having 24 degrees of freedom, the strain field is approximated by linear polynomials (with corresponds to approximated of the displacement fields by quadratic polynomials). The standard finite-element method requires 60 degrees of freedom (elements with 20 nodes) for the same purpose. The proposed graphical approach thus reduces the number of equations that describe the model.

Kirchhoff's laws (apex and contour) realized in the analyzer are shown to correspond to equations of equilibrium and strain compatibility in the elastic body. The equations are of no use when determining the stress-strained state of the body in the explicit form with its model.

© PNRPU

---

## Введение

При численном решении разнообразных задач механики сплошной среды основными достаточно универсальными и широко распространенными являются методы конечных и граничных элементов в различных вариантах и сочетаниях с другими методами. Отличительная особенность этих методов состоит в том, что дискретизация подвергается не сама среда на этапе её моделирования, а уже созданная континуальная модель. Однако в ряде случаев использование дискретных подходов на более ранних этапах разработки и совершенствования моделей механики деформируемого твердого тела может привести к созданию новых эффективных численных схем и алгоритмов. Такие возможности открывает метод анализа полей деформаций и напряжений, использующий в качестве дискретных моделей сплошного тела ориентированные графы. Предлагаемый в работе подход основан на сочетании дискретных и энергетических представлений при моделировании процесса деформирования упругих сред. Дискретная модель при этом строится как первичная модель исследования, а способ перехода от континуума к системе с конечным числом степеней свободы основан прежде всего на физических соображениях. Основой для построения моделей в виде графов служит объективный характер операций измерения выбранных независимых переменных. Как известно, целью любого измерения является установление зависимости между значением переменной и показаниями прибора. В то же время измерение связано как с точками системы, между которыми оно осуществляется, так и с ориентацией измерителя. Эти свойства операции измерения можно представить направленным отрезком, т.е. дугой графа.

С точки зрения операции измерения все переменные вне зависимости от их физической природы могут быть подразделены на два типа – параллельные и последовательные [1, 2]. Параллельные переменные характерны тем, что измеритель подключается к двум точкам системы параллельно потоку энергии. Для измерения последовательных переменных прибор должен быть установлен в разрыв энергетического потока. К параллельным переменным относятся линейные и угловые разности перемещений, относительные скорости и ускорения, деформации, разности давлений, температур, электрических потенциалов и т.д. К последовательным переменным относятся силы, моменты сил, электрический ток, тепловой поток, поток жидкости или газа и другие. Выбор связной пары переменных определяется тем, что произведение последовательной и параллельной переменных должно давать скаляр с размерностью мощности или работы [2, 3].

Анализ системы на основе графового подхода сводится к тому, что 1) среда делится на части, имеющие известное математическое описание (в рассматриваемом ниже случае – закон Гука), 2) для каждой части строится подграф (элементарная ячейка), являющийся моделью этой части среды, 3) элементарные ячейки объединяются в граф – модель анализируемого тела, после чего с помощью матриц, характеризующих структуру графа, и уравнений, описывающих элементарные ячейки, получают уравнения системы в целом.

Вывод определяющей системы уравнений основан на использовании вершинного и контурного законов Кирхгофа [4]. Известно, что граф является моделью физической или технической системы только в том случае, если выбранные при его конструировании переменные удовлетворяют вершинному и контурному законам [2]. Эти законы были установлены Кирхгофом для электрических цепей применительно к токам и напряжениям. Впоследствии оказалось, что они носят фундаментальный характер и применимы ко всем последовательным и параллельным переменным, вне зависимости от их физической природы.

Согласно вершинному закону алгебраическая сумма последовательных переменных, инцидентных любой вершине графа, равна нулю, а в соответствии с контурным законом алгебраическая сумма параллельных переменных на любом замкнутом контуре равна нулю [4].

Дискретная модель деформируемого тела разрабатывалась под влиянием работ Г. Крона [5–8]. Крон, применяя аналоговое моделирование, предложил использовать электрические сети для представления самых разнообразных физических и технических систем. Он разработал эквивалентные электрические сети, предназначенные для моделирования задач гидродинамики, квантовой механики, теории упругости и пластичности, теории электрического и магнитного поля. Основное внимание в своих работах Крон обращал на универсальность возможностей при использовании уравнений, записанных в тензорной форме. Однако в работах не описан алгоритм конструирования эквивалентных электрических сетей и способы определения параметров элементарных ячеек. Подход Крона не получил распространения применительно к задачам механики сплошной среды. В работе [9] Е.Г. Кузовков обратил внимание на то, что при моделировании напряженно-деформированного состояния упругих тел можно обойтись без электромеханической аналогии, если эквивалентную электрическую сеть трактовать как ориентированный граф.

Способ конструирования графовой модели, ее конфигурация, применение специальным образом сконструированных матриц для вывода определяющей системы уравнений применительно к плоской и осесимметричной задачам теории упругости предложены Е.Г. Кузовковым и подробно изложены в [9–14]. В работе [11] на основе графовой модели построен двумерный сингулярный элемент для расчета напряженно-деформированного состояния в окрестности особых точек разреза. Использованию графового метода для анизотропии

тропных и неоднородных сред посвящены работы [16, 17]. Графовая модель упругой среды в полярной системе координат рассматривалась в [18]. В данной работе построена графовая модель упругой среды для решения пространственной задачи теории упругости.

### 1. Конструирование элементарной ячейки

Способ конструирования графа тела связан с процессом измерения полного и независимого комплекта переменных, которые однозначно характеризуют деформированное состояние элементов, полученных в результате декомпозиции.

При построении графа исследуемого тела за исходные удобно взять те переменные, которые измеряются установкой прибора непосредственно на исследуемый объект, т.е. параллельные переменные.

Элементарной ячейкой будем называть подграф, соответствующий одному элементу, полученному при разбиении исходной области на мелкие части.

При определении конфигурации элементарной ячейки в прямоугольной декартовой системе координат область, занятую телом, покрываем сетью координатных плоскостей  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ , между узлами которых устанавливаем гипотетические измерители, определяющие абсолютные нормальные деформации  $\delta_{xx}$ ,  $\delta_{yy}$ ,  $\delta_{zz}$  и деформации  $\delta_{yx}$ ,  $\delta_{xy}$ ,  $\delta_{zx}$ ,  $\delta_{xz}$ ,  $\delta_{zy}$ ,  $\delta_{yz}$ , обусловленные сдвигом. Рассмотрим шестигранный прямоугольный элемент со сторонами  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , расположенными вдоль осей  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$  соответственно. Комплект переменных, определяющих деформацию элемента, состоит из трех групп. Первая группа включает в себя  $\delta_{xx}$ ,  $\delta_{xy}$ ,  $\delta_{xz}$ , вторая –  $\delta_{yx}$ ,  $\delta_{yy}$ ,  $\delta_{yz}$ , третья –  $\delta_{zx}$ ,  $\delta_{zy}$ ,  $\delta_{zz}$ . В каждой группе одна переменная измеряется между парой точек, лежащих на определяющей оси группы, а две другие – между парой точек, находящихся на осях, перпендикулярных к определяющей. Так, например,  $\delta_{xx}$  измеряется между двумя точками оси  $ox$ ,  $\delta_{xy}$  – между парой точек, лежащих на оси  $oy$ , а  $\delta_{xz}$  – между двумя точками оси  $oz$ . При этом  $\delta_{xx}$  представляет собой нормальную абсолютную деформацию, а  $\delta_{xy}$ ,  $\delta_{xz}$  – относительные перемещения, вызванные поворотом грани со сторонами  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . Измерители принимаем в качестве дуг графа, изображаем их направленными отрезками линий, причем ориентация дуг совпадает с ориентацией осей координат. Точки, между которыми проводим измерения, считаем вершинами графа. Здесь подразумевается, что используются идеализированные приборы, т.е. такие, что ножки нескольких из них могут быть одновременно установлены в одну и ту же точку тела. Поскольку одни и те же точки среды участвуют в разных группах измерений относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то при построении графа они представляются разными вершинами. В результате получаем элементарную ячейку прямоугольного шестигранного элемента, имеющую 36 дуг и 24 вершины и состоящую из трех компонент (рис. 1).

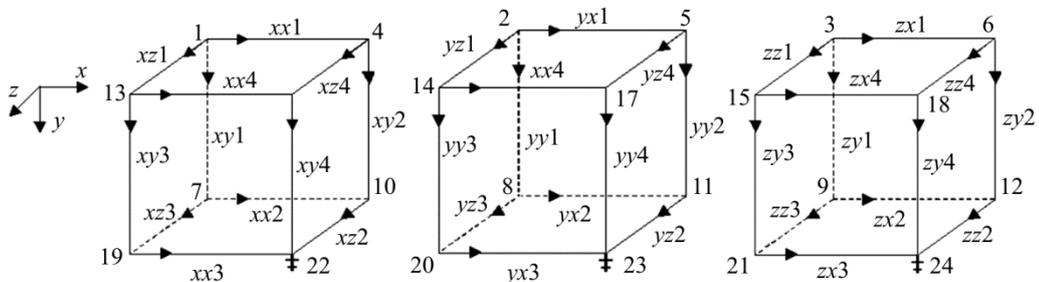


Рис. 1. Элементарная ячейка, состоящая из трех компонент  
 Fig. 1. An elementary cell consisting of three components

Вершины с номерами 22, 23, 24 – корни подграфов соответствующих компонент элементарной ячейки. Каждая из дуг графа отображает одну из следующих пар параллельных и последовательных переменных:  $(\delta_{xx}, f_{xx}), (\delta_{yy}, f_{yy}), (\delta_{zz}, f_{zz}), (\delta_{yx}, f_{yx}), (\delta_{xy}, f_{xy}), (\delta_{zx}, f_{zx}), (\delta_{xz}, f_{xz}), (\delta_{zy}, f_{zy}), (\delta_{yz}, f_{yz})$ , где  $f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}$  и  $f_{yx}, f_{xy}, f_{zx}, f_{xz}, f_{zy}, f_{yz}$  – нормальные и тангенциальные внутренние силы (обобщенные напряжения). Таким образом, дугам элементарной ячейки соответствует следующая пара векторов:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}\}_c^t &= \{f^{xx1}, \dots, f^{xx4}, f^{yy1}, \dots, f^{yy4}, \dots, f^{yz1}, \dots, f^{yz4}\}, \\ \{\mathbf{\delta}\}_c^t &= \{\delta_{xx1}, \dots, \delta_{xx4}, \delta_{yy1}, \dots, \delta_{yy4}, \dots, \delta_{yz1}, \dots, \delta_{yz4}\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где символ  $t$  обозначает операцию транспонирования, а индекс  $c$  указывает на принадлежность переменных отдельной элементарной ячейке.

## 2. Матрица жесткости прямоугольного шестигранного элемента с линейным полем деформаций

Связь элементарных векторов  $\{\mathbf{f}\}_c$  и  $\{\mathbf{\delta}\}_c$ , а также зависимость их от напряжений  $\{\sigma\}$  и деформаций  $\{\epsilon\}$  упругого тела устанавливаем, принимая в качестве инварианта при переходе к дискретной модели энергию деформации произвольного элемента среды объемом  $V$ :

$$\int_V \{\sigma\}^t \{\epsilon\} dv = \{\mathbf{f}\}_c^t \{\mathbf{\delta}\}_c, \quad (2)$$

где  $\{\mathbf{\delta}\}_c$  и  $\{\mathbf{f}\}_c$  определяются формулой (1). В результате энергию элемента в виде графа можно представить, с одной стороны, в виде

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}\}_c^t \{\mathbf{\delta}\}_c &= \sum_{i=1}^4 (f^{xxi} \delta_{xxi} + f^{yyi} \delta_{yyi} + f^{zzz} \delta_{zzz} + f^{yxi} \delta_{yxi} + f^{xyi} \delta_{xyi} + f^{zxi} \delta_{zxi} + \\ &+ f^{xzi} \delta_{xzi} + f^{zyi} \delta_{zyi} + f^{yzi} \delta_{yzi}), \end{aligned}$$

с другой стороны, энергия деформации элемента сплошной среды есть

$$\int_V \{\sigma\}^t \{\epsilon\} dv = \int_V (\sigma^{xx} \epsilon_{xx} + \sigma^{yy} \epsilon_{yy} + \sigma^{zz} \epsilon_{zz} + \sigma^{xy} \gamma_{xy} + \sigma^{xz} \gamma_{xz} + \sigma^{yz} \gamma_{yz}) dv. \quad (3)$$

Здесь напряжения связаны с деформациями законом Гука

$$\begin{aligned} \sigma^{xx} &= (\lambda + 2\mu) \epsilon_{xx} + \lambda \epsilon_{yy} + \lambda \epsilon_{zz}, \\ \sigma^{yy} &= \lambda \epsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu) \epsilon_{yy} + \lambda \epsilon_{zz}, \\ \sigma^{zz} &= \lambda \epsilon_{xx} + \lambda \epsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu) \epsilon_{zz}, \\ \sigma^{xy} &= \mu \gamma_{xy}, \sigma^{xz} = \mu \gamma_{xz}, \sigma^{yz} = \mu \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (4)$$

или в матричной форме

$$\{\sigma\} = [\mathbf{E}] \{\epsilon\}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\sigma}\}^t &= \{\sigma^{xx}, \sigma^{yy}, \sigma^{zz}, \sigma^{xy}, \sigma^{xz}, \sigma^{yz}\}, \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t &= \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}, \end{aligned}$$

а матрица упругости  $[\mathbf{E}]$  представима в блочном виде

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_t \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Матрицы  $[\mathbf{E}_n]$  и  $[\mathbf{E}_t]$  в (6) таковы:

$$[\mathbf{E}_n] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{E}_t] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

где  $\lambda, \mu$  – упругие постоянные Ламе.

При определении энергии деформации (3) требуется интегрирование выражения, содержащего неизвестные деформации и напряжения.

Для этого, учитывая дифференциальные зависимости Коши [19], аппроксимируем неизвестные деформации в пределах элемента следующими выражениями:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z,$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z,$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = d_0 + d_1x + d_2y + d_3z, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = e_0 + e_1x + e_2y + e_3z, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = f_0 + f_1x + f_2y + f_3z, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = g_0 + g_1x + g_2y + g_3z,$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = h_0 + h_1x + h_2y + h_3z, \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = i_0 + i_1x + i_2y + i_3z.$$

В результате соответствующую аппроксимацию получают

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Заметим, что поскольку аппроксимируем деформации, а не перемещения, исключается ряд проблем, возникающих при смещениях элементов как твердого тела. Кроме того, значительно сокращается размер матриц, используемых в расчетах.

В силу закона Гука (4) напряжения принимают вид

$$\sigma^{xx} = (\lambda + 2\mu)(a_0 + a_1x + a_2y + a_3z) + \lambda(b_0 + b_1x + b_2y + b_3z) + \lambda(c_0 + c_1x + c_2y + c_3z),$$

$$\sigma^{yy} = \lambda(a_0 + a_1x + a_2y + a_3z) + \lambda(b_0 + b_1x + b_2y + b_3z) + \lambda(c_0 + c_1x + c_2y + c_3z),$$

$$\sigma^{zz} = \lambda(a_0 + a_1x + a_2y + a_3z) + \lambda(b_0 + b_1x + b_2y + b_3z) + (\lambda + 2\mu)(c_0 + c_1x + c_2y + c_3z), \quad (8)$$

$$\sigma^{xy} = \mu\gamma_{xy} = \mu[d_0 + e_0 + (d_1 + e_1)x + (d_2 + e_2)y + (d_3 + e_3)z],$$

$$\sigma^{xz} = \mu\gamma_{xz} = \mu[f_0 + g_0 + (f_1 + g_1)x + (f_2 + g_2)y + (f_3 + g_3)z],$$

$$\sigma^{yz} = \mu\gamma_{yz} = \mu[h_0 + e_0 + (h_1 + e_1)x + (h_2 + e_2)y + (h_3 + e_3)z].$$

Рассматривая шестигранный элемент в форме прямоугольного параллелепипеда, поместим начало координат в центре элемента. Тогда в пределах элемента

$$\frac{-\Delta x}{2} \leq x \leq \frac{\Delta x}{2}, \quad \frac{-\Delta y}{2} \leq y \leq \frac{\Delta y}{2}, \quad \frac{-\Delta z}{2} \leq z \leq \frac{\Delta z}{2}.$$

Выразим теперь неизвестные коэффициенты в (7) через деформации сторон шестигранного элемента.

Как следует из (7)

$$\delta_{xx} = \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial u_x}{\partial x} dx = (a_0 + a_2y + a_3z) \Delta x, \quad (9)$$

$$\delta_{xy} = \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{\partial u_x}{\partial y} dy = (d_0 + d_1x + d_3z) \Delta y, \quad (10)$$

$$\delta_{xz} = \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \frac{\partial u_x}{\partial z} dz = (f_0 + f_1x + f_2y) \Delta z. \quad (11)$$

Полагая в (9) поочередно  $y = \pm \frac{\Delta y}{2}$ ,  $z = \pm \frac{\Delta z}{2}$ , получим при соответствующих комбинациях знаков

$$\begin{aligned} \delta_{xx1} &= \left( a_0 - \frac{\Delta y}{2} a_2 - \frac{\Delta z}{2} a_3 \right) \Delta x, & \delta_{xx2} &= \left( a_0 + \frac{\Delta y}{2} a_2 - \frac{\Delta z}{2} a_3 \right) \Delta x, \\ \delta_{xx3} &= \left( a_0 + \frac{\Delta y}{2} a_2 + \frac{\Delta z}{2} a_3 \right) \Delta x, & \delta_{xx4} &= \left( a_0 - \frac{\Delta y}{2} a_2 + \frac{\Delta z}{2} a_3 \right) \Delta x. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) находим, что

$$a_0 = \frac{\delta_{xx1} + \delta_{xx2} + \delta_{xx3} + \delta_{xx4}}{4\Delta x}, \quad a_2 = \frac{\delta_{xx2} - \delta_{xx1} + \delta_{xx3} - \delta_{xx4}}{2\Delta x \Delta y}, \quad a_3 = \frac{\delta_{xx3} + \delta_{xx4} - \delta_{xx1} - \delta_{xx2}}{2\Delta x \Delta z}. \quad (13)$$

Аналогично из (10),(11) получаем

$$d_0 = \frac{\delta_{xy1} + \delta_{xy2} + \delta_{xy3} + \delta_{xy4}}{4\Delta y}, \quad d_1 = \frac{\delta_{xy2} - \delta_{xy1} + \delta_{xy4} - \delta_{xy3}}{2\Delta x \Delta y}, \quad d_3 = \frac{\delta_{xy3} - \delta_{xy1} + \delta_{xy4} - \delta_{xy2}}{2\Delta y \Delta z}, \quad (14)$$

$$f_0 = \frac{\delta_{xz1} + \delta_{xz2} + \delta_{xz3} + \delta_{xz4}}{4\Delta z}, \quad f_1 = \frac{\delta_{xz2} + \delta_{xz4} - \delta_{xz1} - \delta_{xz3}}{2\Delta x \Delta z}, \quad f_2 = \frac{\delta_{xz2} + \delta_{xz3} - \delta_{xz1} - \delta_{xz4}}{2\Delta y \Delta z}.$$

На основании контурного закона, алгебраическая сумма параллельных переменных на любом замкнутом контуре  $U_x$  – компоненты элементарной ячейки равна нулю. На рис. 2 в качестве примера представлены четыре из шести контуров, образованных дугами этой компоненты при описании деформации сторон одной из граней элемента.

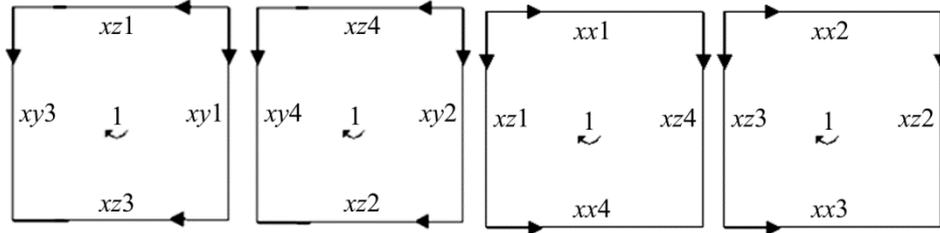


Рис. 2. Схема выбора контуров при записи уравнений Кирхгофа для параллельных переменных  $U_x$  – компоненты ячейки 1  
 Fig. 2. Scheme of cycles for Kirchhoff's equations for arcs variables of cell 1 ( $U_x$  Component)

Записывая все шесть соответствующих уравнений Кирхгофа, получим

$$\begin{aligned} \delta_{xx1} + \delta_{xy2} - \delta_{xx2} - \delta_{xy1} &= 0, & \delta_{xx4} + \delta_{xy4} - \delta_{xx3} - \delta_{xy3} &= 0, \\ \delta_{xx1} + \delta_{xz4} - \delta_{xx4} - \delta_{xz1} &= 0, & \delta_{xx2} + \delta_{xz2} - \delta_{xx3} - \delta_{xz3} &= 0, \\ \delta_{xz1} + \delta_{xy3} - \delta_{xz3} - \delta_{xy1} &= 0, & \delta_{xz4} + \delta_{xy4} - \delta_{xz2} - \delta_{xy2} &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\delta_{xx1} - \delta_{xx2} = \delta_{xy1} - \delta_{xy2}, \quad \delta_{xx4} - \delta_{xx3} = \delta_{xy3} - \delta_{xy4}, \quad (15)$$

$$\delta_{xx1} - \delta_{xx4} = \delta_{xz1} - \delta_{xz4}, \quad \delta_{xx2} - \delta_{xx3} = \delta_{xz3} - \delta_{xz2}, \quad (16)$$

$$\delta_{xz1} - \delta_{xz3} = \delta_{xy1} - \delta_{xy3}, \quad \delta_{xz4} - \delta_{xz2} = \delta_{xy2} - \delta_{xy4}. \quad (17)$$

Складывая левые и правые части уравнений (15), а также (16) и (17), получим соответственно

$$\begin{aligned} \delta_{xx1} - \delta_{xx2} + \delta_{xx4} - \delta_{xx3} &= \delta_{xy1} - \delta_{xy2} + \delta_{xy3} - \delta_{xy4}, \\ \delta_{xx1} - \delta_{xx4} + \delta_{xx2} - \delta_{xx3} &= \delta_{xz1} - \delta_{xz4} + \delta_{xz3} - \delta_{xz2}, \\ \delta_{xz1} - \delta_{xz3} + \delta_{xz4} - \delta_{xz2} &= \delta_{xy1} - \delta_{xy3} + \delta_{xy2} - \delta_{xy4}. \end{aligned} \quad (18)$$

Равенства (18) с учетом (13), (14) дают

$$a_2 = d_1, \quad a_3 = f_1, \quad f_2 = d_3. \quad (19)$$

Тот же результат следует из равенства смешанных частных производных:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z}.$$

Интегрированием вдоль соответствующих сторон элемента выражений (7), связанных с  $u_y, u_z$ , аналогично предыдущему, найдем еще 18 коэффициентов:

$$b_0 = \frac{\delta_{yy1} + \delta_{yy2} + \delta_{yy3} + \delta_{yy4}}{4\Delta y}, \quad b_1 = \frac{\delta_{yy2} + \delta_{yy4} - \delta_{yy1} - \delta_{yy3}}{2\Delta x \Delta y},$$

$$\begin{aligned}
 b_3 &= \frac{\delta_{yy3} + \delta_{yy4} - \delta_{yy2} - \delta_{yy1}}{2\Delta y \Delta z}, & e_0 &= \frac{\delta_{yx1} + \delta_{yx2} + \delta_{yx3} + \delta_{yx4}}{4\Delta x}, \\
 e_2 &= \frac{\delta_{yx3} + \delta_{yx2} - \delta_{yx1} - \delta_{yx4}}{2\Delta x \Delta y}, & e_3 &= \frac{\delta_{yx4} + \delta_{yx3} - \delta_{yx1} - \delta_{yx2}}{2\Delta x \Delta z}, \\
 h_0 &= \frac{\delta_{yz1} + \delta_{yz2} + \delta_{yz3} + \delta_{yz4}}{4\Delta z}, & h_1 &= \frac{\delta_{yz4} + \delta_{yz2} - \delta_{yz1} - \delta_{yz3}}{2\Delta x \Delta z}, \\
 h_2 &= \frac{\delta_{yz3} + \delta_{yz2} - \delta_{yz1} - \delta_{yz4}}{2\Delta y \Delta z}, & c_0 &= \frac{\delta_{zz1} + \delta_{zz2} + \delta_{zz3} + \delta_{zz4}}{4\Delta z}, \\
 c_1 &= \frac{\delta_{zz2} + \delta_{zz4} - \delta_{zz1} - \delta_{zz3}}{2\Delta x \Delta z}, & c_2 &= \frac{\delta_{zz2} + \delta_{zz3} - \delta_{zz1} - \delta_{zz4}}{2\Delta y \Delta z}, \\
 i_0 &= \frac{\delta_{zy1} + \delta_{zy2} + \delta_{zy3} + \delta_{zy4}}{4\Delta y}, & i_1 &= \frac{\delta_{zy2} + \delta_{zy4} - \delta_{zy1} - \delta_{zy3}}{2\Delta x \Delta y}, \\
 i_3 &= \frac{\delta_{zy3} + \delta_{zy4} - \delta_{zy1} - \delta_{zy2}}{2\Delta y \Delta z}, & g_0 &= \frac{\delta_{zx1} + \delta_{zx2} + \delta_{zx3} + \delta_{zx4}}{4\Delta x}, \\
 g_2 &= \frac{\delta_{zx2} + \delta_{zx3} - \delta_{zx4} - \delta_{zx1}}{2\Delta x \Delta y}, & g_3 &= \frac{\delta_{zx3} + \delta_{zx4} - \delta_{zx1} - \delta_{zx2}}{2\Delta x \Delta z}.
 \end{aligned}$$

Использование контурных законов для дуг  $U_y$ - и  $U_z$ -компонент позволяет получить равенства

$$b_1 = e_2, \quad b_3 = h_2, \quad h_1 = e_3, \quad c_1 = g_3, \quad c_2 = i_3, \quad i_1 = g_2. \quad (20)$$

Подставляя напряжения (8) в уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^{xz}}{\partial z} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \sigma^{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma^{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{yz}}{\partial y} = 0$$

и пользуясь (19), (20), получим три уравнения относительно оставшихся пока не найденными коэффициентов  $a_1, b_2, c_3, d_2, e_1, f_3, g_1, h_3, i_2$ :

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu)a_1 + \mu(d_2 + f_3) &= -(\lambda + \mu)(b_1 + c_1), \\
 (\lambda + 2\mu)b_2 + \mu(e_1 + h_3) &= -(\lambda + \mu)(a_2 + c_2), \\
 (\lambda + 2\mu)c_3 + \mu(g_1 + i_2) &= -(\lambda + \mu)(a_3 + b_3).
 \end{aligned} \quad (22)$$

С целью их определения дополнительно предположим, что

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu)a_1 &= \mu(d_2 + f_3), \quad d_2 = f_3, \\
 (\lambda + 2\mu)b_2 &= \mu(e_1 + h_3), \quad e_1 = h_3, \\
 (\lambda + 2\mu)c_3 &= \mu(g_1 + i_2), \quad g_1 = i_2.
 \end{aligned} \quad (23)$$



$$\begin{aligned}
 l_{1,10} = l_{1,12} &= K_1 x \Delta y, & l_{21} = l_{24} &= -K_1 y \Delta z, & l_{22} = l_{23} &= K_1 y \Delta z, \\
 l_{25} &= 0,5 \Delta x \Delta z - x \Delta z - z \Delta x, & l_{26} &= 0,5 \Delta x \Delta z + x \Delta z - z \Delta x, \\
 l_{27} &= 0,5 \Delta x \Delta z - x \Delta z + z \Delta x, & l_{28} &= 0,5 \Delta x \Delta z + x \Delta z + z \Delta x, \\
 l_{29} = l_{2,12} &= -K_1 y \Delta x, & l_{2,10} = l_{2,11} &= K_1 y \Delta x, & l_{31} = l_{32} &= -K_1 z \Delta y, \\
 l_{33} = l_{34} &= K_1 z \Delta y, & l_{35} = l_{36} &= -K_1 z \Delta x, & l_{37} = l_{38} &= K_1 z \Delta x, \\
 l_{39} &= 0,5 \Delta x \Delta y - x \Delta y - y \Delta x, & l_{3,10} &= 0,5 \Delta x \Delta y + x \Delta y + y \Delta x, \\
 l_{3,11} &= 0,5 \Delta x \Delta y - x \Delta y + y \Delta x, & l_{3,12} &= 0,5 \Delta x \Delta y + x \Delta y - y \Delta x.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Элементы матрицы  $[L_i]$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 l_{4,13} &= 0,5 \Delta y \Delta z - (1 + K_2) y \Delta z - z \Delta y, & l_{4,14} &= 0,5 \Delta y \Delta z + (1 + K_2) y \Delta z - z \Delta y, \\
 l_{4,15} &= 0,5 \Delta y \Delta z + (1 + K_2) y \Delta z + z \Delta y, & l_{4,16} &= 0,5 \Delta y \Delta z - (1 + K_2) y \Delta z + z \Delta y, \\
 l_{4,17} &= 0,5 \Delta x \Delta z - (1 + K_2) x \Delta z - z \Delta x, & l_{4,18} &= 0,5 \Delta x \Delta z + (1 + K_2) x \Delta z - z \Delta x, \\
 l_{4,19} &= 0,5 \Delta x \Delta z - (1 + K_2) x \Delta z + z \Delta x, & l_{4,20} &= 0,5 \Delta x \Delta z + (1 + K_2) x \Delta z + z \Delta x, \\
 l_{4,21} = l_{4,22} &= -K_2 y \Delta y, & l_{4,23} = l_{4,24} &= K_2 y \Delta y, \\
 l_{4,29} = l_{4,30} &= -K_2 x \Delta x, & l_{4,31} = l_{4,32} &= K_2 x \Delta x, \\
 l_{5,13} = l_{5,16} &= -K_2 z \Delta z, & l_{5,14} = l_{5,15} &= K_2 z \Delta z, \\
 l_{5,21} &= 0,5 \Delta y \Delta z - y \Delta z - (1 + K_2) z \Delta y, & l_{5,22} &= 0,5 \Delta y \Delta z + y \Delta z - (1 + K_2) z \Delta y, \\
 l_{5,23} &= 0,5 \Delta y \Delta z + y \Delta z + (1 + K_2) z \Delta y, & l_{5,24} &= 0,5 \Delta y \Delta z - y \Delta z + (1 + K_2) z \Delta y, \\
 l_{5,25} &= 0,5 \Delta x \Delta y - (1 + K_2) x \Delta y - y \Delta x, & l_{5,26} &= 0,5 \Delta x \Delta y + (1 + K_2) x \Delta y + y \Delta x, \\
 l_{5,27} &= 0,5 \Delta x \Delta y - (1 + K_2) x \Delta y + y \Delta x, & l_{5,28} &= 0,5 \Delta x \Delta y + (1 + K_2) x \Delta y - y \Delta x, \\
 l_{5,33} = l_{5,36} &= -K_2 x \Delta x, & l_{5,34} = l_{5,35} &= K_2 x \Delta x, \\
 l_{6,17} = l_{6,19} &= -K_2 z \Delta z, & l_{6,18} = l_{6,20} &= K_2 z \Delta z, \\
 l_{6,25} = l_{6,27} &= -K_2 y \Delta y, & l_{6,26} = l_{6,28} &= K_2 y \Delta y, \\
 l_{6,29} &= 0,5 \Delta x \Delta z - x \Delta z - (1 + K_2) z \Delta x, & l_{6,30} &= 0,5 \Delta x \Delta z + x \Delta z - (1 + K_2) z \Delta x, \\
 l_{6,31} &= 0,5 \Delta x \Delta z - x \Delta z + (1 + K_2) z \Delta x, & l_{6,32} &= 0,5 \Delta x \Delta z + x \Delta z + (1 + K_2) z \Delta x, \\
 l_{6,33} &= 0,5 \Delta x \Delta y - x \Delta y - (1 + K_2) y \Delta x, & l_{6,34} &= 0,5 \Delta x \Delta y + x \Delta y + (1 + K_2) y \Delta x, \\
 l_{6,35} &= 0,5 \Delta x \Delta y - x \Delta y + (1 + K_2) y \Delta x, & l_{6,36} &= 0,5 \Delta x \Delta y + x \Delta y - (1 + K_2) y \Delta x.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя  $\{\varepsilon\}$  из (24) в (2), получим

$$\{\mathbf{f}\}'_c \{\delta\}'_c = \int_V \{\sigma\}'^t [\mathbf{L}] \{\delta\}'_c dv = \left( \int_V \{\sigma\}'^t [\mathbf{L}] dv \right) \{\delta\}'_c.$$

Отсюда после сокращения на  $\{\delta\}_c$  и транспонирования имеем

$$\{\mathbf{f}\}_c = \int_V [\mathbf{L}]^t \{\boldsymbol{\sigma}\} dv. \quad (28)$$

Используя теперь закон Гука (5), получим

$$\{\mathbf{f}\}_c = \int_V [\mathbf{L}]^t [\mathbf{E}][\mathbf{L}]\{\delta\}_c dv.$$

Таким образом, уравнение элементарной ячейки приобретает следующий вид:

$$\{\mathbf{f}\}_c = [\mathbf{K}]_c \{\delta\}_c, \quad (29)$$

где матрица жесткости элементарной ячейки  $[\mathbf{K}]_c$  определяется выражением

$$[\mathbf{K}]_c = \int_V [\mathbf{L}]^t [\mathbf{E}][\mathbf{L}] dv.$$

Поскольку матрица  $[\mathbf{L}]$  из (25) транспонированная  $[\mathbf{L}]^t$ , а также матрица  $[\mathbf{E}]$  из (6) блочные, то уравнение (29) можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_n \\ \mathbf{f}_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix},$$

где связь между нормальными составляющими  $\{\mathbf{f}_n\}, \{\delta_n\}$  определяется матрицей

$$[\mathbf{K}_n] = \int_V [\mathbf{L}_n]^t [\mathbf{E}_n][\mathbf{L}_n] dv, \quad (30)$$

а вторая часть между тангенциальными составляющими  $\{\mathbf{f}_t\}, \{\delta_t\}$  – матрицей

$$[\mathbf{K}_t] = \int_V [\mathbf{L}_t]^t [\mathbf{E}_t][\mathbf{L}_t] dv. \quad (31)$$

Используя матричное умножение и последующее интегрирование, находим элементы матриц (30) и (31).

Матрица  $[\mathbf{K}_n]$  и  $[\mathbf{K}_t]$  имеют следующую структуру:

$$[\mathbf{K}_n] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_n^{11}] & [\mathbf{K}_n^{12}] & [\mathbf{K}_n^{13}] \\ [\mathbf{K}_n^{12}] & [\mathbf{K}_n^{22}] & [\mathbf{K}_n^{23}] \\ [\mathbf{K}_n^{13}] & [\mathbf{K}_n^{23}] & [\mathbf{K}_n^{33}] \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{K}_t] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_t^{11}] & [\mathbf{K}_t^{12}] & [\mathbf{K}_t^{13}] & 0 & 0 & 0 \\ [\mathbf{K}_t^{12}] & [\mathbf{K}_t^{22}] & 0 & 0 & [\mathbf{K}_t^{25}] & 0 \\ [\mathbf{K}_t^{13}] & 0 & [\mathbf{K}_t^{33}] & [\mathbf{K}_t^{34}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{K}_t^{34}] & [\mathbf{K}_t^{44}] & 0 & [\mathbf{K}_t^{46}] \\ 0 & [\mathbf{K}_t^{25}] & 0 & 0 & [\mathbf{K}_t^{55}] & [\mathbf{K}_t^{56}] \\ 0 & 0 & 0 & [\mathbf{K}_t^{46}] & [\mathbf{K}_t^{56}] & [\mathbf{K}_t^{66}] \end{bmatrix},$$

Элементы матриц  $[K_n^{11}]$ , ...,  $[K_t^{66}]$  получены аналитически в явном виде, но здесь не приводятся из-за их громоздкости.

### 3. Сходимость аппроксимации графового метода

Важно отметить, что континуальную модель сплошной среды удастся полностью восстановить из ее дискретной модели в виде ориентированного графа. Покажем, что при уменьшении размеров сетки вершинный и контурный законы приводят к выполнению уравнений равновесия и совместности деформаций теории упругости, что влечет за собой сходимость приближенного решения к точному.

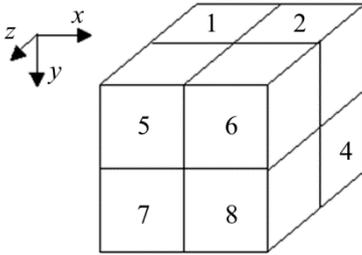


Рис. 3. Тело, состоящее из восьми элементов  
Fig. 3. A solid consisting of eight elements

Рассмотрим граф тела, состоящего из восьми элементов (рис. 3).

Он состоит из трех компонент  $U_x$ ,  $U_y$  и  $U_z$ . Для наглядности каждая компонента графа тела изображена на рис. 4 в виде двух частей. Компоненты  $U_x$ ,  $U_y$  и  $U_z$  для элементов верхнего слоя представлены на рис. 4, а, б, в, для элементов нижнего слоя – на рис. 4, г, д, е. Поэтому узлы нижней грани для первой составляющей части и верхней грани для второй составляющей части общие.

В соответствии с нумерацией центральная вершина графа тела получила для соответствующей компоненты номер 40, 41, 42 соответственно.

Согласно вершинному закону алгебраическая сумма последовательных переменных на каждой вершине графа равна нулю. Если дуга выходит из вершины, то силу, действующую на соответствующую точку элемента, принимаем положительной, если дуга входит в вершину – направление считаем отрицательным. В соответствии с этим для центральной вершины 40  $U_x$ -компоненты получим

$$\begin{aligned}
 & -f_1^{xx3} + f_2^{xx3} - f_5^{xx2} + f_6^{xx2} - f_1^{xz2} + f_5^{xz2} - f_2^{xz3} + f_6^{xz3} - f_3^{xx4} + f_4^{xx4} - \\
 & -f_7^{xx1} + f_8^{xx1} - f_3^{xz4} + f_7^{xz4} - f_4^{xz1} + f_8^{xz1} - f_6^{xy1} + f_8^{xy1} - f_5^{xy2} + f_7^{xy2} - \\
 & -f_2^{xy3} + f_4^{xy3} - f_1^{xy4} + f_3^{xy4} = 0.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь нижний индекс показывает номер ячейки, к которой относилась дуга.

Разложим значения внутренних сил элемента относительно их значений в смежных элементах в ряд Тейлора. Сохраняя два члена в разложении, получим

$$\begin{aligned}
 f_2^{xx3} &= f_1^{xx3} + \frac{\partial f_1^{xx3}}{\partial x} \Delta x + \dots, & f_6^{xx2} &= f_5^{xx2} + \frac{\partial f_5^{xx2}}{\partial x} \Delta x + \dots, \\
 f_8^{xx1} &= f_7^{xx1} + \frac{\partial f_7^{xx1}}{\partial x} \Delta x + \dots, & f_4^{xx4} &= f_3^{xx4} + \frac{\partial f_3^{xx4}}{\partial x} \Delta x + \dots, \\
 f_8^{xy1} &= f_6^{xy1} + \frac{\partial f_6^{xy1}}{\partial y} \Delta y + \dots, & f_7^{xy2} &= f_5^{xy2} + \frac{\partial f_5^{xy2}}{\partial y} \Delta y + \dots, \\
 f_4^{xy3} &= f_2^{xy3} + \frac{\partial f_2^{xy3}}{\partial y} \Delta y + \dots, & f_3^{xy4} &= f_1^{xy4} + \frac{\partial f_1^{xy4}}{\partial y} \Delta y + \dots,
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$f_8^{xz1} = f_4^{xz1} + \frac{\partial f_4^{xz1}}{\partial z} \Delta z + \dots, \quad f_5^{xz2} = f_1^{xz2} + \frac{\partial f_1^{xz2}}{\partial z} \Delta z + \dots,$$

$$f_6^{xz3} = f_2^{xz3} + \frac{\partial f_2^{xz3}}{\partial z} \Delta z + \dots, \quad f_7^{xz4} = f_3^{xz4} + \frac{\partial f_3^{xz4}}{\partial z} \Delta z + \dots.$$

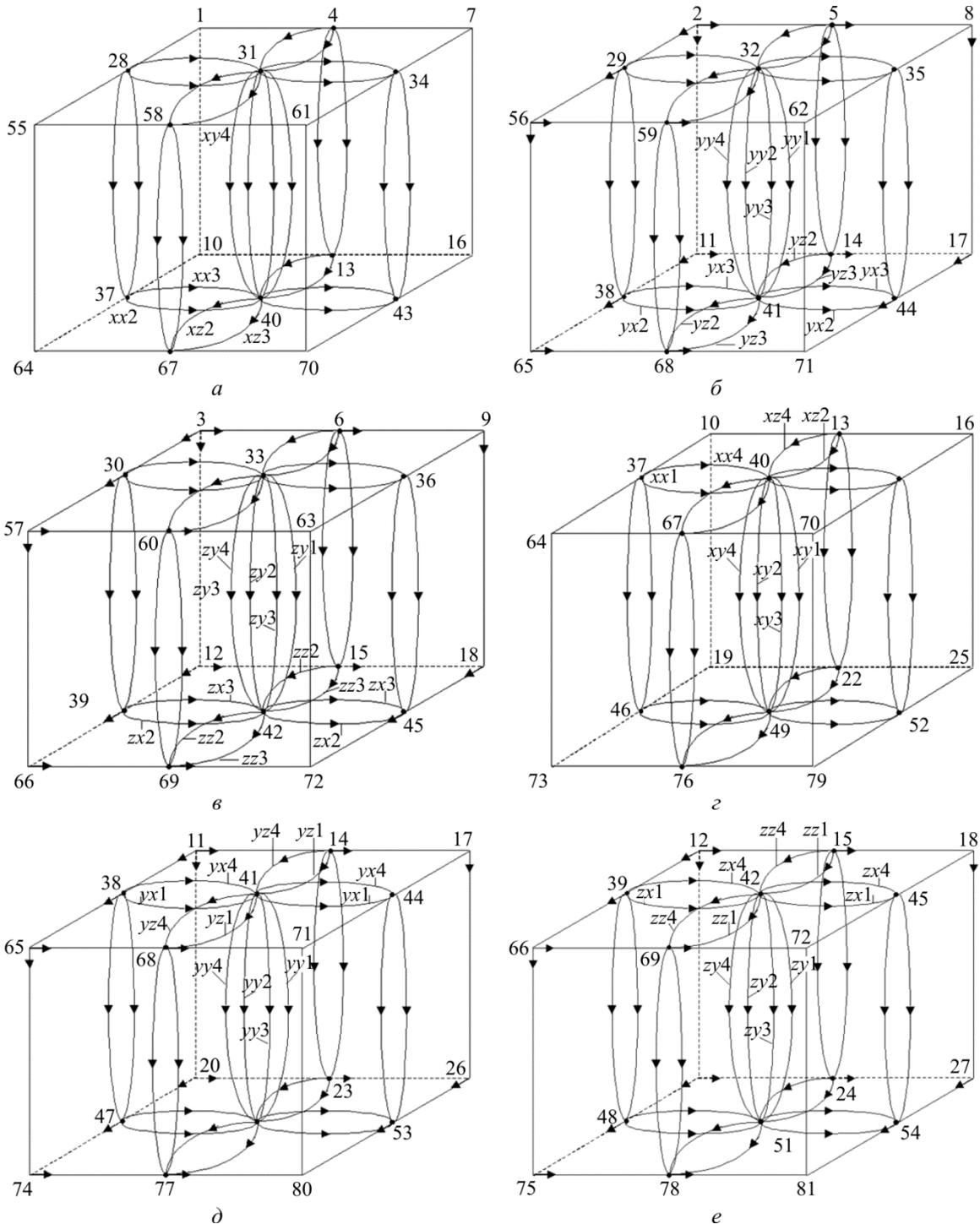


Рис. 4. Компоненты графа  $U_x, U_y, U_z$ : (а), (б), (в) – для ячеек элементов 1, 2, 5 и 6; (г), (д), (е) – для ячеек элементов 3, 4, 7 и 8

Fig. 4. Components of a graph  $U_x, U_y, U_z$ : а, б, в for cells 1, 2, 5, 6; г, д, е for cells 3, 4, 7, 8

Подставляя (33) в (32), имеем

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial f_7^{xx1}}{\partial x} + \frac{\partial f_5^{xx2}}{\partial x} + \frac{\partial f_1^{xx3}}{\partial x} + \frac{\partial f_3^{xx4}}{\partial x} \right) \Delta x + \left( \frac{\partial f_6^{xy1}}{\partial y} + \frac{\partial f_5^{xy2}}{\partial y} + \frac{\partial f_2^{xy3}}{\partial y} + \frac{\partial f_1^{xy4}}{\partial y} \right) \Delta y + \\ & + \left( \frac{\partial f_4^{xz1}}{\partial z} + \frac{\partial f_1^{xz2}}{\partial z} + \frac{\partial f_2^{xz3}}{\partial z} + \frac{\partial f_3^{xz4}}{\partial z} \right) \Delta z = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Пользуясь теперь формулой (28) и матрицей (25) и выражая внутренние силы через напряжения, уравнение (34) после изменения порядка операций дифференцирования и интегрирования представим в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta x \Delta y \Delta z} \int_V \left\{ \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left[ (l_{11} + l_{12} + l_{13} + l_{14}) \sigma^{xx} + (l_{21} + l_{22} + l_{23} + l_{24}) \sigma^{yy} + (l_{31} + l_{32} + l_{33} + l_{34}) \sigma^{zz} \right] + \right. \\ & + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \left[ (l_{4,17} + l_{4,18} + l_{4,19} + l_{4,20}) \sigma^{xy} + (l_{5,17} + l_{5,18} + l_{5,19} + l_{5,20}) \sigma^{xz} + (l_{6,17} + l_{6,18} + l_{6,19} + l_{6,20}) \sigma^{yz} \right] + \\ & \left. + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \left[ (l_{4,25} + l_{4,26} + l_{4,27} + l_{4,28}) \sigma^{xy} + (l_{5,25} + l_{5,26} + l_{5,27} + l_{5,28}) \sigma^{xz} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (l_{6,25} + l_{6,26} + l_{6,27} + l_{6,28}) \sigma^{yz} \right] \right\} dv = 0. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее равенство значения (26), (27), получим

$$\int_V \left( \frac{\partial \sigma^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^{xz}}{\partial z} \right) dv = 0,$$

откуда при произвольной области  $V$  следует первое уравнение из (21).

Точно так же уравнения вершинного закона для вершины 41  $U_y$  – компоненты и вершины 42  $U_z$  – компоненты

$$\begin{aligned} & -f_1^{yz2} + f_5^{yz2} - f_2^{yz3} + f_6^{yz3} - f_3^{yz4} + f_7^{yz4} - f_4^{yz1} + f_8^{yz1} - f_1^{yx3} + f_2^{yx3} - \\ & -f_5^{yx2} + f_6^{yx2} - f_3^{yx4} + f_4^{yx4} - f_7^{yx1} + f_8^{yx1} - f_1^{yy4} + f_3^{yy4} - f_2^{yy3} + f_4^{yy3} - \\ & -f_5^{yy2} + f_7^{yy2} - f_6^{yy1} + f_8^{yy1} = 0, \\ & -f_1^{zx3} + f_2^{zx3} - f_5^{zx2} + f_6^{zx2} - f_3^{zx4} + f_4^{zx4} - f_7^{zx1} + f_8^{zx1} - f_1^{zz2} + f_5^{zz2} - f_2^{zz3} + \\ & + f_6^{zz3} - f_3^{zz4} + f_7^{zz4} - f_4^{zz1} + f_8^{zz1} - f_1^{zy4} + f_3^{zy4} - f_5^{zy2} + f_7^{zy2} - f_6^{zy1} + f_8^{zy1} - \\ & -f_2^{zy3} + f_4^{zy3} = 0. \end{aligned}$$

приводят к двум другим уравнениям равновесия (21).

Покажем теперь, что контурный закон приводит к уравнению совместности деформаций. Рассмотрим сначала контуры, образованные дугами ячеек 1 и 3  $U_x$  – компоненты графа (рис. 5, а):

$$\delta_{xx1}^1 + \delta_{xy2}^1 - \delta_{xx2}^1 - \delta_{xy1}^1 = 0, \quad \delta_{xx1}^3 + \delta_{xy2}^3 - \delta_{xx2}^3 - \delta_{xy1}^3 = 0. \quad (35)$$

Здесь и ниже верхний индекс показывает номер ячейки, к которой относится дуга. Поскольку

$$\delta_{xx2}^1 = \delta_{xx1}^3, \quad (36)$$

из (35) получим

$$\delta_{xx1}^1 + \delta_{xy2}^1 - \delta_{xy1}^1 + \delta_{xy2}^3 - \delta_{xx2}^3 - \delta_{xy1}^3 = 0. \quad (37)$$

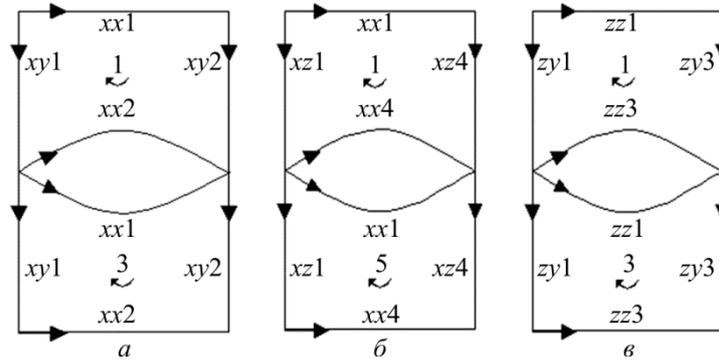


Рис. 5. Схема к записи контурных уравнений: *a* – для дуг  $U_x$  – компоненты ячеек 1 и 3; *б* – для дуг  $U_x$  – компоненты ячеек 1 и 5; *в* – для дуг  $U_z$  – компоненты ячеек 1 и 3  
 Fig. 5. Scheme of cycles for Kirchhoff's equations: *a* – for arcs of cell 1 and 3 ( $U_x$  Component); *б* – for arcs of cell 1 and 5 ( $U_x$  Component); *в* – for arcs of cell 1 and 3 ( $U_z$  Component).

Разложим деформации  $\delta_{xx2}^1, \delta_{xx2}^3$  в ряд Тейлора, сохраняя в разложении по два члена:

$$\delta_{xx2}^1 = \delta_{xx1}^1 + \frac{\partial \delta_{xx1}^1}{\partial y} \Delta y; \quad \delta_{xx2}^3 = \delta_{xx1}^3 + \frac{\partial \delta_{xx1}^3}{\partial y} \Delta y.$$

Отсюда, используя (36), получим

$$\delta_{xx2}^3 = \delta_{xx1}^3 + \frac{\partial \left( \delta_{xx1}^1 + \frac{\partial \delta_{xx1}^1}{\partial y} \Delta y \right)}{\partial y} \Delta y.$$

Следовательно,  $\delta_{xx1}^1 - \delta_{xx2}^3 = \delta_{xx1}^1 - \delta_{xx1}^3 - \left( \frac{\partial \delta_{xx1}^1}{\partial y} + \frac{\partial^2 \delta_{xx1}^1}{\partial y^2} \Delta y \right) \Delta y.$

Но  $\delta_{xx1}^1 - \delta_{xx1}^3 = \delta_{xx1}^1 - \delta_{xx2}^1 = -\frac{\partial \delta_{xx1}^1}{\partial y} \Delta y.$

Поэтому

$$\delta_{xx1}^1 - \delta_{xx2}^3 = -\left( 2 \frac{\partial \delta_{xx1}^1}{\partial y} + \frac{\partial^2 \delta_{xx1}^1}{\partial y^2} \Delta y \right) \Delta y. \quad (38)$$

Разлагая в ряд Тейлора деформации  $\delta_{xy2}^1, \delta_{xy1}^3, \delta_{xy2}^3$ , получим

$$\delta_{xy2}^1 = \delta_{xy1}^1 + \frac{\partial \delta_{xy1}^1}{\partial x} \Delta x, \quad \delta_{xy1}^3 = \delta_{xy1}^3 + \frac{\partial \delta_{xy1}^3}{\partial y} \Delta y,$$

$$\delta_{xy2}^3 = \delta_{xy1}^3 + \frac{\partial \delta_{xy1}^3}{\partial x} \Delta x = \delta_{xy1}^3 + \frac{\partial \left( \delta_{xy1}^1 + \frac{\partial \delta_{xy1}^1}{\partial y} \Delta y \right)}{\partial x} \Delta x.$$

Подставляя найденные отсюда выражения для  $\delta_{xy2}^1 - \delta_{xy1}^3, \delta_{xy2}^3 - \delta_{xy1}^3$ , а также (38) в (37), получим

$$\left( 2 \frac{\partial \delta_{xy1}^1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \delta_{xy1}^1}{\partial y \partial x} \Delta y \right) \Delta x - \left( 2 \frac{\partial \delta_{xx1}^1}{\partial y} + \frac{\partial^2 \delta_{xx1}^1}{\partial y^2} \Delta y \right) \Delta y = 0. \quad (39)$$

Учитывая, что  $\delta_{xx} \approx \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x$ ,  $\delta_{xy} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta y$ , из (39) имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0. \quad (40)$$

Рассматривая разность контуров, образованных дугами ячеек 1 и 2  $U_y$  – компоненты графа (рис. 6, а),

$$\delta_{yx1}^1 - \delta_{yx1}^2 + \delta_{yy2}^1 - \delta_{yy2}^2 - \delta_{yx2}^1 + \delta_{yx2}^2 - \delta_{yy1}^1 + \delta_{yy1}^2 = 0,$$

после аналогичных преобразований получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0. \quad (41)$$

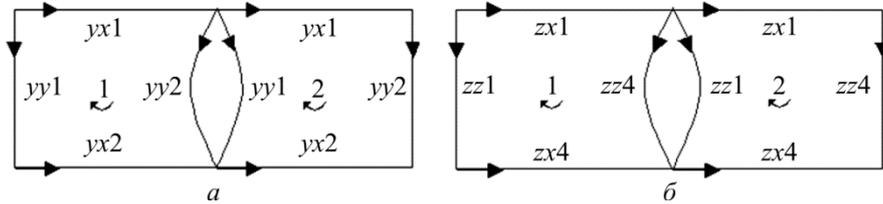


Рис. 6. Схема к записи контурных уравнений: а – для дуг  $U_y$  – компоненты ячеек 1 и 2; б – для дуг  $U_z$  – компоненты ячеек 1 и 2

Fig. 6. Scheme of cycles for Kirchhoff's equations: а – for arcs of cell 1 and 2 ( $U_y$  Component); б – for arcs of cell 1 and 2 ( $U_z$  Component)

Из уравнения (40) и (41), следует

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0$$

или первое из уравнений совместности деформаций в традиционной записи [19]

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Совершенно аналогично получим:

1) разности контуров ячеек 1 и 5  $U_x$  – компоненты (см. рис. 5, б)

$$\delta_{xx1}^1 - \delta_{xx1}^5 + \delta_{xz4}^1 - \delta_{xz4}^5 - \delta_{xx4}^1 + \delta_{xx4}^5 - \delta_{xz1}^1 + \delta_{xz1}^5 = 0$$

приводят к уравнению

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \quad (42)$$

2) разности контуров ячеек 1 и 2  $U_z$  – компоненты (см. рис. 6, б)

$$\delta_{zx1}^1 - \delta_{zx1}^2 + \delta_{zz4}^1 - \delta_{zz4}^2 - \delta_{zx4}^1 + \delta_{zx4}^2 - \delta_{zz1}^1 + \delta_{zz1}^2 = 0$$

к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad (43)$$

3) разности контуров ячеек 1 и 3  $U_z$  – компоненты (рис. 5, в)

$$\delta_{zz1}^1 - \delta_{zz1}^3 + \delta_{zy3}^1 - \delta_{zy3}^3 - \delta_{zz3}^1 + \delta_{zz3}^3 - \delta_{zy1}^1 + \delta_{zy1}^3 = 0$$

к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \quad (44)$$

4) разности контуров ячеек 1 и 5  $U_y$  – компоненты (рис. 7, а)

$$\delta_{yz1}^1 + \delta_{yy3}^1 - \delta_{yz3}^1 - \delta_{yy1}^1 - \delta_{yz1}^5 - \delta_{yy3}^5 + \delta_{yz3}^5 + \delta_{yy1}^5 = 0$$

к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right). \quad (45)$$

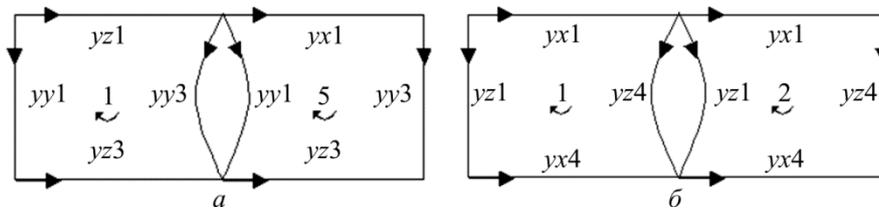


Рис. 7. Схема к записи контурных уравнений  $U_y$  – компоненты: а – для ячеек 1 и 5; б – для ячеек 1 и 2

Fig. 7. Scheme of cycles for Kirchhoff's equations: а – for arcs of cell 1 and 5 ( $U_y$  Component); б – for arcs of cell 1 and 2 ( $U_y$  Component).

Складывая уравнения (42) и (43), а также (44) и (45), получим еще два уравнения совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}.$$

Покажем, что выполняются также оставшиеся три уравнения совместности деформаций [19]. Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}. \quad (46)$$

С учетом дифференциальных зависимостей Коши запишем его в виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right). \quad (47)$$

Используя контурный закон, покажем, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right). \quad (51)$$

Действительно, разность контуров ячеек 1 и 2  $U_y$  – компоненты (рис. 7, б) дает

$$\delta_{yx1}^1 - \delta_{yx1}^2 + \delta_{yz4}^1 - \delta_{yz4}^2 - \delta_{yx4}^1 + \delta_{yx4}^2 - \delta_{yz1}^1 + \delta_{yz1}^2 = 0. \quad (52)$$

С помощью разложений в ряды Тейлора и равенства  $\delta_{yz4}^1 = \delta_{yz1}^2$  получим

$$\begin{aligned} \delta_{yz4}^1 &= \delta_{yz1}^1 + \frac{\partial \delta_{yz1}^1}{\partial x} \Delta x, \\ \delta_{yz4}^2 &= \delta_{yz1}^2 + \frac{\partial \delta_{yz1}^2}{\partial x} \Delta x = \delta_{yz4}^1 + \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta_{yz1}^1 + \frac{\partial \delta_{yz1}^1}{\partial x} \Delta x \right) \Delta x, \\ \delta_{yx4}^1 &= \delta_{yx1}^1 + \frac{\partial \delta_{yx1}^1}{\partial z} \Delta z, \quad \delta_{yx1}^2 = \delta_{yx1}^1 + \frac{\partial \delta_{yx1}^1}{\partial x} \Delta x, \\ \delta_{yx4}^2 &= \delta_{yx1}^2 + \frac{\partial \delta_{yx1}^2}{\partial z} \Delta z = \delta_{yx1}^1 + \frac{\partial \delta_{yx1}^1}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial z} \left( \delta_{yx1}^1 + \frac{\partial \delta_{yx1}^1}{\partial x} \Delta x \right) \Delta z. \end{aligned} \quad (53)$$

Пользуясь (53), из (52) получим

$$\frac{\partial^2 \delta_{yx1}^1}{\partial x \partial z} \Delta x \Delta z - \frac{\partial^2 \delta_{yz1}^1}{\partial x^2} \Delta x^2 = 0. \quad (54)$$

Так как

$$\delta_{yx} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta x, \quad \delta_{yz} \approx \frac{\partial u_y}{\partial z} \Delta z, \quad (55)$$

то после подстановки (55) в (54) и сокращения на  $\Delta x^2 \Delta z$  приходим к (48).

Точно так же уравнение (49) может быть получено из контурных законов, примененных к дугам ячеек 1 и 2  $U_z$  – компоненты, а уравнения (50) и (51) из тех же законов для контуров  $U_x$  – компоненты ячейки 1, изображенных на рис. 3. В результате из справедливости равенства (47) следует уравнение совместности деформаций (46).

Аналогично доказывается выполнение двух последних уравнений совместности деформаций

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right),$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right).$$

Таким образом, уравнения равновесия и совместности деформаций, входящие в традиционную постановку задач теории упругости, на графовой модели обеспечиваются автоматически, как следствие присущих графу фундаментальных зависимостей – вершинного и контурного законов. В связи с этим меняется роль уравнений равновесия и совместности деформаций – из основных соотношений при определении напряженно-деформированного состояния они превращаются во вспомогательный инструмент, позволяющий проконтролировать правильность построения графовой модели.

## Выводы

1. С помощью графового подхода построена матрица жесткости для восьмиузлового шестигранного упругого элемента с 24 степенями свободы при линейной аппроксимации деформаций. В методе конечных элементов (МКЭ) для такой аппроксимации требуется элемент, имеющий 20 узлов (60 степеней свободы) [20]. В результате определяющая система уравнений графового метода содержит уравнений примерно в 3 раза меньше по сравнению с системой, получаемой традиционным способом МКЭ.

2. Показано, что фундаментальные законы теории графов (вершинный и контурный) обеспечивают выполнение условий равновесия и совместности деформаций для любого элемента, полученного при разбиении исходной области на мелкие части.

## Библиографический список

1. Oster G., Auslander D. Topological representation of thermodynamic system. Part 1: Basic concepts // J. Franklin Inst. – 1971. – Vol. 292. – No. 1. – P. 1–17.
2. Trent H. Isomorphism between oriented linear graphs and lumped physical systems // J. of the Acoustical Soc. of America. – 1955. – Vol. 27 – No. 3. – P. 500–527.
3. Trent H. On the construction of schematic diagrams for mechanical systems // J. of the Acoustical Soc. of America. – 1958. – Vol. 30 – No. 8. – P. 795–800.
4. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984. – 454 с.
5. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика. – М.: Наука, 1972. – 542 с.
6. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Советское радио, 1978. – 720 с.
7. Kron G. Equivalent circuits of the elastic field // J. Appl. Mech. – 1944. – Sept. – Vol. 11. – P. A149–A161.
8. Kron G. Tensorial analysis and equivalent circuitry of elastic structures // J. Franklin Inst. – 1944. – Vol. 238. – No. 6. – P. 399–442.
9. Кузовков Е.Г. Конфигурация и параметры графовой модели упругого тела // Пробл. прочн. – 1986. – № 4. – С. 98–103. DOI:10.1007/BF01524081
10. Кузовков Е.Г. Уравнения состояния графовой модели упругого тела // Пробл. прочн. – 1986. – № 5. – С. 112–117. DOI: 10.1007/BF01522789
11. Kuzovkov E.G. Axisymmetric Graph Model of an Elastic Solid // Пробл. прочн. – 1996. – № 6. – С. 83–103. DOI: 10.1007/BF02209319

12. Кузовков Е.Г. Графовая модель упругой среды в декартовой системе координат // Пробл. прочн. – 1993. – № 12. – С. 60–70. DOI: 10.1007/BF00774638
13. Кузовков Е.Г. Графовая модель упругого тела в смешанных переменных // Пробл. прочн. – 1986. – № 6. – С. 88–92. DOI: 10.1007/BF001523964
14. Кузовков Е.Г., Тырымов А.А. Графовые модели в плоской и осесимметричной задачах теории упругости / ИУНЛ ВолгГТУ. – Волгоград, 2010. – 128 с.
15. Тырымов А.А. Сингулярный элемент графовой модели упругой среды в декартовой системе координат // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 125–136. DOI: org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.47
16. Тырымов А.А. Осесимметричная графовая модель упругого тела с переменным модулем упругости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия: Физико-математические науки. – 2012. – № 2. – С. 103–114. DOI: 10.14498/vsgtu914
17. Тырымов А.А. Численное моделирование и анализ напряжённо-деформированного состояния анизотропного массива горных пород на основе графового метода // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2012. – № 5. – С. 52–66. DOI: 10.1134/s1062739148050061
18. Тырымов А.А. Графовая модель упругой среды в полярной системе координат // Изв. вузов. Машиностроение. – 1999. – № 1. – С. 3–15
19. Демидов С.П. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
20. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.

## References

1. Oster G., Auslander D. Topological representation of thermodynamic system. Part: 1. Basic concepts, *J. Franklin Inst.*, 1971, vol. 292, no. 1, pp. 1-17.
2. Trent H. Isomorphism between oriented linear graphs and lumped physical systems, *J. of the Acoustical Soc. of America*, 1955, vol. 27, no. 3, pp. 500-527.
3. Trent H. On the construction of schematic diagrams for mechanical systems, *J. of the Acoustical Soc. of America*, 1958, vol. 30, no. 8, pp. 795-800.
4. Svami M., Thulasiraman K. *Grafy, seti i algoritmy*. М.: Mir, 1984. – 454 s. [Graphs, Networks and Algorithms. New York: John Wiley, 1981, 592 p.]
5. Kron G. *Diakoptics – Piecewise Solutions of Large Scale Systems*. London: MacDonald, 1963.
6. Kron G. *Tensor Analysis of Networks*. London: MacDonald, 1965.
7. Kron G. Equivalent circuits of the elastic field // *J. Appl. Mech.* – 1944. – Sept. – Vol. 11, pp. A149-A161.
8. Kron G. Tensorial analysis and equivalent circuitry of elastic structures // *J. Franklin Inst.*, 1944, vol. 238, no. 6, pp. 399-442.
9. Kuzovkov E.G. Configuration and parameters of the graph models of an elastic body, *Strength of Materials*, 1986, vol. 18, no. 4, pp. 528-534. DOI: 10.1007/BF01524081
10. Kuzovkov E.G. Equations of state the graph model of an elastic body, *Strength of Materials*, 1986, vol. 18, no. 5, pp. 698-704. DOI: 10.1007/BF01522789
11. Kuzovkov E.G. Axisymmetric graph model of an elastic solid, *Strength of Materials*, 1996, vol. 28, no. 6, pp. 470-485. DOI: 10.1007/BF02209319
12. Kuzovkov E.G. Graph model of elastic medium in the Cartesian system of coordinates, *Strength of Materials*, 1993, vol. 25, no. 12, pp. 904-914. DOI: 10.1007/BF00774638
13. Kuzovkov E.G. Graph model of an elastic body in mixed variables, *Strength of Materials*, 1986, vol. 18, no. 6, pp. 807-813. DOI: 10.1007/BF001523964
14. Kuzovkov E.G., Тырымов А.А. Графовые модели в плоской и осесимметричной задаче теории упругости. [Graph model in plane and axisymmetric problems of the theory of elasticity] Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2010, 128 p.

15. Тырымов А.А. Singuljarnyj jelement grafovoj modeli uprugoj sredy v dekartovoj sisteme koordinat [A singular element of graph model of an elastic medium in a cartesian coordinate system]. *Vychislitel'naja mehanika sploshnyh sred – Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 125-136. DOI: org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.47
16. Тырымов А.А. Osesimmetrichnaja grafovaja model' uprugogo tela s peremennym modulem uprugosti [Axisymmetric graph model of an elastic solid with varying modulus of elasticity]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Serija: Fiziko-matematičeskie nauki*, 2012, no. 2 (27), pp. 103-114. DOI:10.14498/vsgtu914
17. Тырымов А.А. Numerical modeling and analysis of the stress-strain state in an anisotropic rock mass by the method of graphs, *Journal of Mining Science*, 2012, vol. 48, is. 5, pp. 812-824. DOI: 10.1134/s1062739148050061
18. Тырымов А.А. Grafovaja model' uprugoj sredy v poljarnoj sisteme koordinat [The graph models of an elastic medium in polar coordinates]. *Izvestija vuzov. Mashinostroenie*, 1999, no. 1, pp. 3-15.
19. Demidov S.P. Teorija uprugosti [Theory of Elasticity]. Moscow, Vysshaja škola, 1979, 432 p.
20. Gallager R. Metod konečnyh jelementov. Osnovy [Finite Element Analysis:Fundamentals]. Prentice-hall, 1975, 428 p.