



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.02

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НАГРЕТЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ

С.А. Бочкарев, С.В. Лекомцев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 11 июля 2015 г.
Принята: 29 октября 2015 г.
Опубликована: 25 декабря 2015 г.

Ключевые слова:

цилиндрическая оболочка, функционально-градиентный материал, температурное нагружение, потенциальная жидкость, метод конечных элементов, собственные колебания

АННОТАЦИЯ

Представлены результаты исследований собственных колебаний нагретых круговых цилиндрических оболочек, содержащих неподвижную идеальную жидкость и выполненных из функционально-градиентных материалов. Температурно-зависимые эффективные свойства материала, состоящего из смеси оксида циркония и сплава титана, изменяются по толщине оболочки согласно степенному закону. Распределение температуры по радиальной координате определяется из решения квазилинейного одномерного уравнения теплопроводности. В качестве математической формулировки задачи динамики оболочки используется классическая теория оболочек и принцип возможных перемещений. Поведение жидкости описывается в рамках потенциальной теории. Соответствующее волновое уравнение совместно с условием непроницаемости и граничными условиями преобразуются к системе уравнений с использованием метода Бубнова–Галеркина. В результате решение задачи, осуществляемое с помощью полуаналитического варианта метода конечных элементов, сводится к вычислению комплексных собственных значений связанной системы уравнений. Достоверность результатов, получаемых в рамках разработанного алгоритма, оценена путем сравнения с известными численно-аналитическими решениями. Для круговых цилиндрических оболочек с различными вариантами граничных условий продемонстрированы зависимости минимальных частот колебаний от температурной нагрузки при разных консистенциях функционально-градиентного материала. Определены критические значения температур при разных условиях нагрева и геометрических размерах. Проанализировано различие, оказываемое нагревом на динамические свойства пустых оболочек и оболочек, взаимодействующих с жидкостью. Показано, что наличие жидкости внутри оболочки проявляет наиболее существенное влияние на колебательные характеристики нагретых консольно закрепленных оболочек.

© ПНИПУ

© Бочкарев Сергей Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: bochkarev@icmm.ru

Лекомцев Сергей Владимирович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: lekomtsev@icmm.ru

Sergey A. Bochkarev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: bochkarev@icmm.ru

Sergey V. Lekomtsev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: lekomtsev@icmm.ru

NATURAL VIBRATIONS OF HEATED FUNCTIONALLY GRADED CYLINDRICAL SHELLS WITH FLUID

S.A. Bochkarev, S.V. Lekomtsev

Institute of Continuous Media Mechanics RAS, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 11 July 2015
Accepted: 29 October 2015
Published: 25 December 2015

Keywords:

cylindrical shell, functionally graded material, thermal loading, potential fluid, finite element method, natural vibrations

ABSTRACT

The paper presents the results of studying the natural vibrations of heated cylindrical circular FGM shells containing a quiescent ideal liquid. The temperature dependent effective properties of the material representing a mixture of zirconium oxide and titanium alloy vary through the thickness of the shell according to the power law. The distribution of temperature along the radial coordinate is determined by solving a quasi-linear one-dimensional heat conduction equation. A mathematical formulation of the problem is based on the classical theory of shells and the principle of virtual displacements. The behavior of the liquid is described in the framework of the potential theory. The corresponding wave equation together with the impermeability condition and boundary conditions are transformed into a system of equations using the Bubnov-Galerkin method. As a result, the solution of the problem, which is sought with the use of semi-analytical version of the finite element method, reduces to calculations of complex eigenvalues of the coupled system of equations. The reliability of the results, obtained by application of the developed algorithm, is verified through a comparison with the known numerical-analytical solutions. The data obtained for circular cylindrical shells with different boundary conditions have revealed the dependence of the minimal vibration frequency on temperature at different volume fractions of FGM. The critical values of temperature have been determined for different heating regimes and geometrical dimensions. The difference between the dynamic properties of empty and liquid-containing shells caused by heating has been analyzed. It has been shown that in the case of cantilevered shells the presence of liquid inside the shell exerts the most notable effect on the vibrational behavior of the system.

© PNRPU

Введение

При всем многообразии численно-аналитических и численных работ, посвященных исследованию конструкций, выполненных из функционально-градиентных (ФГ) материалов [1], только в незначительном числе статей затрагиваются вопросы их взаимодействия с газообразной [2–6], а также неподвижной [7–10] или текущей [11–13] жидкой средой. Такой ограниченный список источников не является очевидным, поскольку высокие жаропрочные свойства, обусловленные использованием керамики в качестве одного из составляющих, подразумевают применение ФГ-материалов в авиационной и ракетной технике, где упругие конструкции взаимодействуют с нагретым потоком жидкости или газа. Только в некоторых из вышеперечисленных работ учитывается температурное нагружение, а свойства материала принимаются зависимыми от температуры. Однако для упрощения используется постановка, в которой коэффициенты теплопроводности не зависят от температуры. Такое допущение позволяет использовать аналитическое выражение для нахождения распределения температуры по толщине оболочки. Более точная формулировка требует непосредственного численного решения квазилинейного уравнения теплопроводности. Несмотря на то, что получаемые результаты достовернее описывают поведение реальных машиностроительных конструкций, этот подход распространен в меньшей степени [14–17].

Ни в одной из указанных работ, где рассматриваются ФГ-оболочки, содержащие неподвижную жидкость, не принимаются во внимание температурные нагрузки. Влияние

различных параметров на собственные частоты колебаний свободно опертых ФГ-оболочек с жидкостью исследовалось в [7] при помощи трехмерных уравнений теории упругости. В работе [8] оценено влияние различных комбинаций граничных условий на собственные частоты колебаний оболочки, заполненной жидкостью и выполненной из стали и никеля. Аналогичный подход используется в [9] для анализа расположенной на упругом основании оболочки с жидкостью. Представленные в этих статьях численно-аналитические решения применимы лишь к цилиндрическим оболочкам, содержащим несжимаемую жидкость, потому что гидродинамическое давление вычисляется с помощью аналитического выражения, записанного относительно функций Бесселя. Более общая формулировка, основанная на использовании метода конечных элементов, предложена в работе [10]. Здесь исследовалось влияние различных комбинаций граничных условий на собственные частоты колебаний оболочек с различными геометрическими размерами. Таким образом, влияние температурной нагрузки на спектр собственных частот цилиндрических оболочек, содержащих неподвижную жидкость, остается не изученным. В связи с этим нашей целью является проведение такого анализа при различных комбинациях кинематических граничных условий. Моделирование жидкости осуществляется в рамках потенциальной теории, согласно которой единственной искомой величиной является потенциал скорости. В результате решение задачи сводится к вычислению комплексных собственных значений несимметричной матрицы. Отметим, что незначительная модификация алгоритма позволяет учитывать как течение, так и вращение невязкой сжимаемой жидкости или газа [18–19].

1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассматривается выполненная из функционально-градиентного материала упругая цилиндрическая оболочка (рис. 1) длиной L и радиусом R , внутри которой находится идеальная сжимаемая жидкость плотностью ρ_f . Одна поверхность оболочки, например наружная, нагревается до заданной температуры T_o , тогда как температура другой всегда остается равной $T_i = 300$ К. Целью работы является исследование влияния свойств ФГ-материала на собственные колебания нагретой оболочки при различных вариантах кинематических граничных условий и линейных размерах конструкции.

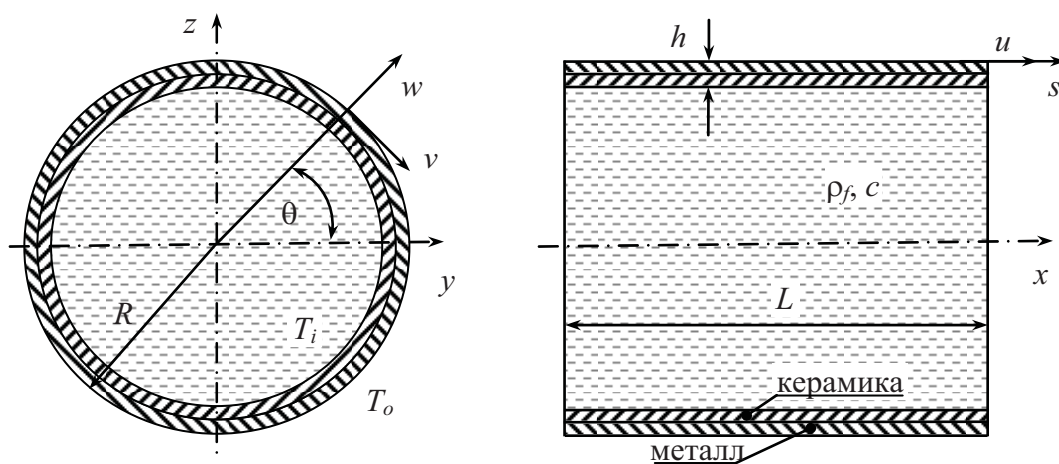


Рис. 1. Содержащая жидкость цилиндрическая оболочка, выполненная из функционально-градиентного материала

Для описания неподвижной жидкости в области V_f вводится в рассмотрение потенциал скорости φ , который в цилиндрической системе координат (r, θ, x) в случае малых возмущений описывается волновым уравнением [20]

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где c – скорость звука в жидкости. Давление жидкости P_f на упругую конструкцию вычисляется по линеаризованной формуле Бернулли

$$P_f = -\rho_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{ на поверхности } S_\sigma = S_f \cap S_s. \quad (2)$$

Здесь s – меридиональная координата оболочки; S_f, S_s – площади, ограничивающие объемы жидкости и оболочки соответственно. На поверхности раздела оболочка–жидкость S_σ задается условие непроницаемости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (3)$$

где n – нормаль к поверхности; w – нормальная составляющая вектора перемещений оболочки. Потенциал скорости подчиняется следующим граничным условиям:

$$x = 0: \varphi = 0, \quad x = L: \partial \varphi / \partial x = 0. \quad (4)$$

Для дальнейшей численной реализации задачи на основе полуаналитического варианта метода конечных элементов (МКЭ) дифференциальное уравнение для потенциала скорости (1) с граничными условиями (3) и (4) преобразуются с помощью метода Бубнова–Галеркина [18].

Компоненты вектора деформации в криволинейной системе координат (s, θ, z) определяются с помощью классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява. Для эквидистантной поверхности они могут быть записаны следующим образом [21]:

$$\varepsilon_{11} = E_{11} + zk_{11}, \quad \varepsilon_{22} = E_{22} + zk_{22}, \quad \varepsilon_{12} = E_{12} + zk_{12},$$

где

$$E_{11} = \varepsilon_1 + 1/2 \theta_1^2, \quad k_{11} = k_1, \quad (1 \Leftrightarrow 2), \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + \theta_1 \theta_2, \quad k_{12} = 2\tau \quad (5)$$

и

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \theta_1 = -\frac{\partial w}{\partial s},$$

$$\theta_2 = \frac{1}{R} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad k_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad k_2 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \quad \tau = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right).$$

Здесь u, v – меридиональная и окружная составляющие вектора перемещений; θ_i – углы поворота недеформируемой нормали.

Компоненты деформаций срединной поверхности (5) в матричной форме можно представить в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_* + 1/2 \mathbf{E} \mathbf{e},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \{E_{11}, E_{22}, E_{12}, k_{11}, k_{22}, k_{12}\}^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}_* = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, k_1, k_2, 2\tau\}^T$ – линейная часть деформации, $\mathbf{e} = \{0, 0, 0, 0, \theta_1, \theta_2, 0, 0, 0\}^T$; \mathbf{E} – матрица линейных множителей, которая имеет ненулевые компоненты $E_{15} = \theta_1$, $E_{16} = \theta_2$, $E_{35} = \theta_2$, $E_{36} = \theta_1$.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов $\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$ и вектором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, запишем в матричном виде:

$$\mathbf{T} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\mathbf{T}}^{th} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} - \begin{Bmatrix} \mathbf{T}^{th} \\ \mathbf{M}^{th} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где $\mathbf{T}^{th} = \{T_{11}^{th}, T_{22}^{th}, 0\}^T$ и $\mathbf{M}^{th} = \{M_{11}^{th}, M_{22}^{th}, 0\}^T$ – векторы температурных усилий и моментов. Коэффициенты, входящие в матрицу жесткостей \mathbf{D} , и температурные компоненты определяются как

$$(\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{ij}, \bar{c}_{ij}) = \int_h (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (7)$$

$$(T_{ii}^{th}, M_{ii}^{th}) = \int_h (1, z) \bar{Q}_{ij} \boldsymbol{\alpha} \Delta T dz, \quad \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{eff}(z, T), \alpha_{eff}(z, T), 0\}^T, \quad (8)$$

где

$$\bar{Q}_{11} = \bar{Q}_{22} = E_{eff}(z, T) / [1 - \nu_{eff}^2(z, T)], \quad \bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} = \nu_{eff}(z, T) \bar{Q}_{11}, \\ \bar{Q}_{33} = E_{eff}(z, T) / 2 / [1 + \nu_{eff}(z, T)].$$

Здесь ΔT – перепад температуры относительно значения, не приводящего к появлению начальных напряжений (300 К); h – толщина оболочки; $E_{eff}(z, T), \nu_{eff}(z, T), \alpha_{eff}(z, T)$ – эффективные модуль упругости, коэффициенты Пуассона и температурного расширения материала. Для ФГ-материала эти характеристики определяются свойствами составляющих его материалов P и их объемными долями \bar{V} . В случае функционально-градиентного материала, представляющего собой смесь металла m и керамики c [22],

$$P_{eff} = P_m \bar{V}_m + P_c \bar{V}_c.$$

В случае оболочки постоянной толщины объемные доли являются функциями радиальной координаты z , отсчитываемой от срединной поверхности, и изменяются согласно степенному закону

$$\bar{V}_c = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^N, \quad \bar{V}_m = 1 - \bar{V}_c,$$

где N – показатель объемной доли, изменяющийся от нуля до бесконечности. С учетом последнего представления эффективные характеристики, под которыми, помимо перечисленных выше, понимаются также плотность материала $\rho_{eff}(z, T)$ и коэффициент теплопроводности $k_{eff}(z, T)$, вычисляются следующим образом:

$$P_{eff}(z, T) = P_m(T) + [P_c(T) - P_m(T)] \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^N.$$

Температурно-зависимые свойства материала определяются как

$$P(T) = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3).$$

Здесь $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ – коэффициенты температуры T , уникальные для каждого материала. Распределение температуры по толщине оболочки находится из численного решения квазилинейного уравнения установившейся теплопроводности с соответствующими граничными условиями

$$\frac{d}{dz} \left[k_{eff}(z, T) \frac{dT}{dz} \right] = 0, \quad T|_{z=-h/2} = T_i, \quad T|_{z=h/2} = T_o. \quad (9)$$

Для математической формулировки задачи используется принцип возможных перемещений. С дополнительным слагаемым, учитывающим предварительное нагружение, его можно представить в матричной форме [23]:

$$\int_S \delta \boldsymbol{\varepsilon}_*^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_* dS + \int_S \delta \mathbf{d}^T \rho_0 \ddot{\mathbf{d}} dS + \int_S \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{e} dS - \int_S \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P} dS = 0. \quad (10)$$

Здесь \mathbf{d} и $\mathbf{P} = \{0 \quad 0 \quad P_f\}^T$ – векторы обобщенных перемещений и поверхностных нагрузок, $\rho_0 = \int_h \rho_{eff}(z, T) dz$. Матрица $\boldsymbol{\sigma}^0$, элементы которой находятся из условия $\mathbf{E}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_*^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{e}$, имеет следующие ненулевые компоненты: $\sigma_{55}^0 = T_{11}$, $\sigma_{66}^0 = T_{22}$. Здесь верхний индекс «0» означает начальное равновесное состояние, а усилия T_{ii} вычисляются по формуле (6).

2. Численная реализация

Численное решение задачи осуществляется с использованием полуаналитического варианта МКЭ [24], основанного на представлении решения в виде ряда Фурье по окружной координате θ :

$$(u, w, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} (u_j, w_j, \varphi_j) \cos j\theta, \quad v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \sin j\theta, \quad (11)$$

где j – номер гармоники.

Выражая в (11) искомые переменные через их узловые значения, получим для произвольных конечных элементов оболочки и жидкости

$$\mathbf{U} = \{u, v, w\}^T = \mathbf{N} \mathbf{d}^e, \quad (12)$$

$$\varphi = \mathbf{F} \mathbf{f}^e, \quad (13)$$

где \mathbf{N} и \mathbf{F} – матрицы функций формы оболочечного конечного элемента и потенциала скорости; \mathbf{d}^e и \mathbf{f}^e – векторы узловых значений. Для оболочек используется конечный элемент в виде усеченного конуса с аппроксимацией меридиональной и окружной компонент вектора перемещений линейным полиномом, а нормальной компоненты – кубическим полиномом. Для жидкости применяется треугольный конечный элемент с линейной аппроксимацией потенциала скорости. С учетом (12)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_* = \mathbf{B}\mathbf{d}^e, \quad \mathbf{e} = \mathbf{G}\mathbf{d}^e, \quad (14)$$

где \mathbf{B} и \mathbf{G} – матрицы связи деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_*$ и \mathbf{e} с узловыми значениями.

Применяя стандартные процедуры МКЭ, получим из преобразованного волнового уравнения для потенциала скорости и принципа возможных перемещений (10) с учетом (12)–(14) связанную систему двух уравнений. Ее можно записать в матричном виде, представляя возмущенное движение оболочки и жидкости как $(\mathbf{d}, \boldsymbol{\varphi}) = (\mathbf{q}, \mathbf{f}) \exp(i^* \omega t)$.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i^* \omega \mathbf{C}) \{\mathbf{q}, \mathbf{f}\}^T = 0, \\ & \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_g & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_{sf} \\ \mathbf{C}_{fs} & 0 \end{bmatrix}, \\ & \mathbf{K}_s = \sum_{m_s} \int_{S_s} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS, \quad \mathbf{M}_s = \sum_{m_s} \int_{S_s} \mathbf{N}^T \rho_0 \mathbf{N} dS, \quad \mathbf{M}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV, \\ & \mathbf{K}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dV, \quad \mathbf{C}_{fs} = - \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{N}} dS, \\ & \mathbf{C}_{sf} = \rho_f \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{F} dS, \quad \mathbf{K}_g = \sum_{m_s} \int_{S_s} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{G} dS. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь m_f и m_s – число конечных элементов, на которые разбиваются области жидкости и оболочки; $\bar{\mathbf{N}}$ – матрица функций формы нормальной составляющей вектора перемещения оболочки; ω – характеристический показатель, в общем случае являющийся комплексным; $i^* = \sqrt{-1}$.

Таким образом, задача о свободных колебаниях нагретой цилиндрической ФГ-оболочки, содержащей неподвижную жидкость, сводится к выполнению следующей последовательности шагов:

- из решения квазилинейного уравнения (9) определяется распределение температуры по толщине оболочки $\Delta T(z)$ при заданных граничных условиях на внутренней T_i и наружной T_o поверхностях. Соответствующий алгоритм подробно описан в [14];
- на основе полученного распределения температуры по толщине оболочки вычисляется вектор температурных усилий и моментов $\bar{\mathbf{T}}^{th}$;
- из решения осесимметричной статической задачи $\mathbf{K}_s \mathbf{d} = \mathbf{P}_0$, где $\mathbf{P}_0^e = \int_{S_s} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{T}}^{th} dS$, по формуле (6) формируются компоненты матрицы начальных усилий и моментов $\boldsymbol{\sigma}^0$;
- в результате применения итерационного алгоритма на основе метода Мюллера [25], из решения системы (15) определяются и анализируются собственные частоты ω .

3. Результаты расчетов

В численных примерах рассматривается цилиндрическая функционально-градиентная оболочка ($h = 1 \times 10^{-3}$ м), выполненная из оксида циркония и сплава титана. Физико-механические характеристики составляющих материалов приведены в табл. 1. Расчеты выполнялись для нескольких конфигураций (табл. 2), в которых чередуются базовые материалы и условия нагрева на внутренней и наружной поверхностях оболочки. Вычисле-

ния осуществлялись для оболочек, один край которых всегда жестко закреплен ($u = v = w = \partial w / \partial s = 0, C$). На другом краю задаются следующие граничные условия: свободное опирание ($v = w = 0, S$), жесткое закрепление, свободный край (F). Численными экспериментами было установлено, что для достижения приемлемой точности вычислений достаточно 40 оболочечных конечных элементов и 1000 элементов для жидкости.

Таблица 1

Физико-механические свойства составляющих материалов и их зависимость от температуры

| Свойства | P_0 | P_{-1} | P_1 | P_2 | P_3 |
|------------------------------|-------------------------|----------|--------------------------|-------------------------|---------------------------|
| Оксид циркония, ZrO_2 [26] | | | | | |
| $\rho, \text{кг/м}^3$ | $5,7000 \times 10^3$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $E, \text{Па}$ | $2,4427 \times 10^{11}$ | 0 | $-1,3707 \times 10^{-3}$ | $1,2139 \times 10^{-6}$ | $-3,6814 \times 10^{-10}$ |
| ν | 0,2882 | 0 | $1,1335 \times 10^{-4}$ | 0 | 0 |
| $\alpha, 1/\text{К}$ | $1,2766 \times 10^{-5}$ | 0 | $-1,4900 \times 10^{-3}$ | $1,0 \times 10^{-6}$ | $-0,6775 \times 10^{-11}$ |
| $k, \text{Вт/мК}$ | 1,7 | 0 | $1,2760 \times 10^{-4}$ | $6,6485 \times 10^{-6}$ | 0 |
| Сплав титана, Ti-6Al-4V [26] | | | | | |
| $\rho, \text{кг/м}^3$ | $4,4290 \times 10^3$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $E, \text{Па}$ | $1,2256 \times 10^{11}$ | 0 | $-4,5864 \times 10^{-4}$ | 0 | 0 |
| ν | 0,28838 | 0 | $1,1214 \times 10^{-4}$ | 0 | 0 |
| $\alpha, 1/\text{К}$ | $7,5788 \times 10^{-6}$ | 0 | $6,5000 \times 10^{-4}$ | $3,1467 \times 10^{-7}$ | 0 |
| $k, \text{Вт/мК}$ | 1,2095 | 0 | $1,3938 \times 10^{-2}$ | 0 | 0 |
| Сталь, SUS304 [8] | | | | | |
| $\rho, \text{кг/м}^3$ | 8166 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $E, \text{Па}$ | $2,0104 \times 10^{11}$ | 0 | $3,079 \times 10^{-4}$ | $-6,534 \times 10^{-7}$ | 0 |
| ν | 0,3262 | 0 | $-2,002 \times 10^{-4}$ | $3,797 \times 10^{-7}$ | 0 |
| Никель, [8] | | | | | |
| $\rho, \text{кг/м}^3$ | 8900 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $E, \text{Па}$ | $2,2395 \times 10^{11}$ | 0 | $-2,794 \times 10^{-4}$ | $-3,998 \times 10^{-9}$ | 0 |
| ν | 0,31 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 2

Варианты расчетов

| Конфигурация I | Конфигурация II | Конфигурация III | Конфигурация IV |
|--|---|--|---|
| ZrO ₂ / Ti-6Al-4V нагрев снизу | ZrO ₂ / Ti-6Al-4V нагрев сверху | Ti-6Al-4V / ZrO ₂ нагрев снизу | Ti-6Al-4V / ZrO ₂ нагрев сверху |

3.1. Тестирование алгоритма

Тестирование разработанного алгоритма осуществлено путем сравнения с результатами работы [8], в которой собственные частоты колебаний заполненной жидкостью ФГ-оболочки ($L/R = 20, R/h = 500$) получены волновым методом. Оболочка выполнена из стали (внутренняя поверхность) и никеля (наружная поверхность). Свойства материалов не зависят от температуры и определяются из табл. 1 при 300 К. Сравнение двух низших частот колебаний (Гц) для двух гармоник в случае пустой и заполненной жидкостью цилиндрической оболочки для различных значений показателя объемной доли N и граничных условий представлено в табл. 3. Здесь через m обозначено число полувольт в мери-

диональном направлении. В верхней строке приведены данные из [8], а в нижней строке – полученные в настоящей работе. Результаты демонстрируют хорошее совпадение с известными данными, особенно в случае свободно опертых оболочек, где различие не превышает 2 %.

Таблица 3

Сравнение собственных частот пустой и содержащей жидкость ФГ-оболочки при различных граничных условиях

| m | j | $N = 0,3$ | | $N = 1$ | | $N = 5$ | |
|----------------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | Пустая | С жидкостью | Пустая | С жидкостью | Пустая | С жидкостью |
| Граничные условия SS | | | | | | | |
| 1 | 2 | <u>4,4160</u> | <u>0,9031</u> | <u>4,4737</u> | <u>0,9049</u> | <u>4,5498</u> | <u>0,9076</u> |
| | | 4,4159 | 0,9137 | 4,4736 | 0,9155 | 4,5497 | 0,9188 |
| | 3 | <u>4,0940</u> | <u>0,9599</u> | <u>4,1478</u> | <u>0,9620</u> | <u>4,2183</u> | <u>0,9650</u> |
| | | 4,0940 | <u>0,9656</u> | 4,1478 | 0,9678 | 4,2183 | 0,9708 |
| 2 | 2 | <u>16,628</u> | <u>3,3988</u> | <u>16,848</u> | <u>3,4062</u> | <u>17,132</u> | <u>3,4158</u> |
| | | 16,628 | 3,4676 | 16,848 | 3,4751 | 17,132 | 3,4848 |
| | 3 | <u>8,7166</u> | <u>2,0419</u> | <u>8,8299</u> | <u>2,0462</u> | <u>8,9807</u> | <u>2,0527</u> |
| | | 8,7165 | 2,0929 | 8,8298 | 2,0973 | 8,9805 | 2,1038 |
| Граничные условия SC | | | | | | | |
| 1 | 2 | <u>9,5233</u> | <u>1,9473</u> | <u>9,6487</u> | <u>1,9514</u> | <u>9,8121</u> | <u>1,9569</u> |
| | | 9,3979 | 1,9511 | 9,5219 | 1,9553 | 9,6824 | 1,9607 |
| | 3 | <u>5,7422</u> | <u>1,3458</u> | <u>5,8166</u> | <u>1,3486</u> | <u>5,9161</u> | <u>1,3529</u> |
| | | 5,7325 | 1,3682 | 5,8080 | 1,3713 | 5,9065 | 1,3755 |
| 2 | 2 | <u>25,549</u> | <u>5,2189</u> | <u>25,888</u> | <u>5,2303</u> | <u>26,325</u> | <u>5,2448</u> |
| | | 24,674 | 5,1588 | 24,999 | 5,1699 | 25,420 | 5,1840 |
| | 3 | <u>12,847</u> | <u>3,0073</u> | <u>13,015</u> | <u>3,0138</u> | <u>13,236</u> | <u>3,0232</u> |
| | | 12,653 | 3,0567 | 12,818 | 3,0635 | 13,036 | 3,0728 |
| Граничные условия CS | | | | | | | |
| 1 | 2 | <u>6,7063</u> | <u>1,3714</u> | <u>6,7943</u> | <u>1,3742</u> | <u>6,9096</u> | <u>1,3782</u> |
| | | 6,6459 | 1,3778 | 6,7334 | 1,3808 | 6,8474 | 1,3847 |
| | 3 | <u>4,7475</u> | <u>1,1129</u> | <u>4,8093</u> | <u>1,1153</u> | <u>4,8914</u> | <u>1,1188</u> |
| | | 4,7372 | 1,1238 | 4,7994 | 1,1263 | 4,8810 | 1,1298 |
| 2 | 2 | <u>20,873</u> | <u>4,2651</u> | <u>21,149</u> | <u>4,2744</u> | <u>21,506</u> | <u>4,2864</u> |
| | | 20,542 | 4,2895 | 20,813 | 4,2988 | 21,164 | 4,3106 |
| | 3 | <u>10,648</u> | <u>2,4935</u> | <u>10,787</u> | <u>2,4988</u> | <u>10,971</u> | <u>2,5067</u> |
| | | 10,578 | 2,5484 | 10,716 | 2,5539 | 10,898 | 2,5617 |

3.2. Собственные колебания нагретой оболочки без жидкости

Для оценки влияния жидкости на динамические характеристики ФГ-оболочки целесообразно проанализировать влияние температурной нагрузки на собственные частоты колебаний пустой оболочки. Внешнее воздействие повышенной температуры, осуществляемое, например, в результате контакта с горячим потоком жидкости или газа, оказывает дестабилизирующее влияние на упругое тело и может привести к потере устойчивости. В табл. 4 приведены значения минимальной температуры нагрева T (К), при которой низшая частота колебаний оболочки ω становится равной нулю и, следовательно, осуществляется потеря устойчивости дивергентного типа. Здесь представлены данные, соответствующие четырем конфигурациям (см. табл. 3), полученные для двух вариантов граничных условий. Показанные в табл. 4 результаты демонстрируют известные

закономерности, имеющие место при исследовании выполненных из ФГ-материалов конструкций. С увеличением показателя объемной доли N критические значения температуры возрастают или, наоборот, уменьшаются, в зависимости от того, на какой поверхности располагается более жесткий материал. В некоторых случаях критические температуры, соответствующие промежуточным значениям N , ограничены значениями, полученными для чистых составляющих материалов (т. е. для $N = 0$ и $N = \infty$).

Таблица 4

Критические значения температуры T (К) в зависимости от объемной доли N для пустых оболочек с различными граничными условиями

| Конфигурация | $N = 0$ | $N = 0,3$ | $N = 1$ | $N = 5$ | $N = 10$ | $N = 30$ | $N = \infty$ |
|----------------------|---------|-----------|---------|---------|----------|----------|--------------|
| Граничные условия СС | | | | | | | |
| I | 767,76 | 850,61 | 966,23 | 1079,1 | 1089,9 | 1091,6 | 1089,6 |
| II | 771,07 | 798,34 | 825,47 | 956,63 | 1013,29 | 1065,5 | 1095,5 |
| III | 1089,3 | 925,97 | 821,32 | 773,14 | 771,37 | 770,24 | 767,84 |
| IV | 1096,5 | 1046,5 | 972,39 | 858,28 | 823,57 | 791,49 | 771,77 |
| Граничные условия СФ | | | | | | | |
| I | 1714,7 | 1814,0 | 1874,2 | 1871,3 | 1858,5 | 1853,6 | 1858,2 |
| II | 978,23 | 986,15 | 1001,4 | 1134,8 | 1220,0 | 1302,1 | 1346,1 |
| III | 1858,6 | 1798,4 | 1722,6 | 1698,9 | 1716,9 | 1725,3 | 1715,4 |
| IV | 1347,5 | 1350,6 | 1340,4 | 1216,1 | 1133,3 | 1040,9 | 980,34 |

Анализ данных табл. 4 позволяет выявить некоторые специфические особенности, обусловленные или комбинацией рассматриваемых материалов, или заданным вариантом граничных условий. Например, для некоторых конфигураций имеется определенный диапазон показателя объемной доли N , на котором критические значения температур превышают значения для чистого материала с наибольшей жесткостью (т.е. керамики). Аналогичные зависимости были получены в [15] при исследовании нагретых пустых конических оболочек в случае нескольких комбинаций материалов, в частности, сталь-нитрид кремния. Возможного объяснения такого нехарактерного поведения предложено не было. Хотя в работе [15], как и в настоящем исследовании, рассматривались материалы, свойства которых зависят от температуры, нетипичные зависимости были получены авторами настоящего исследования и в том случае, когда свойства материалов не зависят от температуры. Более того, подобные особенности наблюдались, если вместо нелинейного распределения температуры по толщине оболочки задавалось линейное или однородное распределение. Дополнительные расчеты показали, что в решениях задачи теплопроводности (9), статической задачи, и в распределении температурных усилий и моментов \bar{T}^{th} по толщине оболочки отсутствуют закономерности, которые могли бы однозначно характеризовать ту или иную зависимость. Было установлено, что нехарактерное поведение проявляется в том случае, когда материалы имеют существенно различные по величине коэффициенты температурного расширения (как для двух первых материалов в табл. 2). В случае материалов с близкими значениями такая зависимость отсутствует для любой из возможных конфигураций. Немаловажную роль играют также и непосредственные физико-механические свойства некоторых материалов: значительная жесткость приводит к повышению порога потери устойчивости, а увеличение коэффициента температурного расширения, наоборот, способствует его снижению [15]. В результате объединения этих двух факторов возникают предпосылки для появления некоторых специфических зависи-

мостей в изменении критических температур от консистенции ФГ-материала, которые повышают эксплуатационные свойства выполненных из них конструкций.

Другой особенностью, отраженной в табл. 4, являются результаты, полученные для консольных оболочек. Для этой комбинации граничных условий изменение стороны нагрева приводит к значительному росту критических температур потери устойчивости. Для рассматриваемых в работе идеализированных условий нагрева, при которых температура на одной из поверхностей остается неизменной, смена нагреваемой поверхности приводит к изменению знака температурных моментов M^{th} . Если в случае жесткого закрепления это ведет к незначительному изменению критических температур, то для консольного закрепления изменение знака способствует большему раскрытию свободного края оболочки и как результат – существенному снижению порога устойчивости.

Из табл. 4 можно также увидеть, что для одного и того же материала в зависимости от того, на какой поверхности он располагается, имеет место незначительное расхождение в критических температурах. Это различие обусловлено тем, что в случае $N = \infty$ рассматривается конечное значение показателя объемной доли. Поэтому при вычислении жесткостных характеристик, усилий и моментов по формулам (7)–(8) при $z = \pm h/2$ принимаются во внимание свойства другого материала.

3.3. Собственные колебания нагретой оболочки с жидкостью

На рис. 2, а для жестко закрепленной ФГ-оболочки, внутри которой содержится неподвижная жидкость ($\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 1500 \text{ м/с}$), представлены зависимости низших частот колебаний ω (Гц) от номера гармоники j , полученные при температуре $T = 300 \text{ К}$ и различных значениях объемных долей N . Здесь показана уже упомянутая ранее типичная картина, имеющая место при исследовании функционально-градиентного материала, а именно: вибрационные свойства конструкции практически всегда ограничены предельными значениями, полученными для чистых материалов. Кривые частотного спектра, вычисленные с произвольным показателем объемной доли N , располагаются между кривыми, полученными для керамики и металла ($N = 0$). Таким образом, содержащаяся внутри оболочки жидкость не оказывает качественного влияния на характер динамического поведения конструкций, выполненных из ФГ-материала.

Как и в случае пустой оболочки, повышение температуры окружающей среды приводит к снижению собственных частот колебаний конструкций, содержащих жидкость. Это демонстрируется данными, приведенными на рис. 2, б. Здесь для жестко закрепленной ФГ-оболочки ($N = 1$) показаны зависимости минимальных частот колебаний ω (Гц) от номера гармоники j , полученные при различных значениях температуры T (К) внутренней поверхности. Из представленных данных видно, что последовательное ее повышение приводит к постепенному снижению собственных частот ω до тех пор, пока они резко не обращаются в ноль при определенных гармониках. Более подробно это явление демонстрируется на рис. 3, а. Здесь показано изменение собственной частоты колебаний ω от температуры T (К) для гармоник $j = 5, 13$ и 14 . Из рисунка видно, что частота пятой гармоники является минимальной на достаточно широком диапазоне температур, пока собственные частоты более высоких гармоник не достигнут меньших значений. Это происходит благодаря тому, что они сильнее реагируют на возрастание температуры. Такая зависимость в целом определяет характер изменения собственных частот колебаний от

температуры для оболочек с некоторыми комбинациями граничных условий, что демонстрируется результатами, показанными на рис. 3, б и 4. На этих рисунках приведены зависимости минимальных частот колебаний ω (Гц) от температуры T (К), полученные для оболочек с жидкостью, при разных вариантах граничных условий. Результаты для оболочек с граничными условиями CF (см. рис. 3, б) и CC (рис. 4, а), вычисленные при различных значениях показателя объемной доли N , демонстрируют резкое снижение частоты при достижении некоторого температурного порога, обусловленного, как показано ранее, изменением гармоник с минимальной частотой колебаний. Отметим, что вне зависимости от граничных условий потеря устойчивости осуществляется при $j = 14$, тогда как в случае пустых оболочек – при $j = 13$. Для оболочек с граничными условиями CS (рис. 4, б) рост температуры приводит лишь к незначительному уменьшению частоты и потери устойчивости не происходит. Это обусловлено отсутствием закрепления по осевой координате на правом краю оболочки. Тело имеет возможность свободно расширяться в этом направлении, как и в случае граничных условий CF, что препятствует появлению значительных напряжений, возникающих в случае жесткого закрепления обоих краев.

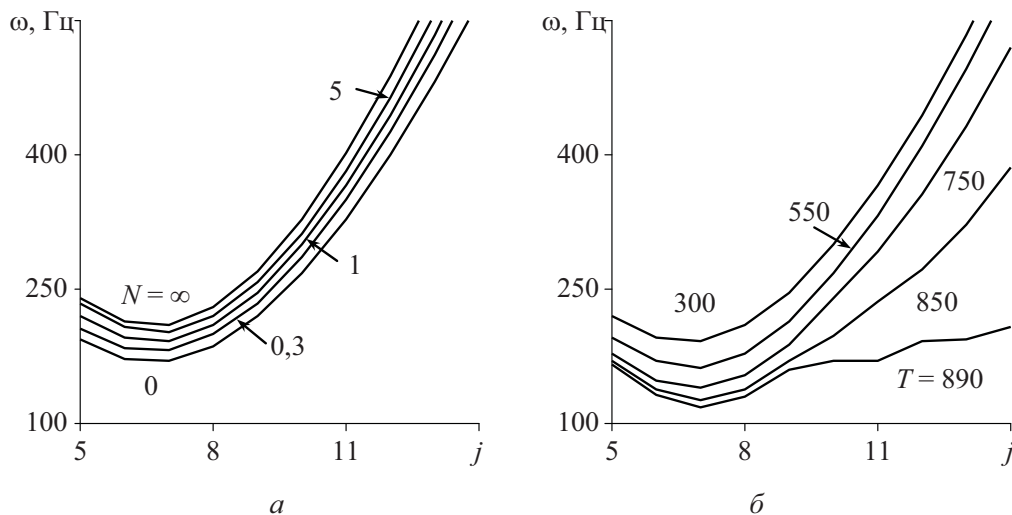


Рис. 2. Зависимости минимальных частот колебаний ω от номера гармоники j для жестко закрепленной ФГ-оболочки, содержащей жидкость, при различных температурах T (К); конфигурация I: а – $T = 300$ К; б – $N = 1$

Более подробные результаты исследований ФГ-оболочек для двух вариантов граничных условий и различных конфигураций сведены в табл. 5. Представленные здесь критические значения температур T (К), по сравнению с полученными для пустой оболочки данными (табл. 4), позволяют сделать вывод о том, что наличие жидкости внутри конструкции, помимо снижения частотного спектра, может оказывать влияние и на характер зависимости динамических свойств конструкций из ФГ-материала от температуры. В частности, наличие жидкости для некоторых конфигураций приводит к расширению диапазона показателя объемных долей, на котором проявляется нетипичная температурная зависимость (СС, конфигурация I), или даже снижает границы устойчивости, определенные значениями для чистых материалов (СС, III).

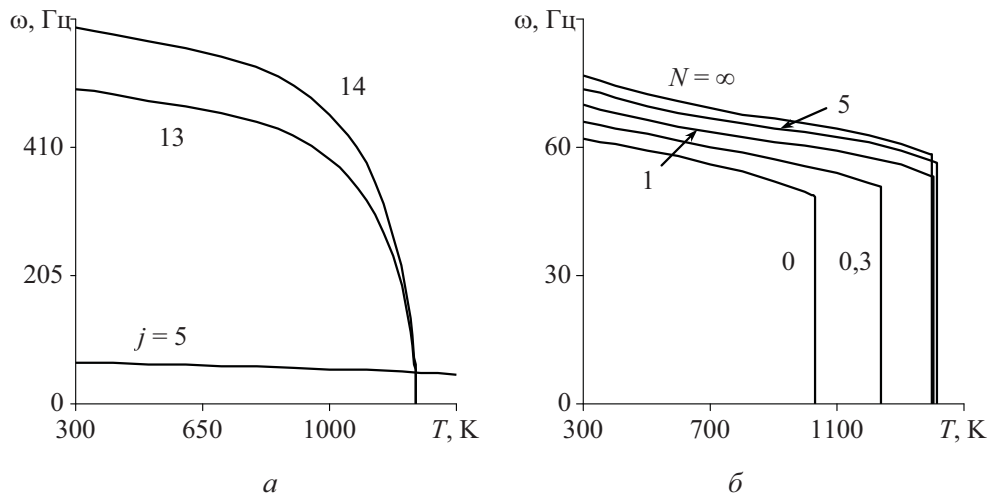


Рис. 3. Зависимости частот колебаний ω от температуры T для консольной ФГ-оболочки при $N = 0,3$ (а) и разных значениях показателя объемной доли N (б); конфигурация I

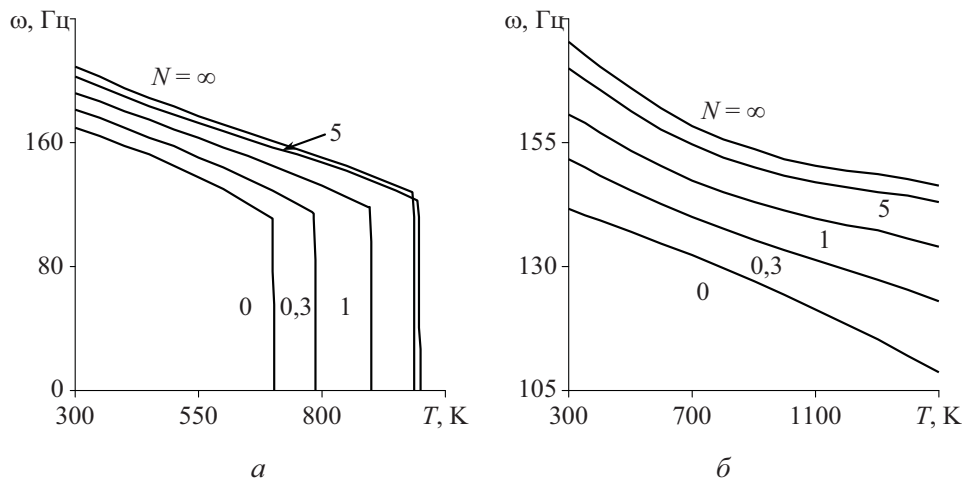


Рис. 4. Зависимости минимальных частот колебаний ω от температуры T при разных значениях показателя объемной доли N для ФГ-оболочек с различными граничными условиями; Конфигурация I: а – СС; б – СС

Наличие жидкости внутри оболочки оказывает наиболее сильное влияние в случае консольного закрепления. Если для жестко закрепленных оболочек нагрев внешней поверхности приводит к возрастанию критических температур, как для пустых оболочек, так и оболочек с жидкостью, то для консольных оболочек нагрев на разных поверхностях по-разному влияет на критические температуры пустых и наполненных жидкостью оболочек. Для более наглядной демонстрации этих различий на рис. 5 приведены зависимости минимальных частот колебаний ω (Гц) от температуры T (К), полученные для разных конфигураций пустых и содержащих жидкость консольных оболочек. Из представленных данных следует, что в случае пустых оболочек нагрев внешней поверхности приводит к снижению критических температур потери устойчивости. Однако для оболочек, содержащих жидкость, имеет место, наоборот, стабилизирующее воздействие. В качестве возможного объяснения этого явления могут быть приведены следующие рассуждения. Выше было отмечено, что изменение поверхности нагрева оказывает влияние на величину

нормальных перемещений свободного края оболочки. С другой стороны, значение гидродинамического давления, действующего по нормали к упругой поверхности, имеет прямо пропорциональную зависимость от величины нормальной составляющей вектора перемещений оболочки. Следовательно, раскрытие свободного края оболочки, отрицательно влияя на ее температурную устойчивость, тем не менее способствует уменьшению гидродинамического давления, оказывая стабилизирующее воздействие.

Таблица 5

Критические значения температуры T (К) в зависимости от объемной доли N для оболочек с различными граничными условиями, содержащих жидкость

| ГУ | R/h | $N=0$ | $N=0,3$ | $N=1$ | $N=5$ | $N=10$ | $N=30$ | $N=\infty$ |
|------------------|-------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|------------|
| Конфигурация I | | | | | | | | |
| CC | 200 | 702,01 | 786,31 | 899,97 | 997,97 | 1000,4 | 994,35 | 987,88 |
| | 500 | 495,53 | 532,22 | 580,15 | 609,19 | 604,72 | 598,24 | 594,11 |
| CF | 200 | 1031,4 | 1238,9 | 1402,6 | 1414,1 | 1398,4 | 1392,9 | 1397,5 |
| | 500 | 671,83 | 814,73 | 1013,9 | 1050,5 | 1034,7 | 1032,6 | 1040,8 |
| Конфигурация II | | | | | | | | |
| CC | 200 | 727,91 | 762,54 | 803,02 | 919,38 | 965,93 | 1008,5 | 1033,2 |
| | 500 | 501,15 | 514,62 | 525,58 | 562,04 | 581,04 | 602,35 | 617,29 |
| CF | 200 | 1637,9 | 1648,6 | 1655,3 | 1735,8 | 1765,2 | 1781,1 | 1784,8 |
| | 500 | 1055,8 | 1072,0 | 1090,9 | 1221,2 | 1296,7 | 1365,1 | 1400,2 |
| Конфигурация III | | | | | | | | |
| CC | 200 | 987,43 | 814,19 | 720,15 | 689,73 | 693,98 | 699,32 | 701,91 |
| | 500 | 593,85 | 527,12 | 494,77 | 488,42 | 491,48 | 494,31 | 495,48 |
| CF | 200 | 1397,9 | 1193,5 | 1044,3 | 1022,7 | 1034,9 | 1037,8 | 1031,8 |
| | 500 | 1041,5 | 774,36 | 675,65 | 668,65 | 674,66 | 675,19 | 672,01 |
| Конфигурация IV | | | | | | | | |
| CC | 200 | 1034,1 | 972,26 | 890,21 | 790,47 | 764,74 | 742,03 | 728,40 |
| | 500 | 617,89 | 596,22 | 564,94 | 528,36 | 517,81 | 507,72 | 501,38 |
| CF | 200 | 1784,8 | 1790,5 | 1789,9 | 1739,6 | 1707,7 | 1669,9 | 1639,1 |
| | 500 | 1401,3 | 1401,0 | 1388,6 | 1277,9 | 1203,8 | 1117,6 | 1057,9 |

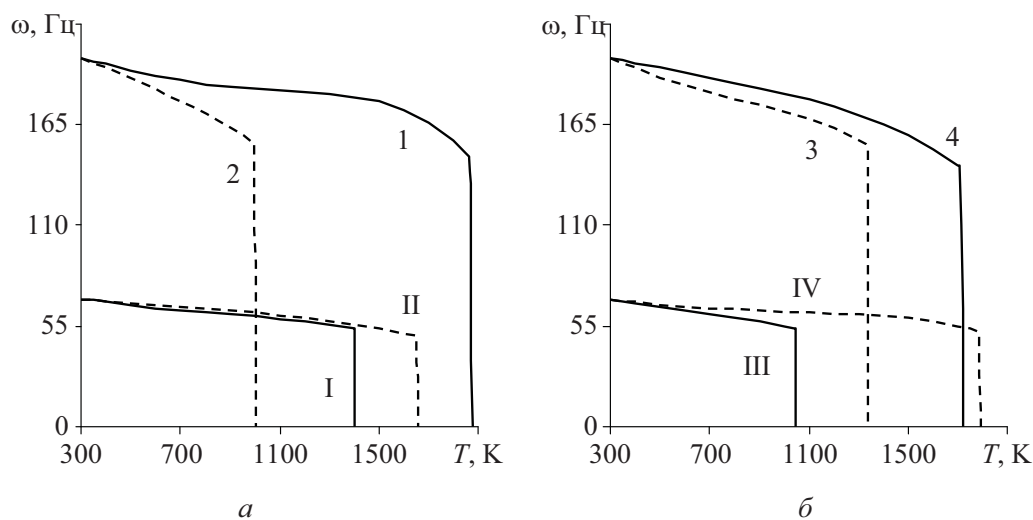


Рис. 5. Зависимости минимальных частот колебаний ω от температуры T для консольной ФГ-оболочки при разных конфигурациях: $N=1$; арабские цифры – пустая оболочка; римские цифры – оболочка с жидкостью; сплошные линии – нагрев снизу; пунктирные линии – нагрев сверху

В табл. 5 также отражены критические температуры, полученные при других геометрических размерах ($h = 4 \times 10^{-4}$ м, $R/h = 500$). В этом случае качественных изменений не наблюдается. Таким образом, для некоторых конфигураций нетипичная зависимость от температуры сохраняется и для более тонких оболочек.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-96049).

Библиографический список

1. Birman V., Byrd L.W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – Vol. 60. – No. 5. – P. 195–216.
2. Haddadpour H., Mahmoudkhani S., Navazi H.M. Supersonic flutter prediction of functionally graded cylindrical shells // *Compos. Struct.* – 2008. – Vol. 83. – No. 4. – P. 391–398.
3. Mahmoudkhani S., Haddadpour H., Navazi H.M. Supersonic flutter prediction of functionally graded conical shells // *Compos. Struct.* – 2010. – Vol. 92. – No. 2. – P. 377–386.
4. Sabri F., Lakis A.A. Efficient hybrid finite element method for flutter prediction of functionally graded cylindrical shells // *J. Vib. Acoust.* – 2014. – Vol. 136. – No. 1. – 011002.
5. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В. Исследование панельного флаттера круговых цилиндрических оболочек, выполненных из функционально-градиентного материала // *Вестник ПНИПУ. Механика.* – 2014. – № 1. – С. 57–75.
6. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В. Анализ панельного флаттера нагруженных круговых цилиндрических оболочек, выполненных из функционально-градиентного материала // *Неравновесные процессы в соплах и струях: материалы X Междунар. конф.* – М: Изд-во МАИ, 2014. – С. 335–337.
7. Chen W.Q., Bian Z.G., Ding H.J. Three-dimensional vibration analysis of fluid-filled orthotropic FGM cylindrical shells // *Int. J. Mech. Sci.* – 2004. – Vol. 46. – No. 1. – P. 159–171.
8. Vibration characteristics of FGM circular cylindrical shells filled with fluid using wave propagation approach / Z. Iqbal [et al.] // *Appl. Math. Mech.* – 2009. – Vol. 30. – No. 11. – P. 1393–1404.
9. Vibrational study of fluid-filled functionally graded cylindrical shells resting on elastic foundations / A.G. Shah [et al.] // *ISRN Mechanical Engineering.* – 2011. – Vol. 2011. – 892460.
10. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В. Собственные колебания цилиндрических оболочек, содержащих неподвижную жидкость и выполненных из функционально-градиентных материалов // *Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы междунар. науч. конф.* – Тула: Изд-во Тул. гос. ун-та, 2013. – С. 182–189.
11. Sheng G.G., Wang X. Thermomechanical vibration analysis of a functionally graded shell with flowing fluid // *Eur. J. Mech. A-Solid.* – 2008. – Vol. 27. – No. 6. – P. 1075–1087.
12. Sheng G.G., Wang X. Dynamic characteristics of fluid-conveying functionally graded cylindrical shells under mechanical and thermal loads // *Compos. Struct.* – 2010. – Vol. 93. – No. 1. – P. 162–170.
13. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В. Гидроупругая устойчивость функционально-градиентных цилиндрических оболочек, содержащих жидкость // *Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы междунар. науч. конф.* – Тула: Изд-во Тул. гос. ун-та, 2014. – С. 133–140.
14. Kadoli R., Ganesan N. Buckling and free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells subjected to a temperature-specified boundary condition // *J. Sound Vib.* – 2006. – Vol. 289. – No. 3. – P. 450–480.
15. Bhangale R.K., Ganesan N., Padmanabhan C. Linear thermoelastic buckling and free vibration behavior of functionally graded truncated conical shells // *J. Sound Vib.* – 2006. – Vol. 292. – No. 1–2. – P. 341–371.
16. Malekzadeh P., Fiouz A.R., Sobhrouyan M. Three-dimensional free vibration of functionally graded truncated conical shells subjected to thermal environment // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* – 2012. – Vol. 89. – P. 210–221.

17. Akbari M., Kiani Y., Eslami M.R. Thermal buckling of temperature-dependent FGM conical shells with arbitrary edge supports // *Acta Mech.* – 2015. – Vol. 226. – No. 3. – P. 897–915.
18. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // *Изв. РАН. МТТ.* – 2008. – № 3. – С. 189–199.
19. Бочкарев С.А. Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // *Вычислительная механика сплошных сред.* – 2010. – № 2. – С. 24–33.
20. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
21. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
22. Reddy J.N., Chin C.D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates // *J. Therm. Stresses.* – 1998. – Vol. 21. – No. 6. – P. 593–626.
23. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Численное моделирование устойчивости нагруженных оболочек вращения при внутреннем течении жидкости // *ПМТФ.* – 2008. – № 2. – С. 185–195.
24. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
25. Матвеев В.П. Об одном алгоритме решения задачи о собственных колебаниях упругих тел методом конечных элементов // *Краевые задачи теории упругости и вязкоупругости.* – Свердловск, 1980. – С. 20–24.
26. Praveen G., Chin C., Reddy J. Thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal cylinder // *J. Eng. Mech.* – 1999. – Vol. 125. – No. 11. – P. 1259–1267.

References

1. Birman V., Byrd L.W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Appl. Mech. Rev.*, 2007, vol. 60, no. 5, pp. 195-216. DOI: 10.1115/1.2777164
2. Haddadpour H., Mahmoudkhani S., Navazi H.M. Supersonic flutter prediction of functionally graded cylindrical shells. *Compos. Struct.*, 2008, vol. 83, no. 4, pp. 391-398. DOI: 10.1016/j.compstruct.2007.05.011
3. Mahmoudkhani S., Haddadpour H., Navazi H.M. Supersonic flutter prediction of functionally graded conical shells. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 92, no. 2, pp. 377-386. DOI: 10.1016/j.compstruct.2009.08.018
4. Sabri F., Lakis A.A. Efficient hybrid finite element method for flutter prediction of functionally graded cylindrical shells. *J. Vib. Acoust.*, 2014, vol. 136, no. 1, 011002. DOI: 10.1115/1.4025397
5. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Investigation of panel flutter of functionally graded circular cylindrical shells. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 1, pp. 57-75.
6. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Analiz panel'nogo flattera nagruzhennykh krugovykh tsilindricheskikh obolochek, vpolnennykh iz funktsional'no-gradientnogo materiala [Analysis of panel flutter of loaded circular cylindrical shells made of functionally graded material]. *Materialy X Mezhdunarodnoi konferentsii "Neravnovesnye protsessy v soplakh i struiakh"*. Moscow, 2014, pp. 335-337.
7. Chen W.Q., Bian Z.G., Ding H.J. Three-dimensional vibration analysis of fluid-filled orthotropic FGM cylindrical shells. *Int. J. Mech. Sci.*, 2004, vol. 46, no. 1, pp. 159-171. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2003.12.005
8. Iqbal Z., Naeem M.N., Sultana N., Arshad S.H., Shah A.G. Vibration characteristics of FGM circular cylindrical shells filled with fluid using wave propagation approach. *Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 30, no. 11, pp. 1393-1404. DOI: 10.1007/s10483-009-1105-x
9. Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Arshad S.H. Vibrational study of fluid-filled functionally graded cylindrical shells resting on elastic foundations. *ISRN Mechanical Engineering*, 2011, vol. 2011, 892460. DOI: 10.5402/2011/892460
10. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Sobstvennye kolebaniia tsilindricheskikh obolochek, sodержashchikh nepodvizhnyu zhidkost' i vpolnennykh iz funktsional'no-gradientnykh materialov

[Natural vibrations of cylindrical shells containing quiescent fluid and made of functionally graded materials]. *Materialy mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki"*. Tuskii gosudarstvennyi universitet, 2013, pp. 182-189.

11. Sheng G.G., Wang X. Thermomechanical vibration analysis of a functionally graded shell with flowing fluid. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 2008, vol. 27, no. 6, pp. 1075-1087. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2008.02.003

12. Sheng G.G., Wang X. Dynamic characteristics of fluid-conveying functionally graded cylindrical shells under mechanical and thermal loads. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 93, no. 1, pp. 162-170. DOI: 10.1016/j.compstruct.2010.06.004

13. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Gidrouprugaia ustoichivost' funktsional'no-gradientnykh tsilindricheskikh obolochek, soderzhashchikh zhidkost' [Hydroelasticity stability of functionally graded cylindrical shells containing fluid]. *Materialy mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki"*. Tuskii gosudarstvennyi universitet, 2014, pp. 133-140.

14. Kadoli R., Ganesan N. Buckling and free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells subjected to a temperature-specified boundary condition. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 289, no. 3, pp. 450-480. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.02.034

15. Bhangale R.K., Ganesan N., Padmanabhan C. Linear thermoelastic buckling and free vibration behavior of functionally graded truncated conical shells. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 292, no. 1-2, pp. 341-371. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.07.039

16. Malekzadeh P., Fiouz A.R., Sobhrouyan M. Three-dimensional free vibration of functionally graded truncated conical shells subjected to thermal environment. *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2012, vol. 89, pp. 210-221. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2011.11.005

17. Akbari M., Kiani Y., Eslami M.R. Thermal buckling of temperature-dependent FGM conical shells with arbitrary edge supports. *Acta Mech.*, 2015, vol. 226, no. 3, pp. 897-915. DOI: 10.1007/s00707-014-1168-3

18. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Numerical study of the influence of boundary conditions on the dynamic behavior of a cylindrical shell conveying a fluid. *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 3, pp. 477-486. DOI: 10.3103/S0025654408030187

19. Bochkarev S.A. Sobstvennyye kolebaniia vrashchaiushcheisia krugovoi tsilindricheskoi obolochki s zhidkost'iu [Natural vibrations of a rotating circular cylindrical shell containing fluid]. *Computational continuum mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 24-33. DOI: 10.7242/1999-6691/2010.3.2.14

20. Volmir A.S. Shells in liquid and gas flow: Hydroelasticity problems. Moscow: Nauka, 1979. 320 p.

21. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G. Raschet mnogosloinykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov [Analysis of multilayer plates and shells of composite materials]. Moscow: Mashinostroenie, 1984. 264 p.

22. Reddy J.N., Chin C.D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *J. Therm. Stresses.*, 1998, vol. 21, no. 6, pp. 593-626. DOI: 10.1080/01495739808956165

23. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Numerical modelling of the stability of loaded shells of revolution containing fluid flows. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 313-322. DOI: 10.1007/s10808-008-0043-1

24. Zienkiewicz O.C. The finite element method in engineering science. London: McGraw Hill, 1971. 521 p.

25. Matveenko V.P. Ob odnom algoritme resheniia zadachi o sobstvennykh kolebaniiax uprugikh tel metodom konechnykh elementov [On an algorithm of solving the problem on natural vibrations of elastic bodies by the finite element method]. *Kraevye zadachi teorii uprugosti i viazkouprugosti*. Sverdlovsk, 1980, pp. 20-24.

26. Praveen G., Chin C., Reddy J. Thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal cylinder. *J. Eng. Mech.*, 1999, vol. 125, no. 11, pp. 1259-1267. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:11(1259)