

Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Итерационный конечно-элементный алгоритм исследования напряженного состояния элементов конструкций с особыми точками и его реализация // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 171–187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Iterative finite element algorithm and its implementation for stress state of structural elements with singular points. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2015. No. 4. Pp. 171-187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11

УДК 539.3+519.68

ИТЕРАЦИОННЫЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ

В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик

Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 22 июня 2015 г.
Принята: 29 октября 2015 г.
Опубликована: 25 декабря 2015 г.

Ключевые слова:

особые точки, смешанный метод конечных элементов, алгоритмы, численные методы, параллельные вычисления

АННОТАЦИЯ

Объектом исследования является напряженно-деформированное состояние (НДС) вблизи и непосредственно в особых точках конструкций с особенностями в виде составных плоских клиньев и пространственных ребер, являющихся пересечением образующих поверхностей скрепляемых тел. Граничные условия, условия непрерывности напряжений и деформаций на линии (поверхности) соединения элементов конструкции, а также другие ограничения, обусловленные постановкой задачи в особых точках элементов конструкции, образуют обязательные алгебраические равенства (ОАР), которые представляют собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений. Количество ОАР, формулируемое в особых точках, превышает количество ОАР в обычных (не особых) точках границы, что ограничивает возможность построения решения, удовлетворяющего всем ОАР, обычными методами механики деформируемого твердого тела.

Поэтому цель работы – построение алгоритма, позволяющего строить решение, согласованное со всеми ОАР, задаваемыми в особых точках. Предлагается подструктурный смешанный итерационный конечно-элементный метод (МКЭ). Подструктуры – части расчетной области, в которых параметры состояния не претерпевают разрывов.

Основные результаты: построены алгоритм и на его основе программный комплекс для исследования НДС вблизи и непосредственно в особых точках элементов конструкций. В зависимости от свойств геометрических и материальных параметров рассматриваемой плоской или пространственной конструкции задачи упругости и термоупругости делятся на типы и подтипы, отличающиеся количеством задаваемых ОАР. Смешанный вариант МКЭ дает возможность вычислить параметры НДС в узлах КЭ-сетки без операции дифференцирования приближенного решения и без применения какого-либо метода восполнения. Итерационный подход позволяет построить решение, согласованное со всеми ОАР, задаваемыми в особых точках. Описывается процедура предлагаемого алгоритма и его вычислительная реализация на языке Fortran-95. Обсуждаются особенности, связанные с применением технологии OpenMP в реализации алгоритма.

© ПНИПУ

© Пестренин Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: PestreninVM@mail.ru
Пестренина Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент, e-mail: IPestrenina@gmail.com
Ландик Лидия Владимировна – заведующий лабораторией, e-mail: LidiaLandik@gmail.com

Valery M. Pestrenin – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: PestreninVM@mail.ru
Irina V. Pestrenina – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: IPestrenina@gmail.com
Lidia V. Landik – Laboratory Head, e-mail: LidiaLandik@gmail.com

ITERATIVE FINITE ELEMENT ALGORITHM AND ITS IMPLEMENTATION FOR STRESS STATE OF STRUCTURAL ELEMENTS WITH SINGULAR POINTS

V.M. Pestrenin, I.V. Pestrenina, L.V. Landik

Perm State University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 22 June 2015
Accepted: 29 October 2015
Published: 25 December 2015

Keywords:

special point, mixed finite element method, algorithms, numerical methods, parallel computing

ABSTRACT

The target of research is the stress-strain state (SSS) near and directly in the special points of structures with features in the form of flat composite wedges or spatial edges, which are the intersections of the forming bodies surfaces. Boundary conditions, continuity conditions of stresses and strains on the line (surface) connections of structural members and other constraints, posed by the problem statement into structural elements special points, form a mandatory algebraic equality (MAE), which represent a system of linear inhomogeneous algebraic equations. The MAE number, formulated at special points, exceeds the MAE number in ordinary (not special) points of the boundary, which limits the ability to build solutions meeting all of the UAR using usual solid mechanics methods.

Therefore, the works purpose is to create an algorithm allowing constructing a solution consistent with all MAE formulated at special points. Substructure iterative mixed finite element method (FEM) is proposed. Substructures are parts of the computational area with continuous state parameters.

The main results. The algorithm and software package for the stress state study near and directly in special points of construction elements are suggested. Depending on the considered flat or spatial structure geometric and material parameters properties, problems of elasticity and thermo elasticity are divided into types and subtypes, distinguished by the MAE number. Mixed finite element method version allows calculating nodal stress parameters without the differentiation of the approximate solution or without using any replenishment method. The iterative approach allows building a solution that is consistent with all MAE at special points.

The procedure of the proposed algorithm and its Fortran-95 implementation is described. Features, associated with OpenMP technology used in the algorithm implementation are discussed.

© PNRPU

Введение

Рассматривается метод исследования напряженного состояния вблизи особых точек конструкций с особенностью в виде составных плоских клиньев и пространственных ребер. Поскольку вершины клиньев и ребра являются потенциальными концентраторами напряжений, изучению напряженно-деформированного состояния (НДС) в их окрестностях посвящены многочисленные публикации [1–10 и др]. Обычно авторы помещают в особую точку полюс криволинейной системы координат и сводят исследование НДС в ее окрестности к проблеме собственных чисел однородной упругой задачи. При таком подходе не учитываются реально заданные ограничения на параметры состояния непосредственно в особой точке, так как в полюсе криволинейной системы (полярной, цилиндрической или сферической) параметры состояния не определены. Более того, реально заданные ограничения в особых точках обычными методами, используемыми для исследования НДС, не могут быть учтены, потому что здесь, как правило, количество задаваемых ограничений превосходит количество задаваемых ограничений в обычной точке поверхности (контура) тела. Например, в вершине клина, образующие которого свободны от нагрузки, нулевой вектор напряжений задается на двух площадках (в обычной точке лишь на одной площадке). Из сказанного следует, что в существующих исследованиях НДС вблизи особых точек не рассматриваются ограничения, заданные непосредственно в этих точках, и имеются препятствия к учету таких ограничений, связанные с неклассическим их заданием. Данное обстоятельство обуславливает необходимость разработки новых подходов, способных строить решение в окрестности особых точек, согласующее-

ся со всеми заданными в них ограничениями. Один из возможных подходов предлагается в настоящей работе. Он основывается на отслеживании выполнения в окрестности особой точки всех заданных в ней обязательных алгебраических равенств (ОАР), связывающих параметры состояния. В ОАР, в частности, входят граничные условия, а также условия непрерывности перемещений, напряжений и деформаций на поверхностях соединения различных элементов и т.п. Количество ОАР, формулируемых в особой точке, превышает количество ОАР в обычной точке поверхности (контура) тела. К примеру, в плоской задаче в обычной точке защемленного контура ОАР – это обращение в нуль компонентов вектора перемещений и относительного удлинения линейного элемента, направленного по касательной к контуру (всего три равенства). В точке контура, являющейся вершиной клина, образующие которого защемлены, количество ОАР равно пяти: обращение в нуль компонентов вектора перемещений относительных удлинений линейных элементов, направленных по образующим клина, и сдвига между этими элементами. Сформулированные в особой точке ОАР служат критериями достоверности решений, получаемых различными методами. Исследование ОАР как системы линейных уравнений позволяет еще до решения задачи механики [11, 12]

- находить сочетания геометрических и материальных параметров конструкции, при которых особая точка теряет свой статус (перестает быть особой);
- обнаруживать зависимости между геометрическими и материальными параметрами конструкции, с одной стороны, и параметрами нагрузки – с другой, обуславливающими несовместность ОАР, которая служит причиной сингулярного поведения НДС;
- выявлять ограничения на параметры нагрузки, обеспечивающие корректность исследования НДС в рамках симметричной теории напряжений.

В настоящей работе приводится предлагаемый авторами итерационный алгоритм и его конечно-элементная реализация.

1. Постановка задачи

Рассматриваются элементы конструкции, имеющие особенности в виде плоского клина или пространственного ребра, составленные из двух различных изотропных материалов (рис. 1.1, 1.2), подвергающиеся механическому или температурному нагружению. Поверхность тела вблизи особых точек считается свободной от каких-либо внешних воздействий.

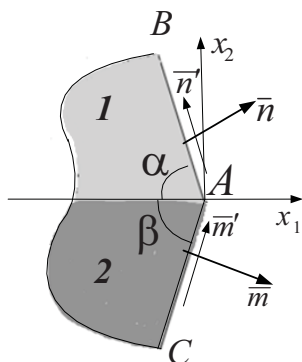


Рис. 1.1 Составной клин: (\bar{n}, \bar{m}) – внешние нормали к образующим клина; (\bar{n}', \bar{m}') – перпендикулярные им орты

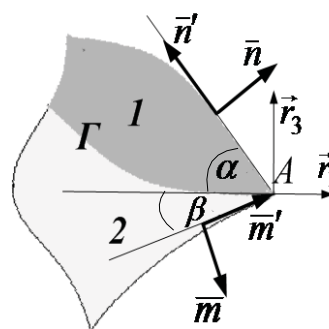


Рис. 1.2. Нормальное сечение ребра Γ

1.1. Плоская задача

Рассматривается плоский клин (см. рис. 1.1). Составляющие элементы клина соединены по линии, касательная к которой в вершине клина принимается за ось x_1 декартовой ортонормированной системы координат (x_1, x_2) . Принято: образующие клина свободны от нагрузки, углы при вершине составляющих элементов 1, 2 клина – α, β , где

$$0 < \alpha < 2\pi, \quad 0 < \beta < 2\pi, \quad \alpha + \beta \leq 2\pi. \quad (1.1)$$

Для компонентов тензоров напряжений и деформаций приняты обозначения $\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, где $k = (1, 2)$ – номер составляющего элемента; нормальные напряжения – σ_n, σ_m ; касательные напряжения – $\tau_{n'}, \tau_{m'}$.

На параметры состояния в вершине A накладываются ограничения (ОАР):

а) граничные условия (свободная граница)

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{n'} = 0, \quad \sigma_m = 0, \quad \tau_{m'} = 0; \quad (1.2)$$

б) условия непрерывности напряжений на линии контакта

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12}; \quad (1.3)$$

в) условия непрерывности деформаций на линии контакта

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}. \quad (1.4)$$

Условия (1.4) в рассматриваемой задаче выполняются автоматически лишь в исключительных случаях.

1.2. Пространственная задача

Рассматривается составное ребро (см. рис. 1.2). Под пространственным ребром Γ понимается линия, образованная пересечением двух различных образующих поверхностей элемента конструкции. В точке A ребра Γ построено его нормальное сечение и введен ортонормированный базис $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$.

Орт \bar{r}_1 направлен во внешнюю сторону тела по касательной в точке A к линии пересечения нормальной плоскости ребра Γ и поверхности соединения элементов конструкции; орт \bar{r}_2 – по касательной к ребру, а \bar{r}_3 так, чтобы тройка векторов $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$ была правой. С построенными ортами связана декартова система координат (A, x_1, x_2, x_3) . Принимается, что нормали (\bar{n}, \bar{m}) принадлежат нормальной плоскости ребра Γ . Дополнительно к обозначениям п.1.1 принято: τ_{n_2} – касательные напряжения на поверхности элемента 1 ребра в направлении \bar{r}_2 , τ_{m_2} – касательные напряжения на поверхности элемента 2 ребра в направлении \bar{r}_2 .

На параметры состояния в точках ребра Γ накладываются ограничения (ОАР):

а) нормальные и касательные напряжения на площадках, ориентируемых векторами (\bar{n}, \bar{m}) , обращаются в нуль, т.е.

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{n'} = 0, \quad \tau_{n2} = 0, \quad \sigma_m = 0, \quad \tau_{m'} = 0, \quad \tau_{m2} = 0; \quad (1.5)$$

б) на поверхности соединения нормальные и касательные напряжения непрерывны:

$$\sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{31}^{(2)} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{32}^{(1)} = \sigma_{32}^{(2)} = \sigma_{32}; \quad (1.6)$$

в) на поверхности соединения непрерывны относительные удлинения и сдвиги:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{12}^{(2)} = \varepsilon_{12}. \quad (1.7)$$

Равенства (1.7) в данной задаче автоматически не выполняются. Эти равенства служат условиями согласования кинематических соотношений с физическими уравнениями, описывающими механическое состояние соединяемых элементов.

Задача состоит в разработке алгоритма, позволяющего для подчиняющегося физическим уравнениям термоупругости составного тела построить решение, удовлетворяющее соотношениям механики деформируемого тела и ограничениям (1.2)–(1.4) в случае плоской или ограничениям (1.5)–(1.7) – в случае пространственной задачи.

2. Алгоритм построения решения

2.1. Подструктурный вариант смешанного метода конечных элементов

Итерационный алгоритм построения решения на каждом шаге последовательных приближений использует метод конечных элементов (МКЭ) в форме смешанного подструктурного варианта. Применение смешанного функционала для построения разрешающих уравнений МКЭ позволяет выразить компоненты деформации в узлах КЭ-сетки (а следовательно, и напряжений) без использования операций дифференцирования приближенного решения и каких-либо методов восполнения. Функционал, в котором независимыми функциями являются перемещения и деформации, построен в работе [13],

$$J(u, \varepsilon) = \int_V [(Lu)^T D(\varepsilon - \varepsilon^0) - 0.5\varepsilon^T D\varepsilon] dV + W, \quad (2.1)$$

где L – матрица дифференциальных операторов для записи вектора деформаций через перемещения, т.е. $Lu = \varepsilon$; D – матрица упругих модулей материала; ε_0 – вектор температурных деформаций; W – потенциальная энергия заданных объемных и поверхностных сил. Из условий стационарности функционала (2.1) следуют уравнения равновесия, зависимости Коши и граничные условия в напряжениях.

С использованием функционала (2.1) строится подструктурный вариант МКЭ. Тело V , в котором разыскивается решение, разбивается на r частей (подструктур, подобластей) так, чтобы в каждой части материальные параметры были непрерывны. Каждая часть тела (подструктура) с номером k разбивается на конечные элементы. Решение для перемещений разыскивается в классе непрерывных функций во всем теле V , а для деформаций – в классе функций, непрерывных в отдельных подструктурах.

Введены параметры: n_U – число компонент вектора перемещений в узле; n_{\dim} – число параметров деформаций в узле; n_{f1} – число узлов в конечном элементе; $n_{PS}^{(k)}$ – число узлов в подструктуре с номером k ; n_P – общее число узлов; $n_{f2} = n_{f1} \cdot n_U$, $n_{f3} = n_{f1} \cdot n_{\dim}$

определяют размерности векторов и матриц в конечных элементах; $n_{S2} = n_{PS} \cdot n_U$, $n_{S3} = n_{PS} \cdot n_{dim}$ – размерности массивов в подструктурах, $n_{st} = n_U \cdot n_P$ – порядок разрешающей системы линейных алгебраических уравнений МКЭ.

Для рассматриваемых в работе задач (плоских и осесимметричных) выбираются четырехугольные 8-узловые конечные элементы ($n_{f1} = 8$).

Далее на примере плоской термоупругой задачи ($n_U = 2$, $n_{dim} = 3$) формируется разрешающая система МКЭ.

В конечном элементе каждой подструктуры определены:

- 1) вектор узловых перемещений $\{U[n_{f2}]\}^{(e)} = \{U_{1X}, U_{1Y}, U_{2X}, U_{2Y}, \dots, U_{8X}, U_{8Y}\}^{(e)T}$;
- 2) вектор и матрицы функций форм в локальной системе координат (ξ, η) :

$$[n(\xi, \eta)]^{(e)} = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_8], \quad N[n_U, n_{f2}]^{(e)} = [N(\xi, \eta)]^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix}^{(e)},$$

$$M[n_{dim}, n_{f3}]^{(e)} = [M(\xi, \eta)]^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix};$$

- 3) матрица градиентов функций форм

$$B[n_{dim}, n_{f2}]^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial x & 0 & \dots & \partial N_8 / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_1 / \partial y & \dots & 0 & \partial N_8 / \partial y \\ \partial N_1 / \partial x & \partial N_1 / \partial y & \dots & \partial N_1 / \partial x & \partial N_8 / \partial y \end{bmatrix};$$

- 4) вектор деформаций $\{E[n_{f3}]\}^{(e)} = \{E_{1XX}, E_{1YY}, E_{1XY}, \dots, E_{8XX}, E_{8YY}, E_{8XY}\}^{(e)T}$.

В результате получаем конечно-элементные соотношения

$$u^{(e)} = N^{(e)}U^{(e)}, \quad \varepsilon^{(e)} = M^{(e)}E^{(e)}, \quad Lu^{(e)} = L(N^{(e)}U) = B^{(e)}U, \quad (Lu^{(e)})^T = U^T B^{(e)T},$$

и функционал (2.1) приводится к виду

$$J(U, E) = \sum_k \sum_{(e)} \int_{V^{(e)}} [U^T (B^{(e)T} D^{(e)} M^{(e)}) E^{(e)} - U^T B^{(e)} D^{(e)} \varepsilon^{0(e)} - 0.5 E^{(e)T} (M^{(e)T} D^{(e)} M^{(e)}) E^{(e)}] dV + W. \quad (2.2)$$

Вследствие независимости векторов перемещений и деформаций условие стационарности функционала записывается равенствами

$$\partial J(U, E) / \partial E_{PS}^{(k)} = [G_{PS}^{(k)}]^T U - [S_{PS}^{(k)}][E_{PS}^{(k)}] = 0, \quad k = (1, r), \quad (2.3)$$

$$\partial J(U, E) / \partial U = \sum_k G_{PS}^{(k)} E_{PS}^{(k)} + F = 0. \quad (2.4)$$

Для записи соотношений (2.3) и (2.4) в терминах метода конечных элементов для подструктур введены матрицы

$$G_{PS}^{(k)} = \sum_{(e)k} G^{(e)}, \quad S_{PS}^{(k)} = \sum_{(e)k} S^{(e)}, \quad E_{PS}^{(k)} = \sum_{(e)k} E^{(e)}. \quad (2.5)$$

Элементарные матрицы $(G^{(e)}, S^{(e)}, E^{(e)})$ вычисляются с использованием формул Гаусса

$$G^{(e)} = \int_{V^{(e)}} B^{(e)T} D^{(e)} M^{(e)} dV = \sum_{\xi, \eta} a(\xi, \eta) G(\xi, \eta), \quad G(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)^{(e)T} D^{(e)} M(\xi, \eta)^{(e)} |J|,$$

$$S^{(e)} = \int_{V^{(e)}} M^{(e)T} D^{(e)} M^{(e)} dV = \sum_{\xi, \eta} a(\xi, \eta) S(\xi, \eta), \quad S(\xi, \eta) = M(\xi, \eta)^{(e)T} D^{(e)} M(\xi, \eta)^{(e)} |J|, \quad (2.6)$$

$$E^{(e)} = \int_{V^{(e)}} B^{(e)T} D^{(e)} \varepsilon^{0(e)} dV = \sum_{\xi, \eta} a(\xi, \eta) E(\xi, \eta), \quad E(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)^{(e)T} D^{(e)} E^0(\xi, \eta)^{(e)} |J|,$$

$$E^0(\xi, \eta)^{(e)} = \Delta T(\xi, \eta) \cdot \{1 \quad 1 \quad 0\}^T \cdot \alpha_{PS}, \quad \Delta T(\xi, \eta)^{(e)} = \{N_1, \dots, N_8\}^{(e)} \cdot \{dT^{(e)}\}^T,$$

$$F = \sum_{(e)} \left[\int_{V^{(e)}} B^{(e)T} D^{(e)} \varepsilon^{0(e)} dV + \int_{V^{(e)}} N^{(e)T} Q^{(e)} dV \right] + \int_S N^{(e)T} q^{(e)} dS + P.$$

Здесь $a(\xi, \eta)$ – квадратурные коэффициенты Гаусса в узлах интегрирования; $(\xi, \eta) \in [-1; 1]$ – локальные координаты; $|J|$ – якобиан преобразования; $P, q^{(e)}, Q^{(e)}$ – соответственно векторы узловых, поверхностных и объемных сил.

Из условия (2.3) для каждой подструктуры получаем векторы деформаций

$$[E_{PS}^{(k)}] = [R_{3PS}^{(k)}] U, \quad k = (1, r), \quad (2.7)$$

где

$$R_{3PS}^{(k)} = [S_{PS}^{(k)}]^{-1} [G_{PS}^{(k)}]^T. \quad (2.8)$$

Если соотношение (2.7) для деформаций в подструктуре подставить в (2.4) и ввести матрицу жесткости подструктуры

$$K_{PS}^{(k)} = G_{PS}^{(k)} R_{3PS}^{(k)}, \quad (2.9)$$

получим разрешающую систему уравнений МКЭ для всей расчетной области

$$K_{all} U = \sum_k K_{PS}^{(k)} U = F_{all}. \quad (2.10)$$

Размерности матриц в соотношениях (2.6)–(2.10): в конечном элементе – $G^{(e)}[n_{f2}, n_{f3}]$, $S^{(e)}[n_{f3}, n_{f3}]$, в подструктуре – $G_{PS}^{(k)}[n_{S2}, n_{S3}]$, $S_{PS}^{(k)}[n_{S3}, n_{S3}]$, $R_{3PS}^{(k)}[n_{S3}, n_{S2}]$, $E_{PS}^{(k)}[n_{S3}]$, $K_{PS}^{(k)}[n_{S2}, n_{S2}]$, $K_{all}[n_{st}, n_{st}]$.

Особенностью подструктурных матриц и глобальной матрицы жесткости является их сильная разреженность, что учитывается при реализации алгоритма.

Решением разрешающей системы алгебраических уравнений (2.10) является глобальный вектор перемещений. Деформации в узлах подструктуры определяют соотношения (2.7). Для определения напряжений в узлах подструктуры в векторе деформаций $E_{PS}^{(k)}$ выделяются сечения – компоненты деформаций в каждом узле, учитываются начальные деформации ε^0 и производятся вычисления в соответствии с физическими уравнениями $\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon^0)$.

2.2. Системы координат, используемые в алгоритме

Через X, Y обозначаются координаты точек плоского тела в глобальной ортогональной декартовой системе. В узлах КЭ-сетки, принадлежащих контуру, линии соединения элементов конструкции, и в особой точке вводятся декартовы ортогональные координаты x, y (далее узловые координаты). Ориентация узловой системы координат относительно глобальной устанавливается по следующим правилам. На рис. 2.1, *a* показан узел, расположенный на контуре. К сторонам смежных элементов в этом узле проведены нормали \bar{n}_1, \bar{n}_2 , составляющие углы φ_1 и φ_2 с осью X . Через $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2$ обозначается угол между осями X и x .

На рис. 2.1, *б* показан узел на линии соединения различных элементов конструкции. Как и в предыдущем случае, строятся углы φ_1 и φ_2 , составляемые нормальными \bar{n}_1, \bar{n}_2 с осью X . Угол между осями X и x выбирается равным $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2 + \pi / 2$. На рис. 2.1, *в* показан узел, совпадающий с особой точкой. Ось x направляется по касательной к линии соединения составляющих элементов. Через φ обозначается угол между осями X и x . В случае пространственной осесимметричной задачи аналогично строятся узловые системы координат x, y, z . При этом плоскость xz совпадает с плоскостью RZ глобальной цилиндрической системы.

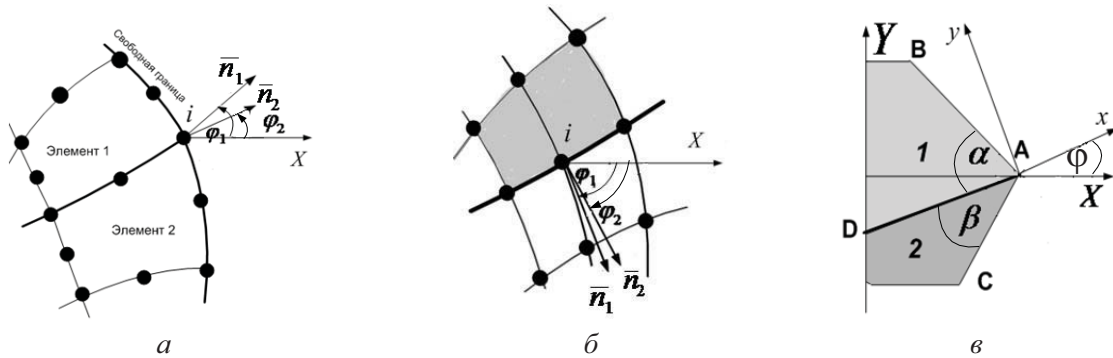


Рис. 2.1. Узел i : *a* – находится на свободной границе; *б* – лежит на общей линии; *в* – является особой точкой A

Преобразование компонент напряжений при переходе от глобальных координат к узловым осуществляется с использованием матриц:

$$\begin{aligned}
 &\text{– для плоской задачи} \quad [\Psi_s] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix}; \\
 &\text{– для осесимметричной (2D) задачи} \quad [\Psi_s] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & 0 & \sin^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin^2\varphi & 0 & \cos^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

$$\text{– для осесимметричной (3D) задачи} \quad [\Psi_S] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & 0 & \sin^2\varphi & 0 & 2\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2\varphi & 0 & \cos^2\varphi & 0 & -2\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\cos\varphi & 0 & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Аналогично строится матрица Ψ_E преобразования компонент деформации. Эти матрицы позволяют выразить напряжения и деформации в i -м узле k -й подструктуры в узловых координатах по формулам

$$\begin{aligned} \sigma'_{PS}{}^{(k)}(i) &= \Psi_S D^{(k)} E_{PS}{}^{(k)}(i) = \Psi_S D^{(k)} R_{3i} \cdot U_{PS}{}^{(k)} = \Psi_S D r_{3i} \cdot U_{PS}{}^{(k)}, \\ \varepsilon'_{PS}{}^{(k)}(i) &= \Psi_E E_{PS}{}^{(k)}(i) = \Psi_E R_{3i} \cdot U_{PS}{}^{(k)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$D r_{3i}[n_{\dim}, n_{S2}] = D^{(k)} \cdot R_{3i},$$

$R_{3i}[n_{\dim}, n_{S2}]$ – сечение, выделяемое в массиве $R_{3PS}{}^{(k)}$, соответствующее этому узлу.

Например, для напряжений в плоском случае будем иметь

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \\ \sigma'_{xy} \end{matrix} \right\}_L^k = \left\{ \begin{matrix} \sum_{JL} V_{1L} U_{JL} \\ \sum_{JL} V_{2L} U_{JL} \\ \sum_{JL} V_{3L} U_{JL} \end{matrix} \right\}^k, \text{ где } V[n_{\dim}, n_U] = \Psi_S D^{(k)} \cdot \begin{bmatrix} R_{3i}(1, j_1) & R_{3i}(1, j_2) \\ R_{3i}(2, j_1) & R_{3i}(2, j_2) \\ R_{3i}(3, j_1) & R_{3i}(3, j_2) \end{bmatrix}.$$

Здесь индексы j_1, j_2 определяют компоненты – столбцы сечения $R_{3i}{}^{(k)}$, соответствующие перемещениям U_{iL} в i -м узле, $L = 1, 2$.

2.3. ОАР в узлах КЭ-сетки

Через $\{A_{sp}\}$ обозначено подмножество узлов КЭ-сетки, в каждом из которых заданы какие-либо ограничения на параметры состояния. Перемещения, отвечающие узлам $\{A_{sp}\}$, образуют вектор-подмножество $U_{sp} \in U$. Ограничения в узлах $\{A_{sp}\}$ в термоупругой задаче представляют собой линейные алгебраические соотношения. В зависимости от положения узла КЭ-сетки, геометрических и материальных параметров элементов конструкции алгебраические соотношения разделяются на несколько типов и подтипов. Строятся эти соотношения в узловых координатах.

2.3.1. ОАР для плоского случая 2D ($n_{dim} = 3$)

1. Тип 1. В точках границы выполняются условия $\sigma'_{11} = 0, \sigma'_{12} = 0$.

2. Тип 2. На линии соединения выполняются 3 соотношения: $\varepsilon'_{11}^{(1)} = \varepsilon'_{11}^{(2)}, \sigma'_{22}^{(1)} = \sigma'_{22}^{(2)}, \sigma'_{12}^{(1)} = \sigma'_{12}^{(2)}$.

3. Тип 0. Особая точка. В зависимости от геометрических и материальных параметров составляющих элементов рассмотрены следующие возможные подтипы особой точки:

3.1) $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi$, коэффициенты теплового расширения $\alpha_1 = \alpha_2$, на параметры состояния накладываются 6 ограничений: $\sigma'_{11}^{(k)} = 0, \sigma'_{22}^{(k)} = 0, \sigma'_{12}^{(k)} = 0, k = 1, 2$;

3.2) $\alpha = \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi$, параметры состояния подчиняются 6 ограничениям: $\sigma'_{11}^{(1)} = -E_1(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T, \sigma'_{11}^{(2)} = 0, \sigma'_{22}^{(k)} = 0, \sigma'_{12}^{(k)} = 0, k = 1, 2$;

3.3) $\alpha \neq \pi, \beta = \pi, \alpha + \beta \neq \pi$, параметры состояния подчиняются 6 ограничениям: $\sigma'_{11}^{(1)} = 0, \sigma'_{11}^{(2)} = E_2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T, \sigma'_{22}^{(k)} = 0, \sigma'_{12}^{(k)} = 0, k = 1, 2$.

3.4) $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi$, на параметры состояния накладываются ограничения: $\sigma'_{11}^{(1)} = F_H \operatorname{ctg}^2 \alpha, \sigma'_{11}^{(2)} = F_H \operatorname{ctg}^2 \beta, \sigma'_{22}^{(k)} = F_H, k = 1, 2, \sigma'_{12}^{(1)} = -F_H \operatorname{ctg} \alpha, \sigma'_{12}^{(2)} = F_H \operatorname{ctg} \beta$.
Здесь $F = (\operatorname{ctg}^2 \beta - \nu_2)/E_2 - (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1)/E_1, F_H = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T/F$.

2.3.2. ОАР для осесимметричного случая 2D ($n_{dim} = 4$)

1. Тип 1. В точках границы выполняются условия $\sigma'_{11} = 0, \sigma'_{13} = 0$.

2. Тип 2. На линии соединения выполняются 4 соотношения: $\varepsilon'_{11}^{(1)} = \varepsilon'_{11}^{(2)}, \varepsilon'_{22}^{(1)} = \varepsilon'_{22}^{(2)}, \sigma'_{33}^{(1)} = \sigma'_{33}^{(2)}, \sigma'_{13}^{(1)} = \sigma'_{13}^{(2)}$.

3. Тип 0. Особая точка. Рассмотрены следующие возможные подтипы особой точки:

3.1) $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi$ и коэффициенты Пуассона $\nu_1 \neq \nu_2$, на параметры состояния накладываются 8 ограничений: $\sigma'_{11}^{(k)} = 0, \sigma'_{13}^{(k)} = 0, \sigma'_{33}^{(k)} = 0, (k = 1, 2), \sigma'_{22}^{(1)} = E_1(1 + \nu_2)(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T/(\nu_1 - \nu_2), \sigma'_{22}^{(2)} = E_2(1 + \nu_1)(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T/(\nu_1 - \nu_2)$;

3.2) $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta \neq \pi$ и коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2$, на параметры состояния накладываются 7 ограничений: $\sigma'_{11}^{(k)} = 0, \sigma'_{13}^{(k)} = 0, \sigma'_{33}^{(k)} = 0, (k = 1, 2); \sigma'_{22}^{(1)} \cdot E_2/E_1 - \sigma'_{22}^{(2)} = 0$.

3.3) $\alpha \neq \pi, \beta = \pi, \alpha + \beta \neq \pi$, на параметры состояния накладываются 7 ограничений: $\sigma'_{33}^{(1)} = 0, \sigma'_{13}^{(2)} = 0, (k = 1, 2), \sigma'_{11}^{(1)} = 0, \sigma'_{22}^{(1)} \cdot (\nu_1 E_2/E_1) + \sigma'_{11}^{(2)} - \nu_2 \sigma'_{22}^{(2)} = E_2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T, \sigma'_{22}^{(1)}(-E_2/E_1) - \nu_2 \sigma'_{11}^{(2)} + \sigma'_{22}^{(2)} = E_2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T$;

3.4) $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi$, на параметры состояния накладываются 7 ограничений: $\sigma'_{11}^{(1)} - \sigma'_{33}^{(1)} \operatorname{ctg}^2 \alpha = 0, \sigma'_{11}^{(2)} - \sigma'_{33}^{(2)} \operatorname{ctg}^2 \beta = 0, \sigma'_{13}^{(1)} + \sigma'_{33}^{(1)} \operatorname{ctg} \alpha = 0, \sigma'_{13}^{(2)} - \sigma'_{33}^{(2)} \operatorname{ctg} \beta = 0, \sigma'_{33}^{(1)} - \sigma'_{33}^{(2)} = 0, \sigma'_{22}^{(1)}(\nu_1 - \nu_2)/E_1 + \sigma'_{33}^{(1)}(F + \nu_2 H) = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T(1 + \nu_2), \sigma'_{22}^{(1)}(\nu_1 - \nu_2)/E_2 + \sigma'_{33}^{(2)}(F + \nu_1 H) = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T(1 + \nu_1)$.

Здесь $F = (\operatorname{ctg}^2 \beta - \nu_2)/E_2 - (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1)/E_1, H = (\nu_1/E_1 - \nu_2/E_2)(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)$.

2.4. ОАР для осесимметричного случая 3D ($n_{dim} = 6$)

1. Тип 1. В точках границы выполняются условия $\sigma'_{11} = 0$, $\sigma'_{13} = 0$, $\sigma'_{12} = 0$.

2. Тип 2. На линии соединения выполняются 6 соотношений $\varepsilon'_{11}^{(1)} = \varepsilon'_{11}^{(2)}$, $\varepsilon'_{22}^{(1)} = \varepsilon'_{22}^{(2)}$, $\varepsilon'_{12}^{(1)} = \varepsilon'_{12}^{(2)}$, $\sigma'_{33}^{(1)} = \sigma'_{33}^{(2)}$, $\sigma'_{13}^{(1)} = \sigma'_{13}^{(2)}$, $\sigma'_{23}^{(1)} = \sigma'_{23}^{(2)}$.

3. Тип 0. Особая точка. Рассмотрены следующие возможные подтипы особой точки.

3.1) $\alpha \neq \pi$, $\beta \neq \pi$, $\alpha + \beta \neq \pi$, коэффициенты Пуассона $\nu_1 \neq \nu_2$, коэффициенты теплового расширения $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и $G_2 \text{ctg}\alpha + G_1 \text{ctg}\beta \neq 0$, на параметры состояния накладываются 12

ограничений: $\sigma'_{11}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{13}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{33}^{(k)} = 0$, $k = 1, 2$; $\sigma'_{12}^{(1)} = -\sigma'_{32} \text{ctg}\alpha$, $\sigma'_{22}^{(1)} = E_1(1 + \nu_2)(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T / (\nu_1 - \nu_2)$, $\sigma'_{22}^{(2)} = E_2(1 + \nu_1)(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T / (\nu_1 - \nu_2)$, $(G_2 \text{ctg}\alpha + G_1 \text{ctg}\beta)\sigma'_{32} = 0$, $\sigma'_{32}^{(1)} = \sigma'_{32}^{(2)}$;

3.2) $\alpha \neq \pi$, $\beta \neq \pi$, $\alpha + \beta \neq \pi$, $\nu_1 = \nu_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ и $G_2 \text{ctg}\alpha + G_1 \text{ctg}\beta \neq 0$ – 11 ограничений: $\sigma'_{11}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{13}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{33}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{12}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{23}^{(k)} = 0$, $k = (1, 2)$, $\sigma'_{22}^{(1)} E_2 / E_1 - \sigma'_{22}^{(2)} = 0$;

3.3) $\alpha \neq \pi$, $\beta \neq \pi$, $\alpha + \beta \neq \pi$, $\nu_1 = \nu_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ и $G_2 \text{ctg}\alpha + G_1 \text{ctg}\beta = 0$ – 10 ограничений: $\sigma'_{11}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{13}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{33}^{(k)} = 0$, $k = (1, 2)$, $\sigma'_{12}^{(1)} + \sigma'_{32}^{(1)} \text{ctg}\alpha = 0$, $\sigma'_{12}^{(1)} - \sigma'_{32}^{(1)} \text{ctg}\beta = 0$, $\sigma'_{22}^{(1)} = E_1(1 + \nu_2)(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T / (\nu_1 - \nu_2)$, $\sigma'_{22}^{(2)} = E_2(1 + \nu_1)(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T / (\nu_1 - \nu_2)$, $\sigma'_{22}^{(1)} \cdot E_2 / E_1 - \sigma'_{22}^{(2)} = 0$, $\sigma'_{23}^{(1)} - \sigma'_{23}^{(2)} = 0$;

3.4) $\alpha \neq \pi$, $\beta = \pi$, $\alpha + \beta \neq \pi$ – 11 ограничений: $\sigma'_{33}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{13}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{23}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{12}^{(k)} = 0$, $k = (1, 2)$, $\sigma'_{11}^{(1)} = 0$, $\sigma'_{22}^{(1)} \cdot (\nu_1 E_2 / E_1) + \sigma'_{11}^{(2)} - \nu_2 \sigma'_{22}^{(2)} = E_2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T$, $\sigma'_{22}^{(1)}(-E_2 / E_1) - \nu_2 \sigma'_{11}^{(2)} + \sigma'_{22}^{(2)} = E_2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T$;

3.5) $\alpha \neq \pi$, $\beta \neq \pi$, $\alpha + \beta = \pi$, $\text{ctg}\alpha \cdot (1/G_1 - 1/G_2) \neq 0$ – 11 ограничений: $\sigma'_{11}^{(1)} - \sigma'_{33}^{(1)} \text{ctg}^2\alpha = 0$, $\sigma'_{11}^{(2)} - \sigma'_{33}^{(2)} \text{ctg}^2\beta = 0$, $\sigma'_{13}^{(1)} + \sigma'_{33}^{(1)} \text{ctg}\alpha = 0$, $\sigma'_{13}^{(2)} - \sigma'_{33}^{(2)} \text{ctg}\beta = 0$, $\sigma'_{12}^{(k)} = 0$, $\sigma'_{23}^{(k)} = 0$, $k = (1, 2)$, $\sigma'_{33}^{(1)} - \sigma'_{33}^{(2)} = 0$, $\sigma'_{22}^{(1)}(\nu_1 - \nu_2)/E_1 + \sigma'_{33}^{(1)}(F + \nu_2 H) = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T(1 + \nu_2)$, $\sigma'_{22}^{(1)}(\nu_1 - \nu_2)/E_2 + \sigma'_{33}^{(2)}(F + \nu_1 H) = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T(1 + \nu_1)$;

3.6) $\alpha \neq \pi$, $\beta \neq \pi$, $\alpha + \beta = \pi$, $\text{ctg}\alpha \cdot (1/G_1 - 1/G_2) = 0$ – 10 ограничений: $\sigma'_{11}^{(1)} - \sigma'_{33}^{(1)} \text{ctg}^2\alpha = 0$, $\sigma'_{11}^{(2)} - \sigma'_{33}^{(2)} \text{ctg}^2\beta = 0$, $\sigma'_{13}^{(1)} + \sigma'_{33}^{(1)} \text{ctg}\alpha = 0$, $\sigma'_{13}^{(2)} - \sigma'_{33}^{(2)} \text{ctg}\beta = 0$, $\sigma'_{12}^{(1)} + \sigma'_{32}^{(1)} \text{ctg}\alpha = 0$, $\sigma'_{12}^{(2)} - \sigma'_{32}^{(2)} \text{ctg}\beta = 0$, $\sigma'_{33}^{(1)} - \sigma'_{33}^{(2)} = 0$, $\sigma'_{32}^{(1)} - \sigma'_{32}^{(2)} = 0$, $\sigma'_{22}^{(1)}(\nu_1 - \nu_2)/E_1 + \sigma'_{33}^{(1)}(F + \nu_2 H) = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T(1 + \nu_2)$, $\sigma'_{22}^{(1)}(\nu_1 - \nu_2)/E_2 + \sigma'_{33}^{(2)}(F + \nu_1 H) = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T(1 + \nu_1)$.

Здесь $F = (\text{ctg}^2\beta - \nu_2)/E_2 - (\text{ctg}^2\alpha - \nu_1)/E_1$, $H = (\nu_1/E_1 - \nu_2/E_2)(1 + \text{ctg}^2\alpha)$.

Построенные ОАР с использованием равенств (2.11) в каждом случае записываются в виде матричного равенства

$$\Phi_{SP} \cdot U = f_{SP}. \quad (2.12)$$

Матрица Φ_{SP} и вектор f_{SP} определяются типом (подтипом) соответствующего случая.

2.5. Процедура итерационного процесса

Вектор U представляется объединением векторов меньшей размерности $U = U_{SP} \cup U_{last}$, а матрица Φ_{SP} – объединением двух прямоугольных матриц $\Phi_{SP} = \Phi_{SP0} \cup \Phi_{SP1}$, в результате чего равенство (2.12) записывается в виде

$$\Phi_{SP0} \cdot U_{SP} = f_{SP} - \Phi_{SP1} \cdot U_{last}. \quad (2.13)$$

Равенство (2.13) рассматривается как система уравнений для перемещений U_{SP} . Матрица Φ_{SP0} этой системы является прямоугольной, число уравнений оказывается большим, чем число неизвестных, поэтому ее решение существует лишь в обобщенном смысле (псевдорешение). Итерационный процесс построения решения задачи организуется следующим образом:

1) перемещения U_{last} считаются известными на $n-1$ шаге приближений, из уравнений (2.13) определяется вектор перемещений $U_{SP}^{(n)}$ в n -м приближении;

2) перемещения $U_{SP}^{(n)}$ рассматриваются как граничные условия в узлах $\{A_{sp}\}$ при решении термоупругой задачи (2.10). В результате определяется n -е приближение для перемещений $U_{last}^{(n)}$;

3) начальное приближение $U_{last}^{(0)}$ находится из решения задачи, в которой в качестве ОАР учитываются лишь граничные условия.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока алгебраические соотношения (2.12) не будут выполняться с заданной точностью. Сходимость контролируется среднеквадратичным значением величины вектора невязок.

Таким образом, процесс итерационного решения задачи проводится путем решения на каждом шаге итерации обратной задачи – поиска перемещений, обеспечивающих минимум величины вектора невязок.

3. Реализация алгоритма

3.1. Структура программного комплекса

Алгоритм решения задачи реализован в виде программного комплекса, состоящего из препроцессорной подготовки данных, основной части и постпроцессорной обработки результатов.

Препроцессор служит для подготовки входных данных. Входные данные для препроцессора – это конечно-элементная сетка, свойства материалов, заданные перемещения, узловые и распределенные силы, приращение температуры, которые выгружаются из программного комплекса ANSYS. Препроцессор анализирует эти данные, определяет особые точки, их тип, параметры для построения узловых координат, формирует текстовые файлы с данными о задаче и особых точках.

Основная часть комплекса делится на пять блоков (вспомогательных и основных):

1) инициализация входных данных, управление процессом решения (начать решение, продолжить);

- 2) формирование – сборка базовой разрешающей системы МКЭ (2.10) и коэффициентов sp -подсистемы (2.13);
- 3) решение системы (2.13) для определения очередного приближения перемещений U_{SP} ;
- 4) решение базовой (или модифицированной на итерациях) разрешающей системы МКЭ (2.10);
- 5) определение параметров НДС (деформации, напряжения), оценка погрешности решения, формирование текстовых файлов для использования постпроцессором.

Постпроцессор служит для визуализации результатов решения (построение изолиний, линий уровня и т.д.) [14], а также для их перезаписи в формате, пригодном для графических систем SURFER, TECPLOT.

3.2. Особенности реализации программного комплекса

Описываемый программный комплекс реализован на современном языке Fortran-90/95 [15–18]. Выбор этого языка вызван тем, что на нем написано большинство высокоэффективных алгоритмов по численным методам, используемым в комплексе. В частности, алгоритм сингулярного разложения матриц для определения перемещений – решения прямоугольной sp -подсистемы [16, 17] и LU – разложение для решения сильно-разреженной разрешающей системы (модули **Ma28** из библиотеки **HSL** (Harwell Subroutine Library)).

При исследовании полей напряжений, имеющих значительные изменения в малых областях, характерный размер конечных элементов может оказаться настолько малым, что при вычислении его площади численными методами погрешность вычислений оказывается соразмерной или даже превышающей величину этой площади. Поэтому в программном комплексе вычисления проводятся с максимально возможной в языке Fortran типом точности *real_16*. Другой особенностью вычислительной реализации комплекса является большое количество матричных операций. Все это обуславливает существенные затраты машинного времени при решении задач.

Ускорение вычислений в программном комплексе осуществляется посредством применения технологии OpenMP и поддерживающих эту технологию компиляторов Intel, оптимально реализующих встроенные матричные и векторные функции (сложение, вычитание, скалярное произведение). Эти меры позволяют ускорить вычисления в 4–5 раз.

Компиляция выполнена на суперкомпьютере с параллельной архитектурой **TESLA Fermi K20** в Пермском государственном научном исследовательском университете.

С использованием программного комплекса решены некоторые конкретные задачи механики деформируемого твердого тела [12, 19, 20].

4. Напряжения при температурной нагрузке вблизи края поверхности соединения составного цилиндра (пример)

В приведенном здесь примере демонстрируется сходимость предлагаемого вычислительного процесса и отличие построенного итерационного решения вблизи особой точки от решения, получаемого в классическом конечно-элементном подходе.

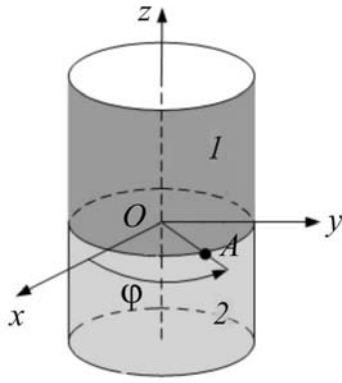


Рис. 4.1. Составной цилиндр

Рассматривается составной цилиндр высотой $l = 20$ мм, радиусом $R = 5$ мм (рис. 4.1). Элементы 1, 2, составляющие цилиндр, имеют материальные характеристики: $E_1 = 0,206e6$ МПа, $E_2 = 0,7e5$ МПа, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,25$, $\alpha_1 = 0,11e-4$ град $^{-1}$, $\alpha_2 = 0,85e-5$ град $^{-1}$. Цилиндр подвергается однородной температурной нагрузке $\Delta T = 100$ °С. Обязательные алгебраические равенства на линии особых точек (граница поверхности соединения) построены в работе [19], приведены в п. 2.3.2 (подтип 3.4) и применительно к настоящему примеру, записываются десятью соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}^{(2)} = 0, \\ \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)} = \sigma_{zz}, \quad \sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{z\varphi}; \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(\nu_1 - \nu_2)/E_1 + \sigma_{zz}(1 + \nu_2)(\nu_1/E_1 - \nu_2/E_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)(1 + \nu_2)\Delta T, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}(\nu_1 - \nu_2)/E_2 + \sigma_{zz}(1 + \nu_1)(\nu_1/E_1 - \nu_2/E_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)(1 + \nu_1)\Delta T. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ограничения (4.1) отвечают классическому подходу к решению задачи. Они представляют собой граничные условия на линии особых точек и условия непрерывности напряжений на поверхности соединения элементов 1, 2. Равенства (4.2), отражающие условия непрерывности деформаций на поверхности соединения, в классическом подходе не рассматриваются. Считается, что эти условия будут выполнены автоматически вследствие непрерывности перемещений точек элементов 1, 2 на поверхности соединения. Исследование показывает, что автоматическое выполнение условий непрерывности деформаций на поверхности соединения в особых точках возможны лишь в исключительных случаях при определенных сочетаниях материальных параметров соединяемых элементов [20].

В итерационном решении задачи использовался 4-угольный 8-узловой элемент, характерный линейный размер элемента составлял 0,1 мкм. Сходимость итерационного процесса иллюстрируется на рис. 4.2, а, где приведена зависимость среднеквадратического значения величины вектора невязки η от количества итераций. В результате выполнения 380 итераций решение для напряжений, отнесенное к максимальному значению σ_{zz} , удовлетворяет ограничениям (4.1) с погрешностью, не превышающей 0,5 %. Равенства (4.2) выполняются соответственно с точностью 0,6 и 0,3 %. Графики распределения всех напряжений в окрестности особой точки приведены в работе [19].

На рис. 4.2, б показаны напряжения $\sigma_{zz}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) вблизи особой точки, полученные на одной КЭ-сетке методом МКЭ (ANSYS) и методом итераций. Видно, что в малой окрестности точки А решения существенно различны. ANSYS-решение не удовлетворяет условию непрерывности напряжений. Условия непрерывности деформаций (4.2) в ANSYS-решении выполняются с большой погрешностью, соответственно 176 и 198 %. Вне малой окрестности особой точки решения, полученные разными методами, совпадают.

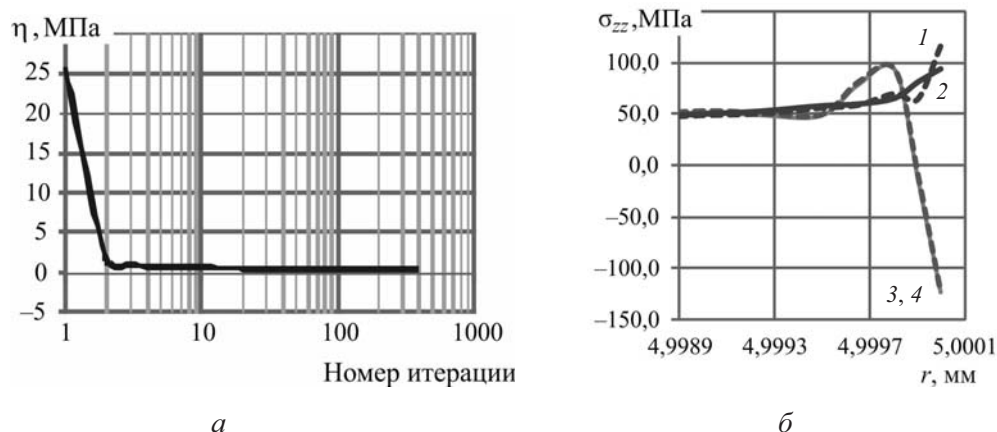


Рис. 4.2. Результаты вычислений после 380 итераций: *a* – зависимость среднеквадратической величины вектора невязки η от количества итераций; *б* – напряжения σ_{zz} на линии ОА вблизи особой точки: 1, 2 – ANSYS-решение в элементах 1, 2; 3, 4 – соответствующее итерационное решение

Заключение

Предлагаемый в работе итерационный конечно-элементный алгоритм предназначен для построения решения упругой и термоупругой задач, согласованного со всеми заданными ограничениями непосредственно в особых точках составных плоских и пространственных конструкций. Такие решения, в частности, дают возможность оценить области достоверности результатов исследований, полученных методами механики деформируемого твердого тела, не учитывающими неклассическое задание граничных условий в особых точках. Данный подход может найти применение в исследовании полей напряжений вблизи шероховатых поверхностей, а также в изучении проблем механики композитных материалов и конструкций, в механике разрушения, в механике трещин и т.д.

Библиографический список

1. Bogy D.B. Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction // Trans. ASME. Ser. E. – 1971. – Vol. 38. – No. 2. – P. 377–386. DOI: org/10.1115/1.3408786
2. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. – 338 с.
3. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикладная математика и механика. – 1967. – № 1. – С. 178–186.
4. Матвеев В.П., Федоров А.Ю. Оптимизация геометрии составных упругих тел как основа совершенствования методик испытаний на прочность клеевых соединений // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 63–70. DOI: org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.40.
5. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity. Part I: Removal, interpretation and analysis // App. Mech. Rev. – 2004. – Vol. 57. – No. 4. – P. 251–297. DOI: org/10.1115/1.1762503.
6. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity. Part II: Asymptotic identification // App. Mech. Rev. – 2004. – Vol. 57. – No. 4. – P. 385–439.
7. Barut A., Guven I., Madenci E. Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // Int. J. of Solid and Structures. – 2001. – Vol. 38. – No. 50–51. – P. 9077–9109.

8. Особенности напряженного состояния в конечных областях вблизи угловых точек границы / М.Д. Коваленко, С.В. Галаджиев, О.С. Гоголева, Д.В. Трубников // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 53–60.

9. Андреев А.В. Суперпозиция степенно-логарифмических и степенных сингулярных решений в двумерных задачах теории упругости // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2014. – № 1. – С. 5–30.

10. Paggi M., Carpintery A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Appl. Mech. Rev.* – 2008. – Vol. 61. – P. 020801-1-22. DOI.org/10.1115/1.2885134.

11. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Нестандартные задачи механики деформируемого твердого тела и итерационный метод их решения // *Механика наноструктурированных материалов и систем: сб. тр. 2-й Всесоюз. конф.: в 3 т. Т. 3 / Ин-т прикл. мех. РАН*. – М., 2013. – С. 104–118.

12. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Исследование напряженного состояния в составной пластинке вблизи края линии соединения в зависимости от толщины и материальных параметров соединяющей прослойки // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2014. – Т. 1. – С. 153–166.

13. Пестренин В.М., Пестренина И.В. *Механика композитных материалов и элементов конструкций*; Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2005. – 364 с.

14. Аптуков В.Н., Ландик Л.В., Скачков А.П. *Технологии использования современных пакетов прикладных программ при решении задач механики сплошных сред: учеб. пособие*; Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2007. – 154 с.

15. Антонов А.С.. *Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP: учеб. пособие*. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – 77 с.

16. Горелик А.М. Современный фортран для компьютеров традиционной архитектуры и для параллельных вычислений // *Вычислительные методы и программирование*. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – Т. 5. – С. 1–12.

17. Форсайт Д.Ж., Малькольм М., Моулер К. *Машинные методы математических вычислений*. – М.: Мир, 1980. – 279 с.

18. Wolfe M. OpenACC Features in PGI Accelerator Fortran Compilers. Part 1. PGInsider. – URL: <https://www.pgroup.com/lit/articles/insider/v4n1a1a.htm> (accessed 3 April 2015).

19. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Нестандартные задачи для элементов конструкций с особенностью в виде составного пространственного ребра // *МКМ*. – Рига, 2015. – Т. 51, № 4. – С. 691–714.

20. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряженное состояние вблизи особой точки составной конструкции в плоской задаче // *Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика*. – 2013. – № 4(24). – С. 78–87.

References

1. Bogy D.B. Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction. *Trans. ASME. Ser. E.*, 1971, vol. 38, no. 2, pp. 377-386. DOI.org/10.1115/1.3408786

2. Chobanian K.S. *Napriazheniia v sostavnykh uprugikh telakh* [The stresses in the composite elastic bodies]. Erevan: Akademiia nauk ArmSSR, 1987. 338 p.

3. Aksentian O.K. Osobennosti napriazhenno-deformirovannogo sostoiianiia plity v okrestnosti rebra [Features of stress-strain state in the vicinity of the rib plate]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 1967, no. 1, pp. 178-186.

4. Matveenko V.P., Fedorov A.Y. Optimizatsiia geometrii sostavnykh uprugikh tel kak osnova sovershenstvovaniia metodik ispytaniia na prochnost' kleevykh soedinenii [Optimization of the geometry of compound elastic bodies with aim to improve strength test procedures for adhesive joints]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 63-70. DOI.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.40

5. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity. Part I: Removal, interpretation and analysis. *App. Mech. Rev.*, 2004, vol. 57, no. 4, pp. 251-297. DOI.org/10.1115/1.1762503

6. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity. Part II: Asymptotic identification. *App. Mech. Rev.*, 2004, vol. 57, no. 4, pp. 385-439.

7. Barut A., Guven I., Madenci E. Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading. *Int. J. of Solid and Structures*, 2001, vol. 38, no. 50-51, pp. 9077-9109.

8. Kovalenko M.D., Galadzhiev S.V., Gogoleva O.S., Trubnikov D.V. Osobennosti napriazhennogo sostoiianiia v konechnykh oblastiakh vblizi uglovykh tochek granitsy [Features of the stress state in a finite region near the corner points of the boundary]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 53-60.

9. Andreev A.V. Superposition of power-logarithmic and power singular solutions in two-dimensional elasticity problems. *Vestnik PNIPU. Mekhanika*, 2014, no. 1, pp. 5-30.

10. Paggi M., Carpintery A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.*, 2008, vol. 61, pp. 020801-1-22. DOI.org/10.1115/1.2885134

11. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Nestandartnye zadachi mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela i iteratsionnyi metod ikh resheniia [Custom problem of solid mechanics and an iterative method for solving them]. *Sbornik trudov 2-i Vsesoiuznoi konferentsii "Mekhanika nanostrukturirovannykh materialov i sistem"*. Vol. 3. Moscow: Institut prikladnoi mekhaniki Rossiiskoi akademii nauk, 2013, pp. 104-118.

12. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Study of the stress state in composite plate near the connecting line edge depending on the thickness and material parameters of the connecting interlayer. *Vestnik PNIPU. Mekhanika*, 2014, vol. 1, pp. 153-166.

13. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. Mekhanika kompozitnykh materialov i elementov konstruksii [Mechanics of composite materials and structures]. Permskii gosudarstvennyi universitet, 2005. 364 p.

14. Aptukov V.N., Landik L.V., Skachkov A.P.. Tekhnologii ispol'zovaniia sovremennykh paketov prikladnykh programm pri reshenii zadach mekhaniki sploshnykh sred [Technologies using modern software packages for solving continuum mechanics]. Permskii gosudarstvennyi universitet, 2007. 154 p.

15. Antonov A.S. Parallelnoe programmirovaniie s ispol'zovaniem tekhnologii OpenMP [Parallel programming using OpenMP technology]. Moscovskii gosudarstvennyi universitet, 2009. 77 p.

16. Gorelik A.M. Sovremennyyi fortran dlia komp'iuterov traditsionnoi arkhitektury i dlia parallel'nykh vychislenii [Modern Fortran for computers of traditional architecture and parallel computing]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniie*. Moscovskii gosudarstvennyi universitet, 2004, vol. 5, pp. 1-12.

17. Forsait D.Zh., Mal'kol'm M., Moulter K. Mashinnye metody matematicheskikh vychislenii [Machine methods of mathematical calculations]. Moscow: Mir, 1980. 279 p.

18. Wolfe M. OpenACC Features in PGI Accelerator Fortran Compilers. Part 1. PGInsider, available at: <https://www.pgroup.com/lit/articles/insider/v4n1a1a.htm> (accessed 3 April 2015).

19. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs. *Mechanics of Composite Materials*, 2015, vol. 51, no. 4, pp. 489-504.

20. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Napriazhennoe sostoiianie vblizi osoboi tochki sostavnoi konstruksii v ploskoi zadache [Stressed state near a singular point of a composite structure in the plane problem]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 4(24), pp. 78-87.