

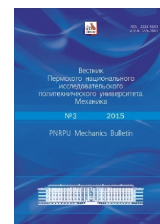


ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.05

УДК 539.3

ТРЕХВОЛНОВОЕ РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

А.М. Доронин, В.И. Ерофеев

Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 1 июня 2015 г.
Принята: 30 июля 2015 г.
Опубликована: 30 сентября 2015 г.

Ключевые слова:

трехволновое резонансное взаимодействие,
упругопластическая среда,
квадратичная нелинейность,
распадная неустойчивость,
продольно-поперечные волны

АННОТАЦИЯ

Рассматривается резонансное взаимодействие продольных и поперечных волн в упругопластической среде, поведение которой описывается перекрестными зависимостями между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, при этом зависимость от сдвиговых деформаций носит квадратичный характер. Целью исследования является определение характера процесса перекачки энергии между модами при отсутствии диссипации. Предполагается, что среда находится в состоянии плоской деформации. Рассматриваются два случая, когда преобладает продольная и поперечная деформация соответственно. В обоих случаях решение систем нелинейных уравнений в частных производных, определяющих поведение среды, ищется в виде бегущих гармонических волн с медленно меняющимися амплитудами. При решении используется метод усреднения по «быстрым» переменным, в рассмотрении участвуют только слагаемые с порядком малости не выше первого. Установлено, что в обоих случаях вид систем уравнений для амплитуд волн одинаков. Получены континуальные аналоги соотношений Мэнли-Роу. Приводится решение системы в стационарном случае при граничных условиях, соответствующих наличию на входе мощной высокочастотной волны и слабой сигнальной волны, графики, качественно иллюстрирующие процесс трехволнового взаимодействия при выполнении условия распадной неустойчивости (частоты и волновые числа сигнальной и холостой волны в сумме равны частоте волны накачки) и соотношению, определяющее расстояние, на котором реализуется эффективный обмен энергией между взаимодействующими волнами. Проанализирован характер зависимости амплитуд волн от отношения частот, отношения волновых чисел, а также от значений констант среды – плотности, модуля сдвига, предельной интенсивности сдвиговых деформаций.

© ПНИПУ

© Доронин Алексей Михайлович – аспирант, e-mail: alexeydoronin@list.ru
Ерофеев Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: erof.vi@yandex.ru

Alexey M. Doronin – Doctoral Student, e-mail: alexeydoronin@list.com
Vladimir I. Erofeev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: erof.vi@yandex.ru

THREE-WAVE RESONANCE INTERACTION IN ELASTOPLASTIC SOLID

A.M. Doronin, V.I. Erofeev

Mechanical Engineering Research Institutes, Russian Academy of Sciences,
Nizhnii Novgorod, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 1 June 2015
Accepted: 30 July 2015
Published: 30 September 2015

Keywords:

three-wave resonant interaction,
elastoplastic solid,
quadratic nonlinearity,
decay instability,
longitudinal-transverse waves

ABSTRACT

Resonant interaction of longitudinal and transverse waves in elastoplastic solid is considered. The media behavior is described by cross dependencies between the first invariants of stress and strain tensors and second invariants of stress and strain deviators. The dependence on shear strains is quadratic. The aim of this investigation is to establish the nature of the process of energy exchange between modes in the absence of dissipation. It is assumed that the solid is in the plane strain state. Two cases are considered, with prevailing longitudinal and transverse strains respectively. In both cases the solution of systems of nonlinear partial differential equations are searched in the form of traveling harmonic waves with slowly changing amplitudes. Method of averaging by "fast" variables is used taking into consideration only solutions and items with the order of smallness which is below one. It is obtained that in both cases the form of systems of equations for wave amplitudes is the same. Continual analogues for Manley-Rowe relations are obtained. The solution of the system for a stationary state with boundary conditions for strong input and weak signal waves is presented, as well as the diagram qualitatively illustrating the process of a three-wave interaction in case of decay instability (i.e. frequencies and wave numbers of signal and idler waves are in total equal to the frequency of the input wave) and relation determining the distance of effective energy exchange between the interacting waves. The behavior of magnitudes of wave amplitudes depending on frequency ratios, wave number ratios and media properties (density, shear modulus, limit of intensity of shear strains) has been analysed.

© PNRPU

Трехволновое взаимодействие – один из процессов, возникающих в нелинейных средах. Понятие о таких процессах впервые возникло в радиотехнике; суть их заключается в том, что при достаточно сильном периодическом изменении энергоемких параметров (например, индуктивности, емкости) можно добиться возбуждения или усиления слабых электрических колебаний и создать параметрические усилители и параметрические генераторы [1]. При переходе к распределенным системам параметрические процессы приобретают волновой характер и вместе с ним ряд особенностей, однако их физическая трактовка остается прежней. Для того чтобы параметрическое взаимодействие имело место, необходимо присутствие по крайней мере двух неравноправных волн: мощной волны накачки и слабой сигнальной волны. При выполнении условий фазового синхронизма энергия может эффективно перекачиваться в слабую волну [2–5].

Явления такого рода имеют место и в механике деформируемого твердого тела, в частности, при взаимодействии акустических волн в слабой нелинейной среде. В качестве примера трехволновых процессов можно привести распад волны на две или слияние двух волн в одну. Частными случаями этих процессов являются генерация второй гармоники, второй субгармоники (деление частоты пополам) и параметрическое усиление ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$).

Задачи, включающие в себя рассмотрение таких параметрических эффектов, относятся в основном к области нелинейной оптики и радиотехники. В области акустики и механики такие процессы рассматриваются, например, при решении задач механики разрушения упругих сред [6], нелинейных взаимодействиях в кристаллах [7, 8], взаимодействиях возмущений границы раздела сред [9].

При рассмотрении параметрических явлений применяется исключительно спектральный подход, который очень удобен в радиотехнике и нелинейной оптике, где нали-

чие сильной дисперсии позволяет реализовать взаимодействие только между несколькими волнами; в акустике спектральные методы используются гораздо реже.

В системах со слабой нелинейностью взаимодействие волн приводит к их существенному искажению лишь в случае, когда взаимные возмущения могут накапливаться на достаточно большом пространственно-временном интервале, т.е. взаимодействие оказывается резонансным. Условие резонансности взаимодействия сводится к условию эффективного возбуждения одной из волн другими. Для квазигармонических волн это условие можно записать в виде [3]

$$\sum_{j=1}^J \omega_j n_j = \Delta\omega, \quad \sum_{j=1}^J \vec{k}_j n_j = \Delta\mathbf{k},$$

где частоты ω_j и волновые векторы \vec{k}_j взаимодействующих волн должны удовлетворять дисперсионному уравнению линейной задачи; n_j – целые числа; $\Delta\omega_j \ll \omega_j$, $\Delta\mathbf{k} \ll \vec{k}_j$ – малые расстройки; J – число взаимодействующих волн.

В системах с квадратичной нелинейностью при коллинеарном распространении двух плоских волн с частотами ω_1 и ω_2 возникает третья волна на комбинационной частоте. Эти волны образуют резонансную тройку, если их частоты и волновые числа удовлетворяют условиям

$$\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3, \quad k_1 \pm k_2 = k_3$$

и дисперсионным уравнениям линейной задачи.

Ранее трехволновые взаимодействия продольных и изгибных волн в прямолинейном стержне и кольце рассматривались в монографиях [10, 11], продольных и сдвиговых волн в упругой среде с моментными напряжениями – в [12], взаимодействие ротационных и продольных волн в среде Коссера – в [13]. Фазово-групповой синхронизм низкочастотных и высокочастотных волн в упругих средах с полостями рассматривался в статье [14].

Покажем, что такой подход применим и к среде с малыми упругопластическими деформациями при пренебрежении диссипацией. Рассмотрение такой задачи позволит оценить расстояние, на котором происходит эффективный обмен энергией, а также установить характер влияния параметров среды и граничных условий на процесс взаимодействия волн.

Рассмотрим распространение и взаимодействие продольных и поперечных волн в среде, описанной в статье [15]. Механическое поведение среды описывается произвольными перекрестными зависимостями между первыми инвариантами тензоров σ и ε и вторыми инвариантами девиаторов T и Γ напряжений и деформаций:

$$\sigma = 3K(\varepsilon, \Gamma)\varepsilon, \quad T = G(\varepsilon, \Gamma)\Gamma. \quad (1)$$

Здесь $K(\varepsilon, \Gamma)$ – модуль объемного расширения (сжатия); $G(\varepsilon, \Gamma)$ – модуль сдвига.

В случае плоской деформации имеем

$$\begin{aligned}
 u &= u(x), v = v(x), w = 0, \\
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \varepsilon_z = 0, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}(x), \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\
 \varepsilon &= \varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_x, \Gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4\varepsilon_x^2 + 3\gamma_{xy}^2}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Физические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \left(K + \frac{4}{3}G \right) \varepsilon_x; \quad \tau_y = G\gamma_{xy}; \\
 \sigma_y &= \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_x; \quad \tau_{yz} = 0; \\
 \sigma_z &= \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_x; \quad \tau_{zx} = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя соотношения (3) в динамические уравнения равновесия и учитывая зависимости (1) и (2), получим два уравнения, описывающие процесс распространения продольно-поперечных волн деформаций:

$$\begin{aligned}
 &\left[\left(K + \frac{4}{3}G \right) + \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon} + \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right) \varepsilon_x + \frac{4\varepsilon_x^2}{3\Gamma} \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} + \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right) \right] \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \\
 &+ \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} + \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right) \frac{\varepsilon_x \gamma_{xy}}{\Gamma} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t}; \\
 &\gamma_{xy} \left(\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} + \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_x}{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \left(G + \frac{\gamma_{xy}^2}{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $v_x = \frac{\partial u}{\partial t}, v_y = \frac{\partial v}{\partial t}$.

Уравнения совместности

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Выберем деформационные зависимости в виде

$$\sigma = K_0 \varepsilon; \quad T = G_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s} \right) \Gamma. \tag{5}$$

В этом случае механическое поведение сплошной среды описывается квадратичным законом в отношении сдвиговых деформаций. Данная модель соответствует теории малых упругопластических деформаций.

В формулах (4), (5) имеем: K_0 – начальный модуль объемного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига при чистом сдвиге; Γ_s – предельная интенсивность деформаций сдвига, причем $0 \leq \Gamma/\Gamma_s \leq 1$.

С учетом (1)

$$K = \frac{K_0}{3}; \quad G = G_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s} \right).$$

При этом система (4) примет вид

$$\left[\frac{K_0}{3} + \frac{4}{3} G_0 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{\sqrt{4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}}{\Gamma_s} \right) - \frac{8 G_0}{9 \Gamma_s} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \sqrt{3}}{\sqrt{4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2 G_0}{3} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sqrt{3}}{\Gamma_s \sqrt{4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\left(G_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}}{\Gamma_s} \right) - \frac{\sqrt{3} G_0}{2 \Gamma_s} \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}{\sqrt{4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2 G_0}{3 \Gamma_s} \frac{\sqrt{3} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\sqrt{4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

1. Рассмотрим случай, когда поперечная деформация мала по сравнению с продольной, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} \gg \frac{\partial v}{\partial x}$.

Тогда

$$\Gamma = \sqrt{4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \approx 2 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Система уравнений (6) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \left(\frac{K_0}{3} + \frac{4}{3} G_0 \right) u_{xx} - \frac{8 \sqrt{3} G_0 u_x u_{xx}}{9 \Gamma_s} - \frac{1 \sqrt{3} G_0 v_x v_{xx}}{3 \Gamma_s} = \rho u_{tt}, \\ G_0 v_{xx} - \frac{1 \sqrt{3} G_0 (v_x u_{xx} + u_x v_{xx})}{3 \Gamma_s} = \rho v_{tt}. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим трехволновое взаимодействие. Пусть высокочастотной является продольная волна.

Будем искать решения системы (7) в виде бегущих гармонических волн с медленно меняющимися амплитудами:

$$\begin{aligned} u &= A(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{i(\Omega t - \tilde{K}x)} + \bar{A}(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{-i(\Omega t - \tilde{K}x)}, \\ v &= B_1(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + B_2(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} + \bar{B}_1(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{-i(\omega_1 t - k_1 x)} + \bar{B}_2(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{-i(\omega_2 t - k_2 x)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь Ω , ω_1 , ω_2 – частоты продольной и поперечных волн; \tilde{K} , k_1 , k_2 – волновые числа продольной и поперечных волн; ε – малый параметр; \bar{A} – комплексно сопряженное к A .

Частоты и волновые числа связаны условиями синхронизма

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \tilde{K} = k_1 + k_2$$

и удовлетворяют дисперсионным соотношениям

$$\frac{\Omega^2}{\tilde{K}^2} = \frac{\frac{K_0}{3} + \frac{4}{3}G_0}{\rho}, \quad \frac{\omega_1^2}{k_1^2} = \frac{\omega_2^2}{k_2^2} = \frac{G_0}{\rho}.$$

Подставляя выражения (8) в (7) и опуская члены выше первого порядка по ε , окончательно будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_t + V_\phi A_x + \frac{M}{\Omega} B_1 B_2 = 0, \\ B_{1t} + V_{\phi 1} B_{1x} - \frac{M}{\omega_1} A \bar{B}_2 = 0, \\ B_{2t} + V_{\phi 2} B_{2x} - \frac{M}{\omega_2} A \bar{B}_1 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $M = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{G_0}{\Gamma_s} \frac{k_1 k_2 \tilde{K}}{\rho \varepsilon}$, $V_\phi = \frac{\Omega}{\tilde{K}}$, $V_{\phi 1} = \frac{\omega_1}{k_1}$, $V_{\phi 2} = \frac{\omega_2}{k_2}$ – фазовые скорости волн для линей-

ной задачи. Система (9) обладает интегралом движения, имеющим смысл закона сохранения энергии, который записывается в виде уравнения переноса

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_0 + E_1 + E_2) + \frac{\partial}{\partial x} (S_0 + S_1 + S_2) = 0,$$

где $E_{1,2} = \omega_{1,2} |B_{1,2}|^2$, $E_0 = \Omega |A|^2$ – плотности энергий сдвиговых и продольной волны соответственно; $S_{1,2} = V_{\phi 1} E_{1,2}$, $S_0 = V_\phi E_0$ – плотность потоков энергий сдвиговых и продольной волны соответственно.

Кроме того, для системы выполняются частотно-энергетические соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E_0}{\Omega} + \frac{E_1}{\omega_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_0}{\Omega} + \frac{S_1}{\omega_1} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E_0}{\Omega} + \frac{E_2}{\omega_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_0}{\Omega} + \frac{S_2}{\omega_2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E_1}{\omega_1} + \frac{E_2}{\omega_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_1}{\omega_1} + \frac{S_2}{\omega_2} \right) = 0,$$

являющиеся континуальным аналогом соотношений Мэнли-Роу, известных в теории нелинейных колебаний [1].

В стационарном случае из соотношений следует

$$\frac{S_0}{\Omega} + \frac{S_1}{\omega_1} = \text{const}, \quad \frac{S_0}{\Omega} + \frac{S_2}{\omega_2} = \text{const}, \quad \frac{S_1}{\omega_1} + \frac{S_2}{\omega_2} = \text{const}.$$

Эти соотношения показывают, что в среде наблюдается эффект распадной неустойчивости, когда продольная волна высокой частоты Ω распадается на две сдвиговые волны более низких частот ω_1 и ω_2 .

В стационарном случае $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$ при граничных условиях

$$a(0) = a^{(0)}, b_1(0) = b^{(0)}, b_2(0) = 0,$$

где $b_{1,2}, a$ – действительные амплитуды сдвиговых и продольной волн $(A = ae^{i\varphi}, B_{1,2} = b_{1,2}e^{i\theta_{1,2}})$.

Решение этой системы выражается через эллиптические функции Якоби и имеет вид

$$\begin{aligned} a(x) &= a^{(0)} \text{sn} \xi, \\ b_1(x) &= \left[\frac{V_\phi \Omega}{V_{\phi 1} \omega_1} \right]^{1/2} \frac{a^{(0)}}{s} \text{dn} \xi, \\ b_2(x) &= \left(\left[\frac{V_\phi \Omega}{V_{\phi 2} \omega_2} \right] \right)^{1/2} a^{(0)} \text{cn} \xi, \\ \xi &= K(s) + \frac{a^{(0)} M x}{s \sqrt{V_{\phi 1} V_{\phi 2} \omega_1 \omega_2}}, \end{aligned}$$

где $K(s)$ – полный эллиптический интеграл первого рода;

$$s = \frac{a^{(0)} (V_\phi \Omega)^{1/2}}{\sqrt{V_{\phi 1} \omega_1 (b^{(0)})^2 + V_\phi \Omega (a^{(0)})^2}} - \text{модуль эллиптической функции.}$$

Процесс взаимодействия проявляется в виде пространственных биений, графики огибающих представлены на рис. 1.

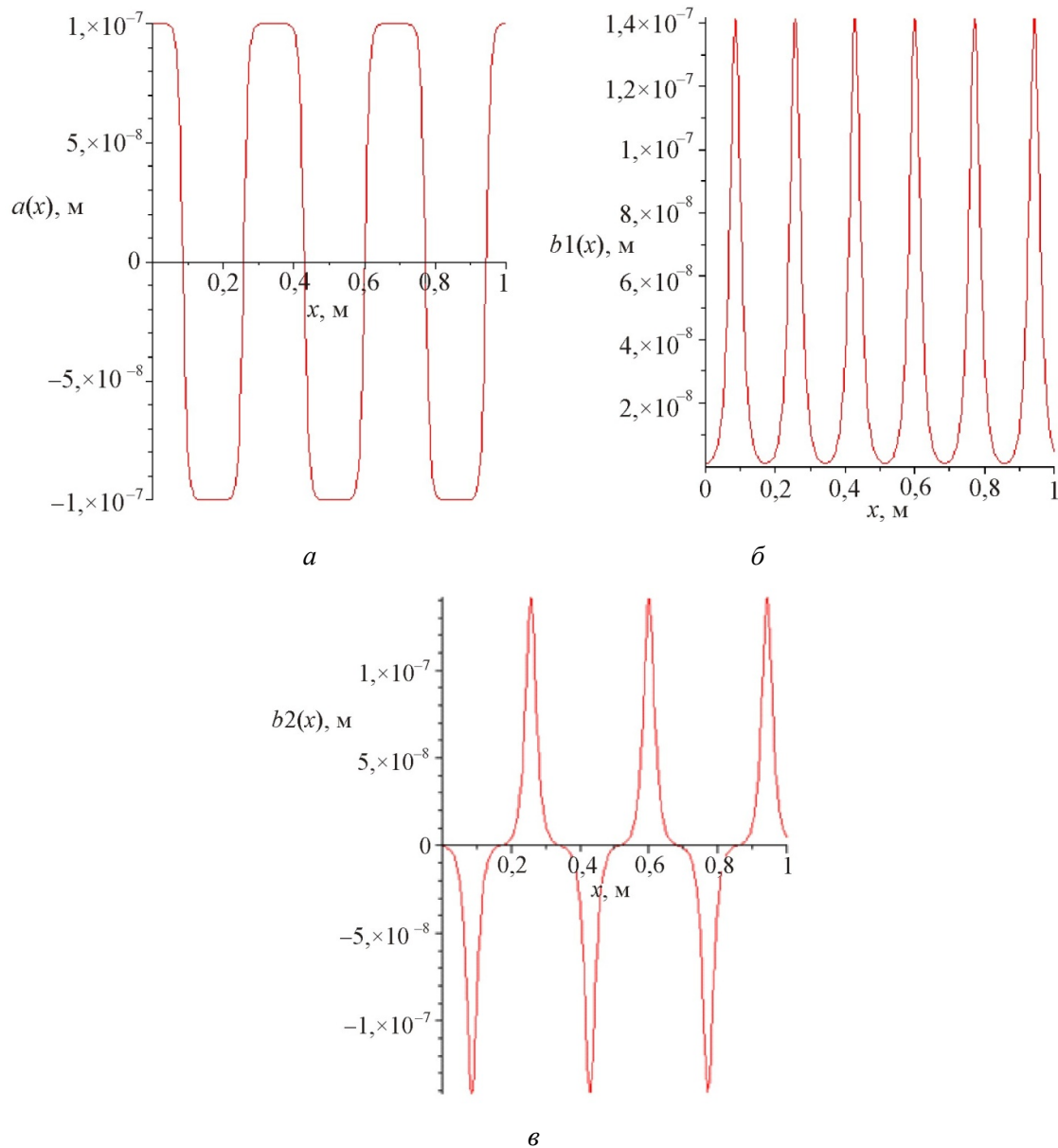


Рис. 1. Процесс трехволнового взаимодействия при выполнении условий распадной неустойчивости. Зависимости амплитуд от расстояния: *a* – входная продольная волна; *б* – первая сдвиговая волна; *в* – вторая сдвиговая волна

Графики строились для следующих значений параметров:

$$a^{(0)} = 10^{-7} \text{ м}, b^{(0)} = 10^{-9} \text{ м};$$

$$G_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2;$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 300000 \text{ Гц};$$

$$k_1 = k_2 = 6280 \text{ м}^{-1};$$

$$\rho = 2700 \text{ кг/м}^3;$$

$$\Gamma_s = 1, \varepsilon = 0,001.$$

Длина волны огибающей, т.е. расстояние, на котором происходит эффективный обмен энергией между взаимодействующими волнами, описывается соотношением

$$L = 4K(s) s \frac{\sqrt{V_{\phi 1} V_{\phi 2} \omega_1 \omega_2}}{Ma^{(0)}}.$$

Характер изменения амплитуды b_1 и отношения амплитуд $\frac{b_1}{b_2}$ с ростом отношения начальных амплитуд приближается к линейному.

Зависимость амплитуд b_1 и b_2 от начальной амплитуды продольной волны a_0 носит линейный характер.

С ростом отношения волновых чисел k_1/k_2 амплитуда b_1 стремится к величине $\sqrt{\left(\frac{b^{(0)}}{a^{(0)}}\right)^2 + \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} a^{(0)}$, а амплитуда $b_2 \sim k_2/k_1$.

С ростом отношения частот ω_1/ω_2 амплитуда b_1 стремится к величине $\sqrt{\left(\frac{b^{(0)}}{a^{(0)}}\right)^2 + \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2}\right)^2} a^{(0)}$, а амплитуда $b_2 \sim \omega_1/\omega_2$.

Длина волны огибающей обратно пропорциональна отношению начальных амплитуд, а также прямо пропорциональна плотности и предельной интенсивности деформаций и обратно пропорциональна сдвиговому модулю.

2. Теперь рассмотрим случай, когда продольная деформация мала по сравнению с поперечной, т.е. $\frac{\partial v}{\partial x} \gg \frac{\partial u}{\partial x}$.

Тогда

$$\Gamma = \sqrt{4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \approx \sqrt{3} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Система уравнений (6) примет вид:

$$\begin{cases} \left(\frac{K_0}{3} + \frac{4}{3}G_0\right)u_{xx} - \frac{2}{3}\frac{G_0(v_x u_{xx} + u_x v_{xx})}{\Gamma_s} = \rho u_{tt}, \\ G_0 v_{xx} - \frac{G_0}{\Gamma_s}\left(v_x v_{xx} + \frac{2}{3}u_x u_{xx}\right) = \rho v_{tt}. \end{cases} \quad (10)$$

При рассмотрении трехволнового взаимодействия примем, что высокочастотной является поперечная волна.

Как и в первом случае, будем искать решения системы (10) в виде бегущих гармонических волн с медленно меняющимися амплитудами:

$$v = A(\epsilon x, \epsilon t) e^{i(\Omega t - \tilde{K}x)} + \bar{A}(\epsilon x, \epsilon t) e^{-i(\Omega t - \tilde{K}x)},$$

$$u = B_1(\epsilon x, \epsilon t) e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + B_2(\epsilon x, \epsilon t) e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} + \bar{B}_1(\epsilon x, \epsilon t) e^{-i(\omega_1 t - k_1 x)} + \bar{B}_2(\epsilon x, \epsilon t) e^{-i(\omega_2 t - k_2 x)}.$$

Здесь $\Omega, \omega_1, \omega_2$ – частоты поперечной и продольных волн, \tilde{K}, k_1, k_2 – волновые числа поперечной и продольных волн; ϵ – малый параметр.

Частоты и волновые числа связаны условиями синхронизма:

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \tilde{K} = k_1 + k_2$$

и удовлетворяют дисперсионным соотношениям

$$\frac{\Omega^2}{\tilde{K}^2} = \frac{G_0}{\rho}, \quad \frac{\omega_1^2}{k_1^2} = \frac{\frac{K_0}{3} + \frac{4}{3}G_0}{\rho}, \quad \frac{\omega_2^2}{k_2^2} = \frac{\frac{K_0}{3} + \frac{4}{3}G_0}{\rho}.$$

Как и в первом случае, подставляя выражения для u и v в (10) и опуская члены выше первого порядка по ε , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_t + V_\phi A_x + \frac{M}{\Omega} B_1 B_2 = 0, \\ B_{1t} + V_{\phi 1} B_{1x} - \frac{M}{\omega_1} A \bar{B}_2 = 0, \\ B_{2t} + V_{\phi 2} B_{2x} - \frac{M}{\omega_2} A \bar{B}_1 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $M = \frac{1}{3} \frac{G_0 \tilde{K} k_1 k_2}{\Gamma_s \rho \varepsilon}$. Как и ранее, $V_\phi = \frac{\Omega}{\tilde{K}}$, $V_{\phi 1} = \frac{\omega_1}{k_1}$, $V_{\phi 2} = \frac{\omega_2}{k_2}$.

Как видно, система (11) качественно совпадает с системой, полученной при рассмотрении первого случая, следовательно, при аналогичных граничных условиях поведение амплитуд волны накачки и холостой и сигнальной волны будет совпадать с полученным ранее.

Таким образом, установлен характер протекания трехволнового взаимодействия для среды с малыми упруго-пластическими деформациями в стационарном случае при отсутствии диссипации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01637).

Библиографический список

1. Основы теории колебаний / под ред. В.В. Мигулина. – М.: Наука, 1978. – 394 с.
2. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. – М.: Наука, 1975. – 288 с.
3. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
4. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. – М.: Наука, 1988. – 230 с.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
6. Параметрическое возбуждение сдвиговых волн в мягких упругих средах / М. А. Миронов [и др.] // Акустический журнал. – 2009. – Т. 55, № 4–5. – С. 557–564.
7. Лямов В.Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 224 с.
8. Курилкина С.Н. О преобразовании частоты упругого излучения в акустически гиротропных кристаллах // Акустический журнал. – 1993. – Т. 39, № 3. – С. 505–509.
9. Ткаченко В.И. Диссипативная неустойчивость Кельвина-Гельмгольца и ее многоликие проявления в окружающей среде // Вісник Харківського університету. – 2010. – № 916. – С. 4–22.

10. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.
11. Ерофеев В., Потапов А., Солдатов И. Нелинейные волны в упругих системах. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2015. – 236 p.
12. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих средах. – М.: Физматлит, 2009. – 320 с.
13. Ерофеев В.И. Нелинейные взаимодействия продольных и спиральных сдвиговых волн в твердом теле с микроструктурой // Акустический журнал. – 1997. – Т. 43, № 2. – С. 182–186.
14. Ерофеев В.И. Синхронные взаимодействия продольных волн и волн вращения в нелинейно-упругой среде Коссера // Акустический журнал. – 1994. – Т. 40, № 3. – С. 237–252.
15. Бакушев С.В. Продольно-поперечные волны деформаций слабого разрыва. // Проблемы прочности и пластичности. – 2014. – Т. 76, № 2. – С. 14–121.

References

1. Osnovy teorii kolebanii [Basics of theory of vibrations]. Ed. by V.V. Migulin. Moscow: Nauka, 1978. 394 p.
2. Rudenko O.V., Soluian S.I. Theoretical foundations of nonlinear acoustics. Consultants Bureau, 1977. 274 p.
3. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. Vvedenie v teoriiu kolebanii i voln [Introduction to oscillations and wave theory]. Moscow: Nauka, 1984. 296 p.
4. Sukhorukov A.P. Nelineinye volnovye vzaimodeistviia v optike i radiofizike [Nonlinear wave interactions in optics and radiophysics]. Moscow: Nauka, 1988. 230 p.
5. Vinogradova M.B., Rudenko O.V., Sukhorukov A.P. Teoriia voln [Theory of waves]. Moscow: Nauka, 1990. 432 p.
6. Mironov M.A., Pyatakov P.A., Konopatskaya I.I., Clement G.T., Vykhodtseva N.I. Parametric excitation of shear waves in soft solids [Parametricheskoe vozvuzhdenie sdvigovalnykh voln v miagkikh uprugikh sredakh]. *Acoustical Physics*, 2009, vol. 55, no. 4-5, pp. 567-574.
7. Liamov V.E. Poliarizatsionnye efekty i anizotropiia vzaimodeistviia akusticheskikh voln v kristallakh [Polarization effects and anisotropy of the interaction of acoustic waves in crystals]. *Moskovskii gosudarstvennyi universitet*, 1983. 224 p.
8. Kurilkina S.N. Frequency-conversion of elastic radiation in acoustically gyrotropic crystals. *Acoustical Physics*, 1993, vol. 39, no. 3, pp. 263-265.
9. Tkachenko V.I. Dissipativnaia neustoichivost' Kel'vina-Gel'mgol'tsa i ee mnogolikiie proiavleniia v okruzhaiushchei srede [Kelvin-Helmholtz dissipative instability and its many-sided demonstrations in environment]. *Visnik Kharkivs'kogo universitetu*, 2010, no. 916, pp. 4-22.
10. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. Volny v sterzhniakh. Dispersiia. Dissipatsiia. Nelineinost' [Waves in rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity]. Moscow: Fizmatlit, 2002. 208 p.
11. Erofeev V., Potapov A., Soldatov I. Nelineinye volny v uprugikh sistemakh [Nonlinear waves in elastic systems]. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2015. 236 p.
12. Bagdoev A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. Lineinye i nelineinye volny v dispergiruiushchikh sredakh [The linear and nonlinear waves in dispersive continua]. Moscow: Fizmatlit, 2009. 320p.
13. Erofeev V.I. Nonlinear interactions of longitudinal and helical shear waves in a solid body with a microstructure [Nelineinye vzaimodeistviia prodol'nykh i spiral'nykh sdvigovalnykh voln v tverdom tele s mikrostrukturoi]. *Acoustical Physics*, 1997, vol. 43, no. 2, pp. 182-186.
14. Erofeev V.I. Synchronous interactions of longitudinal and rotation waves in a nonlinearly elastic Cosserat medium [Sinkhronnye vzaimodeistviia prodol'nykh voln i voln vrashcheniia v nelineino-uprugoi srede Kossera]. *Acoustical Physics*, 1994, vol. 40, no. 3, pp. 237-252.
15. Bakushev S.V. Prodol'no-poperechnye volny deformatsii slabogo razryva [The longitudinal-transverse waves of deformations of the weak gap]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2014, no. 76, pp. 114-121.