



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12

УДК 539.4

## ПОЛНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ М. УИЛЬЯМСА У ВЕРШИН ДВУХ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ

Л.В. Степанова, П.С. Росляков

Самарский государственный университет, Самара, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 16 июля 2015 г.  
Принята: 29 октября 2015 г.  
Опубликована: 25 декабря 2015 г.

#### Ключевые слова:

многопараметрическое описание поля напряжений у вершины трещины, аналитическое решение, пластина с двумя коллинеарными трещинами, асимптотическое разложение напряжений, коэффициенты асимптотического разложения

### АННОТАЦИЯ

Дано многопараметрическое описание поля напряжений у вершины трещины в изотропном линейно-упругом теле и получение аналитических выражений для коэффициентов многочленных асимптотических разложений компонент тензора напряжений. Асимптотическое решение строится на основе комплексных решений плоской задачи теории упругости для тел с трещинами, позволяющих выполнить анализ высших приближений в полном асимптотическом решении М. Уильямса. С практической точки зрения важно знать: 1) зависимость амплитудных множителей (коэффициентов разложения) от длины трещин и системы приложенных нагрузок; 2) количество слагаемых в полном асимптотическом разложении М. Уильямса, которое необходимо удерживать в разложении. Статья посвящена аналитическому определению коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершин двух коллинеарных трещин равной длины в бесконечной пластине, находящейся в условиях смешанного нагружения (в условиях приложения нормального отрыва и поперечного сдвига). Построено многопараметрическое представление поля напряжений вблизи каждой из вершин трещин, в котором удерживаются высшие приближения. Представлен метод вычисления коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса (амплитудных, масштабных множителей), базирующийся на классическом комплексном представлении решения Колосова–Мухелишвили и его разложении в ряд в окрестности вершины трещины. Найдены аналитические зависимости коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса ( $T$ -напряжений и коэффициентов высших приближений) от приложенной нагрузки и геометрических параметров образца. Показано, что в полном асимптотическом разложении компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины необходимо удерживать помимо главных членов асимптотического разложения и  $T$ -напряжений следующие слагаемые (до пяти слагаемых). Построено полное асимптотическое разложение компонент тензора напряжений у вершин двух трещин в бесконечной пластине с двумя коллинеарными трещинами конечной длины, в котором можно удержать любое наперед заданное число слагаемых.

© ПНИПУ

© Степанова Лариса Валентиновна – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: [stepanova@sam-su.ru](mailto:stepanova@sam-su.ru)  
Росляков Павел Сергеевич – аспирант, e-mail: [roslyakovps@sam-su.ru](mailto:roslyakovps@sam-su.ru)

Larisa V. Stepanova – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: [stepanova@sam-su.ru](mailto:stepanova@sam-su.ru)  
Pavel S. Roslyakov – Doctoral Student, e-mail: [roslyakovps@sam-su.ru](mailto:roslyakovps@sam-su.ru)

# COMPLETE ASYMPTOTIC EXPANSION M. WILLIAMS NEAR THE CRACK TIPS OF COLLINEAR CRACKS OF EQUAL LENGTHS IN AN INFINITE PLANE MEDIUM

L.V. Stepanova, P.S. Roslyakov

Samara State University, Samara, Russian Federation

---

## ARTICLE INFO

Received: 16 July 2015  
Accepted: 29 October 2015  
Published: 25 December 2015

### Keywords:

multiparametric description of the near crack tip stress field, analytical solution, infinite plate with two collinear cracks, asymptotic expansion, amplitude coefficients of the complete asymptotic Williams expansions, higher-order terms

---

## ABSTRACT

The paper is aimed at analytical determination of the coefficients in crack tip expansions for two collinear finite cracks of equal length in an infinite plane medium under mixed mode loading conditions. The study is based on the solutions of the complex variable theory in plane elasticity theory and the complete asymptotic Williams expansion of the stress field in the vicinity of the crack tip. From the practical point of view, it is very important to know: 1) analytical dependence of coefficients on geometrical parameters of specimens and applied loads; 2) the number of higher-order terms in the asymptotic Williams expansions that we need to keep to accurately describe the stress and displacement fields in the neighborhood of the crack tip. In the paper the authors have provided a multiparametric presentation of the stress field near the crack tips in the infinite plate with two collinear cracks of finite length. We have presented the analytical determination method of coefficients related to the complete asymptotic expansion. The method is based on the complex variable theory and the classical Kolosoff-Muskhelishvili approach. The expansion of the Kolosoff-Muskhelishvili's potential in the vicinity of the crack tip allows to find the analytical presentation for coefficients of the complete Williams asymptotic expansion. The analytical solution gives the dependence of the amplitude coefficients on the lengths of the crack and the applied loads for pure mode I, pure mode II and mixed mode I/II conditions. It is shown that together with the main term including the stress intensity factor and the term called T-stress, it is necessary to hold higher-order terms in the asymptotic solution. The obtained solution permits to construct the asymptotic stress field expansion containing an arbitrary preassigned number of higher-order terms.

© PNRPU

---

## 1. Асимптотические поля у вершины трещины в линейно-упругом материале

Описание поля напряжений в окрестности вершины трещины, надреза или углового выреза посредством асимптотического представления, содержащего слагаемые высоких порядков, является актуальной задачей механики разрушения [1, 2]. В последнее время в механике разрушения было показано [3–35], что инженерные приложения традиционной линейной механики разрушения, базирующиеся на одном параметре – коэффициенте интенсивности напряжений в качестве критерия распространения дефекта, требуют усовершенствования и учета высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Уильямса [39]. Многопараметрическое описание поля напряжений в окрестности вершины трещины было предложено еще в 1957 г. М. Уильямсом [39]. С тех пор решение М. Уильямса стало классическим решением линейной механики разрушения, в котором, однако, в большинстве случаев в инженерных приложениях удерживалось лишь первое слагаемое, в котором амплитудный множитель получил название коэффициента интенсивности напряжений. Только в последнее время в механике разрушения на основе проведенных теоретических исследований, экспериментальных работ и компьютерного имитационного моделирования [3–33] сложилось ясное понимание необходимости удержания высших приближений в полном асимптотическом представлении поля напряжений в окрестности вершины трещины.

В работе [3] выполнен обзор проведенных исследований, посвященных оценке  $T$ -напряжений в полном решении М. Уильямса в окрестности вершины трещины. Авторы описывают различные аспекты влияния  $T$ -напряжений на определение траектории распространения трещины, воспроизведение картины изохроматических полос, оценку размера и формы области пластического течения. В статье обсуждаются различные методы нахождения  $T$ -напряжений: экспериментальные, аналитические и численные (метод конечного элемента). Авторы дают критический обзор проведенных исследований и приходят к выводу, что учет только  $T$ -напряжения не может точно и надежно предсказать направление роста трещины. Поэтому необходим учет высших приближений в асимптотическом представлении поля напряжений в окрестности вершины трещины.

В работе [4] обсуждаются слабые особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины (типичным примером могут служить свободные края в ламинатных композиционных материалах и точки, лежащие на линиях соединения нескольких материалов) и необходимость усовершенствованных критериев разрушения, учитывающих более слабую сингулярность поля напряжений. В статье предложены две модели образования трещины в соединении двух материалов.

В.Н. Шлянников и А.П. Захаров [5] экспериментально и численно оценили скорость роста усталостной трещины при действии различных систем двухосного нагружения. Для крестообразных образцов, находящихся в условиях смешанного нагружения, вычислялись  $T$ -напряжения. Проведенный авторами анализ экспериментов на смешанное нагружение основан на включение в расчетную схему  $T$ -напряжений.

В [6] отмечается, что во многих практических случаях в инженерных приложениях вклад высших приближений в полном разложении М. Уильямса (помимо коэффициента интенсивности напряжений и  $T$ -напряжений) не является пренебрежимо малым. Основная цель работы [6] – представить уравнения, описывающие поля напряжений в окрестности вершины трещины особенно в тех случаях, когда коэффициенты интенсивности напряжений для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига в комбинации с  $T$ -напряжениями не могут с требуемой точностью описать распределение напряжений у вершины трещины. В [6] рассматривается пластина с центральной трещиной в условиях смешанного нагружения, чтобы показать необходимость удержания слагаемых высокого порядка. Показано, что энергия деформаций может быть аналитически вычислена с высокой точностью при удержании четырех слагаемых, следующих за главным членом асимптотического разложения и  $T$ -напряжением.

В [7] приводится систематическое исследование  $T$ -напряжений и их вклада в общее поле напряжений в окрестности вершины трещины на примере компактного образца. Исследована зависимость  $T$ -напряжений от геометрических параметров образца. Целью работы [8] является определение коэффициентов интенсивности напряжений,  $T$ -напряжений и еще трех слагаемых в полном асимптотическом разложении М. Уильямса для двух дискообразных образцов в полном диапазоне смешанных форм деформирования. В работе вычислены безразмерные функции коэффициентов сингулярного, второго и третьего членов в асимптотическом разложении напряжений у вершины трещины в дискообразных образцах в условиях смешанного нагружения (как правило, их обозначают  $A_3, B_3$  для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига соответственно). Показано, что амплитудный масштабный коэффициент в третьем слагаемом является важным параметром, характеризующим поле напряжений у вершины трещины.

В [9] теоретические и экспериментальные исследования разрушения мрамора на ряде образцов для испытания на смешанное нагружение показали, что слагаемые высших порядков в полном асимптотическом разложении М. Уильямса могут значительно влиять на оценки сопротивляемости породы разрушению. Для определения направления роста трещины авторы использовали модифицированный критерий максимального тангенциального напряжения, который учитывал несингулярные слагаемые в асимптотических разложениях компонент тензора напряжений ( $T$ -напряжения,  $A_3, B_3$ ) в дополнение к сингулярным слагаемым. Модифицированный критерий был использован для анализа образцов треугольной формы. Показано, что модифицированный критерий, учитывающий высшие приближения в асимптотическом разложении М. Уильямса, приводит к лучшему соответствию с экспериментальными данными.

В [10] отмечается необходимость точного анализа полей напряжений в окрестности вершины трещины для целого ряда инженерных приложений. Авторы показывают, что нельзя пренебрегать слагаемыми высших порядков в асимптотическом разложении М. Уильямса.

Цель работы [11] – описание полей напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины и на ее удалении в ряде экспериментальных образцов для определения параметров механики разрушения. В статье предложены образцы с новой геометрией, позволяющей рассмотреть широкий диапазон видов нагружения и оценить размеры областей нелинейного деформирования, возникающих у вершины трещины. Предложены надрезанные образцы призматической формы для испытаний на четырехточечный изгиб. Наряду с проведенными экспериментальными исследованиями выполнено численное моделирование этих же образцов. В асимптотических разложениях поля напряжений удерживались сингулярное слагаемое,  $T$ -напряжение и высшие приближения (несингулярные слагаемые). В статье выполнено сравнение экспериментальных результатов, численного анализа и предложенных асимптотических разложений в зависимости от расстояния от кончика трещины, количества удерживаемых слагаемых в асимптотических разложениях. Продемонстрирована эффективность предложенного подхода для определения размеров области нелинейного деформирования у вершины разреза в композиционном силикатном материале. Такие материалы характеризуются квазихрупким поведением при разрушении с нелинейной зоной разупрочнения у вершины трещины. Установлено, что изменения в соотношениях геометрических параметров испытываемых образцов и положения точек опоры при изгибе незначительно влияет на определенную ширину нелинейной области.

В [12] представлен анализ полей напряжений и перемещений у вершины трещины в образцах с краевой трещиной, предназначенных для испытаний на расклинивание. В англоязычной литературе такие образцы носят название WST-образцов. Выполнен многопараметрический анализ поля напряжений, для чего в полном асимптотическом разложении М. Уильямса удерживались несингулярные слагаемые. Изучено влияние краевых условий (условий закрепления образца) на коэффициент интенсивности напряжений и на  $T$ -напряжения. В целом проведенный анализ позволяет учесть до 12 слагаемых в асимптотическом разложении. Эти коэффициенты определялись из экспериментальных данных. С помощью определенных коэффициентов асимптотических разложений было реконструировано поле напряжений, и далее выполнялось сравнение с вычислениями, базирующимися на методе конечного элемента. Проведенное сравнение ясно показывает, что

для длинных трещин и для больших расстояний от вершины трещины асимптотическое описание поля напряжений требует удержания нескольких слагаемых в полном асимптотическом разложении поля напряжений у вершины трещины.

В статье [13] рассматривались три образца, классических для механики разрушения: пластина с одним боковым надрезом, пластина с центральной трещиной в условиях одноосного растяжения и пластина с центральной трещиной в условиях чистого сдвига. Для описания поля напряжений у вершины трещины применялось асимптотическое представление М. Уильямса, в котором удерживались высшие приближения. Амплитудные множители (масштабные коэффициенты) разложений определялись из результатов конечно-элементного моделирования, проведенного в многоцелевом конечно-элементном комплексе Mechanical ANSYS, который позволяет рассмотреть образцы с различным соотношением геометрических параметров. Амплитудные множители находились с помощью детерминистического метода, предложенного в [14]; выполненный многопараметрический анализ показывает, что одного или даже двух членов асимптотического разложения М. Уильямса недостаточно. Для получения надежных оценок и расширения области действия асимптотического разложения М. Уильямса (для расширения области работы асимптотики) следует удерживать высшие приближения.

Авторами работы [15] отмечается, что главной целью при проектировании керамических слоистых материалов является повышение энергии разрушения системы «тело – трещина» в процессе высвобождения энергии, вызванного образованием трещины и ее последующим распространением. Для керамических композиционных материалов характерно образование трещин в слоях композиционного материала и их бифуркационное поведение, поэтому при моделировании керамических композиционных материалов очень важным представляется предсказание направления роста трещины. Проведенные эксперименты показывают, что второе слагаемое в асимптотическом разложении М. Уильямса может быть существенным в описании бифуркационного поведения трещины.

Авторы [16] на примере балки с краевым надрезом, испытываемой на четырехточечный изгиб, оценивают влияние высших слагаемых в полном асимптотическом разложении М. Уильямса. Рассматриваемая схема нагружения позволяет реализовать смешанное нагружение образцов с трещиной и рассмотреть различные значения параметра смешанности нагружения. Авторы, опираясь на критерий Ранкина, определяют конфигурацию области пластического течения в непосредственной окрестности вершины трещины для рассматриваемого образца. В статье с помощью метода конечного элемента выполнено компьютерное моделирование нагружения описанного образца с целью вычисления параметров полного асимптотического разложения М. Уильямса и оценки геометрии области пластического течения. Результаты расчетов показывают, что высшие приближения в асимптотическом представлении поля напряжений могут быть существенными, если протяженность области нелинейного деформирования достаточно большая по сравнению с размерами образца. В [17] приведены аналитические выражения коэффициентов полного асимптотического разложения поля напряжений у вершины конечной трещины в бесконечной линейно-упругой пластине. На основе аналитического решения простейшей задачи о трещине удалось найти зависимость масштабных множителей от длины трещины и от системы приложенных нагрузок: 1) для трещины нормального отрыва; 2) чистого поперечного сдвига плоскости с разрезом и 3) смешанного нагружения пластины с дефектом. В [18, 19] обсуждаются вопросы многопараметрического описания поля напря-

жений у вершины трещины в изотропном линейно-упругом материале на основе полного разложения М. Уильямса, точности детерминистического метода вычислений коэффициентов полного асимптотического разложения. Статьи [20–28] посвящены различным аспектам построения многочленных асимптотических разложений поля напряжений в окрестности вершины трещины в линейно-упругих материалах [21], в средах с более сложной реологией [22–28] и вопросам решения связанных с этими проблемами нелинейных задач на собственные значения. В [25] рассмотрены решения краевых задач, полученные с учетом высших приближений в асимптотических представлениях компонент тензора напряжений у вершины трещины для случая смешанного деформирования образца с дефектом.

В [29] показана необходимость учета как сингулярных, так и несингулярных компонент тензора напряжений у вершины трещины и разреза в параметрических и критериальных задачах механики разрушения. Обсуждаются пространственные и двумерные модели и критерии, учитывающие  $T$ -напряжения. Их использование показано на примере решения задач механики разрушения, включающих анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины, экспериментальное определение трещиностойкости, мастер-кривой и обобщенной диаграммы трещиностойкости тел с трещинами и разрезами, прогнозирование направления распространения трещин смешанного типа.

В [30] представлены модели и критерии механики разрушения тел с трещинами, учитывающие несингулярные члены разложений напряжений у вершины трещины, развитые для анализа разрушения тел с вырезами в случае нормального отрыва. Приведены критериальные уравнения и предельные кривые для оценки разрушения. Достоверность предложенного критерия подтверждена результатами испытаний образцов со сквозными трещинами при разных температурах.

В [31] изложена методика определения сингулярных и несингулярных составляющих поля напряжений в окрестности вершины трещины при наличии погрешностей исходных данных, обусловленных неточностями эксперимента или моделирования. На основе численных экспериментов показано, что метод разложения по собственным функциям решения задачи теории упругости о клиновидных разрезах (асимптотическое решение М. Уильямса) обеспечивает возможность определения искомых параметров с достаточной для инженерной практики точностью даже при наличии значительной погрешности. В работе предложен метод приближенной оценки размеров области, в которой не выполняются условия моделирования плоской упругой задачи, обусловленные наличием пластической деформации, особенностями геометрии или другими факторами.

В [33] предложена методика определения коэффициента интенсивности напряжений и  $T$ -напряжений для трещин нормального отрыва на основе измерения локальных деформационных откликов, вызываемых малыми приращениями ее длины. Отклики в форме полей тангенциальных перемещений регистрируются методом электронной (цифровой) спекл-интерферометрии. Интерпретация экспериментальных данных базируется на полном асимптотическом разложении М. Уильямса.

Ю.Г. Матвиенко рассмотрел две возможные модели и критериальные уравнения механики разрушения тел с вырезами, учитывающие несингулярные члены разложений напряжений у вершины выреза (трещины) и основанные на диаграммах трещиностойкости и мастер-кривой [34]. Приведено критериальное уравнение обобщенной диаграммы трещиностойкости, одинаково приемлемой для тела с трещиной и вырезом и учитывающей

изменение степени стеснения деформаций у вершины выреза в результате конечности радиуса скругления его вершины и несингулярной составляющей напряжений ( $T$ -напряжений). Введено понятие эффективных  $T$ -напряжений, определяемых посредством осреднения  $T$ -напряжений перед вершиной выреза в зоне предразрушения, характеризуемой эффективным расстоянием. Построена базовая зависимость вязкости разрушения в функции эффективных  $T$ -напряжений (мастер-кривая) трубной стали для данной геометрии надреза. В [35] приведены перспективные модели и критерии двухпараметрической механики разрушения, учитывающие особенности напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещиноподобного дефекта. Выделены теоретические и экспериментальные методы, позволяющие с учетом несингулярных составляющих поля напряжений у вершины трещины (разреза) оценивать траекторию трещины, конструкционную прочность и живучесть поврежденных критически важных элементов.

Таким образом, можно заключить, что в настоящее время в механике разрушения сложилось ясное понимание необходимости удержания в полном асимптотическом разложении М. Уильямса высших приближений и потребности развития методов и подходов, позволяющих получать аналитические зависимости коэффициентов от геометрии образца и системы приложенных нагрузок, и, следовательно, расширить таблицы, содержащие найденные оценки для коэффициентов интенсивности напряжений для различных образцов, выражениями для коэффициентов высших приближений.

В настоящей статье рассмотрено деформирование пластины с коллинеарными двумя трещинами равной длины, в окрестности которых построены асимптотические представления поля напряжений, содержащие высшие слагаемые. Получены аналитические выражения для масштабных множителей (коэффициентов) как функций от длины трещины, координат вершин трещин и приложенной нагрузки.

## **2. Полное асимптотическое разложение поля напряжений у вершины трещины М. Уильямса**

Полное асимптотическое представление поля напряжений в окрестности вершины трещины, содержащее высшее приближение – асимптотическое решение М. Уильямса, является общим описанием поля напряжений вблизи вершины трещины [1, 2]. Асимптотическое разложение М. Уильямса для каждой конфигурации образца содержит последовательность коэффициентов, зависящих от геометрических параметров образца и системы приложенных нагрузок. Широко известны аналитические представления для первых двух слагаемых в асимптотических разложениях поля напряжений: для коэффициентов интенсивности напряжений и  $T$ -напряжений для целого ряда конфигураций образцов с трещинами [1, 17]. Более сложную задачу представляет собой определение коэффициентов высших приближений как функций приложенной нагрузки и геометрии рассматриваемого образца с трещиной. Здесь приводятся аналитические выражения для коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений в окрестности вершин двух коллинеарных трещин в бесконечной пластине, находящейся в условиях смешанного деформирования, когда на бесконечности приложены растягивающая и сдвиговая нагрузки. Идентификация коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса основана на точном аналитическом решении задачи, полученном с помощью классического комплексного представления решения плоской задачи теории упругости [40, 41]. Используя метод разложения по собственным функциям, М. Уильямс [39]

представил функцию напряжений Эри в окрестности вершины трещины в форме  $\chi(r, \theta) = \sum_i f_i(\theta)r^{\lambda_i}$ , где  $f_i(\theta)$  и  $\lambda_i$  – собственные функции и собственные значения соответственно. При этом компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины принимают вид

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_k^{m,ij}(\theta) r^{k/2-1}, \quad (1)$$

где индекс  $m$  отвечает типу нагружения ( $m=1$  соответствует нормальному отрыву,  $m=2$  отвечает поперечному сдвигу); коэффициенты  $a_k^m$  зависят от геометрии образца с трещиной и от системы приложенных нагрузок;  $f_k^{m,ij}(\theta)$  – универсальные угловые распределения, определяемые в ходе решения краевой задачи. Хорошо известны [17] угловые распределения напряжений в (1):

$$\begin{aligned} f_k^{1,11}(\theta) &= k \left[ \left( 2 + k/2 + (-1)^k \right) \cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{1,22}(\theta) &= k \left[ \left( 2 + k/2 - (-1)^k \right) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{1,12}(\theta) &= k \left[ (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta - (k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta \right] / 2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_k^{2,11}(\theta) &= -k \left[ \left( 2 + k/2 - (-1)^k \right) \sin(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{2,22}(\theta) &= -k \left[ \left( 2 - k/2 + (-1)^k \right) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{2,12}(\theta) &= k \left[ (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta - (k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta \right] / 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Характеристики краевой задачи механики трещин, такие как геометрия области с разрезом, природа и интенсивность приложенной нагрузки, не входят ни в радиальное, ни в угловое распределение компонент тензора напряжений. Таким образом, все разнообразие задач механики разрушения учитывается коэффициентами  $a_k^m$ . По определению коэффициенты интенсивности напряжений вычисляются следующим образом:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow +0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, 0), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow +0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(r, 0).$$

Учитывая соотношения (1)–(3), можно найти значения коэффициентов:

$$K_I = \sqrt{2\pi} a_1^1 f_1^{1,22}(0), \quad K_{II} = \sqrt{2\pi} a_1^2 f_1^{2,12}(0), \quad T = a_2^1 f_2^{1,11}(0).$$

В настоящее время в механике разрушения сложилось ясное понимание необходимости удержания высших слагаемых в полном асимптотическом разложении М. Уильямса и, следовательно, необходимости определения его коэффициентов  $a_k^m$  для различных образцов, наиболее часто используемых в инженерной практике [6–36]. Одним из перспективных методов, позволяющих найти аналитические выражения для коэффициентов асимптотических разложений, является метод, основанный на комплексном представлении поля напряжений – на представлении Колосова–Мусхелишвили [40, 41] – и последующем сращивании аналитического решения, полученного с помощью теории функции комплексного переменного, с асимптотическим решением М. Уильямса. Ниже получены аналитические выражения коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса для бесконечной пластины с двумя коллинеарными трещинами (рис. 1).



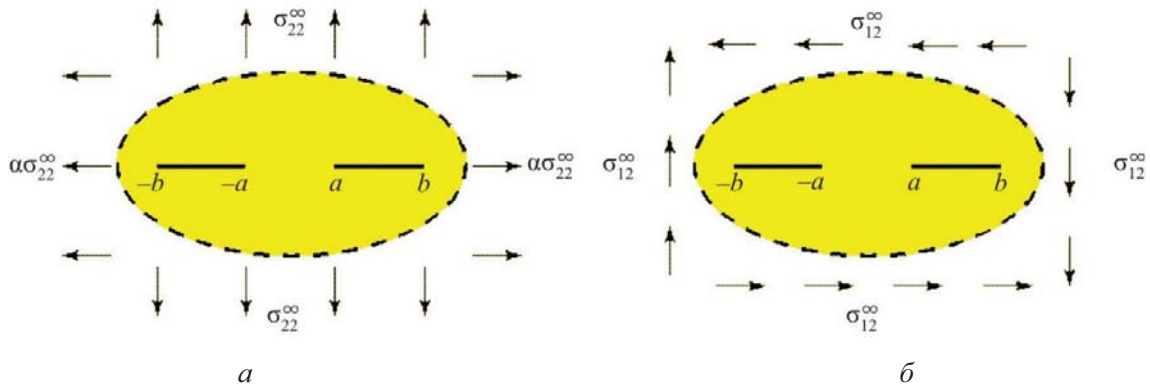


Рис. 1. Нагружение пластины с двумя коллинеарными трещинами равной длины: *a* – симметричное; *б* – антисимметричное

### 3. Комплексное представление решения задачи о нагружении плоскости с двумя коллинеарными разрезами

Теория функций комплексного переменного предоставляет удобный математический аппарат для построения решения задач плоской теории упругости. Подход, изначально предложенный Колосовым [40] и развитый Мусхелишвили [41], базируется на введении функции напряжений Эри, определяемой выражениями

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Следуя формализму Колосова–Мусхелишвили, решение бигармонического уравнения для функции напряжений Эри можно представить с помощью двух комплексных потенциалов переменного  $z = x_1 + ix_2$ :

$$\Phi(x_1, x_2) = \text{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)],$$

где  $\text{Re}[\ ]$  обозначает действительную часть функции комплексного переменного. Комбинируя последние два соотношения, можно получить классическое представление компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{11}(z) + \sigma_{22}(z) = 4\text{Re}[\varphi'(z)], \quad \sigma_{22}(z) - \sigma_{11}(z) + 2i\sigma_{12}(z) = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \chi'(z)].$$

Далее будем пользоваться комплексными решениями для пластины с двумя коллинеарными трещинами, находящейся в условиях: 1) нормального отрыва; 2) поперечного сдвига; 3) смешанного нагружения (нормальный отрыв и поперечный сдвиг, индекс 1 будет отвечать нормальному отрыву, 2 – поперечному сдвигу). Поскольку для линейно-упругой изотропной среды, очевидно, справедлив принцип суперпозиции, линейная комбинация решений для случаев 1) и 2) даст возможность получить комплексное решение для смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования пластины с двумя коллинеарными трещинами.

Для трещины нормального отрыва краевые условия на бесконечности формулируются следующим образом:

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} [\sigma_{11}(z), \sigma_{12}(z), \sigma_{22}(z)] = [\alpha, 0, 1]\sigma_{22}^{\infty},$$

для трещины поперечного сдвига условия в бесконечно удаленной точке имеют вид

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} [\sigma_{11}(z), \sigma_{12}(z), \sigma_{22}(z)] = [0, 1, 0] \sigma_{12}^{\infty}.$$

В случае двухосного симметричного растяжения пластины (рис. 1, а) комплексное представление поля напряжений имеет вид [17, 40, 41]

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^1(z) &= 2 \operatorname{Re}[\varphi_1'(z)] - 2x_2 \operatorname{Im}[\varphi_1''(z)] + (\alpha - 1) \sigma_{22}^{\infty} / 2, \\ \sigma_{22}^1(z) &= 2 \operatorname{Re}[\varphi_1'(z)] + 2x_2 \operatorname{Im}[\varphi_1''(z)] - (\alpha - 1) \sigma_{22}^{\infty} / 2, \\ \sigma_{12}^1(z) &= -2x_2 \operatorname{Re}[\varphi_1''(z)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Комплексный потенциал  $\varphi_1'(z)$  для пластины с двумя коллинеарными трещинами определяется формулой [41]

$$\varphi_1'(z) = \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{2} \frac{z^2 - c}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} + (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{4}, \quad (5)$$

$$c = b^2 E(\pi/2, k) / F(\pi/2, k), \quad k = \sqrt{1 - a^2 / b^2},$$

где  $F(\pi/2, k)$ ,  $E(\pi/2, k)$  – полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода соответственно. Выражения (4) с учетом (5) для симметричного нагружения трещины (см. рис. 1, а) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^1(z) &= \sigma_{22}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re} \left[ \frac{z^2 - c}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \right] + (\alpha - 1) \sigma_{22}^{\infty} - \right. \\ &\quad \left. - x_2 \operatorname{Im} \left[ z \frac{2(z^2 - a^2)(z^2 - b^2) - (z^2 - c)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2} (z^2 - b^2)^{3/2}} \right] \right\}, \\ \sigma_{22}^1(z) &= \sigma_{22}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re} \left[ \frac{z^2 - c}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \right] + x_2 \operatorname{Im} \left[ z \frac{2(z^2 - a^2)(z^2 - b^2) - (z^2 - c)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2} (z^2 - b^2)^{3/2}} \right] \right\}, \\ \sigma_{12}^1(z) &= -\sigma_{22}^{\infty} x_2 \left\{ \operatorname{Re} \left[ \frac{2z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} - \frac{z(z^2 - c)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2} (z^2 - b^2)^{3/2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для трещины поперечного сдвига поле напряжений определяется комплексным потенциалом  $\varphi_2'(z)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^2(z) &= 2 \operatorname{Re}[\varphi_2'(z)] - 2x_2 \operatorname{Im}[\varphi_2''(z)], \quad \sigma_{22}^2(z) = 2x_2 \operatorname{Im}[\varphi_2''(z)], \\ \sigma_{12}^2(z) &= -2 \operatorname{Im}[\varphi_2'(z)] - 2x_2 \operatorname{Re}[\varphi_2''(z)] - C_2. \end{aligned}$$

Комплексный потенциал  $\varphi_2'(z)$  в соответствии с [41] имеет вид

$$\varphi_2'(z) = -i(\sigma_{12}^{\infty} / 2) \left[ (z^2 - c) / \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \right] + i\sigma_{12}^{\infty} / 2, \quad C_2 = \sigma_{12}^{\infty}. \quad (7)$$

Компоненты тензора напряжений для антисимметричного нагружения трещины принимают вид

$$\sigma_{11}^2(z) = \sigma_{12}^\infty \left\{ 2 \operatorname{Im} \left[ \frac{z^2 - c}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \right] + x_2 \operatorname{Re} \left[ z \frac{2(z^2 - a^2)(z^2 - b^2) - (z^2 - c)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2}(z^2 - b^2)^{3/2}} \right] \right\}, \quad (8)$$

$$\sigma_{22}^2(z) = -\sigma_{12}^\infty x_2 \operatorname{Re} \left[ \frac{2z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} - \frac{z(z^2 - c)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2}(z^2 - b^2)^{3/2}} \right],$$

$$\sigma_{12}^2(z) = \sigma_{12}^\infty \left\{ \operatorname{Re} \left[ \frac{z^2 - c}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \right] - x_2 \operatorname{Im} \left[ z \frac{2(z^2 - a^2)(z^2 - b^2) - (z^2 - c)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2}(z^2 - b^2)^{3/2}} \right] \right\}.$$

На рис. 2–4 показаны линии равных уровней компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений в пластине с двумя коллинеарными трещинами равной длины для различных типов смешанного нагружения в полном диапазоне нагрузок, характеризуемого параметром смешанности  $M^e = (2/\pi) \operatorname{arctg}(\sigma_{22}^\infty / \sigma_{12}^\infty)$ : от нормального отрыва ( $M^e = 1$ ) (рис. 2, а) до поперечного сдвига ( $M^e = 0$ ) (рис. 4, а). Графики построены с помощью формул (6) для нормального отрыва, (8) для поперечного сдвига и суперпозиции решений, (6) и (8) – для смешанного нагружения. Геометрические параметры коллинеарных трещин:  $a/(2l) = 1$ ,  $b/(2l) = 2$ , где  $l$  – полудлина трещины.

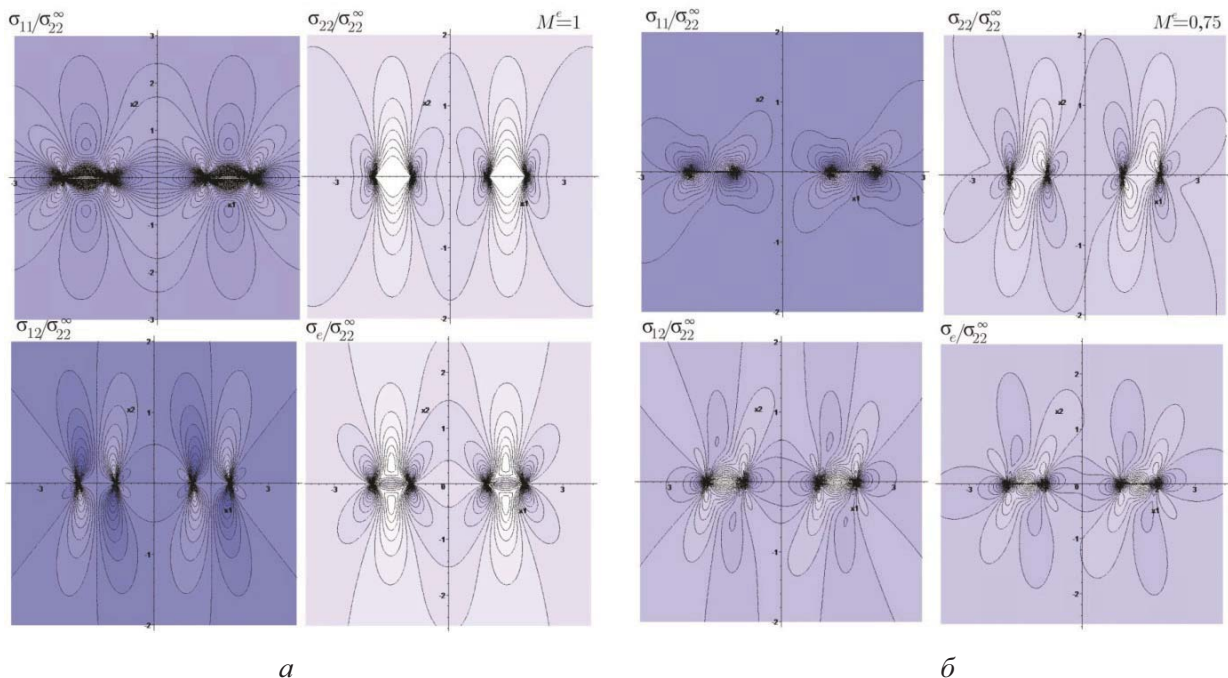


Рис. 2. Линии уровня компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений в случае пластины с двумя коллинеарными трещинами равной длины: а – нормальный отрыв; б – нагружение, отвечающее значению параметра смешанности нагружения  $M^e = 0,75$

На рис. 4, в приведены линии уровня компонент тензора напряжений для более близко расположенных трещин: для следующих значений геометрических параметров:  $a/(2l) = 0,25$ ,  $b/(2l) = 1,25$ . Из рисунков видно, что трещины при  $a/(2l) = 0,25$ ,  $b/(2l) = 1,25$  сильнее влияют друг на друга по сравнению с ранее рассмотренными геометрическими параметрами  $a/(2l) = 1$ ,  $b/(2l) = 2$ .

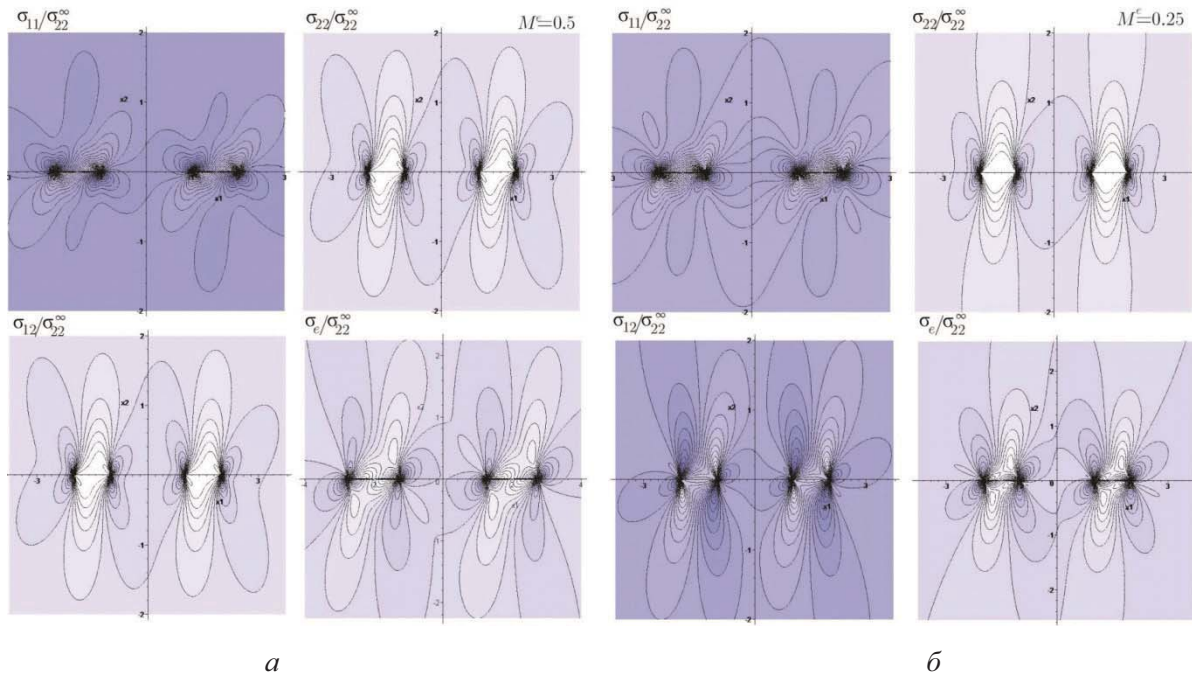


Рис. 3. Линии уровня компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений (смешанное нагружение пластины с двумя коллинеарными трещинами равной длины): *а* – смешанное нагружение, отвечающее  $M^e = 0,5$ ; *б* – смешанное нагружение, отвечающее  $M^e = 0,25$

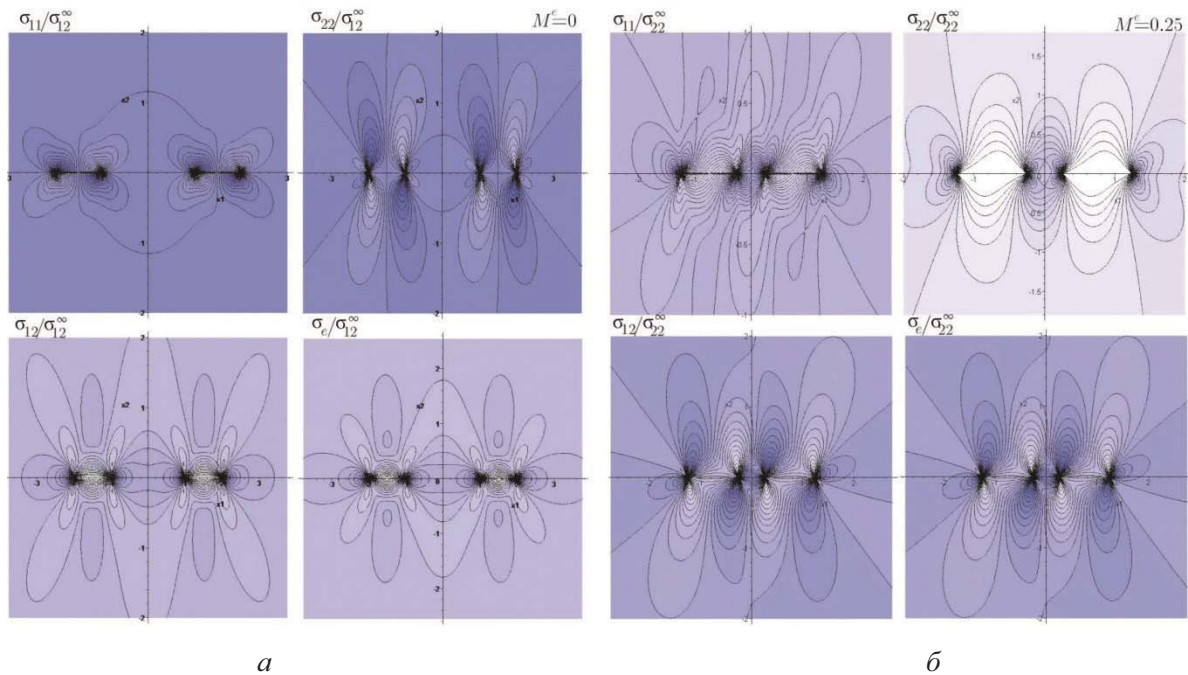


Рис. 4. Антисимметричное нагружение пластины с двумя коллинеарными трещинами равной длины (поперечный сдвиг) (*а*) и смешанное нагружение пластины для близких трещин (*б*)

Сравнивая асимптотическое решение М. Уильямса с угловыми распределениями (1) и (5), можно найти коэффициент интенсивности напряжений  $K_I(b) = \sqrt{\pi} \sigma_{22}^\infty b^{3/2} [1 - E(\pi/2, k) / F(\pi/2, k)] / \sqrt{b^2 - a^2}$  и  $T$ -напряжение,  $T = (\alpha - 1) \sigma_{22}^\infty$  или в более общей форме для трещин поперечного сдвига и продольного отрыва ( $2l$  – длина трещины,  $d$  – расстояние между серединами двух трещин).

$$\{K_I(b), K_{II}(b), K_{III}(b)\} = G(b) \{\sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{23}^\infty\} \sqrt{\pi l},$$

где

$$G(b) = \frac{d + 2l}{4l} \left( \frac{d + 2l}{d} \right)^{1/2} \left[ 1 - \frac{E(k)}{F(k)} \right].$$

Аналогичным образом можно получить коэффициенты интенсивности напряжений для другой вершины трещины:

$$\{K_I(a), K_{II}(a), K_{III}(a)\} = G(a) \{\sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{23}^\infty\} \sqrt{\pi l},$$

где

$$G(a) = \frac{d - 2l}{4l} \left( \frac{d - 2l}{d} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{d + 2l}{d - 2l} \right)^2 \frac{E(k)}{F(k)} - 1 \right], \quad l = (b - a) / 2, \quad d = a + b.$$

#### 4. Аналитическое определение коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины нормального отрыва

Асимптотическое разложение комплексного потенциала (5) в окрестности вершины трещины  $z(r, \theta) = b + re^{i\theta}$ ,  $x_2 = r \sin \theta$  имеет вид

$$\varphi_1'(z) = \frac{\sigma_{22}^\infty}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - b)^{n-1/2} + (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^\infty}{4}, \quad (9)$$

где

$$q_n = \sum_{k=0}^{n+1} p_k d_{n-k}, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n+1} c_k e_{n-k}, \quad e_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k}, \quad (10)$$

$$d_0 = b^2 - c, \quad d_1 = 2b, \quad d_2 = 1, \quad d_k = 0, k > 2, \quad (11)$$

$$a_k = (-1)^k \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (b-a)^{-(2k+1)/2}, \quad b_k = (-1)^k \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (a+b)^{-(2k+1)/2}, \quad (12)$$

$$c_k = (-1)^k \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (2b)^{-(2k+1)/2}. \quad (13)$$

Формулы (10)–(13) содержат зависимость коэффициентов асимптотического разложения комплексного потенциала от геометрических параметров образца  $a, b$  и прило-

женного растягивающего напряжения  $\sigma_{22}^\infty$ . Подстановка выражения (9) в формулы Коло-  
сова–Мусхелишвили (5) и сравнение с полным асимптотическим разложением М. Уиль-  
ямса (1) приводит к определению амплитудных коэффициентов разложения:

$$a_k^1 = \sigma_{22}^\infty q_k / f_k^{1,11}(\theta = 0), \quad a_2^1 = (\alpha - 1)\sigma_{22}^\infty / 4, \quad a_{2k}^1 = 0, \quad \forall k > 1.$$

Ниже приведены аналитические выражения для первых тринадцати коэффициентов  
полного асимптотического разложения М. Уильямса, полученные с помощью выражений  
(10)–(13):

$$\begin{aligned} a_1^1 &= \frac{\sigma_{22}^\infty}{\sqrt{2b}} \frac{b^2 - c}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \quad a_2^1 = \frac{(\alpha - 1)}{4} \sigma_{22}^\infty, \quad a_{2k}^1 = 0, \quad \forall k > 1, \\ a_3^1 &= \frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{24} \frac{3b^4 - 7a^2b^2 + 5b^2c - a^2c}{b^{3/2} (b^2 - a^2)^{3/2}}, \\ a_5^1 &= -\frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{320} \frac{2a^2b^2c - 34a^2b^4 - 19a^4b^2 + 43b^4c + 5b^6 + 3a^4c}{b^{5/2} (b^2 - a^2)^{5/2}}, \\ a_7^1 &= \frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{1792} \frac{-5a^6c + 137a^2b^4c + 11a^4b^2c + 177b^6c + 13a^6b^2 + 7b^8 - 113a^2b^6 - 227a^4b^4}{b^{7/2} (b^2 - a^2)^{7/2}}, \\ a_9^1 &= -\frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{36864} \frac{1}{b^{9/2} (b^2 - a^2)^{9/2}} \left\{ 45b^{10} + 5732a^2b^6c + 450a^4b^4c + 2867b^8c + 35a^8c - \right. \\ &\quad \left. -124a^6b^2c - 67a^8b^2 - 132a^6b^4 - 1636a^2b^8 - 7170a^4b^6 \right\}, \\ a_{11}^1 &= \frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{180224} \frac{1}{b^{11/2} (b^2 - a^2)^{11/2}} \left\{ 10398a^4b^6c + 42997a^2b^8c + 77b^{12} - 10986a^6b^6 - 367a^8b^4 - \right. \\ &\quad \left. -646a^6b^4c + 295a^8b^2c + 11531b^{10}c - 6189a^2b^{10} - 47150a^4b^8 - 63a^{10}c + 103a^{10}b^2 \right\}, \\ a_{13}^1 &= \frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{1703936} \frac{1}{b^{13/2} (b^2 - a^2)^{13/2}} \left\{ 48014a^2b^{12} + 559049a^4b^{10} + 329124a^6b^8 + 11729a^8b^6 - \right. \\ &\quad \left. -92479b^{12}c - 1810a^{10}b^4 - 273b^{14} + 343a^{12}b^2 - 551534a^2b^{10}c + 1330a^{10}b^2c - \right. \\ &\quad \left. -298169a^4b^8c - 1764a^6b^6c - 3329a^8b^4c - 231a^{12}c \right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя асимптотическое представление для комплексного потенциала (9) в (4),  
можно получить асимптотические представления компонент тензора напряжений в окре-  
стности вершины трещины  $z = b$ :

$$\sigma_{ij}^1(r, \theta) = \sigma_{22}^\infty \left[ \sum_{n=0}^{\infty} q_n g_n^{1,ij}(\theta) r^{n-1/2} + (\alpha - 1) \delta_{i1} \delta_{j1} \right],$$

где угловые распределения  $g_n^{m,ij}(\theta)$  определяются как

$$g_n^{1,11}(\theta) = [(n + 3/2) \cos(n - 1/2)\theta - (n - 1/2) \cos(n - 5/2)\theta] / 2,$$

$$g_n^{1,22}(\theta) = [(-n + 5/2) \cos(n - 1/2)\theta + (n - 1/2) \cos(n - 5/2)\theta] / 2,$$

$$g_n^{1,12}(\theta) = [(-n + 1/2) \sin(n - 1/2)\theta + (n - 1/2) \sin(n - 5/2)\theta] / 2.$$

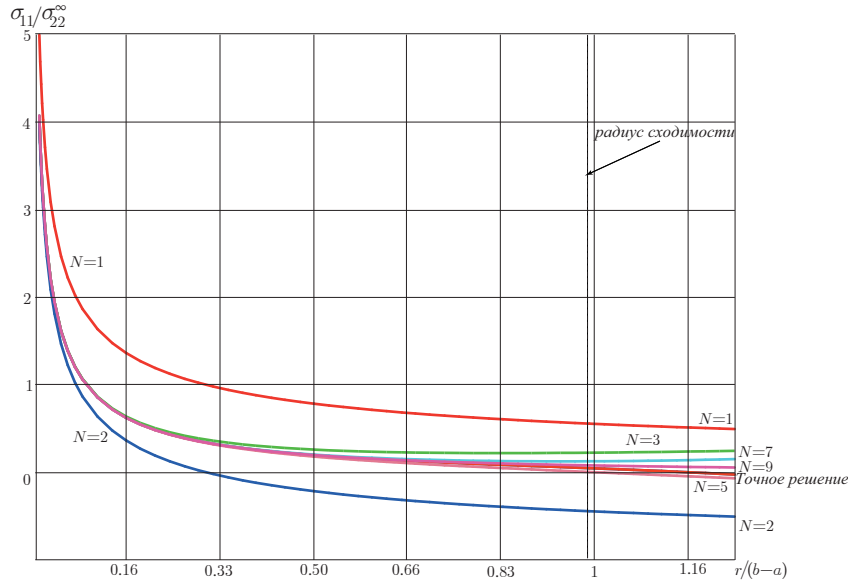


Рис. 5. Радиальное распределение компоненты  $\sigma_{11}^1$  у вершины трещины  $z = b$ , построенное с помощью точного решения и  $k$ -членного асимптотического разложения, где  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

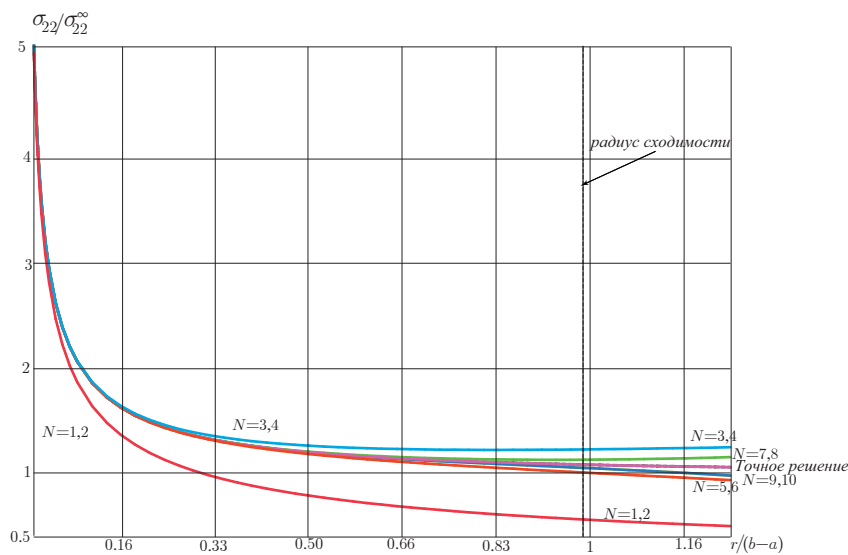


Рис. 6. Радиальное распределение компоненты  $\sigma_{22}^1$  у вершины трещины  $z = b$ , построенное с помощью точного решения и  $k$ -членного асимптотического разложения, где  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

На рис. 5, 6 показаны радиальные распределения нормальных компонент тензора напряжений  $\sigma_{11}^1$  и  $\sigma_{22}^1$  у вершины трещины  $z = b$ , построенные с помощью точного реше-

ния и  $k$ -членных асимптотических разложений, где  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ . Из рис. 5, 6 видно, что  $T$ -напряжение вносит существенный вклад в асимптотическое разложение компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}^1$ . Более того, из рис. 5, 6 следует, что ограничиваться  $T$ -напряжением нельзя, поскольку двучленное асимптотическое разложение рассматриваемых компонент тензора напряжений значительно отличается от радиального распределения, построенного с помощью точного решения. Из приведенных рисунков видно, что кривые, определяемые асимптотическими разложениями, содержащими 9 слагаемых, совпадают с точным решением (см. рис. 5, 6). На рис. 7, 8 изображены линии равного уровня компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}^1$  и интенсивности касательных напряжений в окрестности вершины трещины  $z = b$ , построенные с помощью одночленных (рис. 7, а) и тридцатипятичленных асимптотических разложений (рис. 7, б). Сравнение рис. 7, а, б показывает, что линии уровня меняются и учет высших приближений имеет принципиальное значение. На рис. 8 показаны линии уровня интенсивности касательных напряжений в окрестности вершины  $z = b$  для трещины отрыва, построенные с помощью главного члена асимптотического разложения (рис. 8, а, б) и тридцатипятичленного асимптотического разложения (рис. 8, в). Линии уровня на рис. 8, а, б получены для различных расстояний от кончика трещины. На рис. 8, в видно, что полное асимптотическое разложение М. Уильямса, построенное с учетом высших приближений в окрестности вершины  $z = b$ , имеет большую область справедливости, поскольку «улавливает» наличие вершины  $z = a$ . Однако для построения полной картины линий уровня компонент тензора напряжений требуется наличие составного разложения, построенного с учетом асимптотики поля напряжений как в окрестности вершины  $z = b$ , так и в окрестности вершины  $z = a$ , определение которого представляет собой самостоятельную задачу и здесь не рассматривается.

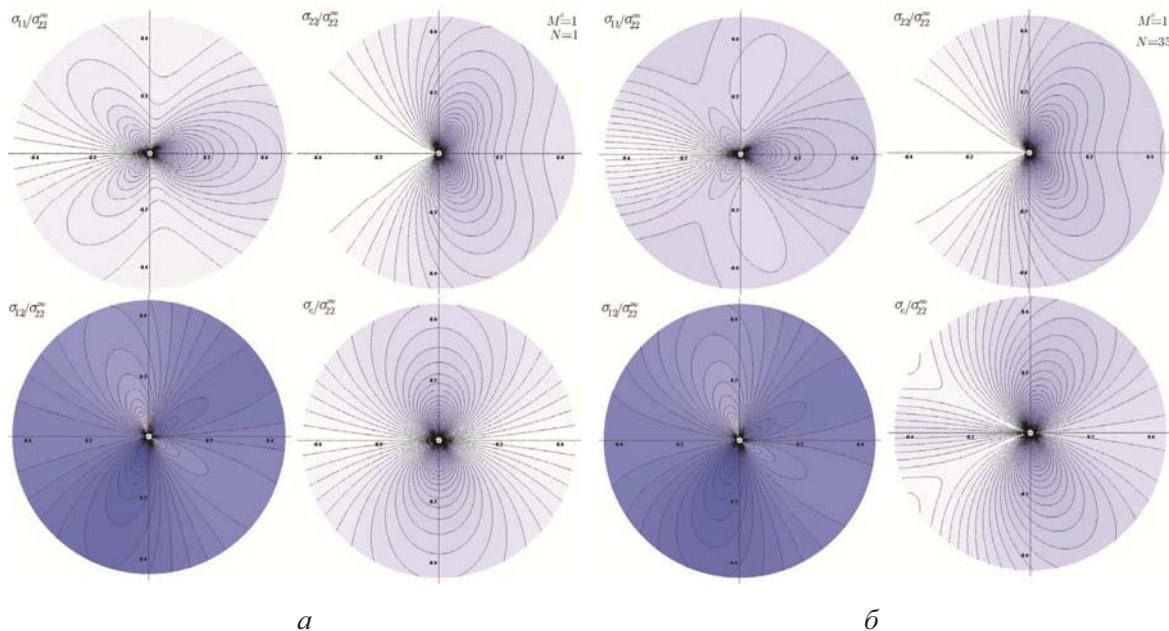


Рис. 7. Распределение компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений (линии уровня) в окрестности вершины  $z = b$  для трещины отрыва, построенное с помощью одночленных асимптотических разложений (а) и тридцатипятичленных асимптотических разложений (б)



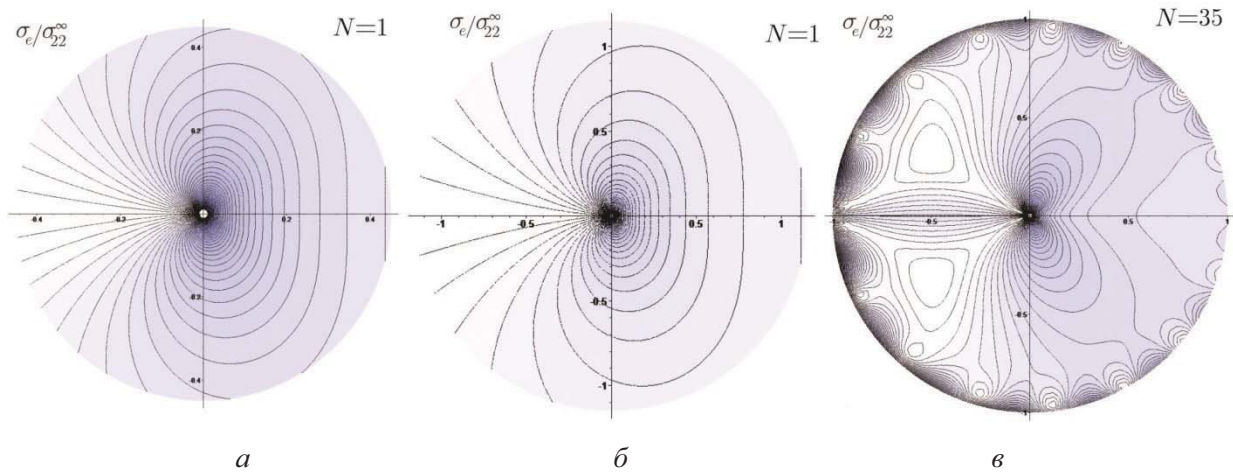


Рис. 8. Распределение интенсивности напряжений (линии уровня) в окрестности вершины  $z = b$  для трещины отрыва, построенное с помощью одночленного асимптотического разложения (а) и для больших расстояний от кончика трещины (б) и тридцатипятичленного асимптотического разложения (в)

На рис. 9–12 изображены угловые распределения компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}^1$  в окрестности вершины трещины отрыва на различных расстояниях от вершины трещины. На рис. 9, а показаны угловые распределения на расстоянии  $\hat{r} = r/a = 0,075$ . Из рис. 9 видно, что угловое распределение, определяемое одночленным асимптотическим разложением (красная кривая), значительно отличается от углового распределения, построенного с помощью двухчленного разложения (синяя кривая). Однако кривые, построенные с помощью трехчленного, пятичленного и  $k$ -членного асимптотического разложения поля напряжений, не являются различимыми. Таким образом, на указанном расстоянии от вершины трещины достаточно удерживать три члена в асимптотическом разложении М. Уильямса. Если необходимо расширить область работы асимптотики (1), (2), то в асимптотическом представлении нужно сохранить высшие приближения. Например, на рис. 9, б показаны угловые распределения компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}^1$  на расстоянии  $\hat{r} = r/a = 0,15$ . Трехчленное асимптотическое разложение М. Уильямса становится отличным от пятичленного разложения (зеленая и сиреневая кривые на рисунке). Кривые, построенные посредством семичленного, девятичленного и  $k$ -членного разложения, становятся не различимыми. Дальнейшее увеличение расстояния от вершины трещины приводит к необходимости удержания следующих слагаемых в асимптотическом представлении (см. рис. 10, 11). На рис. 12, а, б показаны угловые распределения компонент тензора напряжений при  $\hat{r} = r/a = 0,5$ , построенные с удержанием различного числа слагаемых в асимптотическом разложении, начиная от одночленного асимптотического разложения, заканчивая асимптотическим разложением, содержащим 50 слагаемых. Из рис. 12 видно, что лишь с асимптотического разложения, содержащего 15 слагаемых, кривые перестают отличаться друг от друга.

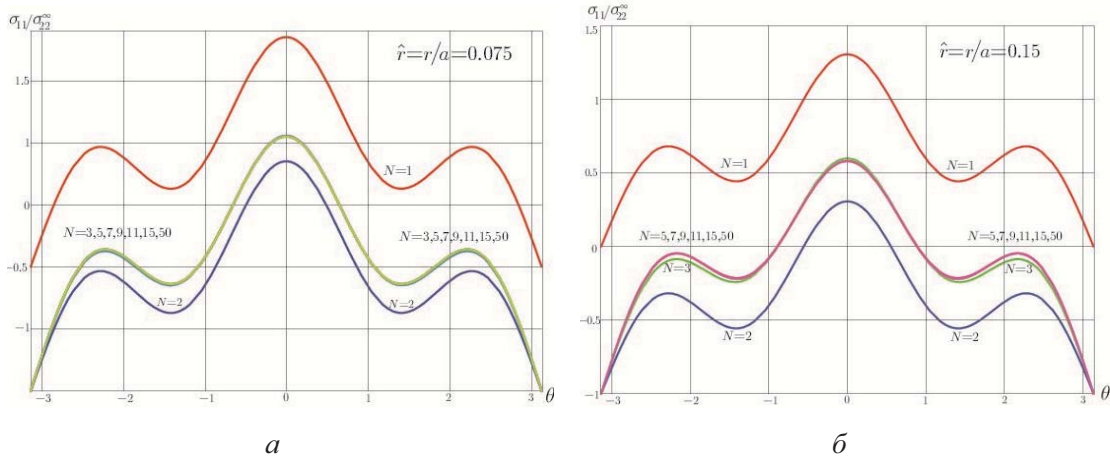


Рис. 9. Угловые распределения компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}^1$  в окрестности вершины трещины  $z = b$  на разных расстояниях от вершины трещины: *а* – для  $\hat{r} = r/a = 0,075$ ; *б* – для  $\hat{r} = r/a = 0,15$

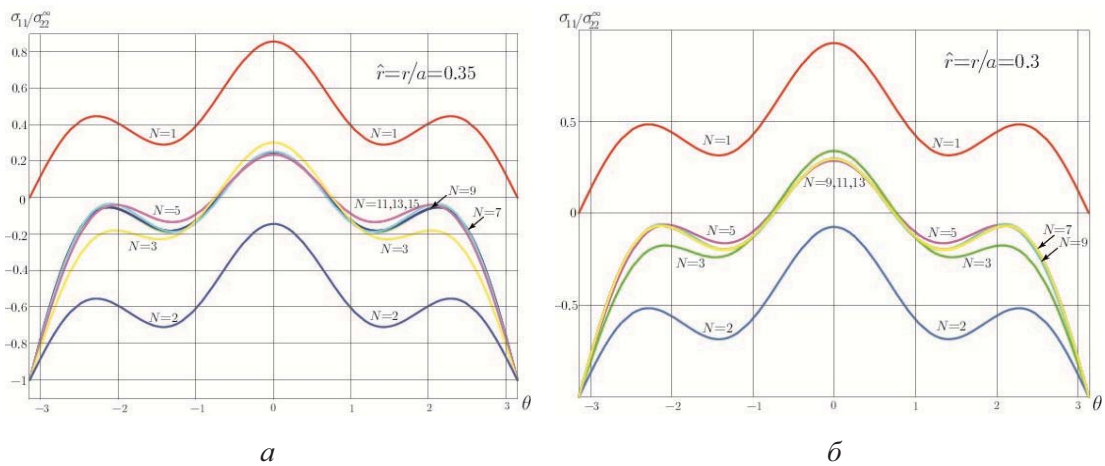


Рис. 10. Угловые распределения компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}^1$  в окрестности вершины трещины  $z = b$  на разных расстояниях от вершины трещины: *а* – для  $\hat{r} = r/a = 0,35$ ; *б* – для  $\hat{r} = r/a = 0,3$

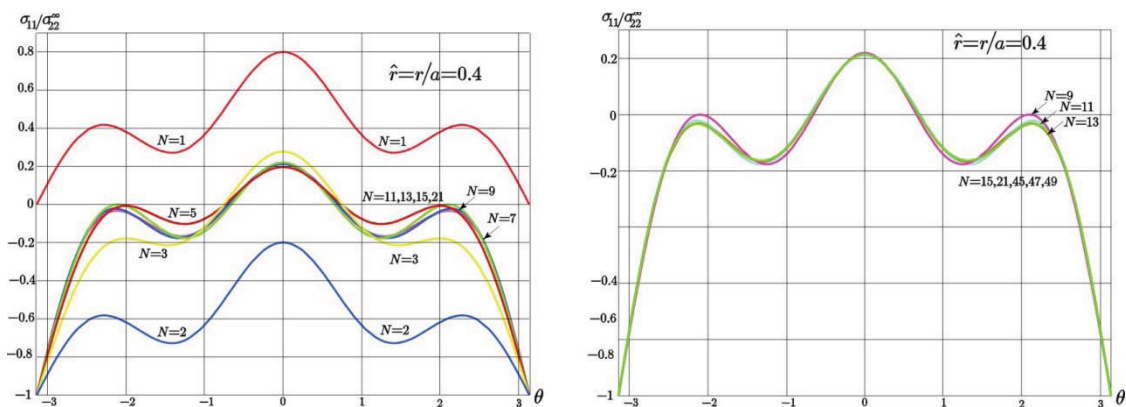


Рис. 11. Угловые распределения компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}^1$  в окрестности вершины трещины  $z = b$  для  $\hat{r} = r/a = 0,4$ , построенные с помощью высших приближений в асимптотическом разложении

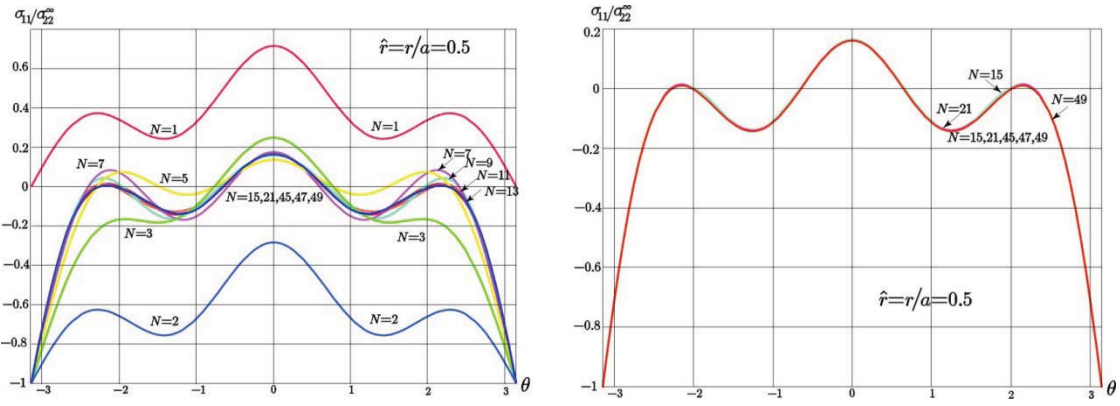


Рис. 12. Угловые распределения компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}^1$  в окрестности вершины трещины  $z = b$ , построенные с помощью высших приближений в асимптотическом разложении

Таким образом, для расширения области действия асимптотического разложения поля напряжений в окрестности вершины трещины необходимо удерживать высшие приближения.

Аналогичным образом можно получить полное асимптотическое разложение в окрестности вершины  $z = a$ . Раскладывая комплексный потенциал в ряд Тейлора в окрестности вершины  $z = a + re^{i\theta}$ , можно найти

$$\varphi_1'(z) = \frac{\sigma_{22}^\infty}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n (z-a)^{n-1/2} + (\alpha-1) \frac{\sigma_{22}^\infty}{4}, \quad (15)$$

где

$$\delta_n = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \chi_{n-k}, \quad \chi_n = \sum_{k=0}^{n+1} \beta_k \xi_{n-k}, \quad \xi_n = \sum_{k=0}^{n+1} \varsigma_k \eta_{n-k}, \quad (16)$$

$$\eta_0 = a^2 - c, \quad \eta_1 = 2a, \quad \eta_2 = 1, \quad \eta_k = 0, k > 2, \quad (17)$$

$$\alpha_k = (-1)^k \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (2a)^{-(2k+1)/2}, \quad \beta_k = \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (b-a)^{-(2k+1)/2}, \quad (18)$$

$$\varsigma_k = (-1)^k \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (a+b)^{-(2k+1)/2}. \quad (19)$$

Формулы (16)–(19) содержат зависимость коэффициентов асимптотического разложения комплексного потенциала от геометрических параметров образца  $a, b$  и приложенного растягивающего напряжения  $\sigma_{22}^\infty$ . Подстановка выражения (15) в формулы Колосова–Мусхелишвили (5) и сравнение с полным асимптотическим разложением М. Уильямса (1) приводит к определению амплитудных коэффициентов разложения:

$$a_k^1 = \sigma_{22}^\infty q_k / f_k^{1,11}(\theta=0), \quad a_{2k}^1 = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Ниже приведены аналитические выражения для первых тринадцати коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса, полученные с помощью выражений (16)–(19):

$$a_1^1 = \frac{\sigma_{22}^\infty}{\sqrt{2a}} \frac{a^2 - c}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \quad a_2^1 = \frac{(\alpha - 1)}{4} \sigma_{22}^\infty, \quad a_{2k}^1 = 0, \quad \forall k > 1,$$

$$a_3^1 = -\frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{24} \frac{3a^4 - 7a^2 b^2 + 5a^2 c - b^2 c}{a^{3/2} (b^2 - a^2)^{3/2}},$$

$$a_5^1 = -\frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{320} \frac{2a^2 b^2 c - 34b^2 a^4 - 19b^4 a^2 + 43a^4 c + 5a^6 + 3a^4 c}{a^{5/2} (b^2 - a^2)^{5/2}},$$

$$a_7^1 = -\frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{1792} \frac{-5b^6 c + 137b^2 a^4 c + 11b^4 a^2 c + 177a^6 c + 13b^6 a^2 + 7a^8 - 113b^2 a^6 - 227a^4 b^4}{a^{7/2} (b^2 - a^2)^{7/2}},$$

$$a_9^1 = -\frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{36864} \frac{1}{a^{9/2} (b^2 - a^2)^{9/2}} \left\{ 45a^{10} + 5732b^2 a^6 c + 450a^4 b^4 c + 2867a^8 c + 35b^8 c - \right.$$

$$\left. -124b^6 a^2 c - 67b^8 a^2 - 132b^6 a^4 - 1636b^2 a^8 - 7170b^4 a^6 \right\},$$

$$a_{11}^1 = -\frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{180224} \frac{1}{a^{11/2} (b^2 - a^2)^{11/2}} \left\{ 10398b^4 a^6 c + 42997b^2 a^8 c + 77a^{12} - 10986a^6 b^6 - 63b^{10} c - \right.$$

$$\left. -367b^8 a^4 - 646b^6 a^4 c + 295b^8 a^2 c + 11531a^{10} c - 6189b^2 a^{10} - 47150b^4 a^8 + 103b^{10} a^2 \right\},$$

$$a_{13}^1 = \frac{\sigma_{22}^\infty \sqrt{2}}{1703936} \frac{1}{a^{13/2} (b^2 - a^2)^{13/2}} \left\{ 48014b^2 a^{12} + 559049b^4 a^{10} + 329124b^6 a^8 + 11729b^8 a^6 - \right.$$

$$\left. -92479a^{12} c - 1810b^{10} a^4 - 273a^{14} + 343b^{12} a^2 - 551534b^2 a^{10} c - 298169b^4 a^8 c - \right.$$

$$\left. -1764a^6 b^6 c - 3329b^8 a^4 c + 1330b^{10} a^2 c - 231b^{12} c \right\}.$$

На рис. 13 показаны линии уровня компонент тензора напряжений и интенсивности касательных напряжений в окрестности вершины трещины  $z = a$ , построенные посредством разложения (15), где коэффициенты разложения вычисляются по формулам (16)–(19), а также приведены результаты расчета, основанного на удержании главного члена асимптотического разложения компонент тензора напряжений (рис. 13, а) и с помощью двухчленных асимптотических разложений (рис. 13, б). Из приведенных формул следует, что второе слагаемое –  $T$ -напряжение влияет на компоненту  $\sigma_{11}^1$  и на интенсивность напряжений. На рис. 13, б показаны линии уровня, полученные при удержании 15 слагаемых. Дальнейшее увеличение числа удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении показывает, что для рассматриваемых расстояний от кончика трещины различий нет.

В таблице приведены числовые значения коэффициентов интенсивности напряжений у вершин трещин  $z = a$  и  $z = b$  для пластины с двумя коллинеарными трещинами.

Числовые значения коэффициентов интенсивности напряжений для пластины  
с двумя коллинеарными трещинами длиной  $2l$  и расстоянием  
между серединами трещин  $d$

Полудлина трещины	$l$ , см	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55
Расстояние между серединами трещин	$d$ , см	1,11	1,65	2,75	3,85	5,5
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = a$	$K_I(a) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	4,0823	1,4623	1,3502	1,3308	1,3219
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = b$	$K_I(b) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	1,5886	1,3824	1,3380	1,3266	1,3206
Полудлина трещины	$l$ , см	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
Расстояние между серединами трещин	$d$ , см	1,21	1,8	3	4,2	6
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = a$	$K_I(a) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	4,3957	1,5274	1,4102	1,3899	1,3807
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = b$	$K_I(b) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	1,6625	1,4439	1,3975	1,3856	1,3793
Полудлина трещины	$l$ , см	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
Расстояние между серединами трещин	$d$ , см	1,61	2,4	4	4,8	8
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = a$	$K_I(a) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	5,6205	1,7636	1,6284	1,6050	1,5943
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = b$	$K_I(b) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	1,9318	1,6673	1,6137	1,6000	1,5927
Полудлина трещины	$l$ , см	1	1	1	1	1
Расстояние между серединами трещин	$d$ , см	2,1	3	5	7	10
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = a$	$K_I(a) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	3,1815	1,9718	1,8206	1,7944	1,7825
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = b$	$K_I(b) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	2,0401	1,8641	1,8041	1,7888	1,7806
Полудлина трещины	$l$ , см	3	3	3	3	3
Расстояние между серединами трещин	$d$ , см	6,1	9	15	21	30
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = a$	$K_I(a) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	7,7557	3,4153	3,1534	3,1080	3,0874
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = b$	$K_I(b) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	3,6544	3,2286	3,1248	3,0984	3,0842
Полудлина трещины	$l$ , см	5	5	5	5	5
Расстояние между серединами трещин	$d$ , см	10,1	15	25	35	50
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = a$	$K_I(a) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	11,9075	4,4091	4,0710	4,0124	3,9858
Коэффициент интенсивности напряжений у вершины $z = b$	$K_I(b) / \sigma_{22}^{\infty}$ , см <sup>1/2</sup>	4,7790	4,1682	4,0341	4,0000	3,9817

Как видно из таблицы, коэффициенты интенсивности напряжений зависят от геометрии пластины с двумя трещинами: от их длин и расстояний между ними. Чем дальше друг от друга в пластине расположены трещины, тем слабее их влияние друг на друга. Для расстояний между центрами трещин порядка  $d > 10l$  каждая трещина ведет себя как

отдельная трещина и практически не взаимодействует с другой трещиной в пластине. Это подтверждается сближением числовых значений коэффициентов интенсивностей напряжений при увеличении расстояния между двумя трещинами равной длины в пластине.

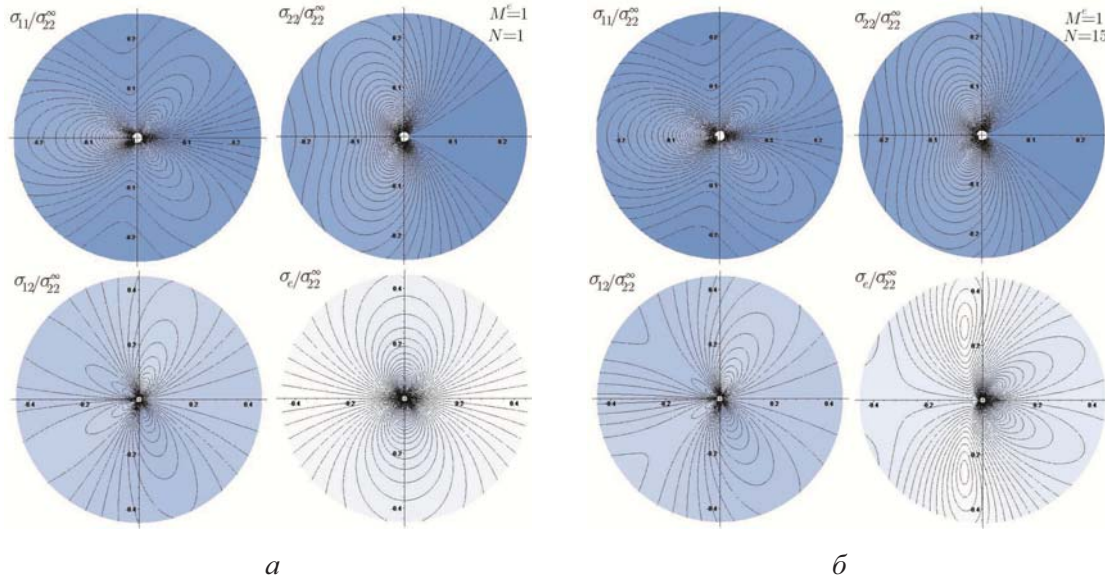


Рис. 13. Линии уровня компоненты тензора напряжений и интенсивности напряжений в окрестности вершины  $z = a$ , построенные с помощью одночленного (а) и пятнадцатичленного асимптотических разложений (б)

### 5. Аналитическое определение коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины поперечного сдвига

Асимптотическое разложение комплексного потенциала (5) в окрестности вершины трещины  $z(r, \theta) = b + re^{i\theta}$ ,  $x_2(r, \theta) = r \sin \theta$  имеет вид

$$\varphi_2'(z) = -i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z-b)^{n-1/2} + i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2}, \quad (20)$$

где

$$q_n = \sum_{k=0}^{n+1} p_k d_{n-k}, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n+1} c_k e_{n-k}, \quad e_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k}, \quad (21)$$

$$d_0 = b^2 - c, \quad d_1 = 2b, \quad d_2 = 1, \quad d_k = 0, k > 2, \quad (22)$$

$$a_k = (-1)^k \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (b-a)^{-(2k+1)/2}, \quad b_k = (-1)^k \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (a+b)^{-(2k+1)/2}, \quad (23)$$

$$c_k = (-1)^k \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (2b)^{-(2k+1)/2}. \quad (24)$$

Формулы (21)–(24) содержат зависимость коэффициентов асимптотического разложения комплексного потенциала от геометрических параметров образца  $a, b$  и прило-

женного напряжения  $\sigma_{12}^\infty$ . Подстановка выражения (20) в формулы Колосова–Мусхелишвили (5) и сравнение с полным асимптотическим разложением М. Уильямса (1) приводит к определению амплитудных коэффициентов разложения:

$$a_k^2 = \sigma_{12}^\infty q_k / f_k^{2,12}(\theta = 0), \quad a_{2k}^1 = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Ниже приведены аналитические выражения для первых тринадцати коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса, полученные с помощью выражений (21)–(24):

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{\sigma_{12}^\infty}{\sqrt{2b}} \frac{b^2 - c}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \quad a_{2k}^2 = 0, \quad \forall k \geq 1, \quad a_3^2 = \frac{\sigma_{12}^\infty \sqrt{2}}{24} \frac{3b^4 - 7a^2b^2 + 5b^2c - a^2c}{b^{3/2} (b^2 - a^2)^{3/2}}, \\ a_5^2 &= -\frac{\sigma_{12}^\infty \sqrt{2}}{320} \frac{2a^2b^2c - 34a^2b^4 - 19a^4b^2 + 43b^4c + 5b^6 + 3a^4c}{b^{5/2} (b^2 - a^2)^{5/2}}, \\ a_7^2 &= \frac{\sigma_{12}^\infty \sqrt{2}}{1792} \frac{-5a^6c + 137a^2b^4c + 11a^4b^2c + 177b^6c + 13a^6b^2 + 7b^8 - 113a^2b^6 - 227a^4b^4}{b^{7/2} (b^2 - a^2)^{7/2}}, \\ a_9^2 &= -\frac{\sigma_{12}^\infty \sqrt{2}}{36864} \frac{1}{b^{9/2} (b^2 - a^2)^{9/2}} \left\{ 45b^{10} + 5732a^2b^6c + 450a^4b^4c + 2867b^8c + 35a^8c - \right. \\ &\quad \left. -124a^6b^2c - 67a^8b^2 - 132a^6b^4 - 1636a^2b^8 - 7170a^4b^6 \right\}, \\ a_{11}^2 &= \frac{\sigma_{12}^\infty \sqrt{2}}{180224} \frac{1}{b^{11/2} (b^2 - a^2)^{11/2}} \left\{ 10398a^4b^6c + 42997a^2b^8c + 77b^{12} - 10986a^6b^6 - \right. \\ &\quad \left. -367a^8b^4 - 646a^6b^4c + 295a^8b^2c + 11531b^{10}c - 6189a^2b^{10} - 47150a^4b^8 - 63a^{10}c + 103a^{10}b^2 \right\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Подставляя асимптотическое представление для комплексного потенциала (20) в (4), можно получить асимптотические представления компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины  $z = b$  в условиях поперечного сдвига:

$$\sigma_{ij}^2(r, \theta) = \sigma_{12}^\infty \sum_{n=0}^{\infty} q_n g_n^{2,ij}(\theta) r^{n-1/2},$$

где угловые распределения  $g_n^{m,ij}(\theta)$  определяются как

$$g_n^{2,11}(\theta) = [(n + 7/2) \sin(n - 1/2)\theta - (n - 1/2) \sin(n - 5/2)\theta] / 2,$$

$$g_n^{2,22}(\theta) = [(-n + 1/2) \sin(n - 1/2)\theta + (n - 1/2) \sin(n - 5/2)\theta] / 2,$$

$$g_n^{2,12}(\theta) = [(n + 3/2) \cos(n - 1/2)\theta - (n - 1/2) \cos(n - 5/2)\theta] / 2.$$

На рис. 14 приведены линии уровня компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений вблизи вершины трещины  $z = b$ , построенные с помощью одночленных (рис. 14, а) и тридцатипятичленных асимптотических разложений (рис. 14, б). На рис. 15

приведены угловые распределения касательного напряжения  $\sigma_{12}^2$  в окрестности вершины трещины  $z = b$  на различных расстояниях от вершины трещины. Видно, что в непосредственной окрестности вершины трещины достаточно удерживать три слагаемых (рис. 15, а), тогда как при увеличении расстояния трехчленное, пятичленное и семичленное асимптотические разложения оказываются различимыми и следует удерживать высшие приближения.

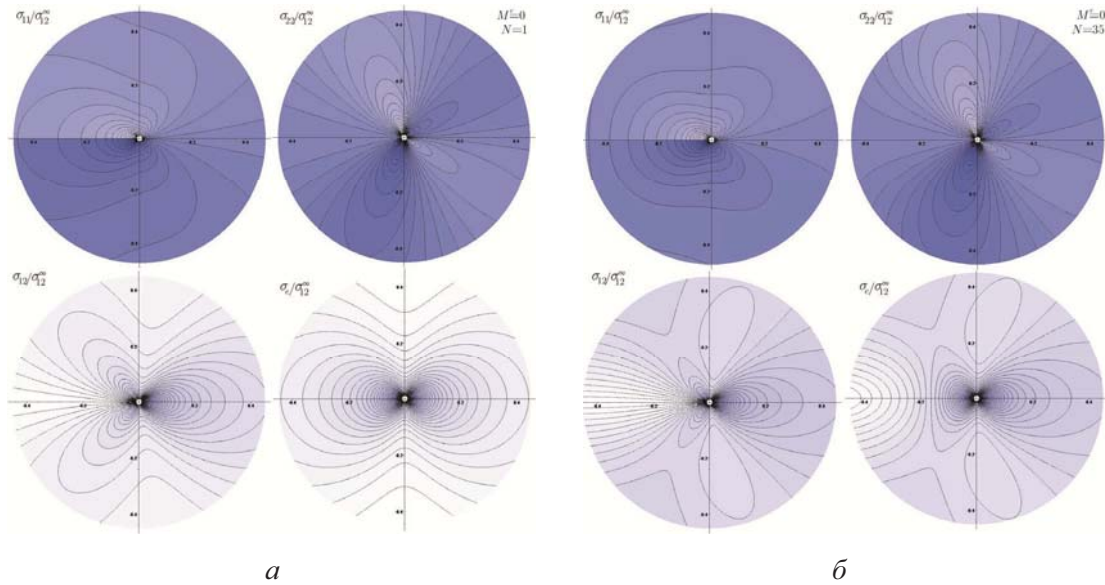


Рис. 14. Распределение компонент тензора напряжений вблизи вершины трещины  $z = b$  для главного члена асимптотического разложения (а) и для разложения, содержащего 35 слагаемых (б)

На рис. 16 приведены угловые распределения касательного напряжения  $\sigma_{12}^2$  в окрестности вершины трещины  $z = b$  для  $\hat{r} = r/a = 0.45$ . На рис. 16 можно видеть, что девятичленное и тринадцатичленное асимптотические разложения отличаются друг от друга. На рис. 17 изображены угловые распределения компоненты тензора напряжений  $\sigma_{12}^2$  в окрестности вершины трещины  $z = b$  для  $\hat{r} = r/a = 0,75$ .

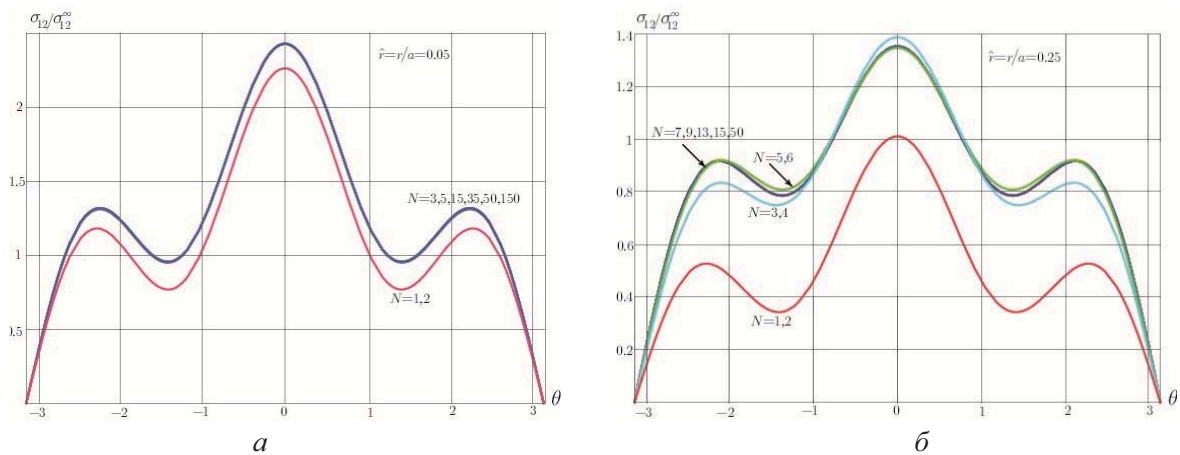


Рис. 15. Угловые распределения касательного напряжения  $\sigma_{12}^2$  в окрестности вершины трещины  $z = b$ : а – для  $\hat{r} = r/a = 0,05$ ; б – для  $\hat{r} = r/a = 0,25$



Из приведенных распределений компоненты тензора напряжений  $\sigma_{12}^2$  видно, что расширение области справедливости асимптотики М. Уильямса требует удержания высших приближений, вплоть до 40 слагаемых. После удержания 40 слагаемых угловые распределения перестают быть различимыми: на рис. 17, б показаны угловые распределения, построенные с помощью асимптотических разложений, содержащих 30, 40, 50, 150 и 200 слагаемых. Угловое распределение, построенное с помощью 30 слагаемых в асимптотическом разложении, отличается от остальных кривых, тогда как после удержания 40 слагаемых кривые перестают быть различимыми (в отличие от рис. 15, а, построенного для  $\hat{r} = r/a = 0,05$ , где достаточно трех членов асимптотического разложения).

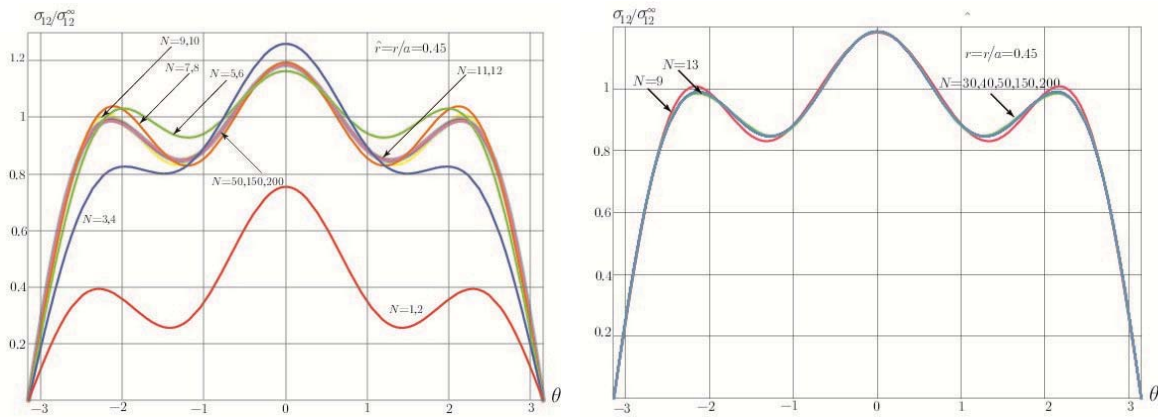


Рис. 16. Угловые распределения напряжения  $\sigma_{12}^2$  в окрестности вершины трещины  $z = b$ , построенные с помощью многопараметрического асимптотического разложения с удержанием различного числа слагаемых в асимптотическом разложении

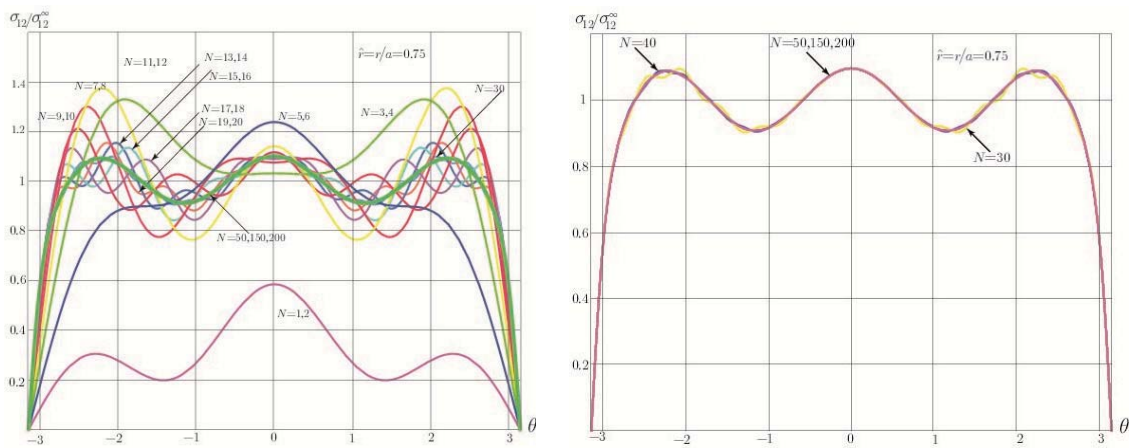


Рис. 17. Угловые распределения напряжения  $\sigma_{12}^2$  в окрестности вершины трещины  $z = b$ , построенные с помощью многопараметрического асимптотического разложения с удержанием различного числа слагаемых в асимптотическом разложении

Асимптотическое разложение комплексного потенциала (5) в окрестности вершины трещины  $z(r, \theta) = a + re^{i\theta}$ ,  $x_2(r, \theta) = r \sin \theta$  имеет вид

$$\varphi_2'(z) = -i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n (z-a)^{n-1/2} + i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2}, \quad (26)$$

где

$$\delta_n = \sum_{k=0}^{n+1} p_k d_{n-k}, \quad \chi_n = \sum_{k=0}^{n+1} \beta_k \xi_{n-k}, \quad \xi_n = \sum_{k=0}^{n+1} \varsigma_k \eta_{n-k}, \quad (27)$$

$$\eta_0 = a^2 - c, \quad \eta_1 = 2b, \quad \eta_2 = 1, \quad \eta_k = 0, k > 2, \quad (28)$$

$$\alpha_k = (-1)^k \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (2a)^{-(2k+1)/2}, \quad \beta_k = (-1)^k \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (b-a)^{-(2k+1)/2}, \quad (29)$$

$$\varsigma_k = (-1)^k \frac{(|2k-1|!!)}{2^k k!} (a+b)^{-(2k+1)/2}. \quad (30)$$

Формулы (26)–(30) содержат зависимость коэффициентов асимптотического разложения комплексного потенциала от геометрических параметров образца  $a, b$  и приложенного напряжения  $\sigma_{12}^\infty$ . Подстановка выражения (26) в формулы Колосова–Мухелишвили (5) и сравнение с полным асимптотическим разложением М. Уильямса (1) приводят к определению амплитудных коэффициентов разложения:

$$a_k^2 = \sigma_{12}^\infty q_k / f_k^{2,12}(\theta=0), \quad a_{2k}^1 = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Ниже приведены аналитические выражения для первых тринадцати коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса, полученные с помощью выражений (26)–(30):

$$\begin{aligned} a_1^2 &= -\frac{\sigma_{12}^\infty}{\sqrt{2b}} \frac{a^2 - c}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \quad a_{2k}^2 = 0, \quad \forall k \geq 1, \\ a_3^2 &= \frac{\sigma_{12}^\infty \sqrt{2}}{24} \frac{3a^4 - 7a^2 b^2 + 5a^2 c - a^2 c}{a^{3/2} (b^2 - a^2)^{3/2}}, \\ a_5^2 &= \frac{\sigma_{12}^\infty \sqrt{2}}{320} \frac{2a^2 b^2 c - 34b^2 a^4 - 19b^4 a^2 + 43a^4 c + 5a^6 + 3b^4 c}{a^{5/2} (b^2 - a^2)^{5/2}}, \\ a_7^2 &= \frac{\sigma_{12}^\infty \sqrt{2}}{1792} \frac{-5b^6 c + 137b^2 a^4 c + 11b^4 a^2 c + 177a^6 c + 13b^6 a^2 + 7a^8 - 113b^2 a^6 - 227b^4 a^4}{a^{7/2} (b^2 - a^2)^{7/2}}, \\ a_9^2 &= \frac{\sigma_{12}^\infty \sqrt{2}}{36864} \frac{1}{a^{9/2} (b^2 - a^2)^{9/2}} \{45a^{10} + 5732b^2 a^6 c + 450b^4 a^4 c + 2867a^8 c + 35b^8 c - \\ &\quad - 124b^6 a^2 c - 67b^8 a^2 - 132b^6 a^4 - 1636b^2 a^8 - 7170b^4 a^6\}, \\ a_{11}^2 &= \frac{\sigma_{12}^\infty \sqrt{2}}{180224} \frac{1}{a^{11/2} (b^2 - a^2)^{11/2}} \{10398b^4 a^6 c + 42997b^2 a^8 c + 77a^{12} - 10986b^6 a^6 - \\ &\quad - 367b^8 a^4 - 646b^6 a^4 c + 295b^8 a^2 c + 11531a^{10} c - \\ &\quad - 6189b^2 a^{10} - 47150b^4 a^8 - 63b^{10} c + 103b^{10} a^2\}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$a_{13}^2 = -\frac{\sigma_{12}^\infty \sqrt{2}}{1703936} \frac{1}{a^{13/2} (b^2 - a^2)^{13/2}} \left\{ 48014b^2 a^{12} + 559049b^4 a^{10} + 329124b^6 a^8 + 11729b^8 a^6 - \right. \\ \left. -92479a^{12}c - 1810b^{10}a^4 - 273a^{14} + 343b^{12}a^2 - 551534b^2 a^{10}c - \right. \\ \left. -298169b^4 a^8 c - 1764b^6 a^6 c - 3329b^8 a^4 c + \right. \\ \left. +1330b^{10} a^2 c - 231b^{12} c \right\}.$$

Посредством вычисленных коэффициентов (31) можно построить распределения компонент тензора напряжений у вершины трещины  $z = a$ , удерживая различное количество слагаемых в асимптотическом разложении. На рис. 18, *a* показаны линии уровня компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений, полученные с помощью одночленного асимптотического разложения. На рис. 18, *б* приведены те же величины, построенные на основании асимптотических разложений при удержании 15 слагаемых. Видно, что картина линий уровня заметно меняется, особенно для интенсивности напряжений.

### 6. Аналитическое определение коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения

В силу линейности задачи линейной теории упругости справедлив принцип суперпозиции решений (1), и, используя асимптотические разложения, построенные для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига, можно легко найти распределения напряжений вблизи вершины трещины в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования, задавая значения параметра смешанности нагружения.

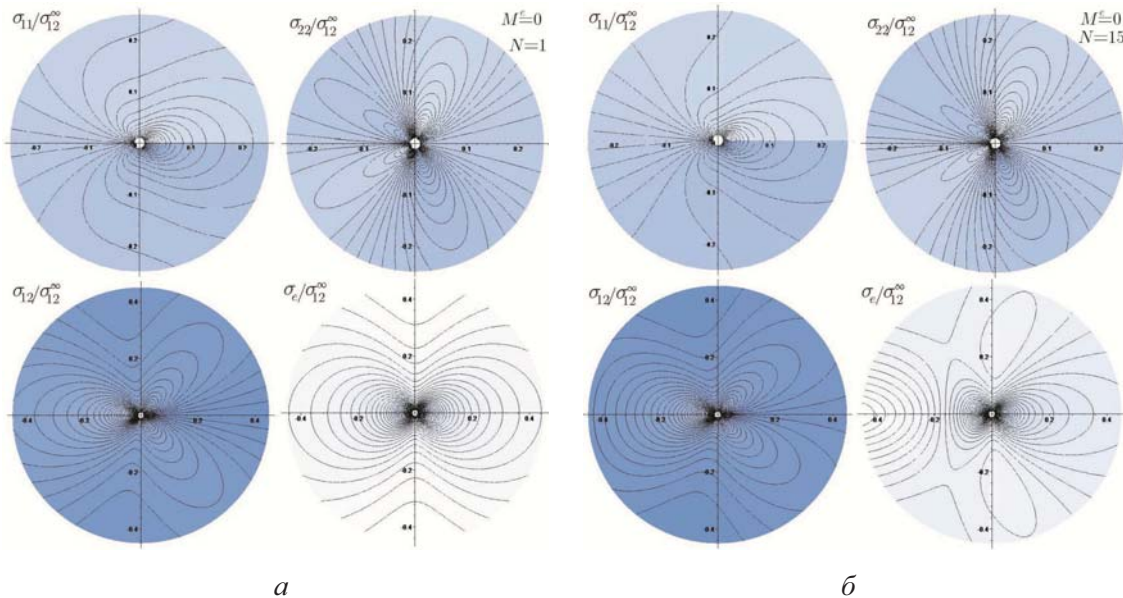


Рис. 18. Линии равных значений компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины  $z = a$  для трещины поперечного сдвига, построенные с помощью одночленного (*a*) и пятнадцатичленного асимптотического разложения (*б*)

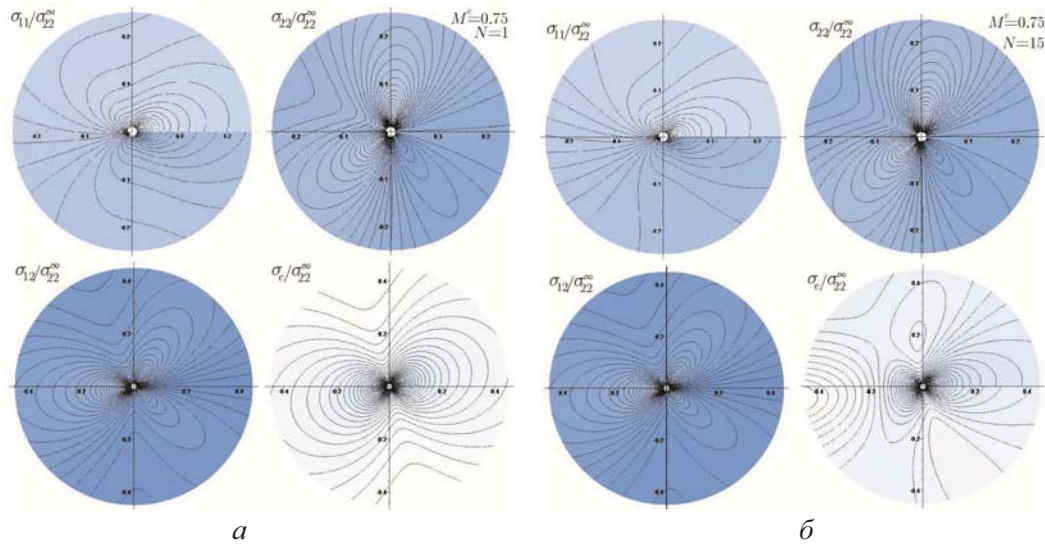


Рис. 19. Линии уровня компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины  $z = a$  в случае смешанного нагружения, построенные с помощью одночленных асимптотических разложений (а) и посредством пятнадцатичленных асимптотических разложений (б)

На рис. 19–21 изображены линии уровня компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений в непосредственной окрестности вершины  $z = a$  для различных форм смешанного деформирования и различного числа удерживаемых в асимптотическом разложении слагаемых. Из представленных рисунков видно, что высшие приближения в асимптотических разложениях заметно влияют на распределение компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины. На рис. 19 приведены результаты расчета компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для параметра смешанности  $M^e = 0,75$  для одночленного (рис. 19, а) и двухчленного (рис. 19, б) асимптотических разложений напряжений. Из сравнения рисунков следует, что учет высших приближений принципиальным образом изменяет линии уровня (рис. 20, б).

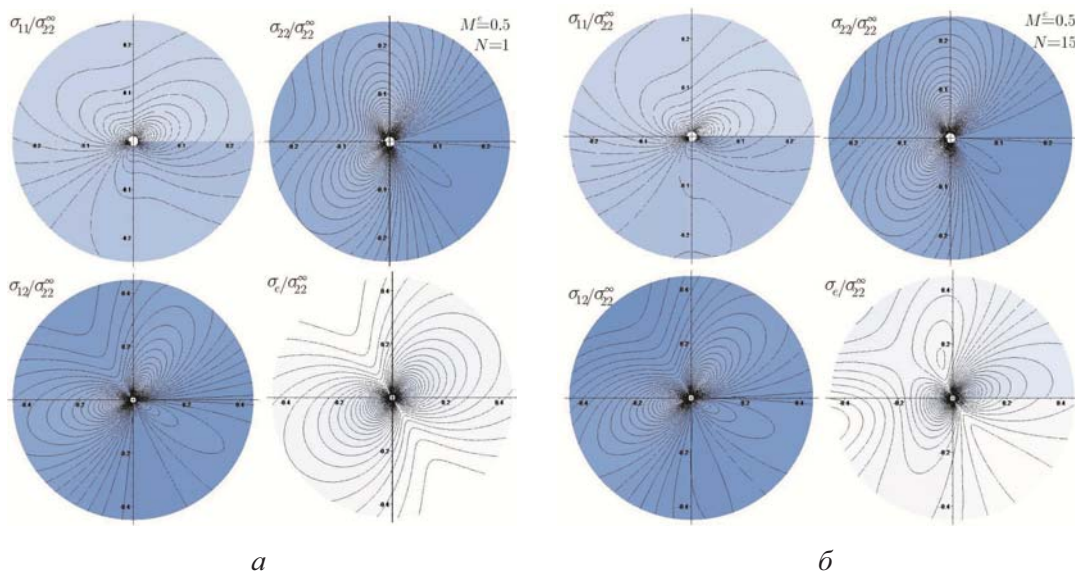


Рис. 20. Линии уровня компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины  $z = a$  в случае смешанного нагружения для различных значений параметра смешанности нагружения:  $M^e = 0,5$ , построенные с помощью одночленных асимптотических разложений (а) и посредством пятнадцатичленных асимптотических разложений (б)

На рис. 20 изображены полярные диаграммы компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины  $z = a$  для параметра смешанности нагружения  $M^e = 0,5$ . Из проведенного анализа и представленных графиков следует, что учет только  $T$ -напряжений не оказывает существенного влияния на характер распределения компонент тензора напряжений, незначительно меняется интенсивность напряжений. Тогда как учет высших приближений оказывается заметным (рис. 20, б).

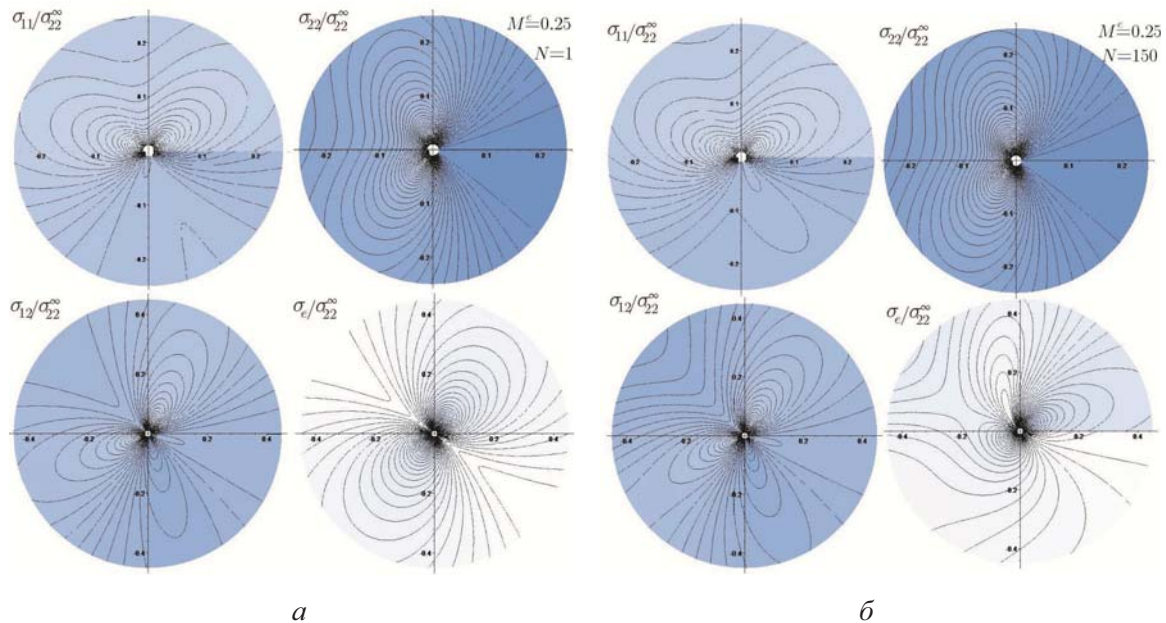


Рис. 21. Линии уровня напряжений в окрестности вершины  $z = a$  для одночленного и двучленного асимптотических разложений для параметра смешанности нагружения  $M^e = 0,25$ , построенные с помощью одночленных асимптотических разложений (а) и посредством асимптотических разложений, в которых удержано 150 слагаемых (б)

На рис. 21 приведены линии уровня компонент тензора напряжений и интенсивности касательных напряжений вблизи вершины трещины  $z = a$  для  $M^e = 0,25$ . Для построения кривых на рис. 21, а использовались одночленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений. Анализ показал, что удержание лишь  $T$ -напряжений позволяет уточнить интенсивность напряжений. При построении линий уровня на рис. 21, б удерживалось 150 слагаемых в асимптотическом разложении. Видно, что учет высших приближений повышает точность расчета механических величин у вершины трещины. На рис. 22–25 показаны угловые распределения компоненты  $\sigma_{22}$  в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения на различных расстояниях от кончика трещины. Из рисунков видно, что расширение области действия асимптотики обуславливает необходимость удержания слагаемых высшего порядка.

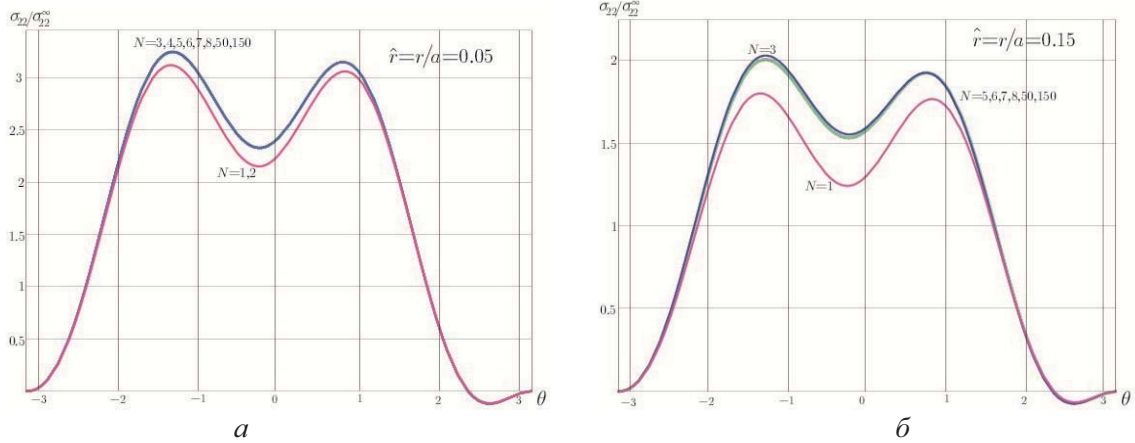


Рис. 22. Угловые распределения компоненты тензора напряжения  $\sigma_{22}$  в случае смешанного нагружения  $(\sigma_{11}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{22}^\infty) = (0, 0.75, 1)\sigma_{22}^\infty$  на различных расстояниях от кончика трещины:  $a$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,05$ ;  $b$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,15$

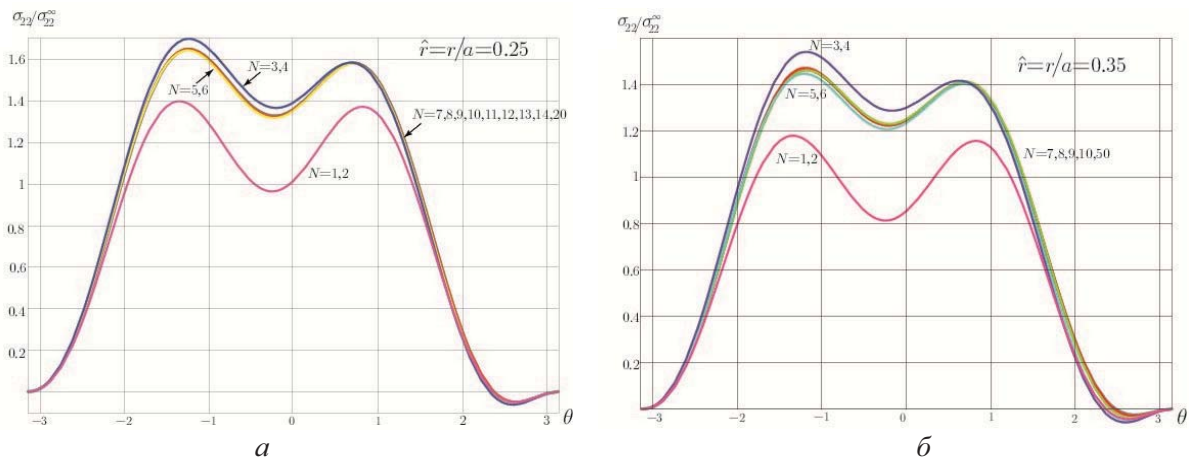


Рис. 23. Угловые распределения компоненты тензора напряжения  $\sigma_{22}$  в случае смешанного нагружения  $(\sigma_{11}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{22}^\infty) = (0, 0, 75, 1)\sigma_{22}^\infty$  на различных расстояниях от кончика трещины:  $a$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,25$ ;  $b$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,35$

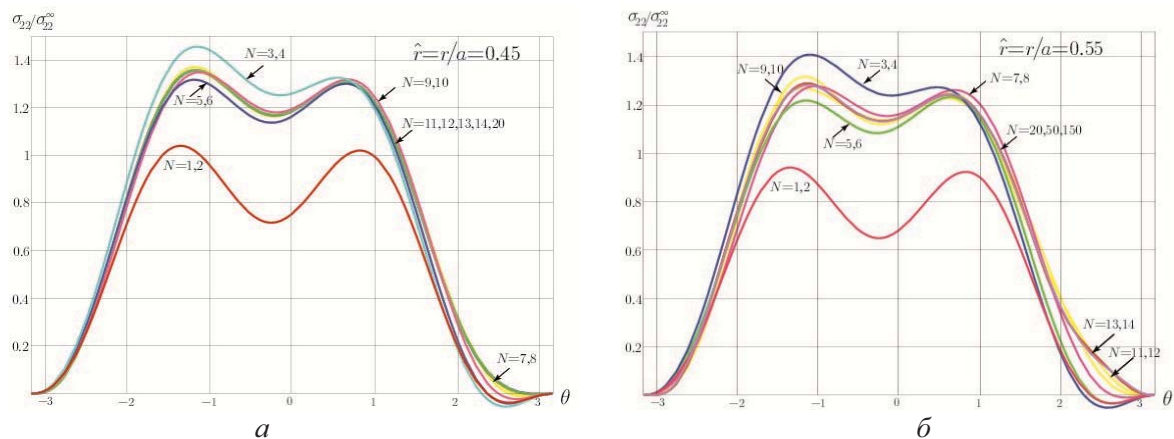


Рис. 24. Угловые распределения компоненты тензора напряжения  $\sigma_{22}$  в случае смешанного нагружения  $(\sigma_{11}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{22}^\infty) = (0, 0, 75, 1)\sigma_{22}^\infty$  на различных расстояниях от кончика трещины:  $a$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,45$ ;  $b$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,55$

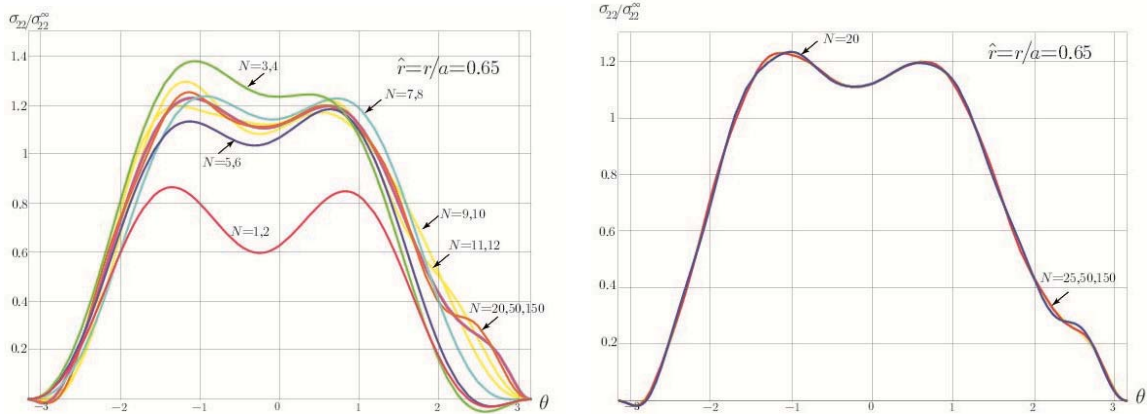


Рис. 25. Угловые распределения компоненты тензора напряжения  $\sigma_{22}$  в случае смешанного нагружения  $(\sigma_{11}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{22}^\infty) = (0, 0, 75, 1)\sigma_{22}^\infty$ , построенные с помощью различного числа удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении

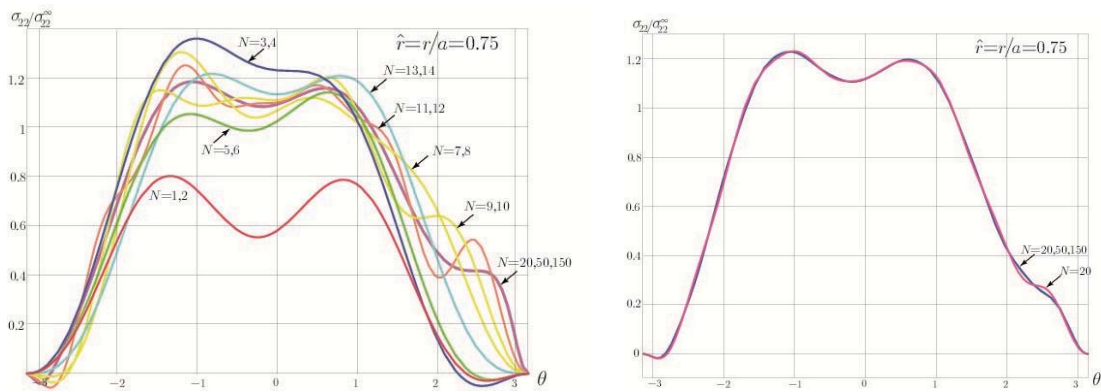


Рис. 26. Угловые распределения компоненты тензора напряжения  $\sigma_{22}$  в случае смешанного нагружения  $(\sigma_{11}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{22}^\infty) = (0, 0, 75, 1)\sigma_{22}^\infty$ , построенные с помощью различного числа удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении

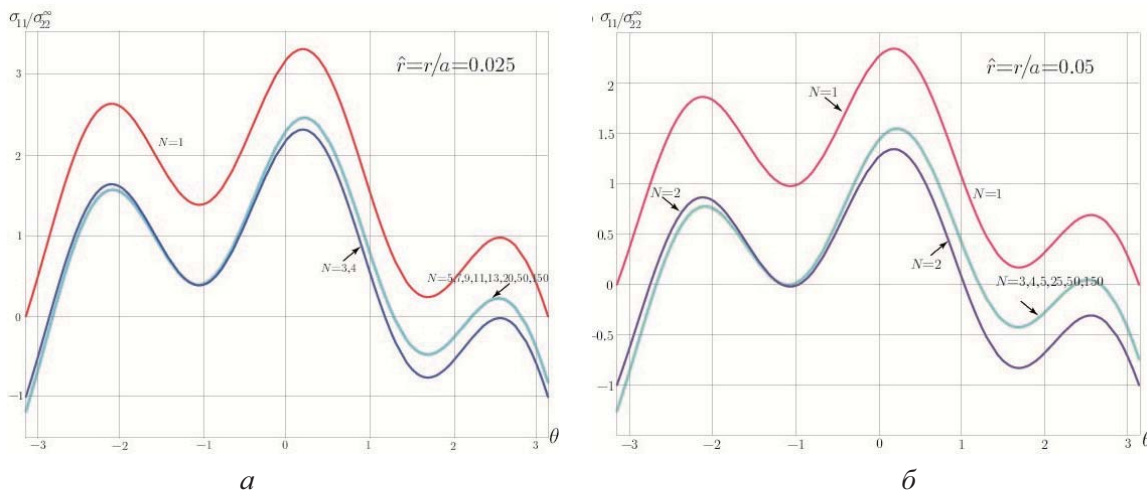


Рис. 27. Угловые распределения компоненты тензора напряжения  $\sigma_{11}$  в случае смешанного нагружения  $(\sigma_{11}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{22}^\infty) = (0, 0, 75, 1)\sigma_{22}^\infty$  на различных расстояниях от кончика трещины:  $a$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,025$ ;  $\bar{b}$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,05$

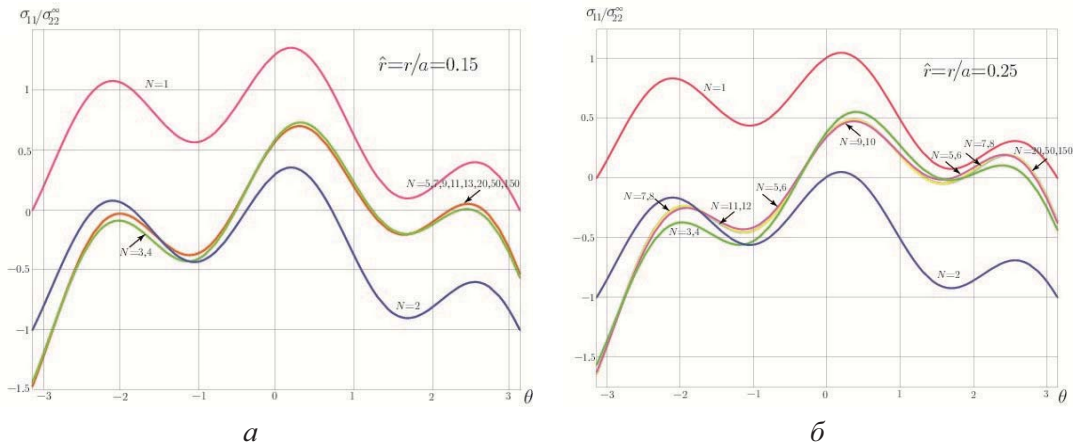


Рис. 28. Угловые распределения компоненты тензора напряжения  $\sigma_{11}$  в случае смешанного нагружения  $(\sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}) = (0, 0, 75, 1)\sigma_{22}^{\infty}$  на различных расстояниях от кончика трещины:

$a$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,15$ ;  $b$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,25$

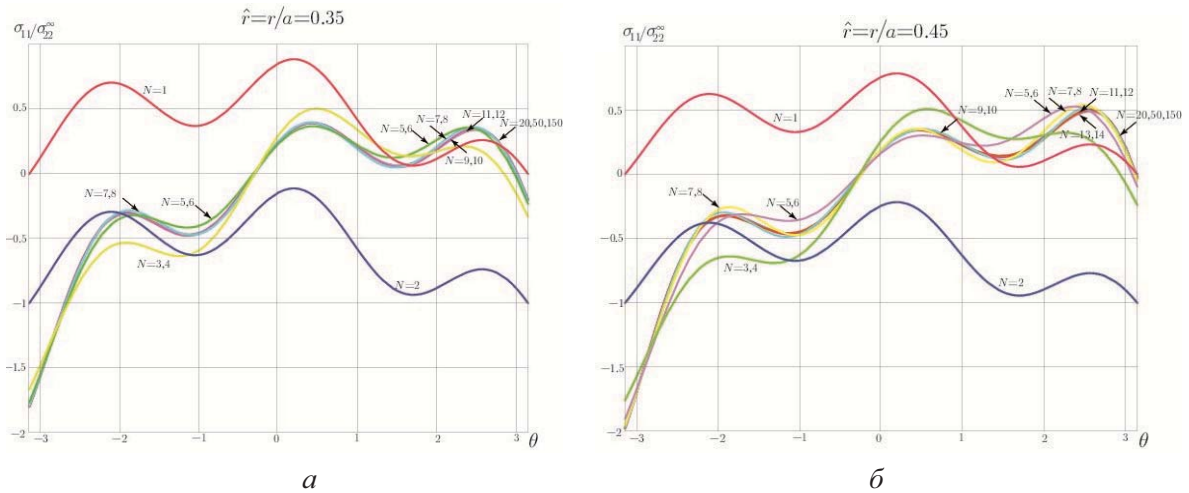


Рис. 29. Угловые распределения компоненты тензора напряжения  $\sigma_{11}$  в случае смешанного нагружения  $(\sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}) = (0, 0, 75, 1)\sigma_{22}^{\infty}$  на различных расстояниях от кончика трещины:

$a$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,35$ ;  $b$  – для  $\hat{r} = r/a = 0,45$

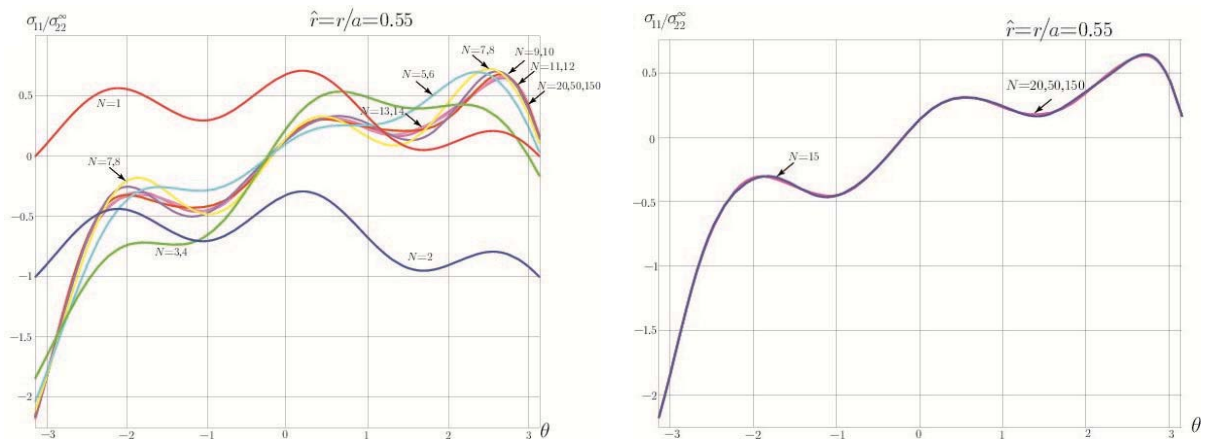


Рис. 30. Угловые распределения компоненты тензора напряжения  $\sigma_{11}$  в случае смешанного нагружения  $(\sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}) = (0, 0, 75, 1)\sigma_{22}^{\infty}$ , построенные с помощью различного числа удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении



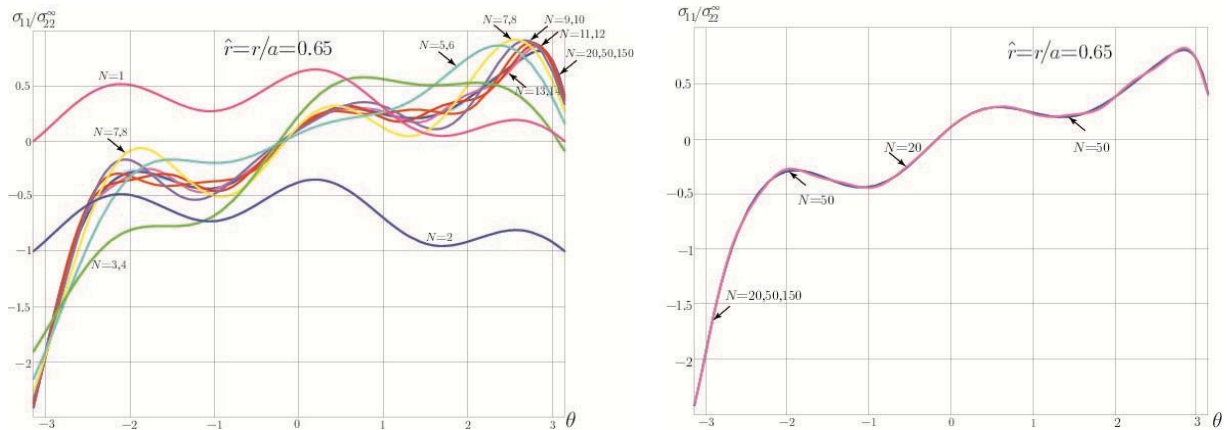


Рис. 31. Угловые распределения компоненты тензора напряжения  $\sigma_{11}$  в случае смешанного нагружения  $(\sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}) = (0, 0, 75, 1)\sigma_{22}^{\infty}$ , построенные с помощью различного числа удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении

На рис. 26–31 приведены угловые распределения компонент тензора напряжения  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{11}$  в случае смешанного нагружения  $(\sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}) = (0, 0, 75, 1)\sigma_{22}^{\infty}$  на различных расстояниях от кончика трещины. Из рисунков ясно видно, что для более точного описания поля напряжений необходимо удерживать не только  $T$ -напряжения, но и высшие приближения в полном асимптотическом разложении в окрестности вершины трещины.

## Выводы и обсуждение результатов

В работе получены аналитические выражения для амплитудных коэффициентов полного асимптотического разложения поля напряжений у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине, находящейся в условиях: 1) чистого растяжения; 2) чистого поперечного сдвига; 3) смешанного нагружения. Показано, что наряду с главным членом асимптотического разложения и  $T$ -напряжением высшие приближения в полном асимптотическом разложении являются важными параметрами механики разрушения, учет которых необходим для точной оценки полей напряжений в окрестности вершины дефекта и, следовательно, для более точной оценки несущей способности и долговечности образца. Аналитические выражения коэффициентов асимптотического разложения поля напряжений для любого наперед заданного числа удерживаемых слагаемых доступны лишь для пластины с одной трещиной конечной длины [17], поэтому важно расширить класс образцов, для которых имеются аналитические зависимости амплитудных множителей от приложенной нагрузки и геометрических параметров образца. Полученное в работе асимптотическое решение для бесконечной пластины с двумя трещинами равной длины может быть использовано: 1) для проверки численной обработки экспериментальных данных, полученных с помощью поляризационно-оптических методов механики деформируемого твердого тела для образцов с трещинами; 2) проверки численных алгоритмов, активно разрабатываемых в настоящее время для вычисления амплитудных коэффициентов многопараметрического поля напряжений [6, 9, 37, 43].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-97009).

## Библиографический список

1. Wei R.P. Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry. – Cambridge: Cambridge University Press, 2014. – 232 p.
2. Voyiadjis G.Z. Handbook of Damage Mechanics: Nano to Macro Scale for Materials and Structures. – Berlin: Springer, 2015. – 1577 p.
3. Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture // Engineering Fracture Mechanics. – 2015. – Vol. 134. – P. 218–241.
4. Weibgraeber P., Becker W. Crack initiation at weak stress singularities – Finite Fracture Mechanics approach // Procedia Materials Science. – 2014. – No. 3. – P. 153–158.
5. Shlyannikov V.N., Zakharov A.P. Multiaxial crack growth under variable T-stress // Engineering Fracture Mechanics. – 2014. – Vol. 123. – P. 86–99.
6. Berto F., Lazzarin P. Multiparametric full-field representations of the in-plane stress fields ahead of cracked components under mixed mode loading // International Journal of Fatigue. – 2013. – Vol. 46. – P. 16–26.
7. Lu K., Meshii T. A systematic investigation of T-stresses for a variety of center-cracked tension specimen // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2015. – No. 2. – P. 74–81.
8. Akbardoost J., Rastin A. Comprehensive data for calculating the higher order terms of crack tip stress field in disk type specimens under mixed-mode loading // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2015. – Vol. 76. – P. 75–90.
9. Akbardoost J., Ayatollahi M.R. Experimental analysis of mixed mode crack propagation in brittle rocks: The effect of non-singular terms // Engineering Fracture Mechanics. – 2014. – Vol. 129. – P. 77–89.
10. Berto F., Lazzarin P. On higher order terms in the crack tip stress field // International Journal of Fracture. – 2010. – Vol. 161. – P. 221–226.
11. Multi-parametric crack tip stress state description for evaluation of nonlinear zone width in silicate composite specimens in component splitting/bending test geometry / V. Vesely, P. Frantik, J. Sobek, L. Malikova, S. Seitl // Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures. – 2015. – Vol. 38. – No. 2. – P. 200–214.
12. Multi-parametric crack tip stress state description for estimation of fracture process zone extent in silicate composite WST specimens / V. Vesely, J. Sobek, L. Sestakova, P. Frantik // Frattura ed Intergrita Strutturale. – 2013. – Vol. 25. – P. 69–78.
13. Malikova L., Vesely V. Williams expansion terms and their importance for accurate stress field description in specimens with a crack // Transaction of the VSB- Technical University of Ostrava, Mechanical Series. – 2013. – Vol. LIX. – No. 2. – P. 109–114.
14. Ayatollahi M.R., Nejati M. An over-deterministic method for calculation of coefficients of crack tip asymptotic field from finite element analysis // Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures. – 2010. – Vol. 34. – P. 159–176.
15. Influence of the T-stress on the crack bifurcation phenomenon in ceramic laminates / O. Sevecek, R. Bermejo, T. Profant, M. Kotoul // Procedia Materials Science. – 2014. – Vol. 3. – P. 1062–1067.
16. Malikova L., Vesely V. Significance of higher-order terms of the Williams expansion for plastic zone extent estimation demonstrated on a mixed-mode geometry // Procedia Materials Science. – 2014. – Vol. 3. – P. 1383–1388.
17. Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. – 2012. – Vol. 49. – P. 556–566.
18. Sestakova L. Using the multi-parameter fracture mechanics for more accurate description of stress and displacement crack tip fields // Key Engineering Materials. – 2013. – Vol. 586. – P. 237–240.

19. Sestakova L. How to enhance efficiency and accuracy of the over-deterministic method used for determination of the coefficients of the higher-order terms in Williams expansion // Applied Mechanics and materials. – 2013. – Vol. 245. – P. 120–125.

20. Степанова Л.В., Федина М.Е. Автомодельное решение задачи о трещине отрыва в связанной постановке // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 3. – С. 516–527.

21. Stepanova L.V., Igonin S.A. Perturbation method for solving the nonlinear eigenvalue problem arising from fatigue crack growth problem in a damaged medium // Applied Mathematical Modelling. – 2014. – Vol. 38 (14). – P. 3436–3455.

22. Степанова Л.В., Адылина Е.М. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения // Прикладная механика и техническая физика. – 2014 – Т. 55, № 5(327). – С. 181–194.

23. Beliakova T.A., Kulagin V.A. The eigenspectrum approach and T-stress at the mixed – mode crack tip for a stress – state dependent material // Procedia Materials Science. – 2014. – Vol. 3. – P. 147–152.

24. Степанова Л.В., Яковлева Е.М. Смешанное деформирование пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 3. – С. 129–162. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.08

25. Stepanova L., Yakovleva E., Mironova E. Asymptotic self-similar solution of the creep crack problems in damaged materials under mixed mode loading // Applied Mechanics and Materials. – 2015. – Vol. 784. – P. 145–152.

26. Stepanova L.V. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power-law medium // Comptes Rendus – Mecanique. – 2008. – Vol. 336 (1–2). – P. 232–237.

27. Степанова Л.В. Анализ собственных значений в задаче о трещине в материале со степенным определяющим законом // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49, № 8. – P. 1399–1415.

28. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Zakharov A.P. The mixed mode crack growth rate in cruciform specimens subject to biaxial loading // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2014. – Vol. 73. – P. 68–81.

29. An effect of the first non-singular term of the Williams asymptotic expansion to the stability of the bi-material orthotropic notch / T. Profant, J. Klusak, O. Sevecek, M. Kotoul, M. Hrstka, P. Marcian // Key Engineering Materials. – 2014. – Vol. 592–593. – P. 745–748.

30. Матвиенко Ю.Г. Несингулярные  $T$ -напряжения в проблемах двухпараметрической механики разрушения // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2012. – Т. 78, № 2. – С. 51–58.

31. Матвиенко Ю.Г. Несингулярные  $T$ -напряжения в критериях механики разрушения тел с трещинами // Вестник Нижегородского университета. – 2011. – № 4–5. – С. 2651–2652.

32. Литвинов И.А., Матвиенко Ю.Г., Разумовский И.А. О точности определения несингулярных компонент тензора напряжений в вершине трещины с применением метода экстраполяции // Машиностроение и инженерное образование. – 2014. – № 2 (39). – С. 47–52.

33. Matvienko Y.G., Pochinkov R.A. Effect of nonsingular T-stress components on the plastic-deformation zones near the tip of a mode I crack // Russian metallurgy (Metally). – 2013. – Т. 2013, № 4. – P. 262–271.

34. Писарев В.С., Матвиенко Ю.Г., Одинцев И.Н. Определение параметров механики разрушения при малом приращении длины трещины // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2012. – Т. 78, № 4. – С. 45–51.

35. Матвиенко Ю.Г. Два подхода к учету несингулярных  $T$ -напряжений в критериях механики разрушения тел с вырезами // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2011. – № 5. – С. 104–110.

36. Матвиенко Ю.Г. Двухпараметрическая механика разрушения в современных проблемах прочности // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2013. – № 5. – С. 37–46.
37. Матвиенко Ю.Г., Чернятин А.С., Разумовский И.А. Численный анализ несингулярных составляющих трехмерного поля напряжений в вершине трещины смешанного типа // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2013. – № 4. – С. 40–48.
38. Matvienko Yu. G. The effect of the non-singular T-stress components on crack tip plastic flow zone under Mode I // *Procedia Materials Science*. – 2014. – Vol. 3. – P. 141–146.
39. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // *Journal of Applied Mechanics*. – 1957. – Vol. 24. – P. 109–114.
40. Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к теории упругости. – М.; Л.: ОНТИ, 1935. – 224 с.
41. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
42. Mirsayar M.M., Aliha M.R.M., Samaei A.T. On fracture initiation angle near bi-material notches – Effects of first non-singular terms // *Engineering fracture mechanics*. – 2014. – Vol. 119. – P. 124–131.
43. Three-dimensional stress state at crack tip induced by shear and anti-plane loading / A. Kotousov, P. Lazzarin, F. Berto, L.P. Pook // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2013. – Vol. 108. – P. 65–74.

## References

1. Wei R.P. *Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 232 p.
2. Voyiadjis G.Z. *Handbook of Damage Mechanics: Nano to Macro Scale for Materials and Structures*. Berlin: Springer, 2015. 1577 p.
- 3 Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, vol. 134, pp. 218-241.
4. Weibgraeber P., Becker W. Crack initiation at weak stress singularities – Finite Fracture Mechanics approach. *Procedia Materials Science*, 2014, no. 3, pp. 153-158.
5. Shlyannikov V.N., Zakharov A.P. Multiaxial crack growth under variable T-stress. *Engineering Fracture Mechanics*, 2014, vol. 123, pp. 86-99.
6. Berto F., Lazzarin P. Multiparametric full-field representations of the in-plane stress fields ahead of cracked components under mixed mode loading. *International Journal of Fatigue*, 2013, vol. 46, pp. 16-26.
7. Lu K., Meshii T. A systematic investigation of T-stresses for a variety of center-cracked tension specimen. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2015, no. 2, pp. 74-81.
8. Akbardoost J., Rastin A. Comprehensive date for calculating the higher order terms of crack tip stress field in disk type specimens under mixed-mode loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2015, vol. 76, pp. 75-90.
9. Akbardoost J., Ayatollahi M.R. Experimental analysis of mixed mode crack propagation in brittle rocks: The effect of non-singular terms. *Engineering Fracture Mechanics*, 2014, vol. 129, pp. 77-89.
10. Berto F., Lazzarin P. On higher order terms in the crack tip stress field. *International Journal of Fracture*, 2010, vol. 161, pp. 221-226.
11. Vesely V., Frantik P., Sobek J., Malikova L., Seitl S. Multi-parametric crack tip stress state description for evaluation of nonlinear zone width in silicate composite specimens in component splitting/bending test geometry. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2015, vol. 38, no. 2, pp. 200-214.
12. Vesely V., Sobek J., Sestakova L., Frantik P. Multi-parametric crack tip stress state description for estimation of fracture process zone extent in silicate composite WST specimens. *Frattura ed Intergrita Strutturale*, 2013, vol. 25, pp. 69-78.

13. Malikova L., Vesely V. Williams expansion terms and their importance for accurate stress field description in specimens with a crack. *Transaction of the VSB- Technical University of Ostrava, Mechanical Series*, 2013, no. 2, vol. LIX, pp. 109-114.

14. Ayatollahi M.R., Nejati M. An over-deterministic method for calculation of coefficients of crack tip asymptotic field from finite element analysis. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2010, vol. 34, pp. 159-176.

15. Sevecek O., Bermejo R., Profant T., Kotoul M. Influence of the T-stress on the crack bifurcation phenomenon in ceramic laminates. *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 3, pp. 1062-1067.

16. Malikova L., Vesely V. Significance of higher-order terms of the Williams expansion for plastic zone extent estimation demonstrated on a mixed-mode geometry. *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 3, pp. 1383-1388.

17. Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, pp. 556-566.

18. Sestakova L. Using the multi-parameter fracture mechanics for more accurate description of stress and displacement crack tip fields. *Key Engineering Materials*, 2013, vol. 586, pp. 237-240.

19. Sestakova L. How to enhance efficiency and accuracy of the over-deterministic method used for determination of the coefficients of the higher-order terms in Williams expansion. *Applied Mechanics and materials*, 2013, vol. 245, pp. 120-125.

20. Stepanova L.V., Fedina M.Ye. Self-similar solution of a tensile crack problem in a coupled formulation. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72(3), pp. 360-368.

21. Stepanova L.V., Igonin S.A. Perturbation method for solving the nonlinear eigenvalue problem arising from fatigue crack growth problem in a damaged medium. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, vol. 38 (14), pp. 3436-3455.

22. Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55(5), pp. 885-895.

23. Beliakova T.A., Kulagin V.A. The eigenspectrum approach and T-stress at the mixed – mode crack tip for a stress – state dependent material. *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 3, pp. 147-152.

24. Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 129-162. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.08

25. Stepanova L., Yakovleva E., Mironova E. Asymptotic self-similar solution of the creep crack problems in damaged materials under mixed mode loading. *Applied Mechanics and Materials*, 2015, vol. 784, pp. 145-152.

26. Stepanova L.V. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power-law medium. *Comptes Rendus – Mecanique*, 2008, vol. 336 (1-2), pp. 232-237.

27. Stepanova L.V. Eigenvalue analysis for a crack in a power-law material. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49(8), pp. 1332-1347.

28. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Zakharov A.P. The mixed mode crack growth rate in cruciform specimens subject to biaxial loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2014, vol. 73, pp. 68-81.

29. Profant T., Klusak J., Sevecek O., Kotoul M., Hrstka M., Marcian P. An effect of the first non-singular term of the Williams asymptotic expansion to the stability of the bi-material orthotropic notch. *Key Engineering Materials*, 2014, vol. 592-593, pp. 745-748.

30. Matvienko Yu.G. Nesinguliarnye T-napriazheniia v problemakh dvukhparametricheskoi mekhaniki razrusheniia [Nonsingular T-stress in problems of two-parameter fracture mechanics]. *Zavodskaiia laboratoriia. Diagnostika materialov*, 2012, vol. 78, no. 2, pp. 51-58.

31. Matvienko Yu.G. Nesinguliarnye T-napriazheniia v kriteriakh mekhaniki razrusheniia tel s treshchinami [The non-singular T-stress in fracture mechanics criteria of solids with notches]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta*, 2011, no. 4-5, pp. 2651-2652.

32. Litvinov I.A., Matvienko Yu.G., Razumovsky I.A. O tochnosti opredeleniia nesinguliarnykh komponent tenzora naprjazhenij v vershine treshchiny s primeneniem metoda jekstrapoljicii [On the accuracy of determination of nonsingular component in stress field at crack tip using extrapolation method]. *Mashinostroenie i inzhenerное obrazovanie*. 2014, no. 2 (39), pp. 47-52.

33. Matvienko Y.G., Pochinkov R.A. [Effect of nonsingular T-stress components on the plastic deformation zones near the tip of a mode I crack]. *Russian metallurgy (Metally)*, 2013, vol. 2013, no. 4, pp. 262-271.

34. Pisarev V.S., Matvienko Y.G., Odintsev I.N. Opredelenie parametrov mekhaniki razrusheniia pri malom prirashchenii dliny treshchiny [Determination of fracture Mechanics Parametera at a small increment of the crack length]. *Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov*, 2012, vol. 78, no. 4, pp. 45-51.

35. Matvienko Y.G. [Two approaches to accounting the non-singular T –stress in fracture mechanics criteria for cracked bodies]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin*, 2011, no. 5, pp. 104-110.

36. Matvienko Y.G. Dvuhparametricheskaja mekhanika razrusheniia v sovremennykh problemakh prochnosti [Two parametric fracture mechanics in actual reliability problems]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin*, 2013, no. 5, pp. 37-46.

37. Matvienko Y.G., Chernyatin A.S., Razumovsky I.A. Chislennyi analiz nesinguliarnykh sostavliaiushchikh trekhmernogo polia napriazhenii v vershine treshchiny smeshannogo tipa [Numerical analysis of non-singular stress tensor components in the vicinity of the mixed-mode crack tip]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin*, 2013, no. 4, pp. 40-48.

38. Matvienko Yu. G. The effect of the non-singular T-stress components on crack tip plastic flow zone under Mode I. *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 3, pp. 141-146.

39. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, vol. 24, pp. 109-114.

40. Kolosoff G. Primenenie kompleksnoi peremennoi k teorii uprugosti [Application of the complex variable to the elasticity theory]. Moscow, Leningrad: ONTI, 1935, 224 p.

41. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some basic problems of mathematical problems of elasticity theory]. Moscow: Nauka, 1966, 708 p.

42. Mirsayar M.M., Aliha M.R.M., Samaei A.T. On fracture initiation angle near bi-material notches – Effects of first non-singular terms. *Engineering fracture mechanics*, 2014, vol. 119, pp. 124-131.

43. Kotousov A., Lazzarin P., Berto F., Pook L.P. Three-dimensional stress state at crack tip induced by shear and anti-plane loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 2013, vol. 108, pp. 65-74.