Лычев С.А., Полянин А.Д., Левитин А.Л. Декомпозиция систем уравнений механики сплошных сред. 2. Общие результаты и некоторые приложения // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 3. – С. 95–113. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.08

Lychev S.A., Polyanin A.D., Levitin A.L. Decomposition of systems of equations for continuum mechanics. 2. General results and applications. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2015. No. 3. Pp. 95-113. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.08

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2015
PNRPU MECHANICS BULLETIN
http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/

DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.08
УДК 538.3

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД
2. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

С.А. Лычев[1, 2, 3, 4], А.Д. Полянин[1, 2, 3], А.Л. Левитин[1]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
[2]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[3]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия
[4]Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 26 января 2015 г.
Принята: 17 июля 2015 г.
Опубликована: 30 сентября 2015 г.

Ключевые слова:
линейные системы уравнений с частными производными, декомпозиция, точные решения, деформируемое твердое тело, вязкая жидкость, газ, упругость, термоупругость, пороупругость, связанные поля

АННОТАЦИЯ

Во второй части статьи предлагаются общие методы декомпозиции, обобщающие классические представления*. Получают развитие декомпозиции систем линейных и модельных нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих в механике сплошных сред, в частности в теории упругости, термоупругости, пороупругости и вязкоупругости, систематический подход к декомпозиции уравнений механики сплошных сред. Описаны несимметричный и симметричный методы декомпозиции различных классов трехмерных линейных (и модельных нелинейных) систем уравнений, которые используются в теории упругости, термоупругости и пороупругости, в механике вязких и вязкоупругих несжимаемых жидкостей и сжимаемых баротропных газов. Эти методы основаны на расщеплении систем связанных уравнений на несколько более простых независимых уравнений и использовании двух функций тока. Показано, что при отсутствии массовых сил любое решение рассматриваемых стационарных и нестационарных трехмерных систем выражается через решения двух независимых уравнений. Предложены методы прямой декомпозиции, не требующие разложения правой части системы уравнений на составляющие. Предложены обобщения рассмотренных методов декомпозиции на системы высоких порядков, а также на специальные классы модельных нелинейных уравнений. Даны примеры декомпозиции конкретных систем. Формулы и отдельные независимые уравнения, приведенные в работе, существенно упрощают качественное исследование и интерпретацию наиболее важных физических свойств широкого класса систем связанных уравнений механики сплошной среды и позволяют изучать их волновые и диссипативные свойства. Приведенные результаты можно использовать для точного интегрирования линейных систем механики, а также для тестирования численных методов, применяемых для решения нелинейных уравнений механики сплошных сред.

© **Лычев Сергей Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, e-mail: lychevsa@mail.ru
Полянин Андрей Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: polyanin@ipmnet.ru
Левитин Александр Леонидович – младший научный сотрудник, e-mail: alex_lev@ipmnet.ru

Sergey A. Lychev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: lychevsa@mail.ru
Andrey D. Polyanin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Principle Researcher, e-mail: polyanin@ipmnet.ru
Alexander L. Levitin – Junior Researcher, e-mail: alex_lev@ipmnet.ru

* Первая часть статьи «Декомпозиция систем уравнений механики сплошных сред» опубликована в журнале «Вестник ПНИПУ. Механика», 2015, № 2.

DECOMPOSITION OF SYSTEMS OF EQUATIONS FOR CONTINUUM MECHANICS 2. GENERAL RESULTS AND APPLICATIONS

S.A. Lychev[1, 2, 3, 4], A.D. Polyanin[1, 2, 3], A.L. Levitin[1]

[1]Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
[3]National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russian Federation
[4]Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 January 2015
Accepted: 17 July 2015
Published: 30 September 2015

Keywords:
linear systems of partial differential equations, decomposition, exact solutions, deformable solid, viscous liquid, gas, elasticity, thermoelasticity, poroelasticity, coupled fields

ABSTRACT

In the second part of work presents the general decomposition methods for systems of linear partial differential equations that arise in continuum mechanics, in particular, in the theory of elasticity and thermoelasticity and poroelasticity. A systematic approach to the decomposition of the equations of continuum mechanics is proposed. Asymmetrical and symmetrical decomposition methods for various classes of three-dimensional linear (and model nonlinear) systems of equations arising in the theory of elasticity, thermoelasticity, and thermoviscoelasticity, the mechanics of viscous and viscoelastic incompressible and compressible barotropic gas are described. These methods are based on the decomposition of systems of coupled equations into several simpler independent equations and the use of two stream functions. It is shown that in the absence of body forces any solution of considered steady and unsteady three-dimensional systems is expressed in terms of solutions of two independent equations. The methods of direct decomposition that do not require expansion of the right hand side of the equations into the components are proposed. A generalization of the considered methods to the decomposition of higher orders systems of equations, as well as to special classes of model nonlinear equations are obtained. The examples of the decomposition of specific systems are given. Formulas and split equations given in the work significantly simplify the qualitative study and the interpretation of the most important physical properties of a wide class of coupled systems of equations for continuum mechanics and allow studying their wave and dissipative properties. These results can be used for the exact integration of linear systems of mechanics, as well as for testing of numerical methods for nonlinear equations of continuum mechanics.

1. Общая форма рассматриваемых систем

Имея в виду приведенные в 1-й части статьи [1] системы уравнений механики сплошных сред, будем рассматривать трехмерные системы уравнений

$$\mathrm{L}\Big[u_1\Big]+\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{K}\Big[u_1,u_2,u_3,p\Big]=f_1\big(x,y,z,t\big), \tag{1.1}$$

$$\mathrm{L}\Big[u_2\Big]+\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{K}\Big[u_1,u_2,u_3,p\Big]=f_2\big(x,y,z,t\big), \tag{1.2}$$

$$\mathrm{L}\Big[u_3\Big]+\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{K}\Big[u_1,u_2,u_3,p\Big]=f_3\big(x,y,z,t\big), \tag{1.3}$$

$$\mathrm{M}\big[u_1,u_2,u_3,p\big]=f_4\big(x,y,z,t\big), \tag{1.4}$$

где u_1, u_2, u_3, p – искомые функции; x, y, z – декартовы пространственные переменные; t – время; L – линейный дифференциальный оператор по переменным x, y, z, t с постоянными коэффициентами; K и M – линейные или нелинейные дифференциальные операторы по переменным x, y, z, t; $f_n = f_n(x,y,z,t)$ – заданные функции. При этом будем полагать, что

1) в уравнениях (1.1)–(1.4) дифференциальные операторы K и M могут дополнительно явно зависеть также от x, y, z, t, а коэффициенты линейного оператора L могут зависеть от t;

2) в вырожденном случае K и M могут быть функциями независимых и зависимых переменных (т.е. могут не зависеть от производных искомых величин);

3) оператор L может быть не только дифференциальным, но и интегродифференциальным (где интегрирование ведется по времени t) или дифференциально-разностным по времени и дифференциальным по пространственным переменным [2–5];

4) все уравнения механики сплошных сред, приведенные в табл. 1 (см. также ч. 1 статьи [1]), являются частными случаями системы (1.1)–(1.4), в которых операторы K и M имеют специальный вид:

$$\mathrm{K}[u_1,u_2,u_3,p]=\alpha p-\sigma\nabla\cdot\mathbf{u}-\mathrm{K}_1[\nabla\cdot\mathbf{u}], \tag{1.5}$$

$$\mathrm{M}[u_1,u_2,u_3,p]=\mathrm{M}_1[p]-a\Delta p+\beta(\nabla\cdot\mathbf{u})_t^{(n)}, \tag{1.6}$$

где a, α, β, и σ – константы; K_1 и M_2 – линейные дифференциальные или интегральные операторы по времени t, обозначение $w_t^{(n)}$ обозначает n-ю производную t ($w_t^{(n)}=w$). Операторы релаксации I_λ, I_μ в общем случае могут быть представлены интегральными (по t) операторами типа свертки [6]. В частных случаях эти операторы приводятся к дифференциальной форме.

Таблица 1

Различные линейные системы вида (1.1)–(1.4), встречающиеся в механике

№	Названия уравнений	Оператор $\mathrm{L}[u]$	Функция K	Уравнение (1.4)
1	Стокса (вязкая несжимаемая жидкость)	$u_t-\nu\Delta\mathbf{u}$	p/ρ	$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$
2	Озеена (вязкая несжимаемая жидкость)	$\mathbf{u}_t+b\mathbf{u}_x-\nu\Delta\mathbf{u}$	p/ρ	$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$
3	Максвелла (вязкоупругая несжимаемая жидкость)	$\tau\mathbf{u}_{tt}+\mathbf{u}_t-\nu\Delta\mathbf{u}$	p/ρ	$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$
4	Вязкоупругая несжимаемая жидкость (общая модель)	Любой	p/ρ	$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$
5	Стокса (вязкий сжимаемый газ)	$\rho_0\mathbf{u}_t-\mu\Delta\mathbf{u}$	$p-(\lambda+\mu)\nabla\cdot\mathbf{u}$	$\gamma p_t+\rho_0\nabla\cdot\mathbf{u}=0$
6	Навье (линейная упругость)	$\rho\mathbf{u}_{tt}-\mu\Delta\mathbf{u}$	$-(\lambda+\mu)\nabla\cdot\mathbf{u}$	Отсутствует
7	Термоупругости	$\rho\mathbf{u}_{tt}-\mu\Delta\mathbf{u}$	$\alpha p-(\lambda+\mu)\nabla\cdot\mathbf{u}$	$p_t=a\Delta p-\beta(\nabla\cdot\mathbf{u})_t$
8	Термоупругости (с гиперболической теплопроводностью)	$\rho\mathbf{u}_{tt}-\mu\Delta\mathbf{u}$	$\alpha p-(\lambda+\mu)\nabla\cdot\mathbf{u}$	$\tau p_{tt}+p_t=$ $=a\Delta p-\beta(\nabla\cdot\mathbf{u})_t$
9	Термоупругости (Грина–Нахди)	$\rho\mathbf{u}_{tt}-\mu\Delta\mathbf{u}$	$\alpha p-(\lambda+\mu)\nabla\cdot\mathbf{u}$	$p_{tt}=\tilde{a}\Delta p-\beta(\nabla\cdot\mathbf{u})_{tt}$
10	Линейная вязкоупругость	$\rho\mathbf{u}_{tt}-\mu^0\Delta\mathbf{u}-\mu^1\Delta\mathbf{u}_t$	$-(\lambda+\mu)\nabla\cdot\mathbf{u}-(\lambda+\mu)\nabla\cdot\mathbf{u}_t$	Отсутствует
11	Линейная вязкоупругость (общая модель)	$\rho\mathbf{u}_{tt}-\mathrm{I}_\mu[\Delta\mathbf{u}]$	$-\mathrm{I}_\mu[\nabla\cdot\mathbf{u}]-\mathrm{I}_\lambda[\nabla\cdot\mathbf{u}]$	Отсутствует
12	Линейная термовязкоупругость (общая модель)	$\rho\mathbf{u}_{tt}-\mathrm{I}_\mu[\Delta\mathbf{u}]$	$-\mathrm{I}_\mu[\nabla\cdot\mathbf{u}]-\mathrm{I}_\lambda[\nabla\cdot\mathbf{u}]$	$p_t=a\Delta p-\beta(\nabla\cdot\mathbf{u})_t$

Обозначение: $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Такие системы описывают медленные движения вязких и вязкоупругих несжимаемых жидкостей и сжимаемых баротропных жидкостей и газов (см. строки 1–5 табл. 1 и [4, 5, 7–9]), где u_1, u_2, u_3 – компоненты скорости жидкости; ρ – плотность; p – давление; ν – кинематическая вязкость; μ и λ – динамические вязкости; b – невозмущенная скорость в набегающем потоке; τ – время релаксации; Δ – оператор Лапласа, f_1, f_2, f_3 – компоненты массовых сил, которые соответствуют правым частям уравнений (1.1)–(1.3). В строках 7–9, 12 (см. табл. 1) переменная $p = T$ обозначает температуру.

Операторы L для различных моделей вязкоупругих несжимаемых жидкостей (см. строку 4 табл. 1) приведены в [4, 5]. В общем, линиаризированное реологическое уравнение состояния, управляющее медленным движением любой изотропной вязкоупругой несжимемой жидкости, может быть записано как

$$\mathrm{R}\left[\sigma_{ij}\right] = -p\delta_{ij} + \mathrm{Q}\left[e_{ij}\right],$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций; R и Q – линейные операторы в t; δ_{ij} – дельта Кронекера. Оператор L, выраженный в терминах R и Q согласно [4, 5], записывается в следующем виде:

$$\mathrm{L}[u] = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{R}[u] - \frac{1}{2}\Delta\mathrm{Q}[u].$$

Число $\gamma > 0$ в уравнениях Стокса для сжимаемых баротропных жидкостей (строка 5 табл. 1) называется фактором сжимаемости [10] и связано со скоростью звука c соотношением (ρ_0 – невозмущенная плотность):

$$\frac{1}{\gamma} = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0} = c^2.$$

Предлагаемые в настоящей работе представления достаточно широкого класса уравнений математической физики по форме подобны представлениям, приведенным в части 1 статьи [1], однако не предполагают полного разделения уравнений. В связи с этим появляется больше свободы при выборе компонент представления [11, 12].

2. Асимметричная декомпозиция

Любое решение системы (1.1)–(1.4) можно представить в следующем виде:

$$u_1 = \varphi_x, \quad u_2 = \varphi_y + \eta, \quad u_3 = \varphi_z + \zeta, \quad p = p, \tag{2.1}$$

где функции $\eta = \eta(x, y, z, t)$, $\zeta = \zeta(x, y, z, t)$ удовлетворяют двум однотипным независимым линейным уравнениям

$$\mathrm{L}[\eta] = f_2 - F_y, \qquad \mathrm{L}[\zeta] = f_3 - F_z, \tag{2.2}$$

$$F = F(x, y, z, t) = \int_0^x f_1(x_1, y, z, t)\, dx_1, \tag{2.3}$$

а функции $\varphi=\varphi(x,y,z,t)$, $p=p(x,y,z,t)$ определяются из системы уравнений

$$\mathrm{L}[\varphi]+\mathrm{K}\left[\varphi_x,\varphi_y+\eta,\varphi_z+\zeta,p\right]=F, \tag{2.4}$$

$$\mathrm{M}\left[\varphi_x,\varphi_y+\eta,\varphi_z+\zeta,p\right]=f_4. \tag{2.5}$$

В формулах и уравнениях (2.1)–(2.5) нижние индексы x, y, z обозначают соответствующие частные производные, а у функций f_n и F для краткости опущены аргументы.

Доказательство представления решений системы (1.1)–(1.4) в виде (2.1)–(2.5) производится следующим образом. Подставив выражения (2.1) в уравнение (1.1), после элементарных преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mathrm{L}[\varphi]+\mathrm{K}\left[\varphi_x,\varphi_y+\eta,\varphi_z+\zeta,p\right]-F(x,y,z,t)\Big)=0,$$

где F – та же самая функция, что и в (2.3). Интегрируя далее по x, имеем

$$\mathrm{L}[\varphi]+\mathrm{K}\left[\varphi_x,\varphi_y+\eta,\varphi_z+\zeta,p\right]=F(x,y,z,t)-Q(y,z,t), \tag{2.6}$$

где $Q(y,z,t)$ – произвольная функция трех аргументов. Подставив (2.1) в оставшиеся уравнения (1.2)–(1.4) и учитывая (2.6), получим уравнения (2.2), в правые части которых войдут соответственно дополнительные слагаемые Q_y и Q_z. Таким образом, с помощью переопределения функций φ, η, ζ функцию Q можно положить равной нулю. Для этого надо перейти к новым переменным $\varphi=\overline{\varphi}+\varphi_0$, $\eta=\overline{\eta}+\eta_0$, $\zeta=\overline{\zeta}+\zeta_0$, где функция $\varphi_0=\varphi_0(y,z,t)$ описывается уравнением $\mathrm{L}[\varphi_0]=-Q$, а функции $\eta_0=\eta_0(y,z,t)$, $\zeta_0=\zeta_0(y,z,t)$ определяются по формулам $\eta_0=-(\varphi_0)_\mathrm{y}$, $\zeta_0=-(\varphi_0)_\mathrm{z}$. В результате такого преобразования для $\overline{\varphi},\overline{\eta},\overline{\zeta}$ получим формулы и уравнения (2.1)–(2.5).

Система (2.2)–(2.5) состоит из двух независимых уравнений (2.2) для определения функций η и ζ и системы из двух уравнений (2.4)–(2.5) для φ и p и существенно проще исходной системы из четырех связанных (нелинейных) уравнений (1.1)–(1.4).

3. Симметричная декомпозиция

Решение системы (1.1)–(1.4) можно представить также в симметричном виде:

$$u_1=\varphi_x+\xi,\quad u_2=\varphi_y+\eta,\quad u_3=\varphi_z+\zeta,\quad p=p, \tag{3.1}$$

где функции $\xi=\xi(x,y,z,t)$, $\eta=\eta(x,y,z,t)$, $\zeta=\zeta(x,y,z,t)$ удовлетворяют трем однотипным независимым линейным уравнениям

$$\mathrm{L}[\xi]=f_1-G_x,\quad \mathrm{L}[\eta]=f_2-G_y,\quad \mathrm{L}[\zeta]=f_3-G_z, \tag{3.2}$$

а функции $\varphi=\varphi(x,y,z,t)$, $p=p(x,y,z,t)$ описываются системой уравнений

$$\mathrm{L}[\varphi]+\mathrm{K}\left[\varphi_x+\xi,\varphi_y+\eta,\varphi_z+\zeta,p\right]=G, \tag{3.3}$$

$$\mathrm{M}\left[\varphi_x+\xi,\varphi_y+\eta,\varphi_z+\zeta,p\right]=f_4. \tag{3.4}$$

В уравнения (3.2)–(3.3) входит произвольная функция $G=G(x,y,z,t)$.

Представление для компонент вектора (3.1) содержит одну избыточную (дополнительную) функцию по сравнению с представлением (2.1). Это позволяет несколько упрощать уравнения (3.2)–(3.4), накладывая дополнительное условие на функции ξ, η, ζ и выбирая подходящую функцию *G*. В частности, в (3.3)–(3.4) без ограничения общности можно положить $f_1=G_x$ и $\xi=0$, что приведет к представлению (2.1)–(2.5) при $G=F$.

В большинстве случаев уравнение (1.4) и функции K из табл. 1 содержат величину $\nabla\cdot\mathbf{u}$, которая в случае симметричной декомпозиции (3.1) принимает вид

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\Delta\varphi+\xi_x+\eta_y+\zeta_z. \tag{3.5}$$

Далее будем упрощать (3.5), накладывая дополнительное условие (дифференциальную связь) на функции ξ, η, ζ:

$$\xi_x+\eta_y+\zeta_z=0. \tag{3.6}$$

4. Система без массовых сил (однородные уравнения). Представление решения в терминах двух функций тока

При отсутствии массовых сил $f_1=f_2=f_3=0$ в уравнениях (3.2)–(3.3) удобно положить $G=G(t)$. В этом случае правые части (3.2) равны нулю, что дает три одинаковых однородных уравнения для функций ξ, η и ζ.

1. Покажем теперь, что из любых двух однородных уравнений (3.2) при условии (3.6) следует третье однородное уравнение (3.2). Действительно, рассмотрим первые два уравнения:

$$\mathrm{L}[\xi]=0,\quad \mathrm{L}[\eta]=0. \tag{4.1}$$

Подействуем оператором L на уравнение (3.6) и учтем (4.1). В результате получим $\mathrm{L}[\zeta_z]=0$. После интегрирования по z имеем

$$\mathrm{L}[\zeta]=\Phi(x,y,t), \tag{4.2}$$

где $\Phi(x,y,t)$ – произвольная функция. Теперь сделаем замену:

$$\zeta=\overline{\zeta}+\zeta_0, \tag{4.3}$$

где $\zeta_0=\zeta_0(x,y,t)$ – решение уравнения

$$\mathrm{L}[\zeta_0]=\Phi(x,y,t). \tag{4.4}$$

Замена (4.3) не меняет уравнения (3.6) и (4.1), а из (4.2)–(4.4) следует уравнение

$$\mathrm{L}\left[\overline{\zeta}\right]=0,$$

которое с точностью до обозначения совпадает с третьим уравнением (3.2) при $f_3 = G = 0.$ Из сказанного следует, что при анализе общих свойств и решений однородной системы (3.2), (3.6), состоящей из четырех уравнений, достаточно рассмотреть два уравнения (4.1) и уравнение (3.6).

2. Пусть $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ – два произвольных решения уравнения

$$\mathrm{L}[\psi] = 0. \tag{4.5}$$

Положим

$$\xi = \psi_y^{(1)}, \quad \eta = -\psi_x^{(1)} + \psi_z^{(2)}, \quad \zeta = -\psi_y^{(2)}. \tag{4.6}$$

Функции (4.6) удовлетворяют как однородным уравнениям (3.2) при $f_1 = f_2 = f_3 = G = 0,$ так и уравнению (3.6).

Формулы (4.6), где $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ – произвольные функции, дают общее решение уравнения (3.6). Функции $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ можно трактовать как две функции тока, позволяющие исключить из рассмотрения уравнение неразрывности из трехмерных уравнений несжимаемой жидкости (компоненты скорости которой обозначены ξ, η, ζ). В частном случае $\psi^{(2)} = 0$ в (4.6) получим обычное представление компонент скорости жидкости для двумерных плоских течений при $\zeta = 0$ с одной функцией тока.

Формулы (4.6), где $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ – два произвольных решения уравнения (4.5), дают общее представление решений однородных уравнений (3.2) и уравнения (3.6). Подставив (4.6) в (3.3)–(3.4), получим уравнения для функций p и φ.

В табл. 2 приведены итоговые уравнения (3.3) и (3.4) для определения p и φ для указанных в табл. 1 систем вида (1.1)–(1.4) при отсутствии массовых сил $(f_1 = f_2 = f_3 = 0)$. Нумерация систем в табл. 1 и 2 совпадает. Функции ξ, η, ζ определяются по формулам (4.6), где $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ – два произвольных решения уравнения (4.5). Решения многих уравнений в табл. 2 можно найти, например, в книгах [13, 14].

Таблица 2

Уравнения для определения функций p и φ для систем вида (1.1)–(1.4), встречающихся в механике

№	Названия уравнений	Уравнение (3.3)	Уравнение (3.4)	Уравнение (4.5)
1	Стокса (вязкая несжимаемая жидкость)	$p = -\rho(\varphi_t - \nu\Delta\varphi)$	$\Delta\varphi = 0$	$\psi_t = \nu\Delta\psi$
2	Озеена (вязкая несжимаемая жидкость)	$p = -\rho(\varphi_t + b\varphi_x - \nu\Delta\varphi)$	$\Delta\varphi = 0$	$\psi_t + b\psi_x = \nu\Delta\psi$
3	Максвелла (вязкоупругая несжимаемая жидкость	$p = -\rho(\tau\varphi_{tt} + \varphi_t - \nu\Delta\varphi)$	$\Delta\varphi = 0$	$\tau\psi_{tt} + \psi_t = \nu\Delta\psi$
4	Вязкоупругая несжимаемая жидкость (общая модель)	$p = -\rho\mathrm{L}[\varphi]$	$\Delta\varphi = 0$	$L[\psi] = 0$

5	Стокса (вязкий сжимаемый газ)	$p=-\rho_0\varphi_t+(\lambda+2\mu)\Delta\varphi$	$\gamma p_t+\rho_0\Delta\varphi=0$	$\rho_0\psi_t=\mu\Delta\psi$
6	Навье (линейная упругость)	$\rho\varphi_{tt}=(\lambda+2\mu)\Delta\varphi$	Отсутствует	$\rho\psi_{tt}=\mu\Delta\psi$

Окончание табл. 2

№	Названия уравнений	Уравнение (3.3)	Уравнение (3.4)	Уравнение (4.5)
7	Термоупругость	$\alpha p=-\rho\varphi_{tt}+(\lambda+2\mu)\Delta\varphi$	$p_t=a\Delta p-\beta\Delta\varphi_t$	$\rho\psi_{tt}=\mu\Delta\psi$
8	Термоупругость (с гиперболической теплопроводностью)	$\alpha p=-\rho\varphi_{tt}+(\lambda+2\mu)\Delta\varphi$	$\tau p_{tt}+p_t=a\Delta p-\beta\Delta\varphi_t$	$\rho\psi_{tt}=\mu\Delta\psi$
9	Термоупругость Грина–Нахди	$\alpha p=-\rho\varphi_{tt}+(\lambda+2\mu)\Delta\varphi$	$p_{tt}=\tilde{a}\Delta p-\beta\Delta\varphi_{tt}$	$\rho\psi_{tt}=\mu\Delta\psi$
10	Вязкоупругость	$\rho\varphi_{tt}=(\lambda^0+2\mu^0)\Delta\varphi+$ $+(\lambda^1+2\mu^1)\Delta\varphi_t$	Отсутствует	$\rho\psi_{tt}=\mu^0\Delta\psi+\mu^1\Delta\psi_t$
11	Вязкоупругость (общий случай)	$\rho\varphi_{tt}=\mathrm{I}_\lambda[\Delta\varphi]+2\mathrm{I}_\mu[\Delta\varphi]$	Отсутствует	$\rho\psi_{tt}=\mathrm{I}_\mu[\Delta\psi]$
12	Термовязкоупругость	$\rho\varphi_{tt}=\mathrm{I}_\lambda[\Delta\varphi]+2\mathrm{I}_\mu[\Delta\varphi]$	$p_t=a\Delta p-\beta\Delta\varphi_t$	$\rho\psi_{tt}=\mathrm{I}_\mu[\Delta\psi]$

Примечание: вид операторов L, K и уравнение (1.4) указаны в табл. 1

1. Для вязкой и вязкоупругой несжимаемой жидкости (см. строки 1–4 табл. 2) давление p определяется без квадратур, в правой части соответствующих формул можно добавить произвольную функцию времени $p_0(t)$. Приведенные результаты были получены в [4, 5].

2. Исключая давление из уравнений, приведенных в 5-й строке табл. 2 для вязкой сжимаемой баротропной жидкости, получим уравнение третьего порядка для псевдопотенциала φ:

$$\gamma\rho_0\varphi_{tt}=\rho_0\Delta\varphi+\gamma(2\mu+\lambda)\Delta\varphi_t.$$

Зная функцию φ, давление определяем без квадратур с помощью первой формулы в 5-й строке табл. 2.

3. Исключая температуру $p=T$ из уравнений, приведенных в 7-й строке табл. 2 для термоупругости, получим уравнение четвертого порядка для псевдопотенциала φ:

$$\rho_0\varphi_{ttt}-(\lambda+2\mu+\alpha\beta)\Delta\varphi_t-a\rho\Delta\varphi_{tt}+a(\lambda+2\mu)\Delta\Delta\varphi=0,$$

содержащее третью производную по времени. Зная функцию φ, температуру определяем без квадратур с помощью первой формулы в 7-й строке табл. 2.

4. Исключая температуру $p=T$ из уравнений, приведенных в 8-й строке табл. 2 для термоупругости, можно вывести уравнение четвертого порядка для псевдопотенциала φ, содержащее четвертую производную по времени.

Для всех систем, приведенных в табл. 2, удается получить отдельное уравнение для φ и формулу для p, которая без квадратур выражается через φ. Функции ξ, η, ζ определяются независимо по формулам (4.6), где $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ – два произвольных решения уравнения (4.5).

Все системы, собранные в табл. 2, являются частными случаями уравнений (1.1)–(1.4), в которых операторы K и M имеют специальный вид (1.5), (1.6). В этом случае уравнения (3.3), (3.4) (при $G = f_4 = 0$) для определения функций φ и p имеют вид

$$\mathrm{L}\left[\varphi\right] + \alpha p - \sigma\Delta\varphi - \mathrm{K}_1\left[\Delta\varphi\right] = 0,$$
$$\mathrm{M}_1\left[\varphi\right] - a\Delta p + \beta(\Delta\varphi)_t^{(n)} = 0.$$

Частные случаи этих уравнений для рассматриваемых в статье моделей сплошных сред приведены в 3 и 4-й строках табл. 2.

5. Системы с массовыми силами

Если массовые силы потенциальны, т.е. их компоненты могут быть представлены в виде

$$f_1 = F_x, \quad f_2 = F_y, \quad f_3 = F_z,$$

то в (3.2), (3.3) следует положить $G = F.$ Тогда правые части уравнений (3.2) будут равны нулю, как и при отсутствии массовых сил. Наличие в правой части уравнения (3.3) функции F не принципиально, что позволяет использовать метод, описанный в п. 3 (при этом в табл. 2 столбец с уравнениями (3.4) не меняется, а в правые части уравнений (3.3) добавляется функция F).

В общем случае в уравнениях (3.2), (3.3) удобно положить

$$G = G\left(x, y, z, t\right) = \int_0^x f_1\left(x_1, y, z, t\right)\, dx_1.$$

Тогда первое уравнение (3.2) будет однородным. Пусть η^0 и ζ^0 – частные решения второго и третьего уравнений (3.2). Тогда функции

$$\xi = \psi_y^{(1)}, \quad \eta = \eta^0 - \psi_x^{(1)} + \psi_z^{(2)}, \quad \zeta = \zeta^0 - \psi_y^{(2)},$$

где $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ – произвольные решения однородного уравнения (4.5), будут давать решение уравнений (3.2). В этом случае в уравнениях (3.3), (3.4) дивергенция $\mathbf{u}$ определяется по формуле

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \Delta\varphi + \eta_y^0 + \zeta_z^0,$$

а остальные выкладки при получении уравнений для p и φ проводятся аналогично тому как это делалось в разд. 4.

6. Представление массовой силы через потенциал и две функции тока

Другой путь заключается в представлении массовой силы $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ в виде суммы потенциального и соленоидального векторов $\mathbf{g} = \nabla G$ и $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{f} = \nabla G + \mathbf{h} \quad (\text{при } \nabla \cdot \mathbf{h} = 0). \tag{6.1}$$

Потенциал G в (6.1) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta G = \nabla \cdot \mathbf{f}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{f} = (f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z, \tag{6.2}$$

которое выводится путем применения оператора $(\nabla \cdot)$ к (6.1).

Пусть G – некоторое частное решение уравнения (6.2). Компоненты вектора $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) = \mathbf{f} - \nabla G$ удобно выразить через две функции тока $\theta^{(1)}$ и $\theta^{(2)}$ по формулам

$$h_1 = \theta_y^{(1)}, \quad h_2 = -\theta_x^{(1)} + \theta_z^{(2)}, \quad h_3 = -\theta_y^{(2)}, \tag{6.3}$$

которые аналогичны формулам (4.6). Поскольку левые части соотношений (6.3) известны, то функции тока определяются с помощью интегралов

$$\theta^{(1)} = \int_{y_0}^{y} h_1(x, \bar{y}, z)\, d\bar{y},\ \theta^{(2)} = -\int_{y_0}^{y} h_3(x, \bar{y}, z)\, d\bar{y} + \int_{z_0}^{z} h_2(x, y_0, \bar{z})\, d\bar{z}.$$

Эти формулы дают частное решение уравнений (6.3) для $\theta^{(1)}$ и $\theta^{(2)}$, где y_0 и z_0 произвольные константы.

Учитывая сказанное, в уравнениях (3.2), (3.3) в качестве функции G берем потенциал, являющийся решением уравнения (6.2). При этом уравнения (3.2) с учетом (6.3) принимают вид

$$\mathrm{L}[\xi] = \theta_y^{(1)}, \quad \mathrm{L}[\eta] = -\theta_x^{(1)} + \theta_z^{(2)}, \quad \mathrm{L}[\zeta] = -\theta_y^{(2)}.$$

Любое решение этих уравнений, удовлетворяющее условию (3.6), допускает представление (4.6), где функции тока $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ являются решениями неоднородных уравнений

$$\mathrm{L}\left[\psi^{(1)}\right] = \theta^{(1)}, \qquad \mathrm{L}\left[\psi^{(2)}\right] = \theta^{(2)}. \tag{6.4}$$

В данном случае столбец с уравнениями (3.4) в табл. 2 для определения функций p и φ не меняется, а в правые части уравнений (3.3) добавляется функция G.

7. Использование представления Гельмгольца для массовой силы

В формуле для массовой силы (6.1) можно положить $\mathbf{h} = \nabla \times \boldsymbol{\omega}$, что приводит к представлению Гельмгольца

$$\mathbf{f} = \nabla G + \nabla \times \boldsymbol{\omega}, \tag{7.1}$$

которое часто используется в теории упругости [15–17] (см. также разд. 2, 4 ч. 1 [1]). Функцию G и вектор $\boldsymbol{\omega}$ можно искать в виде

$$G = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\omega} = -\nabla \times \mathbf{u}. \tag{7.2}$$

Подставив (7.2) в (7.1), получим вектор-уравнение Пуассона для вектора-потенциала Ламе $\mathbf{u}$ [15]:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{7.3}$$

Решения уравнения (7.3) позволяют по формулам (7.2) найти величины G и $\boldsymbol{\omega}$, определяющие разложение (7.1).

В данном случае в уравнениях (3.2), (3.3) в качестве функции G берем потенциал (7.2). При этом уравнения (3.2) с учетом (7.1) принимают вид

$$\mathrm{L}[\xi]=\omega_1, \quad \mathrm{L}[\eta]=\omega_2, \quad \mathrm{L}[\zeta]=\omega_3, \tag{7.4}$$

где ω_1, ω_2, ω_3 – компоненты вектора вихря $\boldsymbol{\omega}$.

Декомпозиция Гельмгольца (7.1) в итоге приводит к трем уравнениям для компонент вектора вихря (7.4) вместо двух уравнений для функций тока (6.4).

Представление массовой силы в виде (6.1), (6.3) есть специальный случай декомпозиции Гельмгольца (7.1) с одной нулевой компонентой вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, 0, \omega_3), \quad \omega_1=\psi^{(2)}, \quad \omega_3=\psi^{(1)}.$$

Более того, представления (6.1), (6.3) можно называть «сокращенной декомпозицией Гельмгольца».

8. Некоторые обобщения

Полученные результаты допускают различные обобщения.

1. Рассмотрим систему

$$\mathrm{L}[u_1]+\mathrm{D}_x\mathrm{K}[u_1,u_2,u_3,p]=f_1(x,y,z,t), \tag{8.1}$$

$$\mathrm{L}[u_2]+\mathrm{D}_y\mathrm{K}[u_1,u_2,u_3,p]=f_2(x,y,z,t), \tag{8.2}$$

$$\mathrm{L}[u_3]+\mathrm{D}_z\mathrm{K}[u_1,u_2,u_3,p]=f_3(x,y,z,t), \tag{8.3}$$

$$\mathrm{M}[u_1,u_2,u_3,p]=f_4(x,y,z,t), \tag{8.4}$$

где D_x – произвольный линейный дифференциальный оператор по переменной x с постоянными коэффициентами; $\mathrm{D}_y=\mathrm{D}_x|_{x=y}$, $\mathrm{D}_z=\mathrm{D}_x|_{x=z}$. Остальные обозначения такие же, как в системе (1.1)–(1.4), которая является частным случаем системы (8.1)–(8.4) при $\mathrm{D}_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Решение системы (8.1)–(8.4) можно представить в виде (симметричная декомпозиция)

$$u_1=\mathrm{D}_x\varphi+\xi, \quad u_2=\mathrm{D}_y\varphi+\eta, \quad u_3=\mathrm{D}_z\varphi+\zeta, \quad p=p,$$

где функции $\xi=\xi(x,y,z,t)$, $\eta=\eta(x,y,z,t)$, $\zeta=\zeta(x,y,z,t)$ удовлетворяют трем однотипным независимым линейным уравнениям

$$\mathrm{L}[\xi]=f_1-\mathrm{D}_xG, \quad \mathrm{L}[\eta]=f_2-\mathrm{D}_yG, \quad \mathrm{L}[\zeta]=f_3-\mathrm{D}_zG, \tag{8.5}$$

а функции $\varphi=\varphi(x,y,z,t)$, $p=p(x,y,z,t)$ описываются системой уравнений

$$\mathrm{L}[\varphi]+\mathrm{K}\left[\mathrm{D}_x\varphi+\xi, \mathrm{D}_y\varphi+\eta, \mathrm{D}_z\varphi+\zeta, p\right]=G, \tag{8.6}$$

$$\mathrm{M}\left[\mathrm{D}_x\varphi+\xi,\mathrm{D}_y\varphi+\eta,\mathrm{D}_z\varphi+\zeta,p\right]=f_4. \tag{8.7}$$

В уравнения (8.5), (8.6) входит произвольная функция $G=G(x,y,z,t)$.

2. Рассмотрим систему, состоящую из $(m+n)$ уравнений

$$\mathrm{L}[u_k]+\frac{\partial}{\partial x_k}\mathrm{Q}[u_1,\ldots,u_n,p_1,\ldots,p_m]=f_k,\qquad k=1,\ldots,n, \tag{8.8}$$

$$\mathrm{R}_j[u_1,\ldots,u_n,p_1,\ldots,p_m]=g_j,\quad j=1,\ldots,m, \tag{8.9}$$

где $\mathrm{L}[u]$ – линейный дифференциальный оператор по переменным t, $x_1,\ldots,x_n$, коэффициенты которого могут зависеть от t; $\mathrm{Q}[u_1,\ldots,u_n,p_1,\ldots,p_m]$ и $\mathrm{R}_j[u_1,\ldots,u_n,p_1,\ldots,p_m]$ – линейные (или нелинейные) дифференциальные операторы по переменным t, x_1, …, x_n; $f_k=f_k(t,x_1,\ldots,x_n)$ и $g_j=g_j(t,x_1,\ldots,x_n)$ – заданные функции; u_k, p_j – искомые функции.

Решение системы (8.8), (8.9) ищем в виде

$$u_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}+\psi_k,\ k=1,\ldots,n,$$

где функции $\psi_k=\psi_k(t,x_1,\ldots,x_n)$ определяются путем решения n однотипных линейных независимых уравнений

$$\mathrm{L}[\psi_k]=f_k,$$

а псевдопотенциал $\varphi=\varphi(t,x_1,\ldots,x_n)$ и функции $p_j=p_j(t,x_1,\ldots,x_n)$ определяются из системы, состоящей из $(m+1)$ уравнения

$$\mathrm{L}[\varphi]+\mathrm{Q}\left[\varphi_{x_1}+\psi_1,\ldots,\varphi_{x_n}+\psi_n,p_1,\ldots,p_m\right]=0,$$

$$\mathrm{R}_j\left[\varphi_{x_1}+\psi_1,\ldots,\varphi_{x_n}+\psi_n,p_1,\ldots,p_m\right]=g_j,\ j=1,\ldots,m.$$

Здесь $\varphi_{x_k}=\partial\varphi/\partial x_k$.

9. Более сложные системы уравнений

Рассмотрим трехмерные системы уравнений, состоящие из векторного и скалярного уравнений

$$\mathrm{L}[\mathbf{u}]+\nabla\left(\sigma p+\mathrm{K}_1[\nabla\cdot\mathbf{u}]\right)=\mathbf{f}, \tag{9.1}$$

$$\mathrm{M}_1[p]+\mathrm{M}_2[\nabla\cdot\mathbf{u}]=g, \tag{9.2}$$

где $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ и $p=p(\mathbf{x},t)$ – искомые функции; $\mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ и $g=g(\mathbf{x},t)$ – заданные функции, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$; t – время; K_1, M_1, M_2 – линейные дифференциальные операторы по t с постоянными коэффициентами; L – линейный дифференциальный оператор по x_1, x_2, x_3, t с постоянными коэффициентами; σ – некоторая постоянная.

Используя для массовой силы **f** разложение Стокса–Гельмгольца (7.1), решение системы (9.1)–(9.2) ищем в виде

$$\mathbf{u}=\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{\psi},\quad p=p. \tag{9.3}$$

(Во избежание лишних переобозначений в (9.3) используется запись $p=p$ вместо $p=\tilde{p}$, где $\tilde{p}$ – новая искомая функция.) В результате для определения искомых величин φ, $\boldsymbol{\psi}$ и p получим уравнения

$$\begin{gathered}\mathrm{L}[\boldsymbol{\psi}]=\boldsymbol{\omega},\\ \mathrm{L}[\varphi]+\sigma p+\mathrm{K}_1[\Delta\varphi]=\gamma+G(t),\\ \mathrm{M}_1[p]+\mathrm{M}_2[\Delta\varphi]=g,\end{gathered} \tag{9.4}$$

где $G(t)$ – произвольная функция.

При $\sigma\neq 0$, исключив p из последних двух уравнений (9.4), можно получить независимое уравнение для φ. При этом функция p выражается без квадратур через φ с помощью второго уравнения (9.4). Таким образом, в данном случае имеем полную декомпозицию системы (9.1), (9.2).

Замечание 1. Представление решения в виде (9.3) использовалось ранее преимущественно для декомпозиции уравнений теории упругости и термовязкоупругости (см., например, [7, 6, 16]).

В представление (9.3) для компонент вектора **u** входят производные первого порядка от новых искомых функций φ и $\boldsymbol{\psi}=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$, что соответствует декомпозиции первого порядка. В общем случае *порядком декомпозиции* будем называть максимальный порядок производных от новых искомых функций, которые входят в представление для компонент вектора **u**.

Пример 1. Уравнения, описывающие медленные течения вязкоупругих несжимаемых жидкостей (а также линеаризованные гиперболические модификации уравнений Навье–Стокса), имеют вид (9.1), (9.2), где

$$\sigma=1/\rho,\quad \mathrm{K}_1[\mathrm{v}]=\mathrm{M}_1[p]=0,\quad \mathrm{M}_2[\mathrm{v}]=\mathrm{v},\quad g=0, \tag{9.5}$$

ρ – плотность. В общем случае оператор L может быть достаточно произвольным [4, 5]. Для модели вязкоупругой несжимаемой жидкости Максвелла имеем $\mathrm{L}[u]=\tau u_{tt}+u_t-\nu\Delta w$, где ν – кинематическая вязкость; τ – время релаксации (значение $\tau=0$ соответствует уравнениям Стокса для вязкой несжимаемой жидкости).

Учитывая сказанное и используя формулу (9.3) и уравнения (9.4)–(9.5), после несложных преобразований получим, что решение рассматриваемой неоднородной системы уравнений можно представить в виде

$$\mathbf{u}=\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{\psi},\qquad p=\rho\left(\gamma-\mathrm{L}\left[\varphi\right]\right)+p_0\left(t\right), \tag{9.6}$$

где $p_0\left(t\right)=\rho G\left(t\right)$ – произвольная функция; вектор-функция $\boldsymbol{\psi}$ удовлетворяют первому уравнению (9.4), а скалярная функция φ описывается уравнением Лапласа

$$\Delta\varphi=0.$$

Вторая формула в (9.6) для давления p получена из второго уравнения (9.4).

Пример 2. Уравнения, описывающие медленные движения вязкой сжимаемой баротропной жидкости [7, 18], являются частным случаем уравнений (9.1), (9.2) при

$$\begin{gathered}\mathrm{L}\left[u\right]=u_t-\nu\Delta u,\quad \mathrm{K}_1\left[\mathrm{v}\right]=-\left(\nu+\kappa\right)\mathrm{v},\quad \mathrm{M}_1\left[p\right]=p_t,\quad \mathrm{M}_2\left[\mathrm{v}\right]=\rho_0c^2\mathrm{v},\\ \sigma=1/\rho_0,\quad \nu=\mu/\rho_0,\quad \kappa=\lambda/\rho_0,\quad g=0,\end{gathered} \tag{9.7}$$

где μ и λ – динамические вязкости; ρ_0 – невозмущенная плотность; c – скорость звука ($c^2=\partial p/\partial\rho\,|_{\rho=\rho_0}$).

Подставив (9.7) в (9.4) и полагая $G\left(t\right)=0,$ приходим к определяющим уравнениям

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\psi}_t-\nu\Delta\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\omega},\\ &p=\rho_0\left[\gamma-\varphi_t+\left(2\nu+\kappa\right)\Delta\varphi\right],\\ &p_t+\rho_0c^2\Delta\varphi=0.\end{aligned}$$

где второе уравнение было преобразовано к более удобному виду.

10. Декомпозиция векторного уравнения, не требующая разложения силы на составляющие

Рассмотрим векторное уравнение

$$\mathrm{L}\left[\mathbf{u}\right]+\nabla\mathrm{K}\left[\nabla\cdot\mathbf{u}\right]=\mathbf{f}, \tag{10.1}$$

которое представляет собой систему, состоящую из трех связанных скалярных уравнений. Уравнение является частным случаем системы (9.1)–(9.2) при $\sigma=0,$ $\mathrm{K}_1=\mathrm{K},$ $\mathrm{M}_1=\mathrm{M}_2=0,$ $g=0.$

Решение системы (10.1) можно представить в следующем виде (доказывается прямой проверкой):

$$\mathbf{u}=\left(\mathrm{L}+\Delta\mathrm{K}\right)\left[\mathbf{w}\right]-\nabla\mathrm{K}\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right], \tag{10.2}$$

где вектор-функция $\mathbf{w}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{L}\left(\mathrm{L}+\Delta\mathrm{K}\right)\left[\mathbf{w}\right]=\mathbf{f}. \tag{10.3}$$

Векторное уравнение (10.2) состоит из трех независимых скалярных уравнений, что соответствует полной декомпозиции исходной системы (10.1).

Представление решения в виде (10.2) зависит от трех дифференциальных операторов L, K, Δ. Порядок этих операторов определяет порядок декомпозиции. В простейшем случае дифференциальных операторов L и K первого порядка порядок декомпозиции равен четырем. Представление решения (10.2) не требует предварительного разложения массовой силы **f** на потенциальный и соленоидальный векторы типа (9.1).

Замечание 2. Представление решения системы (10.1) в виде (10.2)–(10.3) (см. ч. 1 [1]) является обобщением решения Коши–Ковалевской для уравнений линейной теории упругости (см. разд. 4 (ч. 1 [1]).

Замечание 3. Общее решение однородного уравнения (10.3) (при $\mathbf{f}=0$) может быть представлено в виде суммы $\mathbf{w}=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2$, где $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ – произвольные решения двух более простых уравнений

$$\mathrm{L}\left[\mathbf{w}_1\right]=0,\quad \left(\mathrm{L}+\Delta\mathrm{K}\right)\left[\mathbf{w}_2\right]=0.$$

11. Прямая декомпозиция системы (9.1), (9.2), не требующая разложения силы на составляющие

Решение системы (9.1), (9.2) при $\sigma=0$ $(\mathrm{M}_1\equiv 0,\ \mathrm{M}_2\equiv 0)$ ищем в виде

$$\mathbf{u}=\mathrm{Q}_1\left[\mathbf{w}\right]+\nabla\left(\varphi+\mathrm{Q}_2\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right]\right),\quad p=\mathrm{Q}_3\left[\varphi\right]+\mathrm{Q}_4\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right], \tag{11.1}$$

где **w** и φ – новые искомые векторная и скалярная функции; $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2,\ \mathrm{Q}_3,\ \mathrm{Q}_4$ – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, подлежащие определению. Подставив (11.1) в (9.1), (9.2), с учетом соотношения

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\Delta\varphi+\left(\mathrm{Q}_1+\Delta\mathrm{Q}_2\right)\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right],$$

после некоторых преобразований и перегруппировки членов под знаком градиента имеем

$$\mathrm{LQ}_1\left[\mathbf{w}\right]+\nabla\left\{\underbrace{\sigma\mathrm{Q}_3\left[\varphi\right]+\mathrm{L}\left[\varphi\right]+\Delta\mathrm{K}_1\left[\varphi\right]}+\right.$$

$$\left.+\underbrace{\sigma\mathrm{Q}_4\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right]+\mathrm{LQ}_2\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right]+\mathrm{K}_1\left(\mathrm{Q}_1+\Delta\mathrm{Q}_2\right)\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right]}\right\}=\mathbf{f},$$

$$\mathrm{M}_1\mathrm{Q}_3\left[\varphi\right]+\Delta\mathrm{M}_2\left[\varphi\right]+\underbrace{\mathrm{M}_1\mathrm{Q}_4\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right]+\mathrm{M}_2\left(\mathrm{Q}_1+\Delta\mathrm{Q}_2\right)\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right]}=g.$$

Приравнивая нулю суммы подобных членов (выделены фигурной скобкой снизу), содержащие φ и Δ·**w**, приходим к уравнениям

$$\sigma\mathrm{Q}_3\left[\varphi\right]+\mathrm{L}\left[\varphi\right]+\Delta\mathrm{K}_1\left[\varphi\right]=0,$$

$$\mathrm{M}_1\mathrm{Q}_3\left[\varphi\right]+\Delta\mathrm{M}_2\left[\varphi\right]=g,$$

$$\sigma\mathrm{Q}_4+\mathrm{LQ}_2+\mathrm{K}_1\left(\mathrm{Q}_1+\Delta\mathrm{Q}_2\right)=0,$$

$$\mathrm{M}_1\mathrm{Q}_4+\mathrm{M}_2\left(\mathrm{Q}_1+\Delta\mathrm{Q}_2\right)=0.$$

Отсюда находим операторы, определяющие вид решения (11.1):

$$\mathrm{Q}_1 = \mathrm{M}_1\mathrm{L} + \Delta\mathrm{M}_1\mathrm{K}_1 - \sigma\Delta\mathrm{M}_2, \quad \mathrm{Q}_2 = \sigma\mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_1\mathrm{K}_1,$$
$$\mathrm{Q}_3 = -\frac{1}{\sigma}\left(\mathrm{L} + \Delta\mathrm{K}_1\right), \qquad \mathrm{Q}_4 = -\mathrm{M}_2\mathrm{L}. \tag{11.2}$$

В итоге получим независимые уравнения для искомых векторной и скалярной функций $\mathbf{w}$ и φ:

$$\mathrm{LQ}_1\left[\mathbf{w}\right] = \mathbf{f}, \tag{11.3}$$

$$\mathrm{Q}_1\left[\varphi\right] = -\sigma g. \tag{11.4}$$

Замечание 4. Общее решение однородного уравнения (11.3) (при $\mathbf{f} = \mathbf{0}$) может быть представлено в виде суммы $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, где $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ – произвольные решения двух более простых уравнений

$$\mathrm{L}\left[\mathbf{w}_1\right] = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{Q}_1\left[\mathbf{w}_2\right] = \mathbf{0}.$$

Пример 3. Медленные движения вязкой сжимаемой баротропной жидкости описываются уравнениями (9.1), (9.2) с операторами (9.7). Подставив (9.7) в (11.1) и (11.2), приходим к следующему представлению решения:

$$\mathbf{u} = \left[\partial_t^2 - \left(2\nu + \kappa\right)\partial_t\Delta - c^2\Delta\right]\left[\mathbf{w}\right] + \nabla\left\{\varphi + \left[c^2 + \left(\nu + \kappa\right)\partial_t\right]\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right]\right\},$$
$$p = -\rho_0\left[\partial_t - \left(2\nu + \kappa\right)\Delta\right]\left[\varphi\right] - \rho_0 c^2\left(\partial_t - \nu\Delta\right)\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right],$$

где векторная и скалярная функции $\mathbf{w}$ и φ удовлетворяют независимым уравнениям

$$\left(\partial_t - \nu\Delta\right)\left[\partial_t^2 - \left(2\nu + \kappa\right)\partial_t\Delta - c^2\Delta\right]\left[\mathbf{w}\right] = \mathbf{f},$$
$$\left[\partial_t^2 - \left(2\nu + \kappa\right)\partial_t\Delta - c^2\Delta\right]\left[\varphi\right] = 0.$$

12. Декомпозиция системы (9.1), (9.2) путем сведения ее к векторному уравнению вида (10.1)

Сведем систему (9.1), (9.2) при $\mathrm{M}_1 \equiv 0$, $\mathrm{M}_2 \equiv 0$ и $g = 0$ к одному векторному уравнению вида (10.1). Для этого положим

$$\mathbf{u} = \mathrm{M}_1\left[\mathbf{v}\right], \qquad p = -\mathrm{M}_2\left[\nabla\cdot\mathbf{v}\right]. \tag{12.1}$$

Подставив (12.1) в (9.1), получим уравнение вида (10.1):

$$\mathrm{LM}_1\left[\mathbf{v}\right] + \nabla\left(\mathrm{K}_1\mathrm{M}_1 - \sigma\mathrm{M}_2\right)\left[\nabla\cdot\mathbf{v}\right] = \mathbf{f}. \tag{12.2}$$

Уравнение (9.2) при $g = 0$ при подстановке выражений (12.1) удовлетворяется тождественно.

Используя результаты разд. 4 (см. ч. 1 [1]), приходим к следующему представлению решения векторного уравнения (12.2):

$$\mathbf{v} = \left(\mathrm{LM}_1 + \Delta\mathrm{K}_1\mathrm{M}_1 - \sigma\Delta\mathrm{M}_2\right)\left[\mathbf{w}\right] + \nabla\left\{\left(\sigma\mathrm{M}_2 - \mathrm{K}_1\mathrm{M}_1\right)\left[\nabla\cdot\mathbf{w}\right]\right\}, \qquad (12.3)$$

где вектор-функция **w** удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{LM}_1\left(\mathrm{LM}_1 + \Delta\mathrm{K}_1\mathrm{M}_1 - \sigma\Delta\mathrm{M}_2\right)\left[\mathbf{w}\right] = \mathbf{f}, \qquad (12.4)$$

которое представляет собой три независимых скалярных уравнения для компонент вектора **w**.

Важно отметить, что описанная выше полная декомпозиция исходной системы, состоящей из четырех уравнений (9.1), (9.2) при $g = 0$, представляет решение через три компоненты вектора **w** (в разд. 3 (см. ч. 1 [1]) решение выражалось через четыре функции).

Представим решение (12.3) и уравнение (12.4) в терминах исходной искомой величины $\mathbf{u} = \mathrm{M}_1\left[\mathbf{v}\right]$ (см. (12.1)). Для этого подействуем оператором M_1 на (12.3) и введем новую искомую величину $\tilde{\mathbf{w}} = \mathrm{M}_1\left[\mathbf{w}\right]$. В результате получим

$$\mathbf{u} = \left(\mathrm{LM}_1 + \Delta\mathrm{K}_1\mathrm{M}_1 - \sigma\Delta\mathrm{M}_2\right)\left[\tilde{\mathbf{w}}\right] + \nabla\left\{\left(\sigma\mathrm{M}_2 - \mathrm{K}_1\mathrm{M}_1\right)\left[\nabla\cdot\tilde{\mathbf{w}}\right]\right\}.$$

Уравнение (12.4) в терминах $\tilde{\mathbf{w}} = \mathrm{M}_1\left[\mathbf{w}\right]$ преобразуется к виду

$$\mathrm{L}\left(\mathrm{LM}_1 + \Delta\mathrm{K}_1\mathrm{M}_1 - \sigma\Delta\mathrm{M}_2\right)\left[\tilde{\mathbf{w}}\right] = \mathbf{f}.$$

Заключение

Таким образом, различные способы декомпозиции уравнений механики сплошной среды могут быть получены на основе единых построений, приводящих к симметричной или несимметричной декомпозиции. Для дальнейшего упрощения полученных уравнений могут быть использованы две функций тока. Это показано на примерах декомпозиции различных уравнений теории упругости, термоупругости, пороупругости, гидродинамики вязкоупругих несжимаемых жидкостей и вязких сжимаемых баротропных жидкостей и др.

При построении замкнутого решения начально-краевой задачи выбор того или иного метода декомпозиции в значительной степени определяется вкусом исследователя, и характеризовать некоторые способы представления решения в общем случае как более удобные не представляется возможным. Вместе с тем при реализации вычислительных алгоритмов предпочтительными могут оказаться те, что приводят к наименее громоздким формулам и уравнениям невысокого порядка.

Отметим, что полная декомпозиция во многих случаях (но не всегда) более предпочтительна, поскольку позволяет дать содержательную физическую интерпретацию точных решений дифференциальных уравнений.

Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-08-06330, № 14-01-00741 и № 14-08-00719).

Библиографический список

1. Лычев С.А., Полянин А.Д., Левитин А.Л. Декомпозиция систем уравнений механики сплошных сред. Ч. 1. Упругость, термоупругость и вязкоупругость // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 2. – С. 70–102.

2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – 3-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2 – СПб.: Лань, 2004 – 560 с.

4. Полянин А.Д., Вязьмин А.В. Декомпозиция трехмерных линеаризованных уравнений вязкоупругих жидкостей Максвелла, Олдройда и их обобщений // Теоретические основы химической технологии. – 2013. – Т. 47. – № 4. – С. 386–394.

5. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Integration of linear and some model nonlinear equations of motion of incompressible fluids // Int. J. Non-Linear Mechanics. – 2013. – Vol. 49. – P. 77–83.

6. Gurtin M.E., Sternberg E. On the Linear Theory of Viscoelasticity // Arch. for Rat. Mech. Anal. – 1962. – Vol. 11. – No. 1. – P. 291–356.

7. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 792 с.

8. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.

9. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1947. – 929 р.

10. Липатов И.И., Полянин А.Д. Декомпозиция и точные решения уравнений вязкой слабосжимаемой баротропной жидкости // Доклады академии наук. – 2013. – Т. 449, № 3. – С. 290–294.

11. Полянин А.Д., Лычев С.А. Различные представления решений систем уравнений механики сплошных сред // Доклады Академии наук – 2014. – Т. 455, № 2. – С. 162–166.

12. Полянин А.Д., Лычев С.А. Различные способы декомпозиции линейных уравнений механики сплошных сред // Доклады Академии наук – 2014. – Т. 458, № 6. – С. 663–666.

13. Polyanin A.D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2002. – 800 p.

14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 735 р.

15. Eringen A.C., Suhubi E.S. Elastodynamics: Vol. I: Finite Motions & Volume II: Linear Theory. – New York: Academic Press, 1975. – 1003 p.

16. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

17. Gurtin M.E. On Helmboltz's theorem and the completeness of the Papkovich–Neuber stress funaions for infinite domains // Arc. Rat. Mech. Anal. – 1962. – Vol. 9. – No. 1. – P. 225–233.

18. Morino L. Helmholtz decomposition revised: Vorticity generation and trailing edge condition // Computational Mechanics – 1986. – Vol. 1. – P. 65–90.

References

1. Lychev S.A., Polyanin A.D., Levitin A.L. Dekompozitsiia sistem uravnenii mekhaniki sploshnykh sred. 1. Uprugost', termouprugost' i porouprugost' [Decomposition of the systems for continuum mechanics. 1. Elasticity, thermoelasticity, poroelasticity]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika*, 2015, vol. 2, pp. 70-102.

2. Il'iushin A.A. Mekhanika sploshnoi sredy [Continuum mechanics]. Moskovskii gosudarstvennyi universitet, 1990. 310 p.

3. Sedov L.I. Mekhanika sploshnoi sredy [Continuum mechanics]. Vol. 2. Saint-Petersburg: Lan', 2004. 560 p.

4. Polyanin A.D., Vyazmin A.V. Decomposition of Three-Dimensional Linearized Equations for Maxwell and Oldroyd Viscoelastic Fluids and Their Generalizations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2013, vol. 47, no. 4, pp. 321-329.

5. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Integration of linear and some model nonlinear equations of motion of incompressible fluids. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 49, pp. 77-83.

6. Gurtin M.E., Sternberg E. On the Linear Theory of Viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, vol. 11, no. 1, pp. 291-356.

7. Batchelor G.K. An Introduction of Fluid Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970. 658 p.

8. Happel J., Brenner G. Low Reynolds Number Hydrodynamics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965. 553 p.

9. Lamb H. Hydrodynamics. New York: Dover Publ., 1945. 768 p.

10. Lipatov I.I., Polyanin A.D. Decomposition and exact solutions of equations of a weakly compressible barotropic fluid. *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 3, pp. 116-120.

11. Polyanin A.D. Lychev S.A. Various representations of the solutions of systems of equations of continuum mechanics. *Doklady Physics*, 2014, vol. 59, no. 3, pp. 148-152.

12. Polyanin A. D., Lychev S.A. Various decomposition techniques for linear equations of continuum mechanics. *Doklady Physics*, 2014, vol. 59, no. 10, pp. 487-490.

13. Polyanin A.D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2002. 800 p.

14. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of Mathematical Physics. New York: Dover Publ., 1990. 800 p.

15. Eringen A.C., Suhubi E.S. Elastodynamics: Vol. I: Finite Motions & Vol. II: Linear Theory. New York: Academic Press, 1975. 1003 p.

16. Novatskii V. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow: Mir, 1975. 872 p.

17. Gurtin M.E. On Helmboltz's theorem and the completeness of the Papkovich–Neuber stress funaions for infinite domains. *Arc. Rat. Mech. Anal*., 1962, vol. 9, no. 1, pp. 225-233.

18. Morino L. Helmholtz decomposition revised: Vorticity generation and trailing edge condition. *Computational Mechanics*, 1986, vol. 1, pp. 65-90.