



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.14

УДК 539.3

## НЕОСЕССИМЕТРИЧНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПРЯМОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ АКСИАЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

Д.А. Шляхин

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 18 сентября 2015 г.  
Принята: 15 ноября 2015 г.  
Опубликована: 25 декабря 2015 г.

#### Ключевые слова:

теория электроупругости, задача прямого пьезоэффекта, пьезокерамический цилиндр, неосесимметричная динамическая нагрузка, конечные интегральные преобразования

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается неосесимметричная динамическая задача теории электроупругости для анизотропного пьезокерамического аксиально поляризованного цилиндра. Механические колебания осуществляются за счет действия на его торцевых электродированных мембранно закрепленных поверхностях нестационарной нагрузки в виде нормальных напряжений, являющихся произвольными функциями радиальной, угловой координат и времени. Разработанный алгоритм расчета позволяет удовлетворить различные механические и электрические условия на цилиндрических неэлектродированных поверхностях элемента. Для определенности в настоящей работе считаем их свободными от нормальных и касательных напряжений.

Новое замкнутое решение построено в трехмерной постановке путем последовательного использования метода неполного разделения переменных в виде конечных интегральных преобразований. Последовательно применяются преобразование Фурье с конечными пределами по аксиальной координате и обобщенное конечное преобразование (КИП) по радиальной переменной. При этом на каждом этапе решения проводится процедура стандартизации, которая позволяет привести граничные условия по соответствующей координате к однородным.

Полученные расчетные соотношения относительно компонент вектора перемещений и потенциала электрического поля позволяют определять частоты собственных неосесимметричных колебаний, напряженно-деформированное состояние пьезокерамического цилиндра, а также все параметры индуцируемого электрического поля. Разность потенциалов между электродированными торцевыми поверхностями определяется с помощью измерительного прибора с большим входным сопротивлением, что соответствует режиму «холостого хода».

Анализ численных результатов расчета позволяет сделать вывод, что использование построенного алгоритма дает возможность по сравнению с численными методами получить более точные значения спектра частот собственных колебаний, напряженно-деформированного состояния и электрического поля пьезокерамического цилиндра.

© ПНИПУ

© Шляхин Дмитрий Аверкиевич – доктор технических наук, доцент, e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Dmitry A. Shlyakhin – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

## NONAXISYMMETRIC DYNAMIC PROBLEM OF THE DIRECT PIEZOEFFECT FOR AXIALLY POLARIZED SOLID CYLINDER

D.A. Shlyakhin

Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 18 September 2015  
Accepted: 15 November 2015  
Published: 25 December 2015

#### Keywords:

theory of electrodynamics,  
the problem of direct piezoelectric effect, piezo-ceramic cylinder, nonaxisymmetric dynamic load, finite integral transforms

### ABSTRACT

The paper considers nonaxisymmetric dynamic problem for the theory of electroelasticity of anisotropic piezoceramic cylinder axially polarized. Mechanical vibrations are carried out by the action of its end surfaces of the non-stationary load as normal stresses; it is an arbitrary function of the radial, angular position and time. At the same end the surfaces are covered with electrodes and fixed membranes. The developed algorithm of calculation allows to meet a variety of mechanical and electrical conditions on the cylindrical surfaces of the electrodes that are not covered. To be specific, in this paper, they are considered free from normal and shear stresses.

The new closed solution is built in three-dimensional statement through the consistent use of the method of incomplete separation of variables in the form of integral transformations. The author has consistently applied Fourier transformation with finite limits on the axial coordinate and the final transformation of generalized (FIT) for the radial variable. At each stage of the decision-making, the standardization is utilized that allows one to bring the boundary conditions on the corresponding coordinate in uniform.

The calculated ratio the components of the displacement vector and the electric field potential make it possible to determine the frequency of natural oscillations nonaxisymmetric, stress-strain state of the piezoceramic cylinder, and all parameters induced by the electric field. The potential difference between the end faces is determined by a measuring instrument with a high input impedance which corresponds to the "idle".

The numerical results of calculation lead to the conclusion that the use of the constructed algorithm makes it possible, compared with the numerical methods, to obtain more accurate values of natural frequencies of the spectrum, the stress-strain state and the electric field of the piezoceramic cylinder.

© PNRPU

---

## Введение

Наиболее распространенными конструктивными элементами пьезокерамических преобразователей являются тела канонической формы в виде сплошных цилиндров конечных размеров (круглых толстых пластин) [1–3]. Для описания их работы в реальных условиях и расширения функциональных возможностей необходим углубленный анализ нестационарных процессов, без которого невозможно понять эффект взаимодействия механических и электрических полей напряжений. Вместе с тем существующие методы расчета пьезоэлектрических элементов конструкций на нестационарные воздействия далеко не совершенны, и большинство из них являются приближенными. При этом значительная часть исследований связана с разработкой численных методов решения [4, 5], а также с приведением этих задач к статическим или квазистатическим.

В связи с этим на первый план выходят методы, позволяющие получить замкнутые решения нестационарных начально-краевых задач теории электроупругости для тел конечных размеров в трехмерной постановке. Математические трудности при реализации данного подхода приводят к тому, что значительная часть работ в этой области связана с исследованием осесимметричных задач [6–12]. Существенно меньшее количество решений получено в случае неосесимметричной их постановки [6, 13–15]. Причем работы [6,13,14] посвящены исследованию собственных колебаний, а в [15] рассматривается установившийся режим вынужденных колебаний.

В настоящей работе неосесимметричная динамическая задача в трехмерной постановке исследуется с помощью последовательного применения конечных интегральных преобразований по всем пространственным переменным [16,17]. Данный подход позволяет получить точные, в рамках используемых моделей, расчетные соотношения в наиболее общем виде для пьезокерамического цилиндра, выполненного из материала гексагональной системы класса 6mm [18], в котором ось симметрии параллельна аксиальной координате.

### 1. Постановка задачи

Сплошной анизотропный цилиндр занимает в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  область  $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h\}$  и выполнен из пьезокерамического материала. Торцевые электродированные мембранно закрепленные поверхности  $(z_* = 0, h)$  подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением и нагружены динамической нагрузкой (нормальными напряжениями)  $q_1^*(r_*, \theta, t_*)$ ,  $q_2^*(r_*, \theta, t_*)$ , которая является произвольной функцией радиальной, угловой координат и времени  $t_*$ . На цилиндрических неэлектродированных поверхностях можно удовлетворить различные механические условия. Для определенности в дальнейшем будем считать их свободными от нормальных и касательных напряжений. В такой постановке задача моделирует работу пьезоэлементов в приборах прямого пьезоэффекта, трансформирующих механическое воздействие в соответствующий электрический сигнал.

Математическая формулировка рассматриваемой задачи электроупругости в безразмерной форме включает систему дифференциальных уравнений относительно компонент вектора перемещения  $U(r, \theta, z, t)$ ,  $V(r, \theta, z, t)$ ,  $W(r, \theta, z, t)$ , потенциала электрического поля  $\varphi(r, \theta, z, t)$  [6]

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 U + a_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} - a_4 \frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + a_5 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_6 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= 0, \\ a_1 \nabla_1^2 V + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + a_2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + a_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} + a_4 \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial z} + a_6 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0, \\ a_5 \frac{\partial}{\partial z} \left( \nabla U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + a_2 \left( \nabla_2^2 W + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + a_7 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_8 \left( \nabla_2^2 \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0, \\ a_6 \frac{\partial}{\partial z} \left( \nabla U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + a_8 \left( \nabla_2^2 W + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - a_9 \left( \nabla_2^2 \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) - a_{10} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} z = 0, L: \sigma_{zz|z=0} &= a_{11} \left( \nabla U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + a_7 \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = q_1(r, \theta, t), \\ \sigma_{zz|z=L} &= a_{11} \left( \nabla U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + a_7 \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = q_2(r, \theta, t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$U(r, \theta, 0, t) = U(r, \theta, L, t) = 0, \quad V(r, \theta, 0, t) = V(r, \theta, L, t) = 0,$$

$$D_{z|z=0,L} = -a_{10} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + a_{12} \left( \nabla U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial W}{\partial z} = 0;$$

$$\theta = 0, 2\pi: \left\{ U, V, W, \varphi, \frac{\partial U}{\partial \theta}, \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{\partial W}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\}_{\theta=0} = \left\{ U, V, W, \varphi, \frac{\partial U}{\partial \theta}, \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{\partial W}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\}_{\theta=2\pi}, \quad (1.3)$$

$$r = 1, 0: \sigma_{rr|r=1} = \frac{\partial U}{\partial r} + a_{13} \frac{1}{r} \left( U + \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + a_{11} \frac{\partial W}{\partial z} + a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (1.4)$$

$$\sigma_{rz|r=1} = a_2 \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + a_8 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \sigma_{r\theta|r=1} = a_1 \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} - V \right) + \frac{\partial V}{\partial r} \right] = 0,$$

$$D_{r|r=1} = -a_9 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + a_8 \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0,$$

$$U(0, \theta, z, t) < \infty, \quad V(0, \theta, z, t) < \infty, \quad W(0, \theta, z, t) < \infty, \quad \varphi(0, \theta, z, t) < \infty;$$

$$t = 0: U(r, \theta, z, 0) = U_0, \quad V(r, \theta, z, 0) = V_0, \quad W(r, \theta, z, 0) = W_0, \quad (1.5)$$

$$\dot{U}(r, \theta, z, 0) = \dot{U}_0, \quad \dot{V}(r, \theta, z, 0) = \dot{V}_0, \quad \dot{W}(r, \theta, z, 0) = \dot{W}_0,$$

где  $\{U, V, W\} = \{U^*, V^*, W^*\} / b$ ,  $\varphi = \varphi^* e_{33} / (bC_{11})$ ,  $\{r, z, L\} = \{r_*, z_*, h\} / b$ ;

$$t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{11} / \rho}, \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}, \quad \nabla_2^2 = \nabla_1^2 + \frac{1}{r^2}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r};$$

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_{11}, a_{13}\} = \{C_{66}, C_{55}, (C_{12} + C_{66}), (C_{11} + C_{66}), (C_{13} + C_{55}), C_{33}, C_{13}, C_{12}\} / C_{11};$$

$$\{a_6, a_8, a_{12}\} = \{(e_{31} + e_{15}), e_{15}, e_{31}\} / e_{33}, \quad \{a_9, a_{10}\} = \{C_{11} \varepsilon_{11}, C_{11} \varepsilon_{33}\} / e_{33}^2;$$

$\{q_1, q_2\} = \{q_1^*, q_2^*\} / C_{11}$ ;  $\sigma_{jk}, D_m$  – соответственно компоненты тензора механических напряжений и вектора индукции электрического поля ( $j, k = r, \theta, z$ ;  $m = r, z$ );  $b$  – радиус цилиндра;  $\rho, C_{ms}, e_{ms}$  – объемная плотность, упругие постоянные и пьезомодули анизотропного пьезокерамического материала ( $m, s = 1, 6$ );  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$  – диэлектрические проницаемости в радиальном и осевом направлениях;  $U^*, V^*, W^*, \varphi^*$  – компоненты вектора перемещений и потенциал электрического поля в размерной форме;  $U_0, \dot{U}_0, V_0, \dot{V}_0, W_0, \dot{W}_0$  – известные в начальный момент времени перемещения, скорости перемещений.

Электрические граничные условия (1.2), (1.4) соответствуют режиму «холостого хода» на торцевых поверхностях и отсутствию электродного покрытия на цилиндрической поверхности цилиндра. Соотношения (1.3), (1.4) ( $r = 0$ ) являются условиями периодичности для круговых областей и регулярности решения. Начальные условия (1.5) определяет деформированное состояние системы в момент времени  $t = 0$ .

В равенствах (1.5) и ниже точка означает дифференцирование по  $t$ .

## 2. Построение общего решения

Решение осуществляется методом интегральных преобразований, путем последовательно синус- и косинус-преобразования Фурье с конечными пределами по переменной  $\theta$  и  $z$  [19], а также обобщенного конечного преобразования (КИП) [20] по радиальной координате  $r$ . При этом каждый раз предварительно необходимо выполнять процедуру стандартизации (приведение граничных условий по соответствующей координате к однородным). На первом этапе для этой цели используется такое представление:

$$\begin{aligned} \{U(r, \theta, z, t), V(r, \theta, z, t)\} &= H_1(r, \theta, z, t) + \{u(r, \theta, z, t), v(r, \theta, z, t)\}, \\ W(r, \theta, z, t) &= H_2(r, \theta, z, t) + w(r, \theta, z, t), \quad \varphi(r, \theta, z, t) = H_3(r, \theta, z, t) + \chi(r, \theta, z, t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $H_1 = (Lz - z^2)(q_1 + q_2)$ ,  $H_3 = a_9^{-1}H_2$ ,

$$H_2 = a_9 \left[ 2L(a_{10} - 1) \right]^{-1} \left[ (2Lz - z^2 - L^2)q_1 + z^2q_2 \right].$$

В результате подстановки (2.1) в (1.1)–(1.5) получаем новую краевую задачу относительно функций  $u(r, \theta, z, t)$ ,  $v(r, \theta, z, t)$ ,  $w(r, \theta, z, t)$ ,  $\chi(r, \theta, z, t)$  с однородными граничными условиями по координатам  $z$  и  $\theta$ . При этом дифференциальные уравнения (1.1), граничные условия (1.4) становятся неоднородными с правыми частями  $F_1 \div F_4$  и  $N_1 \div N_4$ , а в начальных условиях (1.5) вместо  $U_0, V_0, W_0$  следует принять  $u_0, v_0, w_0$ .

К преобразованной краевой задаче (1.1)–(1.5) применяем последовательно синус- и косинус-преобразования Фурье с конечными пределами по переменной  $z$  и  $\theta$ , используя следующие трансформанты:

$$\begin{aligned} \{u_s(r, \theta, n, t), v_s(r, \theta, n, t)\} &= \int_0^L \{u(r, \theta, z, t), v(r, \theta, z, t)\} \sin(j_n z) dz, \\ \{w_c(r, \theta, n, t), \chi_c(r, \theta, n, t)\} &= \int_0^L \{w(r, \theta, z, t), \chi(r, \theta, z, t)\} \cos(j_n z) dz, \\ \{U_c(r, m, n, t), W_c(r, m, n, t), \varphi_c(r, m, n, t)\} &= \\ &= \int_0^{2\pi} \{u_s(r, \theta, n, t), w_c(r, \theta, n, t), \chi_c(r, \theta, n, t)\} \cos(m\theta) d\theta \\ V_s(r, m, n, t) &= \int_0^{2\pi} v_s(r, \theta, n, t) \sin(m\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (2.2)$$

с соответствующими формулами обращения

$$\begin{aligned} \{u_s(r, \theta, n, t), w_s(r, \theta, n, t), \chi_s(r, \theta, n, t)\} &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{-1} \{U_c(r, m, n, t), W_c(r, m, n, t), \varphi_c(r, m, n, t)\} \cos(m\theta), \\ v_s(r, \theta, n, t) &= \pi^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} V_s(r, m, n, t) \sin(m\theta), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\{u(r, \theta, z, t), v(r, \theta, z, t)\} = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \{u_s(r, \theta, n, t), v_s(r, \theta, n, t)\} \sin j_n z,$$

$$\{w(r, \theta, z, t), \chi(r, \theta, z, t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \{w_c(r, \theta, n, t), \chi_c(r, \theta, n, t)\} \cos j_n z,$$

$$j_n = n\pi / L, P_m = \begin{cases} 2\pi & (m=0), \\ \pi & (m \neq 0), \end{cases} \Omega_n = \begin{cases} L & (n=0), \\ L/2 & (n \neq 0). \end{cases}$$

В результате получаем следующую начально-краевую задачу относительно трансформант Фурье  $U_c(r, m, n, t), V_s(r, m, n, t), W_c(r, m, n, t), \varphi_c(r, m, n, t)$ :

$$\nabla_1^2 U_c - a_1 \frac{m^2}{r^2} U_c - a_2 j_n^2 U_c + a_3 \frac{m}{r} \frac{\partial V_s}{\partial r} - a_4 \frac{m}{r^2} V_s - a_5 j_n \frac{\partial W_c}{\partial r} - a_6 j_n \frac{\partial \varphi_c}{\partial r} - \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} = R_{1c}, \quad (2.4)$$

$$a_1 \nabla_1^2 V_s - \frac{m^2}{r^2} V_s - a_2 j_n^2 V_s - a_3 \frac{m}{r} \frac{\partial U_c}{\partial r} - a_4 \frac{m}{r^2} U_c + a_5 j_n \frac{m}{r} W_c + a_6 j_n \frac{m}{r} \varphi_c - \frac{\partial^2 V_s}{\partial t^2} = R_{2s},$$

$$a_5 j_n \left( \nabla U_c + \frac{m}{r} V_s \right) + a_2 \left( \nabla_2^2 W_c - \frac{m^2}{r^2} W_c \right) - a_7 j_n^2 W_c + a_8 \left( \nabla_2^2 \varphi_c - \frac{m^2}{r^2} \varphi_c \right) - j_n^2 \varphi_c - \frac{\partial^2 W_c}{\partial t^2} = R_{3c},$$

$$a_6 j_n \left( \nabla U_c + \frac{m}{r} V_s \right) + a_8 \left( \nabla_2^2 W_c - \frac{m^2}{r^2} W_c \right) - j_n^2 W_c - a_9 \left( \nabla_2^2 \varphi_c - \frac{m^2}{r^2} \varphi_c \right) + a_{10} j_n^2 \varphi_c = R_{4c},$$

$$r=1, 0: \frac{\partial U_c}{\partial r} + a_{13} \frac{1}{r} (U_c + mV_s) - a_{11} j_n W_c - a_{12} j_n \varphi_c = Y_{1c|r=1}, \quad (2.5)$$

$$a_2 \left( \frac{\partial W_c}{\partial r} + j_n U_c \right) + a_8 \frac{\partial \varphi_c}{\partial r} = Y_{2c|r=1}, \quad a_1 \left[ \frac{\partial V_s}{\partial r} - \frac{1}{r} (mU_c + V_s) \right] = Y_{3s|r=1},$$

$$-a_9 \frac{\partial \varphi_c}{\partial r} + a_8 \left( \frac{\partial W_c}{\partial r} + j_n U_c \right) = Y_{4c|r=1},$$

$$U_c(0, m, n, t) < \infty, V_s(0, m, n, t) < \infty, W_c(0, m, n, t) < \infty, \varphi_c(0, m, n, t) < \infty;$$

$$t=0: U_c(r, m, n, 0) = U_{0c}(r, m, n), \dot{U}_c(r, m, n, 0) = \dot{U}_{0c}(r, m, n), \quad (2.6)$$

$$V_s(r, m, n, 0) = V_{0s}(r, m, n), \dot{V}_s(r, m, n, 0) = \dot{V}_{0s}(r, m, n),$$

$$W_c(r, m, n, 0) = W_{0c}(r, m, n), \dot{W}_c(r, m, n, 0) = \dot{W}_{0c}(r, m, n),$$

где

$$\begin{aligned} & \{R_{1c}, R_{3c}, R_{4c}, Y_{1c}, Y_{2c}, Y_{4c}, U_{0c}, \dot{U}_{0c}, W_{0c}, \dot{W}_{0c}\} = \\ & = \int_0^{2\pi} \{F_{1s}, F_{3c}, F_{4c}, N_{1s}, N_{2c}, N_{4c}, u_{0s}, \dot{u}_{0s}, w_{0c}, \dot{w}_{0c}\} \cos(m\theta) d\theta, \end{aligned}$$

$$\{R_{2s}, Y_{3s}, V_{0s}, \dot{V}_{0s}\} = \int_0^L \{F_{2s}, N_{3s}, v_{0s}, \dot{v}_{0s}\} \sin(m\theta) dz,$$

$$\{F_{1s}, F_{2s}, N_{1s}, N_{3s}, u_{0s}, \dot{u}_{0s}, v_{0s}, \dot{v}_{0s}\} = \int_0^L \{F_1, F_2, N_1, N_3, u_0, \dot{u}_0, v_0, \dot{v}_0\} \sin(j_n z) dz,$$

$$\{F_{3c}, F_{4c}, N_{2c}, N_{4c}, w_{0c}, \dot{w}_{0c}\} = \int_0^L \{F_3, F_4, N_2, N_4, w_0, \dot{w}_0\} \cos(j_n z) dz.$$

Повторяя еще раз процедуру стандартизации задачи (2.4)–(2.6), представляем трансформанты Фурье  $U_c, V_s, W_c, \Phi_c$  в виде

$$\begin{aligned} U_c(r, m, n, t) &= H_4(r, m, n, t) + U_c^*(r, m, n, t), \\ V_s(r, m, n, t) &= H_5(r, m, n, t) + V_s^*(r, m, n, t), \\ W_c(r, m, n, t) &= H_6(r, m, n, t) + W_c^*(r, m, n, t), \\ \Phi_c(r, m, n, t) &= H_7(r, m, n, t) + \Phi_c^*(r, m, n, t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $H_4 = (r-1)Y_{1c|r=1}$ ,  $H_5 = a_1^{-1}(r-1)Y_{3s|r=1}$ ,  $H_6 = a_2^{-1}(r-1)(Y_{2c|r=1} - a_8 Y_{5c|r=1})$ ,

$$H_7 = (r-1)Y_{5c|r=1}, \quad Y_{5c|r=1} = a_8(a_2 a_9 + a_8^2)^{-1}(Y_{4c|r=1} - a_2 a_8^{-1} Y_{2c|r=1}).$$

При подстановке (2.7) в (2.4)–(2.6) получаем краевую задачу относительно функций  $U_c^*, V_s^*, W_c^*, \Phi_c^*$  с однородными граничными условиями по координате  $r$ . При этом вместо правых частей дифференциальных уравнений (2.4)  $R_{1c}, R_{2s}, R_{3c}, R_{4c}$  и начальных условий (2.6)  $U_{0c}, \dot{U}_{0c}, V_{0s}, \dot{V}_{0s}, W_{0c}, \dot{W}_{0c}$  следует принять  $R_{1c}^*, R_{2s}^*, R_{3c}^*, R_{4c}^*$  и  $U_{0c}^*, \dot{U}_{0c}^*, V_{0s}^*, \dot{V}_{0s}^*, W_{0c}^*, \dot{W}_{0c}^*$ .

Краевую задачу (2.4)–(2.6) относительно функций  $U_c^*, V_s^*, W_c^*, \Phi_c^*$  решаем, используя структурный алгоритм обобщенного метода конечных интегральных преобразований (КИП) [20]. Введем на сегменте  $[0, 1]$  вырожденное КИП с неизвестными компонентами  $K_1(\lambda_{imm}, r), K_2(\lambda_{imm}, r), K_3(\lambda_{imm}, r), K_4(\lambda_{imm}, r)$  вектор-функции ядра преобразования

$$G(\lambda_{imm}, m, n, t) = \int_0^1 (U_c^* K_1 + V_s^* K_2 + W_c^* K_3) r dr, \quad (2.8)$$

$$\{U_c^*, V_s^*, W_c^*, \Phi_c^*\} = \sum_{i=1}^{\infty} G\{K_1, K_2, K_3, K_4\} \|K_{imm}\|^{-2}, \quad (2.9)$$

$$\|K_{imm}\|^2 = \int_0^1 [K_1^2 + K_2^2 + K_3^2] r dr,$$

где  $\lambda_{imm}$  – положительные параметры, образующие счетное множество ( $i = \overline{1, \infty}$ ).

При этом круговые частоты неосесимметричных колебаний цилиндра  $\omega_{imm}$  связаны с  $\lambda_{imm}$  зависимостью

$$\omega_{imm} = \lambda_{imm} b^{-1} \sqrt{C_{11}/\rho}. \quad (2.10)$$

Подвергая систему уравнений и условия вида (2.4)–(2.6) относительно функций  $U_c^*, V_s^*, W_c^*, \Phi_c^*$  преобразованиям в соответствии со структурным алгоритмом [20], получаем счетное множество задач Коши для трансформанты  $G(\lambda_{imm}, m, n, t)$ , решение которых имеет вид

$$\begin{aligned} G(\lambda_{imm}, m, n, t) &= G_0 \cos(\lambda_{imm} t) + \dot{G}_0 \sin(\lambda_{imm} t) / \lambda_{imm} - \lambda_{imm}^{-1} \int_0^t F(\lambda_{imm}, m, n, \tau) \times \\ &\quad \times \sin \lambda_{imm} (t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.11)$$

и однородную краевую задачу для компонент  $K_1 \div K_4$ :

$$\left( \nabla_1^2 - a_1 \frac{m^2}{r^2} - a_2 j_n^2 + \lambda_{imm}^2 \right) K_1 + \left( a_3 \frac{m}{r} \frac{d}{dr} - a_4 \frac{m}{r^2} \right) K_2 - a_5 j_n \frac{dK_3}{dr} - a_6 j_n \frac{dK_4}{dr} = 0, \quad (2.12)$$

$$\left( a_1 \nabla_1^2 - \frac{m^2}{r^2} - a_2 j_n^2 + \lambda_{imm}^2 \right) K_2 - \left( a_3 \frac{m}{r} \frac{d}{dr} + a_4 \frac{m}{r^2} \right) K_1 + a_5 j_n \frac{m}{r} K_3 + a_6 j_n \frac{m}{r} K_4 = 0,$$

$$a_5 j_n \left( \nabla K_1 + \frac{m}{r} K_2 \right) + \left[ a_2 \left( \nabla_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) - a_7 j_n^2 + \lambda_{imm}^2 \right] K_3 + \left[ a_8 \left( \nabla_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) - j_n^2 \right] K_4 = 0,$$

$$a_6 j_n \left( \nabla K_1 + \frac{m}{r} K_2 \right) + \left[ a_8 \left( \nabla_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) - j_n^2 \right] K_3 - \left[ a_9 \left( \nabla_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) - a_{10} j_n^2 \right] K_4 = 0,$$

$$r = 1: \frac{dK_1}{dr} + a_{13} (K_1 + mK_2) - a_{11} j_n K_3 - a_{12} j_n K_4 = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{dK_3}{dr} + j_n K_1 = 0, \quad \frac{dK_4}{dr} = 0, \quad \frac{dK_2}{dr} - mK_1 - K_2 = 0,$$

$$r = 0: K_1 < \infty, K_2 < \infty, K_3 < \infty, K_4 < \infty.$$

Здесь  $F(\lambda_{imm}, m, n, t) = \int_0^1 [R_{1s}^* K_1 + R_{2c}^* K_2 + R_{3s}^* K_3 + R_{4s}^* K_4] r dr$ ,

$$G_0(\lambda_{imm}, m, n) = \int_0^1 [U_{0c}^* K_1 + V_{0s}^* K_2 + W_{0c}^* K_3] r dr,$$

$$\dot{G}_0(\lambda_{imm}, m, n) = \int_0^1 [\dot{U}_{0c}^* K_1 + \dot{V}_{0s}^* K_2 + \dot{W}_{0c}^* K_3] r dr.$$

При исследовании системы (2.12) имеют место следующие случаи:  $m = 0$  и  $m \neq 0$ . Когда  $m = 0$ , рассматривается осесимметричная задача, решение которой получено автором в работе [7].

Для решения (2.12) при  $m \neq 0$  вводятся новые функции  $K_5, K_6$  на основании следующих представлений:

$$K_5 = r^s K_1, K_6 = r^s K_2. \quad (s = \pm 1). \quad (2.14)$$

Тогда частные решения системы дифференциальных уравнений (2.12) находятся методом разложения функций  $K_3 \div K_6$  в следующие степенные ряды:

$$\{K_3, K_4, K_5, K_6\} = r^\beta \sum_{f=0,2,4}^{\infty} \{E_f, R_f, Y_f, P_f\} r^f. \quad (\beta = \text{const}). \quad (2.15)$$

После подстановки (2.15) в (2.12) приравниваем нулю все множители с одинаковой степенью и получаем значения для параметра  $\beta$ , а также выражения для коэффициентов  $E_f, R_f, Y_f, P_f$ . В результате получаем четыре линейно независимых частных решений.

Подстановка полученных соотношений для  $K_1 \div K_4$  в граничные условия при  $r = 1$  (2.13) формирует однородную систему уравнений относительно постоянных  $D_1 \div D_4$ . Ра-



ыскивая ее нетривиальное решение, получаем трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений  $\lambda_{imm}$ , а также выражения для  $D_1 \div D_4$ . При этом полученные выражения для  $K_1 \div K_4$  удовлетворяют также и условия регулярности решения в центре пластины (краевые условия (2.13) при  $r = 0$ ).

Применяя к трансформанте (2.11) последовательно формулы обращения (2.9), (2.3), (2.2), получаем с учетом (2.1), (2.7) следующие разложения для  $U(r, \theta, z, t)$ ,  $V(r, \theta, z, t)$ ,  $W(r, \theta, z, t)$ ,  $\varphi(r, \theta, z, t)$ :

$$U(r, \theta, z, t) = H_1 + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{-1} \left[ H_4 + \sum_{i=1}^{\infty} GK_1 \|K_{imm}\|^{-2} \right] \cos(m\theta) \right\} \sin j_n z, \quad (2.16)$$

$$V(r, \theta, z, t) = H_1 + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \pi^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ H_5 + \sum_{i=1}^{\infty} GK_2 \|K_{imm}\|^{-2} \right] \sin(m\theta) \right\} \sin j_n z,$$

$$W(r, \theta, z, t) = H_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{-1} \left[ H_6 + \sum_{i=1}^{\infty} GK_3 \|K_{imm}\|^{-2} \right] \cos(m\theta) \right\} \cos j_n z,$$

$$\varphi(r, \theta, z, t) = H_3 + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{-1} \left[ H_7 + \sum_{i=1}^{\infty} GK_4 \|K_{imm}\|^{-2} \right] \cos(m\theta) \right\} \cos j_n z.$$

Разность потенциалов  $Q(t_*)$  между торцевыми электродированными плоскостями пьезокерамического цилиндра определяется с помощью следующего равенства:

$$Q(t_*) = (\pi a^2)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^a [\varphi(r_*, \theta, L, t_*) - \varphi(r_*, \theta, 0, t_*)] r_* dr_* d\theta. \quad (2.17)$$

### 3. Численный анализ результатов. Выводы

В качестве примера рассматривается пьезокерамический цилиндр ( $b = h = 0,01$  м) состава ЦТС-19, имеющего следующие физические характеристики материала:  $\{e_{31}, e_{33}, e_{15}\} = \{-3, 7; 11, 5; 10, 3\}$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{8, 08; 7, 73\} \times 10^{-9}$  Ф/м,  $\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}, C_{55}, C_{66}\} = \{13, 2; 6, 2; 6, 9; 10, 4; 2, 8; 3, 5\} \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 7400$  кг/м<sup>3</sup>.

В таблице приведены численные значения спектра частот собственных колебаний  $\omega_{imm}$  ( $m = 0, 1, 2, n, i = 1, 2, 3$ ) пьезокерамического цилиндра, полученные с помощью построенного в настоящей работе алгоритма (верхние числа) и численным методом конечных элементов с использованием программы ANSYS (нижние числа).

Следует отметить, что наименьшее расхождение численных значений  $\omega_{imm}$  наблюдается при вычислении первого тона ( $i = 1$ ) колебаний. Вместе с тем с ростом  $i$  разница в частотах, найденных аналитическим и численным методами, становится более существенной и достигает 9,8 %. Кроме того, интересно отметить, что первая частота собственных неосесимметричных колебаний соответствует образованию одной полуволны по угловой координате ( $m = 1$ ) и вдоль цилиндрической поверхности ( $n = 1$ ) исследуемого элемента.

Значения спектра частот собственных колебаний пьезокерамического цилиндра

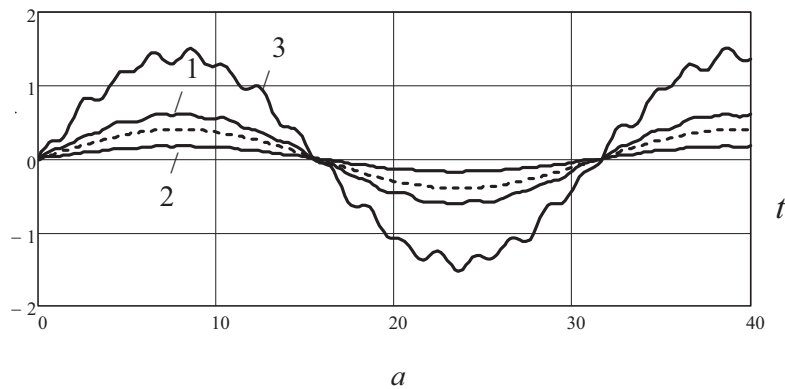
$\omega_{imn}$ , кГц	$m = 0$			$m = 1$			$m = 2$		
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$i = 1$	$\frac{113,4}{108,1}$	$\frac{257,2}{242,4}$	$\frac{317,9}{294,3}$	$\frac{77,2}{74,9}$	$\frac{165,5}{159,1}$	$\frac{251,6}{239,6}$	$\frac{92,8}{89,2}$	$\frac{169,6}{161,5}$	$\frac{252,5}{240,0}$
	$\frac{187,2}{176,6}$	$\frac{344,3}{324,8}$	$\frac{396,5}{370,6}$	$\frac{117,5}{114,1}$	$\frac{190,6}{183,2}$	$\frac{273,1}{260,1}$	$\frac{145,2}{138,3}$	$\frac{209,2}{195,5}$	$\frac{285,5}{264,3}$
$i = 3$	$\frac{226,9}{214,0}$	$\frac{434,5}{402,2}$	$\frac{485,1}{445,0}$	$\frac{158,7}{151,1}$	$\frac{214,1}{201,9}$	$\frac{287,5}{268,7}$	$\frac{195,1}{182,2}$	$\frac{247,1}{228,7}$	$\frac{315,7}{287,2}$

На рисунке приведены графики изменения вертикальных перемещений  $W(r, \theta, z, t)$  и разности потенциалов  $Q(t)$  во времени в случае действия на половине торцевой поверхности цилиндра ( $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$ ) равномерно-распределенной нагрузки интенсивностью  $q_0$  и различной частоты  $\mu$ :

$$q_1(r, \theta, t) = q_1(r, \theta, t) = q_0 H(\pi - \theta) \sin \mu t,$$

где  $H(\dots)$  – единичная функция Хэвисайда [21].

$$\{W(r, \theta, L, t), Q(t)\} / q_0$$



$$\{W(r, \theta, L, t), Q(t)\} / q_0$$

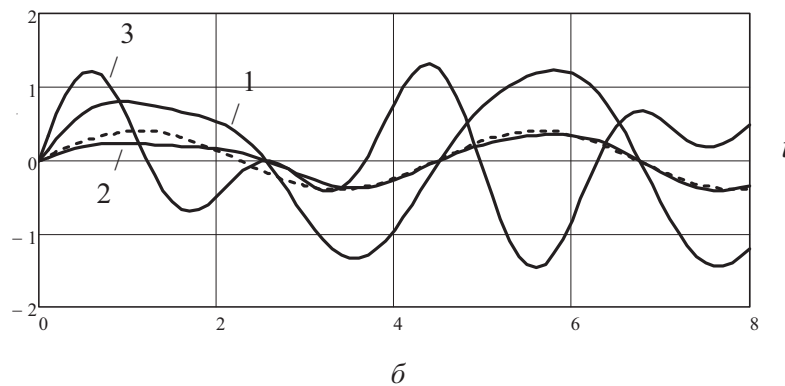


Рис. Графики изменения  $W(r, \theta, z, t)$  и  $Q(t)$  во времени:  $a - \mu = 0,2\lambda_{imn} (i, n, m = 1)$ ;  
 $b - \mu = 0,7\lambda_{imn} (i, n, m = 1)$ ; 1 –  $W(1, \pi/2, 0, t)$ ; 2 –  $W(1, 3\pi/2, 0, t)$ ; 3 –  $Q(t)$

Цифрами 1, 2, 3 соответственно обозначены функции  $W(1, \pi/2, 0, t)$ ,  $W(1, 3\pi/2, 0, t)$ ,  $Q(t)$ , а пунктирной линией показан характер изменения внешней нагрузки во времени.

Очевидно, что вертикальная компонента вектора перемещений на незагруженном участке при  $\theta = 3\pi/2$  существенно меньше соответствующих значений в зоне действия нагрузки при  $\theta = \pi/2$ .

Результаты расчета также показывают, что при действии гармонической нагрузки допущение о стационарном режиме вынужденных колебаний, используемое при исследовании динамических задач, справедливо только в случае, когда частоты вынужденных колебаний существенно меньше первой частоты собственных колебаний. При высокочастотном внешнем воздействии вследствие наложения отраженных волн деформирования наблюдается более сложная зависимость изменения напряженно-деформированного состояния и электрического поля системы во времени.

На основании проведенных исследований можно сформулировать основные результаты.

1. Построено новое замкнутое решение, позволяющее с помощью базовых расчетных соотношений описать работу типовых элементов пьезокерамических преобразователей резонансного и нерезонансного классов в виде сплошного цилиндра, подверженных действию динамической неосесимметричной механической нагрузки.

2. Численные результаты расчета показывают, что использование построенного алгоритма расчета позволяет, по сравнению с численными методами, получить более точные значения спектра частот собственных колебаний, напряженно-деформированного состояния и электрического поля пьезокерамического цилиндра.

3. В случае действия высокочастотной внешней гармонической нагрузки при исследовании упругих и электроупругих систем нельзя использовать допущение об установившемся режиме вынужденных колебаний.

## Библиографический список

1. Данов Г.А. Пьезоэлектрические трансформаторы. – М.: Энергоатомиздат, 2003. – 319 с.
2. Джагунов Р.Г., Ерофеев А.А. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления. – СПб.: Политехника, 1994. – 608 с.
3. Пьезоэлектрическое приборостроение. Т. 1. Физика сегнетоэлектрической керамики / А.В. Гориш [и др.]. – М., 1999. – 386 с.
4. Шульга Н.А. Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
5. Блочные схемы метода конечных элементов для динамических задач акустоэлектроупругости / А.В. Белоконь [и др.] // ПММ. – 2000. – Т. 64, № 3. – С. 381–393.
6. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – 279 с.
7. Сеницкий Ю.Э. Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для толстой круглой анизотропной пьезокерамической пластины // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – № 1. – С. 78–87.
8. Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для анизотропного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – № 1. – С. 73–81.

9. Шульга М.О. Определение электродвижущей силы пьезоэлектрических преобразователей при механических нагрузках // Докл. НАН Украины. – 2009. – № 1. – С. 70–74.
10. Шульга Н.А. Радиальные электромеханические нестационарные колебания полого пьезо-керамического цилиндра при электрическом возбуждении // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 2. – С. 30–35.
11. Quan Jiang, Cun-Fa Gao. Axisymmetric stress in an electrostrictive hollow cylinder under electric loading // Acta Mechanica. – 2010. – Vol. 211. – Iss. 3–4. – P. 309–321.
12. Wang Y., Xu R.Q., Ding H.J. Analytical solutions of functionally graded piezoelectric circular plates subjected to axisymmetric loads // Acta Mechanica. – 2010. – Vol. 215. – Iss. 1–4. – P. 287–305.
13. Лоза И.А. Решение задачи о неосесимметричных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров конечной длины // Докл. НАН Украины. – 2010. – № 6. – С. 52–58.
14. Григоренко А.А., Лоза И.А. О свободных неосесимметричных колебаниях полых пьезо-керамических цилиндров конечной длины с радиальной поляризацией // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46, № 11. – С. 20–30.
15. Лоза И.А. Неосесимметричные колебания полого неоднородного шара с пьезокерамическими слоями // Докл. НАН Украины. – 2011. – № 11. – С. 76–83.
16. Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований. Его перспективы в исследовании краевых задач механики // Вестник Саратов. гос. техн. ун-та. Серия математическая. – 2003. – Вып. 2. – С. 10–39.
17. Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований – обобщение классической процедуры разложения по собственным векторам-функциям // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Математика, механика, информатика. – 2011. – № 3(1). – С. 61–89.
18. Партон, В.З., Кудрявцев Б.А. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 470 с.
19. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
20. Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 4. – С. 57–63.
21. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1978. – 318 с.

## References

1. Danov G.A. P'ezoelektricheskie transformatory [Piezoelectric transformers]. Moscow: Energoatomizdat, 2003. 319 p.
2. Dzhagupov R.G., Erofeev A.A. P'ezoelektronnye ustroystva vychislitel'noi tekhniki, sistem kontrolya i upravleniya [Piezoelektronnye computing devices, monitoring and control systems]. Saint Petersburg: Politekhnik, 1994. 608 p.
3. Gohrich A.V. [et al.] P'ezoelektricheskoe priborostroenie. T. 1. Fizika segnetoelektricheskoi keramiki [Piezoelectric instrument. Vol. 1. The physics of ferroelectric ceramics]. Moscow, 1999. 386 p.
4. Shul'ga N.A., Bolkisev A.M. Kolebaniia p'ezoelektricheskikh tel [Fluctuations piezoelectric tel]. Kiev: Naukova dumka, 1990. 228 p.
5. Belokon A.V. [et al.] Blochnye skhemy metoda konechnykh elementov dlia dinamicheskikh zadach akustoelektro-uprugosti [The block scheme of the method of finite elements for dynamic problems akustoelektro-uprugosti]. *J. Appl. Math. Mech.*, 2000, vol. 64, no. 3, pp. 381–393.
6. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. Mekhanika svyazannykh polei v elementakh konstruktсии [Mechanics of coupled fields in structural elements]. Kiev: Naukova dumka, 1989. 279 p.
7. Senitsky Yu.E., Shlyakhin D.A. Nestacionarnaia osesimmetrichnaia zadacha elektrouprugosti dlia tolstoi krugloi anizotropnoi p'ezokeramicheskoi plastiny [The nonstationary axisymmetric problem

of electroelasticity for a thick circular anisotropic piezoceramic plate]. *Mech. Solids.*, 1999, vol. 34, no. 1, pp. 66-74.

8. Shlyakhin D.A. Nestatsionarnaia osesimmetrichnaia zadacha elektropugosti dlia anizotropnogo p'ezokeramicheskogo radial'no poliarizovannogo tsilindra [Nonstationary axisymmetric electroelasticity problem for an anisotropic piezoceramic radially polarized cylinder]. *Mech. Solids.*, 2009, vol. 44, no. 1, pp. 62-69.

9. Shul'ga N.A. Opredelenie elektrovizhushhei sily p'ezoelektricheskikh preobrazovatelei pri mekhanicheskikh nagruzkakh [Determination of electromotive force of the piezoelectric transducers in the mechanical loads]. *Doklady Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy*, 2009, no. 1, pp. 70-74.

10. Shul'ga N.A. Radial'nye elektromekhanicheskie nestatsionarnye kolebaniia pologo p'ezokeramicheskogo tsilindra pri elektricheskoi vozbuzhdenii [Determination of electromotive force of the piezoelectric transducers in the mechanical loads]. *Doklady Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy*, 2009, no. 1, pp. 70-74.

11. Quan Jiang, Cun-Fa Gao. Axisymmetric stress in an electrostrictive hollow cylinder under electric loading. *Acta Mechanica*, 2010, vol. 211, iss. 3-4, pp. 309-321.

12. Wang Y., Xu R.Q., Ding H.J. Analytical solutions of functionally graded piezoelectric circular plates subjected to axisymmetric loads. *Acta Mechanica*, 2010, vol. 215, iss. 1-4, pp. 287-305.

13. Loza I.A. Reshenie zadachi o neosesimmetrichnykh kolebaniyakh polykh p'ezokeramicheskikh tsilindrov konechnoi dliny [The solution of the problem on non-axisymmetric vibrations of hollow piezoceramic cylinders with finite length]. *Doklady Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy*, 2010, no. 6, pp. 52-58.

14. Grigorenko A.A., Loza I.A. O svobodnykh neosesimmetrichnykh kolebaniyakh polykh p'ezokeramicheskikh tsilindrov konechnoi dliny s radial'noi poliarizatsiei [On free axisymmetric vibrations of piezoceramic hollow cylinder of finite length with radial polarization]. *Applied Mechanics*, 2010, vol. 46, no. 11, pp. 20-30.

15. Loza I.A. Neosesimmetrichnye kolebaniia pologo neodnorodnogo shara s p'ezokeramicheskimi sloiami [Non-axisymmetric natural vibrations of a hollow inhomogeneous sphere with piezoceramic layers]. *Doklady Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy*, 2011, no. 11, pp. 76-83.

16. Senitsky Yu.E. Metod konechnykh integral'nykh preobrazovaniy. Ego perspektivy v issledovanii kraevykh zadach mekhaniki [The method of finite integral transformations. Its prospects in the study of boundary value problems of mechanics]. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Matematika*, 2003, iss. 2, pp. 10-39.

17. Senitsky Yu.E. Metod konechnykh integral'nykh preobrazovaniy – obobshchenie klassicheskoi protsedury razlozheniya po sobstvennym vektor-funktsiyam [Finite integral transform is a generalization of the classical procedure of expansion in eigen vector-functions]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2011, no. 3(1), pp. 61-89.

18. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Elektropugost' p'ezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel [Electroelasticity piezoelectric and conductive body]. Moscow: Nauka, 1988. 470 p.

19. Sneddon I.N. Preobrazovaniia Fur'e [Fourier transforms]. Moscow: Izdatelstvo inostrannoi literatury, 1955. 668 p.

20. Senitsky Yu.E. Mnogokomponentnoe obobshchennoe konechnoe integral'noe preobrazovanie i ego prilozhenie k nestatsionarnym zadacham mekhaniki [Multicomponent generalized finite integral transformation and its application to non-stationary problems of mechanics]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 1991, no. 4, pp. 57-63.

21. Vladimirov V.S. Obobshchennyye funktsii v matematicheskoi fizike [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1978. 318 p.