



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.05

УДК 538.3

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

1. УПРУГОСТЬ, ТЕРМОУПРУГОСТЬ И ПОРОУПРУГОСТЬ

С.А. Лычев^{1, 2, 3, 4}, А.Д. Полянин^{1, 2, 3}, А.Л. Левитин¹

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

³Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

⁴Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 26 января 2015 г.

Принята: 16 июня 2015 г.

Опубликована: 30 июня 2015 г.

Ключевые слова:

линейные системы уравнений с частными производными, декомпозиция, точные решения, деформируемое твердое тело, упругость, термоупругость, пороупругость, статика, динамика, связанные поля

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена развитию методов декомпозиции систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих в механике сплошных сред, в частности, в теории упругости, термоупругости и пороупругости. Эти методы основаны на расщеплении систем связанных уравнений на несколько более простых независимых уравнений. Декомпозиция существенно упрощает качественное исследование и интерпретацию наиболее важных физических свойств связанных трехмерных уравнений, эффективно позволяя изучать их волновые и диссипативные свойства. Кроме того, декомпозиция в ряде случаев дает возможность находить точные аналитические решения соответствующих краевых и начально-краевых задач и существенно упрощает применение численных методов, позволяя использовать стандартные подпрограммы для более простых независимых уравнений и подсистем.

В первой части статьи приведены различные системы уравнений, в том числе уравнения теории упругости в форме Tedone и в форме Beltrami–Donati–Michell, построены их динамические обобщения, даны различные формы уравнений классической и гиперболической термоупругости, уравнения пороупругости. Указан ряд фактов исторического характера, которые непосредственно связаны с рассматриваемыми в статье представлениями решений и слабо отражены в русскоязычной литературе.

Приведены различные варианты декомпозиции и их обобщения. Подробно рассмотрены представления решений динамических систем уравнений, получаемых в результате тороидальной-полоидальной декомпозиции, декомпозиций типа Green–Lamé, Cauchy–Kovalevski–Somigliana, Naghdi–Hsu–Chandrasekharaiah, Teodorescu. Отдельно рассмотрены их аналоги для статических уравнений. Построено обобщение представления Савина на динамические уравнения упругости. Приведены представления в криволинейных координатах, в частности, представления Boussinesq, Timpe, Love, Michell, Muki. Даны библиографические ссылки на оригинальные работы.

© ПНИПУ

© Лычев Сергей Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, e-mail: lychevsa@mail.ru

Полянин Андрей Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: polyaniin@ipmnet.ru

Левитин Александр Леонидович – младший научный сотрудник, e-mail: alex_lev@ipmnet.ru

Sergey A. Lychev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: lychevsa@mail.ru

Andrey D. Polyaniin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Principle Researcher, e-mail: polyaniin@ipmnet.ru

Alexander L. Levitin – Junior Researcher, e-mail: alex_lev@ipmnet.ru

DECOMPOSITION OF SYSTEMS OF EQUATIONS FOR CONTINUUM MECHANICS

1. ELASTICITY, THERMOELASTICITY, POROELASTICITY

S.A. Lychev^{1, 2, 3, 4}, A.D. Polyinin^{1, 2, 3}, A.L. Levitin¹

¹Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

³National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russian Federation

⁴Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 January 2015

Accepted: 16 June 2015

Published: 30 June 2015

Keywords:

linear systems of partial differential equations, decomposition, exact solutions, deformable solid, elasticity, thermoelasticity, poroelasticity, statics, dynamics, coupled fields

ABSTRACT

The work is devoted to the development of decomposition methods for systems of linear partial differential equations that arise in continuum mechanics, in particular, in the theory of elasticity and thermoelasticity and poro-elasticity. These methods are based on the decomposition (splitting) of systems of coupled equations into several independent equations. The decomposition significantly simplifies the qualitative study and interpretation of the most important physical properties related to three-dimensional equations and allows an effective study of their wave and dissipative properties. Moreover in certain cases the decomposition makes it possible to find exact analytical solutions of the corresponding boundary and initial-boundary value problems, and greatly simplifies the application of numerical methods, allowing us to use the appropriate routines for simpler equations and independent subsystems. In the first part of the work various systems of equations, including equations of elasticity theory in the form of Tedone and in the form of Beltrami–Donati–Michell are given, their dynamic generalizations are proposed, and various forms of the equations of classical and hyperbolic thermoelasticity as well as the equations poroelasticity are described. A number of historical facts, which are directly related with the considered questions and weakly reflected in Russian literature, are presented.

Various types of decomposition and their generalizations are described. The representation of solutions of dynamical systems of equations resulting from the toroidal-polooidal decomposition, as well as the decompositions of Green–Lamé, Cauchy–Kovalevski–Somigliana, Naghdi–Hsu–Chandrasekharaiah, and Teodorescu types are discussed in details. Special attention is given to their static analogues. A generalization of the representation of Savin for the dynamic equations of elasticity is obtained. The representations in curvilinear coordinates, in particular, the representations of Boussinesq, Timpe, Love, Michell, and Muki types are given. The bibliographical references to the original papers are listed.

© PNRPU

Введение

Различные способы декомпозиции систем уравнений механики деформируемого твердого тела и механики жидкости, приводящие их к более простым уравнениям (в частности, несвязанным), предлагались с середины XIX века. Ряд таких преобразований приведен в классических монографиях, например [1–6], однако их обоснование, как правило, основано на интуитивно понятных частных свойствах рассматриваемых систем. Кроме того, основное внимание уделялось уравнениям линейной теории упругости. В настоящей работе предлагается систематический подход к декомпозиции систем уравнений различных классов трехмерных линейных (и модельных нелинейных) систем уравнений, которые используются в теории упругости, термоупругости и термовязкоупругости, в механике вязких и вязкоупругих несжимаемых жидкостей и сжимаемых баротропных газов.

Статья состоит из двух частей*. Первая часть имеет обзорный характер. В ней приведены и систематизированы известные методы декомпозиции уравнений упругости,

* Вторая часть статьи будет опубликована в журнале «Вестник ПНИПУ. Механика», № 3. В ней предлагаются общие методы декомпозиции, обобщающие классические представления.

термоупругости и пороупругости. Первая часть также содержит материал исторического характера: указан ряд фактов, которые непосредственно связаны с рассматриваемыми в статье представлениями решений и слабо отражены в русскоязычной литературе. Отметим, что исторические аспекты довольно полно изложены в многотомном справочном издании *Handbuch der Physik (Encyclopedia of Physics)*, издаваемом под редакцией S. Flügge с 1926 по 1988 год, в частности, в статьях [2, 7, 8].

1. Теорема разложения Гельмгольца и ее обобщения

Большинство преобразований опирается на представление достаточно гладкого векторного поля \mathbf{u} в форме разложения на безвихревую \mathbf{u}_1 и соленоидальную \mathbf{u}_2 части:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \nabla \times \mathbf{u}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0. \quad (1.1)$$

Это разложение может быть получено из разложения Stokes-Helmholtz

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\vartheta}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0}. \quad (1.2)$$

Скалярная функция φ носит название скалярного потенциала, векторная функция $\boldsymbol{\psi}$ – векторного потенциала, $\boldsymbol{\vartheta}$ – гармонической части разложения. Компоненты φ , $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\vartheta}$ представления (1.2) находятся из выражений

$$\varphi = \mathcal{G}(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\psi} = -\mathcal{G}(\nabla \times \mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\vartheta} = \mathcal{S}_1\mathbf{u} + \mathcal{S}_2\mathbf{u}, \quad (1.3)$$

где операторы \mathcal{G} и \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 определяются следующим образом:

$$\mathcal{G}(\alpha) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\alpha(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}'), \quad \mathcal{G}(\mathbf{u}) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}'),$$

$$\mathcal{S}_1\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}') dA(\mathbf{r}'), \quad \mathcal{S}_2\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{u}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}' dA(\mathbf{r}').$$

Здесь α – скалярная функция; \mathbf{u} – векторная функция; \mathbf{n}' – внешняя единичная нормаль к границе области, в которой определяется разложение (1.2).

Часто бывает удобным включить гармоническую часть $\boldsymbol{\vartheta}$ в слагаемые, отвечающие скалярному и векторному потенциалам. Тогда представление (1.2) принимает сокращенный вид:

$$\mathbf{u} = \nabla\tilde{\varphi} + \nabla \times \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \quad \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ – скалярный и векторный потенциалы, которые определяются операторами \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 :

$$\tilde{\varphi} = \mathcal{G}_1(\mathbf{u}) = \mathcal{G}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathcal{S}_1\mathbf{u}, \quad \tilde{\boldsymbol{\psi}} = \mathcal{G}_2(\mathbf{u}) = -\mathcal{G}(\nabla \times \mathbf{u}) + \mathcal{S}_2\mathbf{u}. \quad (1.5)$$

Очевидно, что первое слагаемое представления (1.4) определяет безвихревую часть разложения (1.1) \mathbf{u}_1 , а второе – соленоидальную \mathbf{u}_2 , т.е.

$$\mathbf{u}_1 = \nabla\tilde{\varphi}, \quad \mathbf{u}_2 = \nabla \times \tilde{\boldsymbol{\psi}}.$$

Далее не будем различать обозначения потенциалов (1.3), (1.5) и опустим знак тильды, полагая, что их определение понятно из контекста.

Формулировка и обоснование разложения (1.2) в декартовых координатах для ограниченной области евклидова пространства впервые была приведена в работе Stokes в 1849 г. [9, p. 9]. Заметим, что эта работа посвящена теории дифракции, которая разрабатывалась Stokes'ом на основе уравнений малых колебаний упругой среды. Чуть позже, в 1858 г., в работе [10, p. 38] Helmholtz использовал аналогичное представление (в декартовых координатах) для поиска некоторых точных решений линейризованных уравнений гидродинамики. Впоследствии разложение Stokes–Helmholtz было сформулировано для произвольных криволинейных координат, в частности, в прямой бескоординатной форме (Gibbs, 1901 [11, p. 234]).

Отдельно рассматриваются случаи, когда область \mathcal{D} оказывается неограниченной. При этом, в силу известной теоремы Лиувилля ([12, с. 270] или [13, с. 111]), гармоническая функция \mathfrak{H} , при условии ее ограниченности и знакопостоянности, оказывается константой. В связи с этим разложение Stokes–Helmholtz (1.2) определяется с точностью до постоянной, которая должна обращаться в нуль, если дополнительно указываются условия для поля на бесконечности. Кроме того, для существования интегралов, определяющих скалярный и векторный потенциалы, необходимо указать асимптотические условия для поля \mathbf{u} на бесконечности. В современных руководствах по математической физике (например, [14, p. 97]) приводится классическое доказательство для неограниченной области с условиями

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(|\mathbf{r}|^{-3}), \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

Условия (1.6) существенно ограничивают применимость разложений, в частности, в задачах механики континуума, так как асимптотическое поведение, например, полей перемещений на бесконечности может иметь меньший порядок убывания. Кроме того, условие (1.6) исключает жесткое перемещение среды. Условия (1.6) могут быть уточнены, а именно, может быть указан асимптотический порядок для «деформационной» компоненты представляемого поля. В частности, Gurtin [15] в 1961 г. показал, что представление Stokes–Helmholtz (1.2) может быть использовано для более широкого класса полей, удовлетворяющих следующей асимптотической оценке:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{c} + \mathcal{O}(|\mathbf{r}|^{-\delta}), \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \quad \delta > 0.$$

Здесь \mathbf{c} – постоянное векторное поле, определяющее жесткое перемещение среды.

Примеры использования представления Stokes–Helmholtz (1.2) как в классической интерпретации, т.е. для представления достаточно гладких векторных полей, так и в интерпретации, адаптированной к теории операторов в гильбертовых пространствах, в задачах гидромеханики приведены, например, в работах О.А. Ладыженской [16], А.Д. Полянина [17–19], Morino [20], О.В. Воинова [21] и др.

Соленоидальную часть (1.2), определяемую ротором векторного потенциала $\boldsymbol{\psi}$, можно представить в виде двух слагаемых, определяемых ротором и повторным ротором произведений достаточно гладких скалярных функций ϕ , χ и радиус-вектора \mathbf{r} , что приводит к следующему выражению:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times (\mathbf{r}\phi) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\chi). \quad (1.7)$$

Представление (1.7) впервые было введено в теории магнитного поля Земли и имеет название полоидально-тороидальной декомпозиции (Backus [22]). Доказательство того, что такое разложение может представить произвольную достаточно гладкую векторную функцию, определенную в области, гомеоморфной шару, получено в ряде работ, в частности Kaiser [23], Padmavati, Amaranath [24], Chadwick, Trowbridge [25].

Отметим еще один способ представления гладкого векторного поля через три скалярные функции φ , ϕ , χ [26]:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \chi \nabla\phi. \quad (1.8)$$

Преимущества представлений (1.7) и (1.8) состоит в том, что они не избыточны: три компоненты поля представляются через три скалярные функции, в то время как представление Stokes–Helmholtz (1.2) содержит четыре функции.

2. Различные формы уравнений линейной теории упругости

Уравнения движения Navier–Cauchy для однородной изотропной среды имеют вид [2, 5, 6, 27]

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – векторное поле перемещений; $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ – вектор места; (x, y, z) – упорядоченная тройка декартовых координат; t – время; λ , μ – упругие модули Ламе (μ – модуль сдвига); ρ – плотность массы. Точками обозначены производные по времени t . Символом Δ обозначен оператор Лапласа,

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}, \quad (2.2)$$

символами $(\nabla \nabla \cdot)$ – градиент дивергенции,

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{i}\partial_x + \mathbf{j}\partial_y + \mathbf{k}\partial_z)(\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z). \quad (2.3)$$

Векторное поле внешних (объемных) сил обозначается символом \mathbf{f} .

Вместо упругих модулей Ламе часто используются «технические» модули (соотношения между различными модулями (см. например [5, с. 114] или [2, с. 79]), а именно модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Из термодинамических соображений, сводящихся к условию того, что при любой бесконечно малой деформации из естественной конфигурации производится положительная работа, следуют неравенства [2, 5]

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0.$$

Из этих неравенств вытекает, что, вообще говоря, коэффициент Пуассона ν может быть отрицательным (вещества с такими свойствами – ауксетики рассматриваются, например, в [28]).

Уравнения (2.1) были впервые получены Navier (1821) из представлений о молекулярной структуре сплошной среды, которая соответствовала так называемой одноконстантной модели ($\mu = \lambda$) [29]. Общая форма (для $\mu \neq \lambda$) была получена Cauchy (1822, 1828) [30]. Исторические аспекты получения и исследования этих уравнений приведены в [31, 32].

Для анализа уравнения (2.1) целесообразно ввести безразмерные переменные

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{R}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{R}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

где R – некоторый характерный линейный размер тела (например, диаметр шара, описанного около тела). В безразмерной форме уравнение (2.1) имеет вид

$$\Delta \mathbf{u} + k \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.4)$$

Здесь введены обозначения

$$k = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad \mathbf{b} = R \frac{\mathbf{f}}{\mu}.$$

Безразмерная форма уравнений (2.4) является наиболее компактной и систематически используется в настоящей работе. Различие в обозначениях размерных и безразмерных величин (тильда) в (2.4) и далее опускается.

Уравнение Navier–Cauchy (2.4) можно записать в формальной операторной форме:

$$L[\mathbf{u}] + \nabla K[\mathbf{u}] = \mathbf{b}, \quad L[\mathbf{u}] = (\partial_{tt} - \Delta)\mathbf{u}, \quad K[\mathbf{u}] = -k \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Эта форма записи будет использована для построения общих представлений решений.

Построение аналитических решений краевых задач, определяемых уравнениями (2.4), осложняется тем, что они одновременно содержат оператор Лапласа (2.2) и градиент дивергенции (2.3). Различные способы представления решения в форме аналитических комбинаций решений более простых уравнений, таких как уравнения Лапласа, Пуассона, волнового уравнения и их степеней, связаны с различными формами уравнения (2.4). Кратко остановимся на некоторых из них.

1. С учетом тождества

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

уравнение (3.4) может быть преобразовано к виду

$$(k + 1) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.5)$$

Для формулировки уравнений удобно использовать волновые операторы (операторы Д’Аламбера) \square_1, \square_2 ,

$$\square_1 = (k + 1) \Delta - \partial_{tt}, \quad \square_2 = \Delta - \partial_{tt}.$$

Тогда уравнение (2.4) может быть записано в форме

$$\square_2 \mathbf{u} + k \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{b}.$$

Уравнение (2.5) в размерном виде может быть записано следующим образом:

$$c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{f} / \rho = \ddot{\mathbf{u}},$$

где $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$ – скорость продольных волн (p-волн, первых волн, primary waves, т.е. первых волн, регистрируемых в геофизике первыми); $c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$ – скорость поперечных волн (s-волн, secondary waves).

В статическом приближении ($\ddot{\mathbf{u}} \equiv 0$) уравнения (2.4), (2.5) приводятся к виду

$$\Delta \mathbf{u} + k \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} = 0, \quad (k+1) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Вскоре после формулировки уравнений движения (2.1) была отмечена их связь с волновыми уравнениями, а именно при $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \square_1 \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \square_2 \mathbf{u} = 0.$$

На первое из этих уравнений указал Lamé (1852) [27], а на второе – Cauchy (1840) [33].

2. Вычисляя дивергенцию и ротор левой части уравнения (2.5), приходим к скалярному и векторному уравнениям:

$$(k+1) \nabla \Delta \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{b} = \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}, \quad -\nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})) + \nabla \times \mathbf{b} = \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}.$$

Последнее уравнение с учетом соотношения

$$\nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})) = -\Delta (\nabla \times \mathbf{u})$$

преобразуется к виду

$$\Delta (\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla \times \mathbf{b} = \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}.$$

Если ввести новые искомые функции

$$\vartheta = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\psi} = \nabla \times \mathbf{u},$$

первая из которых имеет смысл дилатации (относительного изменения объема), то приходим к двум независимым уравнениям

$$(k+1) \Delta \vartheta + \nabla \cdot \mathbf{b} = \ddot{\vartheta}, \quad \Delta \boldsymbol{\psi} + \nabla \times \mathbf{b} = \ddot{\boldsymbol{\psi}}. \quad (2.6)$$

Из последнего уравнения вытекает, что если $(k+1) \neq 0$ и поле \mathbf{b} удовлетворяет условиям $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$, $\nabla \times \mathbf{b} = 0$, то поле \mathbf{u} в статическом приближении является бигармоническим, т.е. удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

На это обстоятельство впервые указал Cauchy (1828) (см. также [2]).

3. Из первого соотношения (2.6) и тождества

$$\Delta (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{u} + 2 \nabla \cdot \mathbf{u}$$

вытекает выражение для градиента дилатации

$$\nabla \vartheta = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left(\Delta (\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \mathbf{b}}{k+1} \mathbf{r} \right).$$

Подставляя результат в уравнения Navier–Cauchy, приходим к уравнениям в форме

$$\Delta \left(\mathbf{u} + \frac{k}{2} \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) - \frac{k}{k+1} \mathbf{r} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{u}} + \frac{k}{k+1} \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

В статическом приближении ($\ddot{\mathbf{u}} \equiv 0$) приходим к двум независимым уравнениям (Tedone [34], 1903 г.)

$$(k+1)\Delta\vartheta + \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \Delta(\mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{0},$$

где введены следующие векторные переменные:

$$\mathbf{w} = \frac{k}{k+1} \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} + \frac{k}{2} \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

4. В цилиндрических координатах $\{r, \varphi, z\}$

$$x_1 = x = r \cos \varphi, \quad x_2 = y = r \sin \varphi, \quad x_3 = z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

соответствующие нормированные (физические) локальные базисы $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ определяются соотношениями

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{i}_3.$$

Векторная форма уравнений Navier–Cauchy (2.4) остается инвариантной, однако явные выражения для разложений полей и дифференциальных операторов записываются в терминах разложений по локальным базисам, т.е.

$$\Delta \mathbf{u} + k \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\varphi \mathbf{e}_\varphi + u_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{b} = b_r \mathbf{e}_r + b_\varphi \mathbf{e}_\varphi + b_z \mathbf{e}_z,$$

$$\Delta b = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r b) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} b + \partial_{zz} b,$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{e}_r \left(\Delta u_r - \frac{1}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \partial_\varphi u_\varphi \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\Delta u_\varphi - \frac{1}{r^2} u_\varphi + \frac{2}{r^2} \partial_\varphi u_r \right) + \mathbf{e}_z \Delta u_z,$$

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \left(\mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \partial_\varphi + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{r} \partial_r (r u_r) + \frac{1}{r} \partial_\varphi u_\varphi + \partial_z u_z \right).$$

В осесимметричном случае $u_r = u_r(r, z)$, $u_z = u_z(r, z)$ уравнения Navier–Cauchy эквивалентны системе двух уравнений

$$(k+1) \partial_r \vartheta + \partial_z \Omega + b_r = \ddot{u}_r, \quad (k+1) \partial_z (r \vartheta) - \partial_r (r \Omega) + b_\varphi = \ddot{u}_\varphi,$$

где

$$\vartheta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \partial_r (r u_r) + \partial_z u_z, \quad \Omega = \mathbf{e}_\varphi \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = \partial_z u_r - \partial_r u_z.$$

Взаимосвязь различных форм уравнения Navier–Cauchy (2.4) показана на рис. 1.

Еще один класс уравнений, связанный с уравнениями Navier–Cauchy (2.4), использует дифференциальный оператор несовместности Ink, который характеризует несовместность свободных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ (под свободными деформациями понимается гладкое тензорное поле, которое, вообще говоря, не является градиентом какого-либо гладкого векторного поля [35]):

$$\text{Ink } \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^\top = \mathbf{A}. \quad (2.7)$$

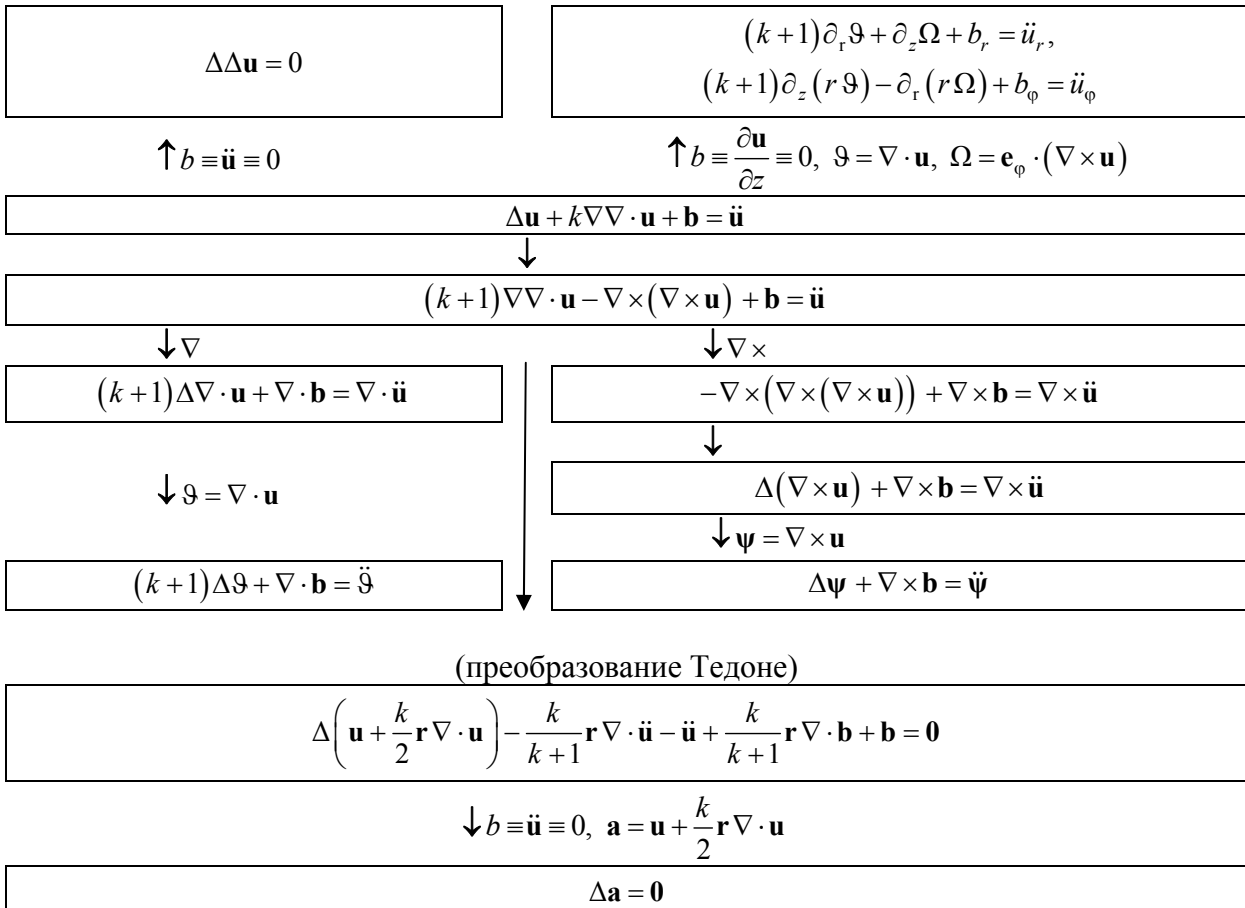


Рис. 1. Взаимосвязь уравнений линейной изотропной теории упругости

Действие оператора Ink на деформации, порожденные некоторым векторным полем перемещений \mathbf{u} , дает нуль, т.е.

$$\text{Ink def } \mathbf{u} = 0.$$

Здесь $\text{def } \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$ – оператор, вычисляющий симметрическую часть градиента \mathbf{u} («деформация» векторного поля). Тензорное поле \mathbf{A} характеризует несовместность свободных деформаций, которая является источником внутренних напряжений. В теории дефектов эта величина может быть ассоциирована с плотностью дислокаций [35].

Будем полагать, что тензорное поле \mathbf{A} симметрично, и, следовательно, симметрично поле $\boldsymbol{\varepsilon}$. Для произвольного симметричного поля $\boldsymbol{\varepsilon}$ имеет место тождество [2, с. 41], [26] ($\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$ – след тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$):

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^T = -\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla\nabla(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) + 2 \text{def } \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{I}(\Delta(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) - \nabla \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (2.8)$$

Вычисление следа левой и правой части (2.7) с учетом этого тождества приводит к равенству

$$\Delta(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) - \nabla \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \text{tr } \mathbf{A}. \quad (2.9)$$

Полагая, что рассматривается линейно-упругая изотропная среда, воспользуемся законом Гука для выражения деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ через напряжения \mathbf{T}

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\mathbf{T} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T} \right). \quad (2.10)$$

Подстановка (2.10) в (2.7) с учетом тождеств (2.8), (2.9) приводит к уравнению

$$-\Delta \mathbf{T} - 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\operatorname{tr} \mathbf{T}) + 2 \operatorname{def} \nabla \cdot \mathbf{T} + \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \mathbf{I} \Delta \operatorname{tr} \mathbf{T} = \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{B}_1 = 2\mu (\mathbf{A} - \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{A}). \quad (2.11)$$

Полученное уравнение определяет связь между мерой несовместности свободных деформаций, определяемых симметричным тензорным полем \mathbf{A} и симметричным полем напряжений \mathbf{T} , т.е. систему шести уравнений. Эта система может быть преобразована к иному виду, если воспользоваться соотношением, связывающим след левой части и след правой части уравнения (2.11), т.е.

$$\frac{2\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \Delta (\operatorname{tr} \mathbf{T}) = 2\mu \operatorname{tr} \mathbf{A} + \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (2.12)$$

Подставляя выражение для $\Delta (\operatorname{tr} \mathbf{T})$ из (2.12) в (2.11), приходим к уравнению

$$-\Delta \mathbf{T} - 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\operatorname{tr} \mathbf{T}) + 2 \operatorname{def} \nabla \cdot \mathbf{T} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{B}_2, \quad \mathbf{B}_2 = 2\mu \left(\mathbf{A} - 2 \frac{\lambda + \mu}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{A} \right). \quad (2.13)$$

Уравнения (2.11), (2.13) не связаны с уравнениями равновесия и определяют несбалансированное поле напряжений, реализуемое, вообще говоря, только при некотором специально подобранном поле внешних сил.

Для получения уравнений, характеризующих сбалансированные относительно заданного поля внешних сил \mathbf{f} напряжения, используем уравнения баланса импульса

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}. \quad (2.14)$$

Исключая из системы уравнений (2.13), (2.14) след тензора напряжений, получаем уравнение

$$-\Delta \mathbf{T} - 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\operatorname{tr} \mathbf{T}) + 2 \operatorname{def} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) = \mathbf{B}_2. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) характеризует сбалансированное (относительно заданного поля внешних сил \mathbf{f}) поле напряжений, которое возникает в теле вследствие двух причин: внешних \mathbf{f} и внутренних \mathbf{A} .

Исключение напряжений из уравнения (2.15), которые могут быть выражены через перемещения \mathbf{u} из напряженной отсчетной конфигурации в актуальную согласно закону состояния

$$\mathbf{T} - \mathbf{T}_0 = 2\mu \operatorname{def} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{T} - \operatorname{tr} \mathbf{T}_0 = (2\mu + 3\lambda) \nabla \cdot \mathbf{u},$$

приводит к уравнениям относительно \mathbf{u} :

$$-\Delta (2\mu \operatorname{def} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}) - 2(\mu + \lambda) \nabla \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2 \operatorname{def} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) = \mathbf{B}_3,$$

$$\mathbf{B}_3 = 2\mu \left(\mathbf{A} - 2 \frac{\lambda + \mu}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{A} \right) + \Delta \mathbf{T}_0 + 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\operatorname{tr} \mathbf{T}_0).$$

Здесь \mathbf{T}_0 – напряжения в отсчетной конфигурации. Левая часть полученного уравнения допускает факторизацию

$$-\left(2\text{def} + \mathbf{I} \frac{\lambda + \mu}{2\mu + \lambda} \nabla \cdot\right) (\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{B}_3. \quad (2.16)$$

Как и следовало ожидать, приходим к уравнению Navier–Cauchy (2.1) с дополнительным неоднородным членом \mathbf{f}_A («фиктивной нагрузкой»)

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} + \mathbf{f}_A = \rho \ddot{\mathbf{u}},$$

который, в свою очередь, удовлетворяет уравнению

$$2\text{def} \mathbf{f}_A + \mathbf{I} \frac{\lambda + \mu}{2\mu + \lambda} \nabla \cdot \mathbf{f}_A + \mathbf{B}_3 = \mathbf{0}.$$

Исключение из (2.13) ускорений с помощью соотношений

$$\text{def} \ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \left(\ddot{\mathbf{T}} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \mathbf{I} \text{tr} \ddot{\mathbf{T}} \right), \quad \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \text{tr} \ddot{\mathbf{T}}$$

приводит к уравнению в форме (здесь $\square_2 = \mu \Delta - \rho \partial_{tt}$)

$$\square_2 \mathbf{T} + 2\mu \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{T}) + \frac{\lambda(\mu + \lambda)\rho}{(2\mu + 3\lambda)^2} \mathbf{I} \text{tr} \ddot{\mathbf{T}} + 2\mu \text{def} \mathbf{f} + \frac{\lambda\mu}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{f} = -\mu \mathbf{B}_2. \quad (2.17)$$

В частном случае, когда внутренние источники напряжений отсутствуют ($\mathbf{A} = \mathbf{0}, \mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$), уравнение (2.17) принимает вид (Teodorescu [36])

$$\square_2 \mathbf{T} + 2\mu \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{T}) + \frac{\lambda(\mu + \lambda)\rho}{(2\mu + 3\lambda)^2} \mathbf{I} \text{tr} \ddot{\mathbf{T}} + 2\mu \text{def} \mathbf{f} + \frac{\lambda\mu}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Уравнение (2.15) при $\mathbf{A} = \mathbf{0}, \mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$ переходит в динамический вариант уравнения Beltrami–Michell:

$$\Delta \mathbf{T} + 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{T}) - 2 \text{def} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

В статическом приближении ($\ddot{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{0}$) приходим к уравнениям

$$\Delta \mathbf{T} + 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{T}) + 2 \text{def} \mathbf{f} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}. \# \quad (2.19)$$

Однородное уравнение (2.19) (для $\mathbf{f} = \mathbf{0}$) было получено в 1892 г. Beltrami [37], а неоднородное в 1894 г. Donati [38] и, независимо, в 1899 г. Michell [39]. Правильнее было бы называть уравнением Beltrami–Donati–Michell, а не Beltrami–Michell, как это принято в литературе.

В безразмерных переменных

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{R}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{R}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \tilde{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{\mu}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_1 = 2R^2 (\mathbf{A} - \mathbf{I} \text{tr} \mathbf{A}), \quad \tilde{\mathbf{B}}_2 = 2R^2 \left(\mathbf{A} - 2 \frac{\lambda + \mu}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \text{tr} \mathbf{A} \right)$$

уравнения преобразуются к виду, представленному в табл. 1. В записи, как и ранее, знак тильды опущен, а безразмерные коэффициенты определяются соотношениями

$$\mathcal{A}_1 = 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} = 2 \frac{k}{3k - 1}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} = \frac{k - 1}{3k - 1}, \quad \mathcal{A}_3 = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} = \frac{k - 1}{k + 1},$$

$$\mathcal{A}_4 = \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} = \frac{k}{k + 1}, \quad \mathcal{A}_5 = \lambda \frac{\mu + \lambda}{(2\mu + 3\lambda)^2} = \frac{k(k - 1)}{(3k - 1)^2}.$$

Таблица 1

Безразмерные формы уравнений типа Beltrami–Michell

Номер уравнения	Уравнение в безразмерной форме
(2.11)	$\Delta \mathbf{T} + \mathcal{A}_1 \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{T}) - 2 \text{def} \nabla \cdot \mathbf{T} - \mathcal{A}_2 \mathbf{I} \Delta \text{tr} \mathbf{T} + \tilde{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{0}$
(2.13)	$\Delta \mathbf{T} + \mathcal{A}_1 \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{T}) - 2 \text{def} \nabla \cdot \mathbf{T} - \mathcal{A}_3 \mathbf{I} \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} + \tilde{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{0}$
(2.15)	$\Delta \mathbf{T} + \mathcal{A}_1 \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{T}) - 2 \text{def} (\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) - \mathcal{A}_3 \mathbf{I} \nabla \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) + \tilde{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{0}$
(2.16)	$(2 \text{def} + \mathcal{A}_4 \mathbf{I} \nabla \cdot) (\Delta \mathbf{u} + k \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) + \tilde{\mathbf{B}}_3 = \mathbf{0}$
(2.17)	$\square_2 \mathbf{T} + \mathcal{A}_1 \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{T}) + \mathcal{A}_5 \mathbf{I} \text{tr} \ddot{\mathbf{T}} + 2 \text{def} \mathbf{b} + \mathcal{A}_3 \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{f} + \tilde{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{0}$
(2.19)	$\Delta \mathbf{T} + \mathcal{A}_1 \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{T}) + 2 \text{def} \mathbf{b} + \mathcal{A}_3 \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$

3. Представления решений динамических уравнений линейной теории упругости

1. Для построения решений неоднородного уравнения движения исторически первым было предложено представление Green–Lamé [27]. В рамках этого представления предполагается, что рассматривается конечная часть среды \mathcal{D} (регулярная в смысле Келлога [40]), в которой массовые силы могут быть представлены разложением Гельмгольца (1.4):

$$\mathbf{b} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.1)$$

Искомое векторное поле перемещений \mathbf{u} , которое предполагается достаточно гладким, может быть представлено разложением

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}. \quad (3.2)$$

Здесь $\phi, \boldsymbol{\psi}$ – скалярное и векторное поля (скалярный и векторный потенциалы перемещений).

Представление, аналогичное представлению Green–Lamé для одноконстантной теории, впервые было указано Poisson (теорема Пуассона, 1829) [41].

Подстановка представления (3.2) в уравнения Navier–Cauchy (2.4) преобразует их к виду

$$\Delta (\nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}) + k \nabla \Delta \phi + \mathbf{b} = \nabla \ddot{\phi} + \nabla \times \ddot{\boldsymbol{\psi}}.$$

Поочередное вычисление дивергенции и ротора левой и правой частей этого уравнения приводит к двум независимым уравнениям

$$(1+k)\Delta\Delta\phi + \nabla \cdot \mathbf{b} = \Delta\ddot{\phi}, \quad \Delta\Delta\psi + \nabla \times \mathbf{b} = \Delta\ddot{\psi},$$

которые с учетом разложения (3.1) могут быть записаны следующим образом:

$$\Delta(\square_1\phi - \phi) = 0, \quad \Delta(\square_2\psi - \chi) = 0.$$

Частные решения этих уравнений определяются решениями уравнений

$$\square_1\phi - \phi = 0, \quad \square_2\psi - \chi = 0.$$

Ясно, что потенциалы, получаемые как решения этих уравнений, определяют решение, удовлетворяющее уравнению движения (т.е. представляют некоторое частное решение). Возможность представления любого решения уравнения Navier–Cauchy (2.4) определяется полнотой представления (3.2).

Clebsch (1863) первым поставил вопрос о полноте представлений Green–Lamé и предложил вариант доказательства. Значительно позже Sternberg (1960) показал необходимость доработки этого доказательства (в оригинальном доказательстве Clebsch предполагал, что граница тела представляет собой одну гладкую замкнутую поверхность). Альтернативное, но все же неполное доказательство было дано Kelvin (1884). Доказательство в завершённом виде было получено Somigliana (1892). Следует отметить, что различные варианты доказательства позже предлагались Tedone (1897), Duhem (1898), Sternberg and Gurtin (1960, 1962) и другими [2].

2. Решение однородного векторного волнового уравнения может быть выражено через решения скалярного волнового уравнения посредством тороидальной-полоидальной декомпозиции (1.7). В отсутствие объемных сил ($\mathbf{b} = 0$) поле перемещений может быть представлено через три скалярных функции, удовлетворяющих волновым уравнениям

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\zeta) + \nabla \times (\mathbf{r}\omega),$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки, а ϕ , ζ , ω – скалярные функции, удовлетворяющие однородным волновым уравнениям

$$\square_1\phi = 0, \quad \square_2\zeta = 0, \quad \square_2\omega = 0.$$

Для произвольного поля $\mathbf{b} \neq 0$ скалярные функции ϕ , ζ , ω являются решениями неоднородных уравнений

$$\square_1\phi = \phi, \quad \square_2\zeta = \alpha, \quad \square_2\omega = \beta,$$

причем ϕ определяется как скалярный потенциал разложения векторного поля \mathbf{b} , а скалярные функции ζ , ω удовлетворяют следующим уравнениям

$$\phi = \mathcal{G}_1(\mathbf{b}), \quad \Delta_0\alpha = -\mathbf{r} \cdot \mathcal{G}_2(\mathbf{b}), \quad \Delta_0\beta = -\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathcal{G}_2(\mathbf{b}).$$

Здесь Δ_0 – трансверсальная часть оператора Лапласа относительно радиального направления сферических координат,

$$\Delta_0 = \Delta - \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) = \frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_{\phi\phi}.$$

Математическое представление такой декомпозиции известно давно, однако его приложение к представлениям в теории упругости связывают с работой Chadwick, Trowbridge (1967) [25]. Авторы работы [25] доказали полноту этого представления для области, ограниченной концентрическими сферами (см. также [15, 23, 42]).

3. Другой класс представлений определяется так называемым решением Cauchy–Kovalevski–Somigliana:

$$\mathbf{u} = \square_1 \mathbf{g} - k \nabla \nabla \cdot \mathbf{g},$$

где \mathbf{g} и определяется уравнением

$$\square_2 \square_1 \mathbf{g} = -\mathbf{b}.$$

Подобное представление решения было впервые предложено Cauchy и впоследствии (независимо) С. Ковалевской [43]; см также Iacovache [44]. Доказательство полноты осуществлено Somigliana (1889) [45] и в других вариантах – Sternberg & Eubanks (1957), Sternberg & Gurtin (1962) [2].

Следует отметить, что взаимосвязь этих представлений вытекает из теоремы Боджо (Т. Boggio) [2]. Пусть \mathbf{g} – решение однородного уравнения

$$\square_2 \square_1 \mathbf{g} = \mathbf{0}.$$

Тогда \mathbf{g} может быть представлена как сумма

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2,$$

где

$$\square_1 \mathbf{g}_1 = \mathbf{0}, \quad \square_2 \mathbf{g}_2 = \mathbf{0}.$$

Основываясь на этой теореме, Sternberg показал, что при $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ решения Green–Lamé и Cauchy–Kovalevski–Somigliana связаны соотношениями

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2, \quad \phi = -k \nabla \cdot \mathbf{g}_1, \quad \Psi = -k \nabla \times \mathbf{g}_2.$$

4. Четвертую группу образуют представления Boussinesq–Papkovitch–Neuber, которые имеют вид

$$\mathbf{u} = \Psi - \frac{k}{2(k+1)} \nabla (\phi - \mathbf{r} \cdot \Psi),$$

где Ψ и ϕ определяются уравнениями

$$\square_2 \Psi = -\mathbf{b}, \quad \square_1 \phi = \mathbf{r} \cdot \square_1 \Psi.$$

Возникает вопрос, является ли решение, найденное при помощи только трех функций Папковича–Нейбера, полным. Пионерские исследования этого вопроса принадлежат Слободянскому [46, 47]. Отметим работы Н.И. Остросаблина [48–52], в которых вопросы полноты исследовались методами анализа симметрий дифференциальных уравнений. См. также [53, 54].

5. Еще один класс представлений образуют решения Naghdi–Hsu–Chandrasekharaiah [55–57]:

$$\mathbf{u} = \Psi + \frac{k}{4\pi(k+1)} \nabla \int_D \nabla \cdot \Psi \left(\mathbf{R}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c_1} \right) \frac{dv_{\mathbf{R}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|},$$

позволяющие выразить поле перемещений через вектор-функцию $\boldsymbol{\psi}$, определяемую уравнением

$$\square_2 \boldsymbol{\psi} = -\mathbf{b}.$$

6. Решение динамических уравнений Beltrami-Michell (2.18) может быть представлено в форме [36], которая в безразмерных переменных принимает вид

$$\mathbf{T} = -\nu \mathbf{I} \square_2 \Omega + \nabla \nabla \Omega - 2 \operatorname{def} \boldsymbol{\Phi}.$$

Здесь функции Ω , $\boldsymbol{\Phi}$ определяются уравнениями

$$\square_2 \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{b}, \quad \square_1 \square_2 \Omega = \frac{1}{1-\nu} \nabla \cdot \mathbf{b}.$$

Соответствующие перемещения находятся по формуле

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \Omega - \boldsymbol{\Phi}.$$

Следует отметить некоторые обобщения классических представлений решений уравнений (2.4), приведенные в работах [58, 59]. Соотношения, определяющие представления различных типов, сведены в табл. 2.

Таблица 2

Представление решений динамической теории упругости

№	Представление перемещений	Уравнения для элементов представления	Вспомогательные уравнения
1	$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}$	$\square_1 \phi = -\varphi,$ $\square_2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega}$	$\varphi = \mathcal{G}_1(\mathbf{b}),$ $\boldsymbol{\omega} = \mathcal{G}_2(\mathbf{b})$
2	$\mathbf{u} = \square_1 \mathbf{g} - k \nabla \nabla \cdot \mathbf{g}$	$\square_2 \square_1 \mathbf{g} = -\mathbf{b}$	Отсутствуют
3	$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi} - \frac{k}{2(k+1)} \nabla(\phi - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi})$	$\square_2 \boldsymbol{\psi} = -\mathbf{b},$ $\square_1 \phi = \mathbf{r} \cdot \square_1 \boldsymbol{\psi}$	Отсутствуют
4	$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi} + \frac{k}{4\pi(k+1)} \nabla \int_D \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} \left(\mathbf{R}, -\frac{ \mathbf{r}-\mathbf{R} }{c_1} \right) \frac{dV_{\mathbf{R}}}{ \mathbf{r}-\mathbf{R} }$	$\square_2 \boldsymbol{\psi} = -\mathbf{b}$	Отсутствуют
5	$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \zeta) + \nabla \times (\mathbf{r} \boldsymbol{\omega})$	$\square_1 \phi = \phi,$ $\square_2 \zeta = \alpha,$ $\square_2 \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\beta}$	$\phi = \mathcal{G}_1(\mathbf{b}),$ $\Delta_0 \alpha = -\mathbf{r} \cdot \mathcal{G}_2(\mathbf{b}),$ $\Delta_0 \boldsymbol{\beta} = -\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathcal{G}_2(\mathbf{b})$
6	$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \Omega - \boldsymbol{\Phi}$	$\square_2 \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{b},$ $\square_1 \square_2 \Omega = \frac{1}{1-\nu} \nabla \cdot \mathbf{b}$	Отсутствуют

4. Представления решений статических уравнений линейной теории упругости

1. Первые способы декомпозиции искомой вектор-функции \mathbf{u} для частных классов задач принадлежат Boussinesq [60] (1885) и Somigliana [45] (1889). В монографии [60] Boussinesq привел систему частных решений («базовую систему решений» по терминологии [1]), представленную семью гармоническими функциями ψ_1, \dots, ψ_7 :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_1(\psi_1) = \mathbf{j}\partial_z\psi_1 - \mathbf{k}\partial_y\psi_1, \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_2(\psi_2) = -\mathbf{i}\partial_z\psi_2 + \mathbf{k}\partial_x\psi_2, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{u}_3(\psi_3) = \mathbf{i}\partial_y\psi_3 - \mathbf{j}\partial_x\psi_3, \\ \mathbf{u}_4 &= \mathbf{u}_4(\psi_4) = \mathbf{i}\partial_x\psi_4 + \mathbf{j}\partial_y\psi_4 + \mathbf{k}\partial_z\psi_4, \\ \mathbf{u}_5 &= \mathbf{u}_5(\psi_5) = \mathbf{i}\left(x\partial_x\psi_5 - \frac{k+2}{k}\psi_5\right) + \mathbf{j}x\partial_y\psi_5 + \mathbf{k}x\partial_z\psi_5, \\ \mathbf{u}_6 &= \mathbf{u}_6(\psi_6) = \mathbf{i}\left(y\partial_x\psi_6 - \frac{k+2}{k}\psi_6\right) + \mathbf{j}y\partial_y\psi_6 + \mathbf{k}y\partial_z\psi_6, \\ \mathbf{u}_7 &= \mathbf{u}_7(\psi_7) = \mathbf{i}\left(z\partial_x\psi_7 - \frac{k+2}{k}\psi_7\right) + \mathbf{j}z\partial_y\psi_7 + \mathbf{k}z\partial_z\psi_7. \end{aligned}$$

Считается, что решения \mathbf{u}_5 , \mathbf{u}_6 , \mathbf{u}_7 независимо от Boussinesq были повторно найдены П.Ф. Папковичем (1932) [61] и Neuber (1934) [62]. Вместе с тем следует отметить, что в своей работе П.Ф. Папкович ссылается на монографию Pigeaud [63], в которой цитируется работа [60] и воспроизводится усеченная система решений для случая осевой симметрии.

Ясно, что решения Boussinesq не являются независимыми. Путем непосредственного вычисления легко убедиться, что имеют место следующие соотношения [64]:

$$\mathbf{u}_1(\partial_x\psi) + \mathbf{u}_2(\partial_y\psi) + \mathbf{u}_3(\partial_z\psi) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{u}_1(\partial_y\psi) - \mathbf{u}_2(\partial_x\psi) - \mathbf{u}_4(\partial_z\psi) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{u}_5(\partial_y\psi) - \mathbf{u}_6(\partial_x\psi) - \mathbf{u}_3\left(-2\frac{k+1}{k}\psi\right) - \mathbf{u}_4(x\partial_y\psi - y\partial_x\psi) = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}_5(\partial_x\psi) + \mathbf{u}_6(\partial_y\psi) + \mathbf{u}_7(\partial_z\psi) - \mathbf{u}_4\left(-2\frac{k+1}{k}\psi + x\partial_x\psi + y\partial_y\psi + z\partial_z\psi\right) = \mathbf{0}. \quad (4.2)$$

Заметим, что если воспользоваться переменными

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(y/x),$$

то соотношения (4.1), (4.2) могут быть записаны в более компактном виде:

$$\mathbf{u}_5(\partial_y\psi) - \mathbf{u}_6(\partial_x\psi) - \mathbf{u}_3\left(-2\frac{k+1}{k}\psi\right) - \mathbf{u}_4(\partial_\theta\psi) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{u}_5(\partial_x\psi) + \mathbf{u}_6(\partial_y\psi) + \mathbf{u}_7(\partial_z\psi) - \mathbf{u}_4\left(-2\frac{k+1}{k}\psi + r\partial_r\psi\right) = \mathbf{0}.$$

Таким образом, существует избыточное число «базовых решений», что позволяет представить поле перемещений неединственным образом. Действительно, легко убедиться в том, что, например,

$$\mathbf{u}_4 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \right) - \mathbf{u}_5 \left(-\frac{1}{2}kx \right) - \mathbf{u}_6 \left(-\frac{1}{2}ky \right) = \mathbf{0}.$$

2. Статическим аналогом решения Cauchy–Kovalevski–Somigliana считается решение Галеркина, которое имеет вид

$$\mathbf{u} = \Delta \mathbf{w} - \frac{k}{1+k} \nabla \nabla \cdot \mathbf{w}.$$

В результате подстановки этого соотношения в уравнения Navier–Cauchy (2.4) приходим к неоднородному бигармоническому уравнению относительно вспомогательной вектор-функции \mathbf{w} – так называемого вектора Галеркина

$$\Delta \Delta \mathbf{w} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Б.Г. Галеркин, опубликовав в 1930 г. полученное им решение дифференциальных уравнений теории упругости [65] и считая свое решение общим, не привел доказательства общности полученного им решения, кроме того лишь факта, что ряд известных решений может быть получен из найденного. См. также [66].

Представление Галеркина может быть получено из операторного формализма. Рассмотрим пару операторов, первый из которых A определяется дифференциальными уравнениями Navier–Cauchy (2.4), а второй \tilde{A} имеет подобную структуру, т.е.

$$A = \Delta + k \nabla \nabla \cdot, \quad \tilde{A} = \Delta + k' \nabla \nabla \cdot.$$

Без потери общности будем полагать, что область определения этих операторов определяется однородными краевыми условиями на границе $\partial \mathcal{D}$.

Число k' выбирается из условия наиболее простого представления композиции этих операторов. Поскольку

$$\Delta \Delta = A \tilde{A} = (\Delta + k \nabla \nabla \cdot)(\Delta + k' \nabla \nabla \cdot) = \Delta \Delta + (k + k' + k k') \Delta \nabla \nabla \cdot,$$

то наиболее простая форма определяется бигармоническим оператором $\Delta \Delta$, для чего следует положить

$$k' = -\frac{k}{1+k}.$$

Полагаем, что \tilde{A} обратим. При этом число k' не может быть равно -1 и ∞ (ср. рассуждения Папковича). Тогда тождественный оператор I может быть представлен выражением

$$I = \tilde{A} \tilde{A}^{-1} = \Delta \tilde{A}^{-1} + k' \nabla \operatorname{div} \tilde{A}^{-1},$$

а произвольная функция \mathbf{u} , определенная в \mathcal{D} , может быть представлена в виде разложения

$$\mathbf{u} = \Delta \mathbf{w} + k' \nabla \nabla \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = \tilde{A}^{-1} \mathbf{u}.$$

Обоснование представления Галеркина осуществил П.Ф. Папкович в 1932 г. [61], который предложил более удобную форму для представления перемещений:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{1}{4(1-\nu)} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + \phi \right), \quad (4.3)$$

где функции \mathbf{B} , ϕ определяются из уравнений

$$\Delta \phi + \frac{1}{4(1-\nu)\mu} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \Delta \mathbf{B} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Аналогичное представление, найденное иным путем, дал Neuber (1934 г.) [62]. Следует также отметить, что в 1928 г. представление, аналогичное представлению Папковича для случая отсутствия объемных сил, получил Г.Д. Гродский. Обобщение на случай пространства произвольной размерности осуществлено Westergaard (1935 г.) [67].

Доказательство полноты представления (4.3) дал П.Ф. Папкович, основываясь на интуитивном предположении о существовании решения исходной задачи. Более строгое доказательство дано Sternberg и Gurtin (1961 г.).

Считается, что вывод представления Папковича, основанный на разложении Гельмгольца (1.2), впервые был дан Mindlin (1936 г.) [68]. Миндлин приходит к бигармоническому уравнению Галеркина. Следует отметить, что именно этот путь был указан в статье Папковича ещё в 1932 г. [61].

Представление Папковича также может быть получено из операторного формализма. Вначале намеренно сократим функциональные возможности представления, положив скалярный потенциал ϕ равным нулю. Пусть оператор A , как и прежде, определяется уравнениями Navier–Cauchy (2.4) и однородными краевыми условиями на границе ∂D , а оператор \tilde{A} задается выражением

$$\tilde{A}\mathbf{f} = \Delta^{-1}\mathbf{f} + \alpha \nabla(\mathbf{r} \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f}),$$

где α – некоторое число, а Δ^{-1} – оператор, обратный к оператору Лапласа Δ , область определения которого, без потери общности, может быть определена однородными краевыми условиями. Композиция определенных таким образом операторов может быть представлена в виде

$$A\tilde{A}\mathbf{f} = (\Delta + k\nabla\nabla \cdot)(\Delta^{-1}\mathbf{f} + \alpha \nabla(\mathbf{r} \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f})) = \mathbf{f} + \alpha(k+1)\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}) + (k + 2\alpha(k+1))\nabla\nabla \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f}.$$

Если положить, что k удовлетворяет уравнению

$$k + 2\alpha(k+1) = 0,$$

чему соответствует следующее значение числа α ,

$$\alpha = -\frac{k}{2(k+1)} = -\frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)},$$

то полученное выражение существенно упрощается и приводится к виду

$$A\tilde{A}\mathbf{f} = \mathbf{f} - \frac{k}{2}\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}).$$

Таким образом, композиция операторов A , \tilde{A} представляет тождественный оператор

$$A\tilde{A} = \tilde{I}$$

на множестве функций, которые удовлетворяют условию

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}) = \mathbf{0}.$$

Дополним конструкцию оператора \tilde{A} . Пусть

$$\tilde{A}\mathbf{f} = \Delta^{-1}\mathbf{f} + \alpha\nabla(\mathbf{r} \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f} + \beta(\mathbf{r} \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f})),$$

тогда

$$\begin{aligned} A\tilde{A}\mathbf{f} &= (\Delta + k\nabla\text{div})\left(\Delta^{-1}\mathbf{f} + \alpha\nabla(\mathbf{r} \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f} + \beta(\mathbf{r} \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f}))\right) = \\ &= \mathbf{f} + (2\alpha(k+1) + k)\nabla\nabla \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f} + \alpha(k+1)(\beta+1)\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}). \end{aligned}$$

При условиях

$$k + 2\alpha(k+1) = 0, \quad \beta = -1$$

имеем

$$A\tilde{A} = I.$$

Таким образом, приходим к представлению (произвольного) поля:

$$\tilde{A}\mathbf{f} = \Delta^{-1}\mathbf{f} - \frac{k}{2(k+1)}\nabla(\mathbf{r} \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f} - \Delta^{-1}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{f})).$$

Это и есть представление Папковича:

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} - \frac{k}{2(k+1)}\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} - \phi), \quad \Delta\mathbf{b} = \mathbf{f}, \quad \Delta\phi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}.$$

3. Ещё один класс представлений образуют решения Naghdi–Hsu [69]:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi} + \frac{k}{4\pi(k+1)}\nabla\int_B \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{R}) \frac{dV_{\mathbf{R}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|},$$

которые позволяют выразить поле перемещений через вектор-функцию $\boldsymbol{\psi}$, определяемую уравнением

$$\Delta\boldsymbol{\psi} = -\mathbf{b}.$$

Представление Naghdi–Hsu также может быть получено из операторного формализма. Пусть

$$\tilde{A}\mathbf{f} = \Delta^{-1}\mathbf{f} + \alpha\nabla\Delta^{-1}\nabla \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f},$$

тогда имеет место следующее соотношение:

$$A\tilde{A}\mathbf{f} = (\Delta + k\nabla\text{div})\left(\Delta^{-1}\mathbf{f} + \alpha\nabla\Delta^{-1}\nabla \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f}\right) = \mathbf{f} + (k + \alpha(k+1))\nabla\nabla \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f}.$$

Если положить, что k удовлетворяет уравнению

$$k + \alpha(k+1) = 0,$$

т.е. параметр α связан с k соотношением

$$\alpha = -\frac{k}{k+1} = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu},$$

то имеем

$$A\tilde{A} = I.$$

Приходим к представлению

$$\tilde{A}\mathbf{f} = \Delta^{-1}\mathbf{f} - \frac{k}{k+1} \nabla \Delta^{-1} \nabla \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f}.$$

Это и есть представление Naghdi–Hsu [69]:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi} - \frac{k}{k+1} \nabla \Delta^{-1} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi} + \frac{\lambda + \mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \nabla \int_B \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} dV_{\mathbf{R}}, \quad \Delta \boldsymbol{\psi} = \mathbf{b}.$$

Заметим, что, если положить $\boldsymbol{\psi} = \Delta \mathbf{w}$, приходим к представлению Галеркина

$$\mathbf{u} = \Delta \mathbf{w} - \frac{k}{k+1} \nabla \nabla \cdot \mathbf{w}, \quad \Delta \Delta \mathbf{w} = \mathbf{b}.$$

4. Представление Аржаных–Слободянского [5]

$$\mathbf{u} = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \boldsymbol{\psi} + \mathbf{r} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi} - \mathbf{r} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}$$

соответствует следующему оператору:

$$\tilde{A}\mathbf{f} = \alpha \Delta^{-1}\mathbf{f} + \beta \mathbf{r} \cdot \nabla \Delta^{-1}\mathbf{f} + \gamma \mathbf{r} \nabla \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f}.$$

Имеем (учитывая соотношение $\Delta(\mathbf{r} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}) = \mathbf{r} \cdot \nabla \Delta \boldsymbol{\psi} + 2\Delta \boldsymbol{\psi}$)

$$A\tilde{A}\mathbf{f} = (\Delta + k \nabla \operatorname{div}) (\alpha \Delta^{-1}\mathbf{f} + \beta \mathbf{r} \cdot \nabla \Delta^{-1}\mathbf{f} + \gamma \mathbf{r} \nabla \cdot \Delta^{-1}\mathbf{f}) = 2 \frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \mathbf{f} + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{f} - \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{f},$$

если $\alpha = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$. Таким образом, представление Слободянского может

быть использовано для полей, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{f} - \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

5. Решение статических уравнений Beltrami–Michell (2.18) может быть представлено в форме Shafer [70], которая в безразмерных переменных принимает вид

$$\mathbf{T} = -\nu \mathbf{I} \Delta \Omega + \nabla \nabla \Omega - 2 \operatorname{def} \Phi, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \Omega - \Phi.$$

Здесь функции Ω , Φ определяются уравнениями

$$\Delta_2 \Phi = \mathbf{b}, \quad \Delta \Delta \Omega = \frac{1}{1-\nu} \nabla \cdot \mathbf{b}.$$

6. Существуют представления, приводящие к уравнениям пятого порядка (ультрагармоническим по терминологии [61]). Одно из таких представлений было

предложено С.А. Савиным в 1923 г. Представление Савина имеет вид разложения Helmholtz:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi},$$

в котором скалярный потенциал определяется произведением векторного потенциала на постоянный вектор \mathbf{a} :

$$\phi = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{a} = (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3).$$

Таким образом, перемещения представляются в виде

$$\mathbf{u} = (\nabla\boldsymbol{\psi}) \cdot \mathbf{a} + \nabla \times \boldsymbol{\psi}. \quad (4.4)$$

Подстановка в уравнение для объемной деформации приводит к следующему выражению:

$$\Delta\Delta\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{k+1} (\Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}} \cdot \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{b}).$$

Вычисляя второй ротор левой и правой частей уравнения Navier–Cauchy (2.4), имеем

$$\Delta\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) = \nabla \times (\nabla \times \ddot{\mathbf{u}}).$$

В результате подстановки представления (4.4)

$$\Delta\Delta\nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \Delta\nabla \times \ddot{\boldsymbol{\psi}}.$$

Приходим к четырём уравнениям. Одно из уравнений можно исключить. Так как

$$\Delta\Delta\nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla \times \Delta\Delta\boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{a} \times (\nabla \times \Delta\Delta\boldsymbol{\psi}) = \nabla (\mathbf{a} \cdot \Delta\Delta\boldsymbol{\psi}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \Delta\Delta\boldsymbol{\psi},$$

то имеет место равенство

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \Delta\Delta\boldsymbol{\psi}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \Delta\Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{a} \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{b})) + \mathbf{a} \times (\Delta\nabla \times \ddot{\boldsymbol{\psi}}).$$

Учитывая уравнение для объемной деформации, приходим к системе трех уравнений

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \Delta\Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{a} \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{b})) + \mathbf{a} \times (\Delta\nabla \times \ddot{\boldsymbol{\psi}}) - \frac{1}{k+1} \nabla (\Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}} \cdot \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{b}).$$

Эти уравнения могут быть преобразованы к виду

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \Delta\Delta\boldsymbol{\psi} = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \nabla (\Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}} + \left(\mathbf{a} \times \nabla - \frac{1}{k+1} \nabla\right) \nabla \cdot \mathbf{b}.$$

В статическом приближении ($\ddot{\mathbf{u}} \equiv 0$) приходим к уравнениям пятого порядка

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \Delta\Delta\boldsymbol{\psi} = \left(\mathbf{a} \times \nabla - \frac{1}{k+1} \nabla\right) \nabla \cdot \mathbf{b}. \quad (4.5)$$

В компонентах уравнения (4.5) записываются так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \Delta \Psi_1 &= \Delta (b_3 - b_2) - \left(\frac{1}{k+1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla \cdot \mathbf{b}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \Delta \Psi_2 &= \Delta (b_1 - b_3) - \left(\frac{1}{k+1} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla \cdot \mathbf{b}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \Delta \Psi_3 &= \Delta (b_2 - b_1) - \left(\frac{1}{k+1} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Заметим, что в [61] эта система уравнений написана с многочисленными ошибками. Кроме того, решения этой системы могут содержать лишние относительно исходной системы, что связано с повышением порядка уравнений в процессе их преобразований.

Обобщения приведенных выше представлений на задачи для анизотропной упругой среды, а также для реологических соотношений, включающих вторые градиенты, представлены в работах [71–73].

5. Представления решений статических уравнений линейной теории упругости в криволинейных координатах

Представление решений в криволинейных координатах, в частности цилиндрических, позволяет построить ряд новых представлений, не сводящихся к обсуждаемым выше. Вначале перечислим специальные представления решений, не предполагающих какой-либо симметрии, в том числе осевой.

1. Решение однородных уравнений теории упругости, найденные Bургати в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \times \nabla B_1 + \mathbf{e}_z \frac{1}{k} B_1 - \nabla (zB_3 + B_2).$$

Компоненты представления определяются тремя гармоническими функциями

$$\Delta B_1 = 0, \quad \Delta B_2 = 0, \quad \Delta B_3 = 0.$$

2. Обобщенное (неосесимметричное) решение Boussinesq

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \frac{1}{k} B_1 - \nabla (zB_1 + B_2), \quad \Delta B_1 = 0, \quad \Delta B_2 = 0.$$

3. Обобщенное решение Love

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \frac{1}{k} \Delta B - 2 \nabla \left(\frac{\partial}{\partial z} B \right), \quad \Delta \Delta B = 0.$$

4. Расширенное обобщенное решение Love–Muki

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \times \nabla B_1 + \mathbf{e}_z \frac{1}{k} \Delta \mathcal{L} - 2 \nabla \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{L} \right), \quad \Delta \Delta \mathcal{L} = 0, \quad \Delta B_3 = 0.$$

К решениям, обладающим осевой симметрией, относятся

– решение Boussinesq [60]

$$\mathbf{u} = -\mathbf{e}_r \left[\frac{k}{2(k+1)} \frac{\partial}{\partial r} (B_0 + zB_z) \right] + \mathbf{e}_z \left[B_z - \frac{k}{2(k+1)} \frac{\partial}{\partial z} (B_0 + zB_z) \right],$$

$$\tilde{\Delta}B_0 = 0, \quad \tilde{\Delta}B_z = 0, \quad \tilde{\Delta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

– решение Timpe [74]

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_r \left[T_r - \frac{k}{2(k+1)} \frac{\partial}{\partial r} (T_0 + rT_r) \right] - \mathbf{e}_z \left[\frac{k}{2(k+1)} \frac{\partial}{\partial z} (T_0 + rT_r) \right],$$

$$\left(\tilde{\Delta} - \frac{1}{r^2} \right) T_r = 0, \quad \tilde{\Delta}T_0 = 0;$$

– решение Love

$$\mathbf{u} = -\mathbf{e}_r \left[\frac{k}{2(k+1)} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \mathcal{L} \right] + \mathbf{e}_z \left[\tilde{\Delta} \mathcal{L} - \frac{k}{2(k+1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{L} \right];$$

$$\tilde{\Delta} \tilde{\Delta} \mathcal{L} = 0.$$

– решение Michell [75]

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_r \left[\left(\tilde{\Delta} - \frac{1}{r^2} \right) M - \frac{k}{2(k+1)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial M}{\partial r} + \frac{M}{r} \right) \right] - \mathbf{e}_z \left[\frac{k}{2(k+1)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial M}{\partial r} + \frac{M}{r} \right) \right],$$

$$\left(\tilde{\Delta} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\tilde{\Delta} - \frac{1}{r^2} \right) M = 0.$$

Приведенные решения определяют три компоненты векторного поля через меньшее количество независимых скалярных функций. Возможность такого представления зависит от формы границы тела. Исследованиям полноты подобных представлений посвящены работы [53, 54, 76–78].

6. Декомпозиция уравнений связанной термоупругости и пороупругости

Различные модели пороупругих и многофазных сред определяют линейные дифференциальные уравнения и системы уравнений, структура которых близка к обсуждаемым в настоящей работе. Общие принципы построения таких моделей изложены, например, в [79, 80]. Полные системы уравнений, определяющие совместное деформирование нескольких фаз и соответствующие аналитические представления фундаментальных решений приведены в [81]. Методы редукции системы, позволяющие при дополнительных условиях сократить количество независимых функций и, соответственно, порядок системы уравнений, изложены в [82]. Ниже рассмотрим редуцированные системы, содержащие сокращенное число уравнений.

В наиболее простой постановке линейные уравнения связанной термоупругости и пороупругости для изотропного тела могут быть представлены в общем виде:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + a_1 \nabla \theta + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}},$$

$$a_2 \Delta \theta + a_3 \dot{\theta} + a_4 \ddot{\theta} + a_5 \nabla \cdot \mathbf{u} + a_6 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + a_7 \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} + r = 0. \quad (6.1)$$

Так же как и в уравнениях, приведенных выше, поле \mathbf{u} представляет собой перемещения среды; \mathbf{f} – объемная плотность внешних сил; ρ – плотность массы; λ, μ – упругие модули Ламе. Физический смысл коэффициентов $a_1 \dots a_8$ и полей θ, r зависит от интерпретации теоретической модели. Приведем некоторые из них.

1. В рамках моделей классической связной термоупругости [6] следует положить

$$a_1 = -\beta = -(3\lambda + 2\mu)\alpha_T, \quad a_2 = \kappa, \quad a_4 = -c, \quad a_7 = -T_0\beta, \quad a_3 = a_5 = a_6 = a_8 = 0.$$

Здесь α_T – коэффициент линейного температурного расширения; κ – коэффициент теплопроводности; c – теплоемкость при постоянной деформации; r – мощность источников тепла; T_0 – отсчетная (характерная) температура, $\theta = T - T_0$; T – температура в деформированном состоянии. При этом связанные уравнения термоупругого движения и теплопроводности принимают вид

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \beta \nabla \theta + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \kappa \Delta \theta - c \dot{\theta} - \beta T_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + r &= 0. \end{aligned}$$

2. В моделях гиперболической теплопроводности (Cattaneo, Jeffreys) [83, 84] $a_5 = \tau$ – коэффициент, характеризующий период релаксации внутренней энергии в нестационарных процессах; $\tilde{r} = r + \tau \dot{r}$. Связные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \beta \nabla \theta + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \kappa \Delta \theta - c \dot{\theta} - \tau \ddot{\theta} - \beta T_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \tilde{r} &= 0. \end{aligned}$$

3. В бездиссипативной связной термоупругости (Green, Naghdi), которая моделирует эффект второго звука [85], следует положить

$$a_1 = -\beta = -(3\lambda + 2\mu)\alpha_T, \quad a_2 = \kappa_*, \quad a_5 = -c, \quad a_8 = -T_0\beta, \quad a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = 0.$$

Здесь κ_* – коэффициент, характеризующий волновой характер теплопроводности. Связанные уравнения бездиссипативного термоупругого движения и теплопроводности записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \beta \nabla \theta + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \kappa_* \Delta \theta - c \ddot{\theta} - \beta T_0 \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} + r_* &= 0. \end{aligned}$$

4. В рамках теории пороупругой среды, заполненной жидкостью (Biot) [82], скалярное поле θ определяет давление жидкости в порах,

$$a_1 = -a_7 = \beta, \quad a_2 = \alpha, \quad a_4 = -\omega, \quad a_3 = a_5 = a_6 = a_8 = 0.$$

Уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \beta \nabla \theta + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \alpha \Delta \theta - \omega \dot{\theta} - \beta \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned}$$

5. В теории пористой среды с пустыми порами (voids) [86] скалярное поле θ определяет пористость (отношение объема пор к объему скелета). Уравнения могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \beta \nabla \theta + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \alpha \Delta \theta - \xi \theta - \omega \dot{\theta} - \beta \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + r &= \kappa \ddot{\theta}. \end{aligned}$$

Уравнения (6.1) могут быть представлены в безразмерной форме. Для этого вводятся безразмерные переменные

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{R}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{R}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\theta_0},$$

где R – некоторый характерный линейный размер тела (например, диаметр шара, описанного около тела); θ_0 – характерное значение скалярного поля (например, характерная температура). Как уже было принято, различие в обозначениях размерных и безразмерных величин (тильда) далее опускается. Безразмерная форма уравнений (6.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} + k \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathcal{A} \nabla \theta + \mathbf{b} &= \ddot{\mathbf{u}}, \\ \Delta \theta + \mathcal{B} \theta + \mathcal{C} \dot{\theta} + \mathcal{D} \ddot{\theta} + \mathcal{E} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathcal{F} \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathcal{G} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \varpi &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k = \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \quad \mathcal{A} = \frac{a_1 \theta_0}{\mu}, \quad \mathcal{B} = \frac{a_3 R^2}{a_2}, \quad \mathcal{C} = \frac{a_4 R \sqrt{\mu}}{a_2 \sqrt{\rho}}, \quad \mathcal{D} = \frac{a_8 \mu}{a_2 \rho}, \quad \mathcal{E} = \frac{a_6 R^2}{a_2 \theta_0}, \\ \mathcal{F} = \frac{a_7 R \sqrt{\mu}}{a_2 \theta_0 \sqrt{\rho}}, \quad \mathcal{G} = \frac{a_7 R^2 \mu}{a_2 \theta_0 \rho}, \\ \mathbf{b} = R \frac{\mathbf{f}}{\mu}, \quad \varpi = \frac{r R^2}{a_2 \theta_0}. \end{aligned}$$

Уравнения (6.2) удобно записать в операторной форме

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} + k \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathcal{A} \nabla \theta + \mathbf{b} &= \ddot{\mathbf{u}}, \\ \Delta \theta + \mathcal{M}_1 [\theta] + \mathcal{M}_2 [\nabla \cdot \mathbf{u}] + \varpi &= 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где

$$\mathcal{M}_1 [\theta] = \mathcal{B} \theta + \mathcal{C} \dot{\theta} + \mathcal{D} \ddot{\theta}, \quad \mathcal{M}_2 [\nabla \cdot \mathbf{u}] = \mathcal{E} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathcal{F} \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathcal{G} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}.$$

1. Представление общих решений уравнений (6.1) может быть дано в форме Green–Lamé (3.2) [87]:

$$\mathbf{b} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad \theta = \frac{1}{\mathcal{A}} (\ddot{\phi} - (1+k) \Delta \phi - \varphi). \quad (6.4)$$

Подстановка представлений (6.4) в уравнения (6.3) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\Delta \boldsymbol{\psi} - \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\omega}) &= 0, \\ (\Delta + \mathcal{M}_1) [\ddot{\phi} - (1+k) \Delta \phi - \varphi] + \mathcal{A} \mathcal{M}_2 [\Delta \phi] + \mathcal{A} \varpi &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функции ϕ , $\boldsymbol{\psi}$ могут быть найдены как решения уравнений

$$\Delta \boldsymbol{\psi} - \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\omega} = 0, \quad D_2 [\phi] = D_1 [\phi] - \mathcal{A} \varpi.$$

Здесь D_1 , D_2 – дифференциальные операторы, задаваемые выражениями

$$D_1 = \Delta + \mathcal{M}_1, \quad D_2 = D_1 (\partial_{tt} - (1+k) \Delta) + \mathcal{A} \mathcal{M}_2 \Delta.$$

2. Представление решений (6.1) в форме Boussinesq–Papkovich–Neuber имеют вид (см. также [87])

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi} + \alpha \nabla (\phi + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}), \quad \theta = \frac{\alpha}{\mathcal{A}} (\partial_{tt} - (1+k) \Delta) [\phi + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}] - \frac{k}{\mathcal{A}} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad (6.5)$$

где α – постоянная. Подстановка представлений (6.5) в уравнения (6.3) приводит к уравнениям относительно функции ϕ , $\boldsymbol{\psi}$:

$$(\Delta - \partial_{tt})\boldsymbol{\psi} + \mathbf{b} = 0, \quad \alpha D_2\phi - (kD_1 - \mathcal{A}\mathcal{M}_2)[\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}] + \alpha D_2[\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}] + \mathcal{A}\varpi = 0.$$

Последнее уравнение может быть преобразовано к виду

$$\alpha D_2\phi + ((2\alpha + 1)\mathcal{A}\mathcal{M}_2 + 2\alpha\partial_{tt} - (k + 2\alpha(1 + k))D_1)[\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}] + \alpha(\mathcal{A}\mathcal{M}_2 - (1 + k)D_1 + \mathcal{M}_1\partial_{tt})[\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}] + \alpha\mathbf{r} \cdot \Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}} + \mathcal{A}\varpi = 0.$$

Это уравнение становится более простым, если положить $\alpha = -\frac{k}{2(k+1)}$.

Имеем

$$kD_2\phi - (2\mathcal{A}\mathcal{M}_2 - 2k\partial_{tt})[\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}] + k(\mathcal{A}\mathcal{M}_2 - (k+1)D_1 + \mathcal{M}_1\partial_{tt})[\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}] + k\mathbf{r} \cdot \Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}} - 2(k+1)\mathcal{A}\varpi = 0.$$

3. Представление решений уравнений (6.1) в форме Cauchy–Kovalevski–Somigliana могут быть записаны следующим образом (см. также [87]):

$$\mathbf{u} = D_2\mathbf{g} - \nabla((\mathcal{A}\mathcal{M}_2 - kD_1)\nabla \cdot \mathbf{g} + \mathcal{A}\phi),$$

$$\theta = ((1+k)\Delta - \partial_{tt})\phi + \mathcal{M}_2(\Delta - \partial_{tt})\nabla \cdot \mathbf{g},$$

где функции \mathbf{g} , ϕ представляют решение уравнений

$$D_2(\Delta - \partial_{tt})\mathbf{g} + \mathbf{b} = 0, \quad D_2\phi - \varpi = 0.$$

Основные формулы для представлений сведены в табл. 3.

Таблица 3

Представление решений динамической теории термо(поро)упругости

№	Представление перемещений и температуры	Уравнения для элементов представления	Вспомогательные уравнения
1	$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi},$ $\theta = -\frac{1}{\mathcal{A}}(\square_1\phi + \varphi)$	$\Delta\boldsymbol{\psi} - \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0},$ $D_2[\phi] = D_1[\varphi] - \mathcal{A}\varpi$	$\varphi = \mathcal{G}_1(\mathbf{b}),$ $\boldsymbol{\omega} = \mathcal{G}_2(\mathbf{b})$
2	$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\zeta) + \nabla \times (\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}),$ $\theta = -\frac{1}{\mathcal{A}}(\square_1\phi - \varphi)$	$D_2[\phi] = D_1[\varphi] - \mathcal{A}\varpi,$ $\square_2\zeta = \alpha,$ $\square_2\boldsymbol{\omega} = \beta$	$\phi = \mathcal{G}_1(\mathbf{b}),$ $\Delta_0\alpha = -\mathbf{r} \cdot \mathcal{G}_2(\mathbf{b}),$ $\Delta_0\beta = -\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathcal{G}_2(\mathbf{b})$
3	$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi} - \frac{k}{2(k+1)}\nabla(\phi + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}),$ $\theta = \frac{k}{2(k+1)\mathcal{A}}\square_1[\phi + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}] - \frac{k}{\mathcal{A}}\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}$	$\square_2\boldsymbol{\psi} = -\mathbf{b},$ $\frac{k}{2(k+1)}D_2(\phi + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}) + (kD_1 - \mathcal{A}\mathcal{M}_2)[\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}] = \mathcal{A}\varpi$	Отсутствуют
4	$\mathbf{u} = D_2\mathbf{g} - \nabla((\mathcal{A}\mathcal{M}_2 - kD_1)\nabla \cdot \mathbf{g} + \mathcal{A}\phi),$ $\theta = \square_1\phi + \mathcal{M}_2\square_2\nabla \cdot \mathbf{g}$	$D_2\square_2\mathbf{g} + \mathbf{b} = \mathbf{0},$ $D_2\phi - \varpi = 0$	Отсутствуют

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01280)

Библиографический список

1. Green A.E. Zerna W. Theoretical Elasticity. – Dover Publications, 2002. – 457 p.
2. Gurtin M.E. The Linear Theory of Elasticity. Handbuch der Physik (ed. S. Flügge). Vol. VI a/2 // Mechanics of Solids II. Ed. C. Truesdell. – Springer, 1972. – 295 p.
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – СПб.: Лань, 2004. – Т. 2. – 560 с.
5. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
6. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
7. Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. 3rd ed. – Springer, 2004. – 602 p.
8. Truesdell C., Toupin R.A. The Classical Field Theories. Handbuch der Physik (ed. S. Flügge). Bd. III/1. – Springer, 1960. – P. 226–793.
9. Stokes G.G. On the dynamical theory of diffraction // Trans. Cambridge Phil. Soc. – 1856. – Vol. 9 – P. 1–62.
10. Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine und Angewandte Mathematik – 1858. – Vol. 55. – P. 25–55.
11. Gibbs J.W. Vector analysis. – Yale Bicentennial Publications, 1901. – 436 p.
12. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
13. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1964. – 560 с.
14. Arfken G.B., Weber H.J. Mathematical Methods for Physicists. Sixth Edition. – Elsevier Academic Press, 2005. – 1182 p.
15. Gurtin M.E. On Helmholtz's theorem and the completeness of the Papkovitch–Neuber stress functions for infinite domains // Arc. Rat. Mech. Anal. – 1962. – Vol. 9. – No. 1. – P. 225–233.
16. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. – М.: Гостехиздат, 1953. – 282 с.
17. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Integration of linear and some model nonlinear equations of motion of incompressible fluids // Int. J. Non-Linear Mechanics. – 2011. – Vol. 48. – P. 77–83.
18. Полянин А.Д., Вязьмин А.В. Декомпозиция трехмерных линеаризованных уравнений вязкоупругих жидкостей Максвелла, Олдройда и их обобщений // Теоретические основы химической технологии. – 2012. – Т. 47, № 4. – С. 386–394.
19. Липатов И.И., Полянин А.Д. Декомпозиция и точные решения уравнений вязкой слабосжимаемой баротропной жидкости // Доклады академии наук. – 2013. – Т. 449, № 3. – С. 290–294.
20. Morino L. Helmholtz decomposition revised: Vorticity generation and trailing edge condition // Computational Mechanics. – 1986. – Vol. 1. – P. 65–90.
21. Воинов О.В. Симметрии медленных движений и равновесий сплошных сред // ПММ, 2007. – Т. 71. – Вып. 5. – С. 788–793.
22. Backus G.E. A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos // Ann. Phys. – 1958. – Vol. 4. – P. 372–447.
23. Kaiser R. A Toroidal Magnetic Field Theorem // Commun. Math. Phys. – 2009. – Vol. 290. – P. 633–649.
24. B. Sri Padmavati, T. Amaranath. Note on Decomposition of Solenoidal Fields // Applied Mathematics Letters. – 2002. – Vol. 15. – P. 803–805.
25. Chadwick P., Trowbridge E.A. Elastic wave fields generated by scalar wave functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1967. – Vol. 63. – P. 1177–1187.
26. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 427 с.
27. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. – Paris: Bachelier, 1866. – 384 p.

28. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Ауксетическая механика кристаллических материалов // Известия РАН, МТТ. – 2010. – № 4. – С. 43–62.
29. Navier C.-L.-M.-H. Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides elastiques // Bull. Soc. Philomath. – 1821. – P. 177–181.
30. Cauchy A.-L. Sur les equations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement interieur d'un corps solide, elastique ou non elastique // Ex. de Math. – 1822. – Vol. 3. – P. 160–187.
31. Capecchi D., Ruta G., Trovalusci P. From classical to Voigt's molecular models in elasticity // Arch. Hist. Exact. Sci. – 2009. – Vol. 64. – No. 5. – P. 525–558.
32. Darrigol O. Between Hydrodynamics and Elasticity Theory: The First Five Births of the Navier–Stokes Equation // Arch. Hist. Exact. Sci. – 2002. – Vol. 56. – No. 2. – P. 95–150.
33. Cauchy A.-L. Exercices d'analyse et de physique mathematique. – Paris: Bachelier, 1840. – 442 p.
34. Tedone O. Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo // Annali di Matematica Pura ed Applicata. Pt. 1. – 1903. – Vol. 8. – No. 1. – P. 129–180; Pt. 2. – 1904. – Vol. 9. – No. 1. – P. 13–64; Pt. 3. – 1909. – Vol. 16. – No. 1. – P. 141–177.
35. Kröner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1959/60 (1967). – No. 4(1). – P. 273–334.
36. Teodorescu P.P. Stress Functions in Three-Dimensional Elastodynamics // Acta Mechanica. – 1972. – Vol. 13. – P. 103–117.
37. Beltrami E. Osservazioni sulla Nota precedente // Att. Accad. Nazl. Lincei. – 1888. – No. 1. – P. 141–142.
38. Donati L. Ulteriori osservazioni intorno al teorema del Menabrea // Memorie della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. – 1894. – No. 4. – P. 449–474.
39. Michell J.H. On the direct determination of stress in an elastic solid with application to the theory of plates // Proc. London Math. Soc. – 1899. – No. 31. – P. 100–124.
40. Kellogg O.D. Foundation of Potential Theory. – Berlin, 1928. – 384 p.
41. Poisson S.-D. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques // Mém Acad. Sci. Inst France. – 1828. – No. (2) 8. – P. 357–570.
42. Eringen A.C., Suhubi E.S. Elastodynamics. Vol. I. Finite Motions. Vol. II. Linear Theory. – New York: Academic Press, 1975. – 1003 p.
43. Kovalevski S. Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln // Acta Math. – 1885. – Vol. 6. – P. 249–304.
44. Iacovache M. O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuaiilor elasticitatii // Bui. St. Acad. R. P. Romane. – 1948. – Vol. 1. – P. 593–596.
45. Somigliana C. Sulle equazioni della elasticita // Ann. Mat. – 1889. – Vol. (2) 17. – P. 37–64.
46. Слободянский М.Г. Функции напряжений для пространственной задачи теории упругости // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. Вып. XXIV. Механика. – 1938 – Кн. 2. – С. 181–190.
47. Слободянский М.Г. Об общих и полных формах решений уравнений упругости // ПММ. – 1958 – Т. 23. – Вып. 3. – С. 468–482.
48. Остросаблин Н.И. Общие решения и приведенные системы уравнений линейной теории упругости к диагональному виду // ПМТФ – 1993 – Т. 33, № 5. – С. 112–122.
49. Остросаблин Н.И. Операторы симметрии и общие решения уравнений линейной теории упругости // ПМТФ. – 1995. – Т. 36, № 5. – С. 98–104.
50. Остросаблин Н.И. Упругий анизотропный материал с чисто продольными и поперечными волнами // ПМТФ. – 2003. – Т. 44, № 2. – С. 143–151.
51. Остросаблин Н.И. Общее решение и приведение системы уравнений линейной изотропной упругости к диагональному виду // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009. – Т. 12, № 2. – С. 79–83.
52. Остросаблин Н.И. Диагонализация системы статических уравнений Ламе линейной изотропной упругости // Сиб. журн. индустр. матем. – 2012. – Т. 15, № 3. – С. 87–98.

53. Tran Cong T., Steven G.P. On the representation of elastic displacement fields in terms of three harmonic functions // *J. of Elasticity*. – 1978 – Vol. 8 (3). – P. 325–333.
54. Hackl K., Zastrow U. On the existence, uniqueness and completeness of displacements and stress functions in linear elasticity // *J. of Elasticity*. – 1988 – Vol. 17 – P. 3–23.
55. Chandrasechariah D.S. Naghdi–Hsu Type Solution in Elastodynamics // *Acta Mechanica*. – 1988. – Vol. 76. – P. 235–241.
56. Chandrasekharaiah D.S. A complete solution in elastodynamics // *Acta Mechanica*. – 1990. – Vol. 84. – No. 1–4. – P. 185–190.
57. Wang M.Z. Note On the Naghdi–Hsu type solution in elastodynamics // *Acta Mechanica*. – 1991. – Vol. 86. – P. 225–226.
58. Крутков Ю.А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – 199 с.
59. Деев В.М. О формах общего решения пространственной задачи теории упругости, выраженных при помощи гармонических функций // *ПММ*. – 1959. – Т. 23. – Вып. 6. – С. 1132–1133.
60. Boussinesq J. Application des potentiels a l'étude de l'équilibre et des mouvements des solides elastiques. – Paris: Gauthier–Villars, 1885. – 734 p.
61. Папкович П.Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции // *Известия Академии наук СССР*. – 1932. – № 9. – С. 1425–1435.
62. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung raumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel // *Z. Angew. Math. Mech.* – 1934. – Vol. 14. – P. 203–211.
63. Pigeaud G. Resistance des materiaux et Elasticite. – Paris: Gauthier-Villars, 1920. – 482 p.
64. Benthem J.P. Note on the Boussinesq–Papkovitch stress-functions // *J. of Elasticity*. – 1978 – Vol. 8. – No. 2 – P. 201–206.
65. Galerkin B. Contribution a la solution generale du probleme de la theorie de l'elasticite dans le cas de trois dimensions // *Comptes Rendus*. – 1930. – Vol. 190. – P. 1047–1048.
66. Moisil G. Asupra formulelor lui Galerkin in teoria elasticitatii // *Bui. St. Acad. R. P. Romane*. – 1948. – Vol. 1. – P. 587–592.
67. Westergaard H.M. General solution of the problem of elastostatics on n -dimensional homogeneous isotropic solid in an n -dimensional space // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1935. – Vol. 41. – No. 10. – P. 695–698.
68. Mindlin R.D. Note on the galerkin and papkovitch stress functions // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1936. – Vol. 42. – No 6. – P. 373–376.
69. Naghdi P.M., Hsu C.S. On a representation of displacements in linear elasticity in terms of three stress functions // *J. Math. Mech.* – 1961. – Vol. 9. – P. 233–245.
70. Shaefer H. Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers // *Z. Angew. Math. Mech.* – 1953. – Vol. 33. – P. 356–362.
71. Bickford W.B. A Generalization of the Boussinesq–Papkovitch Functions to an Anisotropic Medium // *ZAMP*. – 1977. – Vol. 28. – P. 723–728.
72. Eskandari-Ghadi M. A Complete Solution of the Wave Equations for Transversely Isotropic Media // *J. of Elasticity* – 2005. – Vol. 81. – No. 1. – P. 1–17.
73. Goodman W.H., Naghdi P.H. The use of displacement potentials in second order elasticity // *J. of Elasticity*. – 1988. – Vol. 22. – P. 25–44.
74. Timpe A. Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern // *Z. Angew. Math. Mech.* – 1924. – Vol. 4. – No. 5. – P. 361–376.
75. Michell J.H. The Uniform Torsion and Flexure of Incomplete Torsors, with application to Helical Springs // *Proc. London Math Soc.* – 1900. – Vol. 31. – P. 130–146.
76. Tran-Cong T. On the completeness and uniqueness of the Papkovitch–Neuber and the non-axisymmetric Boussinesq, Love, and Burgatti solutions in general cylindrical coordinates // *J. of Elasticity*. – 1995. – Vol. 36. – P. 227–255.

77. Wang M.Z. On the completeness of solutions of Boussinesq, Timpe, Love, and Michell in axisymmetric elasticity // *J. of Elasticity*. – 1988. – Vol. 17. – P. 85–92.
78. Carlson D.E. A note on the solutions of Boussinesq, Love, and Marguerre in axisymmetric elasticity // *J. of Elasticity*. – 1983. – Vol. 12. – P. 345–348.
79. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М: Наука, 1987. – Т. 1. – 464 с.; Т. 2. – 360 с.
80. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 323 с.
81. Burrige R., Vargas C.A. The fundamental solution in dynamic poroelasticity // *Geophys. J. R. astr. Soc.* – 1978. – Vol. 58. – P. 61–90.
82. Ковтун А. Об уравнениях модели Био и их модификациях // *Вопросы геофизики*. – Вып. 44. – СПб., 2010. – С. 3–26.
83. Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation // *Comptes Rendus*. – 1958. – Vol. 247. – P. 431–433.
84. Joseph D.D., Preziosi L. Heat waves // *Reviews of Modern Physics*. – 1988. – Vol. 61. – P. 41–73.
85. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // *J. of Elasticity* – 1993. – Vol. 31. – No. 3. – P. 189–208.
86. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids // *J. of Elasticity*. – 1983. – Vol. 11 (2). – P. 125–147.
87. Chandrasechariah D.S., Cowin S.C. Unified complete solutions for the theories of thermoelasticity and poroelasticity // *J. of Elasticity* – 1988. – Vol. 21. – P. 121–126.

References

1. Green A.E. Zerna W. *Theoretical Elasticity*. Dover Publications, 2002. 457 p.
2. Gurtin M.E. *The Linear Theory of Elasticity*. *Handbuch der Physik* (ed. S. Flügge). Vol. VIa/2. *Mechanics of Solids II*. Ed. C. Truesdell. Springer, 1972. 295 p.
3. Ил'юшин А.А. *Механика сплошной среды* [Continuum mechanics]. Московский государственный университет, 1990. 310 p.
4. Sedov L.I. *Механика сплошной среды* [Continuum mechanics]. Vol. 2. Saint-Petersburg: Lan', 2004. 560 p.
5. Лур'е А.И. *Теория упругости* [Theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1970. 940 p.
6. Новатский В. *Теория упругости* [Theory of elasticity]. Moscow: Mir, 1975. 872 p.
7. Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. 3rd ed. Springer, 2004. 602 p.
8. Truesdell C., Toupin R.A. *The Classical Field Theories*. *Handbuch der Physik* (ed. S. Flügge). Bd. III/1. Springer-Verlag, 1960, pp. 226–793.
9. Stokes G.G. On the dynamical theory of diffraction. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 1856, vol. 9, pp. 1–62.
10. Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *J. Reine und Angewandte Mathematik*, 1858, vol. 55, pp. 25–55.
11. Gibbs J.W. *Vector analysis*. Yale Bicentennial Publications, 1901. 436 p.
12. Курант Р. *Уравнения с частными производными* [Partial differential equations]. Moscow: Mir, 1964. 830 p.
13. Положий Г.Н. *Уравнения математической физики* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1964. 560 p.
14. Arfken G.B., Weber H.J. *Mathematical Methods for Physicists*. Sixth Edition. Elsevier Academic Press, 2005. 1182 p.
15. Gurtin M.E. On Helmholtz's theorem and the completeness of the Papkovitch–Neuber stress functions for infinite domains. *Arc. Rat. Mech. Anal.*, 1962, vol. 9, no. 1, pp. 225–233.

16. Ladyzhenskaia O.A. Smeshannaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia [Mixed problem for hyperbolic equation]. Moscow: Gostekhizdat, 1953. 282 p.
17. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Integration of linear and some model nonlinear equations of motion of incompressible fluids. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 48, pp. 77-83.
18. Polyanin A.D., Vyazmin A.V. Decomposition of Three-Dimensional Linearized Equations for Maxwell and Oldroyd Viscoelastic Fluids and Their Generalizations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2013, vol. 47, no. 4, pp. 321-328.
19. Lipatov I.I., Polyanin A.D. Decomposition and exact solutions of equations of a weakly compressible barotropic fluid. *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 3, pp. 116-120.
20. Morino L. Helmholtz decomposition revised: Vorticity generation and trailing edge condition. *Computational Mechanics*, 1986, vol. 1, pp. 65-90.
21. Voinov O.V. The symmetries of slow motions and the equilibria of continua. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 712-716.
22. Backus G.E. A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Ann. Phys.*, 1958, vol. 4, pp. 372-447.
23. Kaiser R. A Toroidal Magnetic Field Theorem. *Commun. Math. Phys.*, 2009, vol. 290, pp. 633-649.
24. Sri Padmavati B., Amaranath T. Note on Decomposition of Solenoidal Fields. *Applied Mathematics Letters*, 2002, vol. 15, pp. 803-805.
25. Chadwick P., Trowbridge E.A. Elastic wave fields generated by scalar wave functions. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1967, vol. 63, pp. 1177-1187.
26. Kochin N.E. Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniia [Vector calculus and basics of tensor analysis]. Moscow: Nauka, 1965. 427 p.
27. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris, Bachelier, 1866. 384 p.
28. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A. and Lisovenko D.S. Auxetic Mechanics of Crystalline Materials. *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 4, pp. 529-545.
29. Navier C.-L.-M.-H. Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. *Bull. Soc. Philomath.*, 1821, pp. 177-181.
30. Cauchy A.-L. Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique. *Ex. de Math.*, 1822, vol. 3, pp. 160-187.
31. Capecchi D., Ruta G., Trovalusci P. From classical to Voigt's molecular models in elasticity. *Arch. Hist. Exact. Sci.*, 2009, vol. 64, no. 5, pp. 525-558.
32. Darrigol O. Between Hydrodynamics and Elasticity Theory: The First Five Births of the Navier-Stokes Equation. *Arch. Hist. Exact. Sci.*, 2002, vol. 56, no. 2, pp. 95-150.
33. Cauchy A.-L. Exercices d'analyse et de physique mathématique. Paris: Bachelier, 1840. 442 p.
34. Tedone O. Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. Pt. 1. 1903, vol. 8, no. 1, pp. 129-180; Pt. 2. 1904, vol. 9, no. 1, pp. 13-64. Pt. 3. 1909, vol. 16, no. 1, pp. 141-177.
35. Kröner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1959/60(1967), no. 4(1), pp. 273-334.
36. Teodorescu P.P. Stress Functions in Three-Dimensional Elastodynamics. *Acta Mechanica*, 1972, vol. 13, pp. 103-117.
37. Beltrami E. Osservazioni sulla Nota precedente. *Att. Accad. Nazl. Lincei*, 1888, no. 1, pp. 141-142.
38. Donati L. Ulteriori osservazioni intorno al teorema del Menabrea. *Memorie della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, 1894, no. 4, pp. 449-474.
39. Michell J.H. On the direct determination of stress in an elastic solid with application to the theory of plates. *Proc London Math Soc.*, 1899, no. 31, pp. 100-124.
40. Kellogg O.D. Foundation of Potential Theory. Berlin, 1928. 384 p.
41. Poisson S.-D. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. *Mém Acad. Sci. Inst France*, 1828, no. (2) 8, pp. 357-570.

42. Eringen A.C., Suhubi E.S. Elastodynamics. Vol. I. Finite Motions. Vol. II. Linear Theory. New York: Academic Press, 1975. 1003 p.
43. Kovalevski S. Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln. *Acta Math.*, 1885, vol. 6, pp. 249-304.
44. Iacovache M. O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuaiilor elasticitatii. *Bui. St. Acad. R. P. Romane*, 1948, vol. 1, pp. 593-596.
45. Somigliana C. Sulle equazioni della elasticita. *Ann. Mat.*, 1889, vol. (2) 17, pp. 37-64.
46. Slobodianskii M.G. Funktsii napriazhenii dlia prostranstvennoi zadachi teorii uprugosti [Stress functions for spatial elastic problem]. *Uchenye zapiski Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta*, iss. XXIV. *Mekhanika*, 1938, kn. 2, pp. 181-190.
47. Slobodianskii M.G. General and complete solutions of the equations of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1958, vol. 23, no. 3, pp. 666-685.
48. Ostrosablin N.I. General solutions and reduction of a system of equations of the linear theory of elasticity to diagonal form. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1993, vol. 34, no. 5, pp. 700-710.
49. Ostrosablin N.I. Symmetry operators and general solutions of the equations of the linear theory of elasticity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1995, vol. 36, no. 5, pp. 724-728.
50. Ostrosablin N.I. Elastic Anisotropic Material with Purely Longitudinal and Transverse Waves. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2003, vol. 44, no. 2, pp. 271-278.
51. Ostrosablin N.I. The general solution and reduction to diagonal form of a system of equations of linear isotropic elasticity. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2010, vol. 4, no. 3, pp. 354-358.
52. Ostrosablin N.I. Diagonalization of the system of static Lamé equations of isotropic linear elasticity. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2013, vol. 7, no. 1, pp. 89-99.
53. Tran Cong T., Steven G.P. On the representation of elastic displacement fields in terms of three harmonic functions. *J. of Elasticity*, 1978, vol. 8, no. 3, pp. 325-333.
54. Hackl K., Zastrow U. On the existence, uniqueness and completeness of displacements and stress functions in linear elasticity. *J. of Elasticity*, 1988, vol. 17, pp. 3-23.
55. Chandrasechariah D.S. Naghdi–Hsu Type Solution in Elastodynamics. *Acta Mechanica*, 1988, vol. 76, pp. 235-241.
56. Chandrasekharaiah D.S. A complete solution in elastodynamics. *Acta Mechanica*, 1990, vol. 84, no. 1-4, pp. 185-190.
57. Wang M.Z. Note On the Naghdi-Hsu type solution in elastodynamics. *Acta Mechanica*, 1991, vol. 86, pp. 225-226.
58. Krutkov Iu.A. Tenzor funktsii napriazhenii i obshchie resheniia v statike teorii uprugosti [Stress function tensor and general solutions for static elasticity theory]. Akademiia nauk SSSR, 1949. 199 p.
59. Deev V.M. On forms of the general solution of the spatial problem of the theory of elasticity with the aid of harmonic functions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, vol. 23, no. 6, pp. 1619-1622.
60. Boussinesq J. Application des potentiels a l'étude de l'équilibre et des mouvements des solides elastiques. Paris: Gauthier–Villars, 1885. 734 p.
61. Papkovich P.F. Vyrazhenie obshchego integrala osnovnykh uravnenii teorii uprugosti cherez garmonicheskie funktsii [Calculation of general integral of basical equations of elasticity via harmonic functions]. *Izvestiia akademii nauk SSSR*, 1932, no. 9, pp. 1425-1435.
62. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Losung raumlicher Probleme der Elastizitatstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1934, vol. 14, pp. 203-211.
63. Pigeaud G. Resistance des materiaux et Elasticite. Paris: Gauthier-villars, 1920. 482 p
64. Benthem J.P. Note on the Boussinesq–Papkovich stress-functions. *J. of Elasticity*, 1978, vol. 8, no. 2, pp. 201-206.
65. Galerkin B. Contribution a la solution generale du probleme de la theorie de l'elasticite dans le cas de trois dimensions. *Comptes Rendus.*, 1930, vol. 190, pp. 1047-1048.

66. Moisil G. Asupra formulelor lui Galerkin in teoria elasticitatii. *Bui. St. Acad. R. P. Romane*, 1948, vol. 1, pp. 587-592.
67. Westergaard H.M. General solution of the problem of elastostatics on n -dimensional homogeneous isotropic solid in an n -dimensional space. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1935, vol. 41, no. 10, pp. 695-698.
68. Mindlin R.D. Note on the galerkin and papkovitch stress functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1936, vol. 42, no. 6, pp. 373-376.
69. Naghdi P.M., Hsu C.S. On a representation of displacements in linear elasticity in terms of three stress functions. *J. Math. Mech.*, 1961, vol. 9, pp. 233-245.
70. Shaefer H. Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1953, vol. 33, pp. 356-362.
71. Bickford W.B. A Generalization of the Boussinesq-Papkovich Functions to an Anisotropic Medium. *ZAMP*, 1977, vol. 28, pp. 723-728.
72. Eskandari-Ghadi M. A Complete Solution of the Wave Equations for Transversely Isotropic Media. *J. of Elasticity*, 2005, vol. 81, no. 1, pp. 1-17.
73. Goodman W.H., Naghdi P.H. The use of displacement potentials in second order elasticity. *J. of Elasticity*, 1988, vol. 22, pp. 25-44.
74. Timpe A. Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1924, vol. 4, no. 5, pp. 361-376.
75. Michell J.H. The Uniform Torsion and Flexure of Incomplete Torsors, with application to Helical Springs. *Proc. London Math Soc.*, 1900, vol. 31, pp. 130-146.
76. Tran-Cong T. On the completeness and uniqueness of the Papkovitch-Neuber and the non-axisymmetric Boussinesq, Love, and Burgatti solutions in general cylindrical coordinates. *J. of Elasticity*, 1995, vol. 36, pp. 227-255.
77. Wang M.Z. On the completeness of solutions of Boussinesq, Timpe, Love, and Michell in axisymmetric elasticity. *J. of Elasticity*, 1988, vol. 17, pp. 85-92.
78. Carlson D.E. A note on the solutions of Boussinesq, Love, and Marguerre in axisymmetric elasticity. *J. of Elasticity*, 1983, vol. 12, pp. 345-348.
79. Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznykh sred [Dynamic of multiphases mediums]. Moscow: Nauka, 1987, vol. 1, 464 p. Vol. 2, 360 p.
80. Nikolaevskii V.N. Mekhanika poristykh i treshchinovatykh sred [Mechanics of porous and cracked medium]. Moscow: Nedra, 1984. 323 p.
81. Burrige R., Vargha C.A. The fundamental solution in dynamic poroelasticity. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 1978, vol. 58, pp. 61-90.
82. Kovtun A. Ob uravneniiakh modeli Bio i ikh modifikatsiiakh [About Bio model equations and its modifications]. *Voprosy geofiziki*, 2010, iss. 44, pp. 3-26.
83. Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation. *Comptes Rendus.*, 1958, vol. 247, pp. 431-433.
84. Joseph D.D., Preziosi L. Heat waves. *Reviews of Modern Physics*, 1988, vol. 61, pp. 41-73.
85. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation. *J. of Elasticity*, 1993, vol. 31, no. 3, pp. 189-208.
86. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids. *J. of Elasticity*, 1983, vol. 11(2), pp. 125-147.
87. Chandrasechariah D.S., Cowin S.C. Unified complete solutions for the theories of thermoelasticity and poroelasticity. *J. of Elasticity*, 1988, vol. 21, pp. 121-126.