

Яковлева Т.В., Баженов В.Г., Крысько В.А., Крылова Е.Ю. Контактное взаимодействие пластины с системой балок при наличии зазоров с учетом белого шума // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 259–272. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.15

Yakovleva T.V., Bazhenov V.G., Krysko V.A., Krylova E.Yu. Contact interaction plates, reinforced by ribs, with gaps under the influence of white noise. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2015. No. 4. Pp. 259-272. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.15



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.15

УДК 539.3

## КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛАСТИНЫ С СИСТЕМОЙ БАЛОК ПРИ НАЛИЧИИ ЗАЗОРОВ С УЧЕТОМ БЕЛОГО ШУМА

Т.В. Яковлева<sup>1</sup>, В.Г. Баженов<sup>1</sup>, В.А. Крысько<sup>2</sup>, Е.Ю. Крылова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>НИИМ Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,  
Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.,  
Саратов, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 23 июля 2015 г.  
Принята: 29 октября 2015 г.  
Опубликована: 25 декабря 2015 г.

#### Ключевые слова:

микромеханические системы,  
контактное взаимодействие,  
нелинейная динамика балок  
и пластин, фазовые переходы,  
индуцированные белым шумом,  
вейвлет-анализ

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается контактное взаимодействие многослойной конструкции в виде пластин и балок, между которыми имеются малые зазоры. Такие системы являются составными элементами современных приборов. В основу создаваемой математической модели положены следующие гипотезы: система представляет собой многослойную структуру; материалы изотропные. Для решения задачи применяются метод конечных разностей с аппроксимацией  $O(h^2)$ ,  $O(h^4)$  и метод Фадзо–Галеркина в высших приближениях по пространственным координатам, а также метод Рунге–Кутты  $O(h^4)$ ,  $O(h^6)$ ,  $O(h^8)$  по времени. При решении задач, связанных с хаотическими колебаниями, встает вопрос о погрешности, поэтому необходимо применение разных численных методов для подтверждения достоверности результатов, чтобы отличить хаос от численной погрешности. Для анализа хаотической динамики применяются методы качественного анализа. Исследуется пространственно-временной хаос на базе вейвлет-анализа. Рассматривается влияние белого шума на контактное взаимодействие элементов многослойной структуры. Также проводится анализ сложных колебаний пластин и балок в зависимости от разной интенсивности шума и типа приложенной нагрузки. Установлено, что с помощью внешнего аддитивного белого шума можно управлять хаотическими колебаниями и переводить систему из хаотического состояния в гармоническое, а также включать и отключать контактное взаимодействие.

© ПНИПУ

© Яковлева Татьяна Владимировна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, e-mail: yan-tan1987@mail.ru

Баженов Валентин Георгиевич – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: bazhenov@mech.unn.ru

Крысько Вадим Анатольевич – доктор технических наук, профессор, e-mail: tak@san.ru

Крылова Екатерина Юрьевна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, e-mail: kat.krylova@bk.ru

Tatyana V. Yakovleva – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, e-mail: yan-tan1987@mail.ru

Valentin G. Bazhenov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: bazhenov@mech.unn.ru

Vadim A. Krysko – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: tak@san.ru

Ekaterina Yu. Krylova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, e-mail: kat.krylova@bk.ru

## **CONTACT INTERACTION PLATES, REINFORCED BY RIBS, WITH GAPS UNDER THE INFLUENCE OF WHITE NOISE**

**T.V. Yakovleva<sup>1</sup>, V.G. Bazhenov<sup>1</sup>, V.A. Krysko<sup>2</sup>, E.Yu. Krylova<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>NIIM Nizhny Novgorod State University N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, Russian Federation

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 23 July 2015  
Accepted: 29 October 2015  
Published: 25 December 2015

#### *Keywords:*

MEMS, contact interaction,  
nonlinear dynamics of beams  
and plates, phase transitions  
induced by white noise,  
wavelet analysis

### ABSTRACT

We have investigated the contacting interaction of a sandwich structure in the form of plates and beams with small gaps between them. Such systems are integral elements of modern devices. The created mathematical model is based on the following hypothesis: the system is a multi-layer structure; the materials are isotropic. To solve the problem we used the finite difference method with approximation  $O(h_2)$ ,  $O(h_4)$  and Bubnov-Galerkin method in higher approximations of spatial coordinates, as well as the Runge-Kutta  $O(h_4)$ ,  $O(h_6)$ ,  $O(h_8)$  time. In solving problems associated with random variations, it is necessary to solve the challenge of an error, so you need to use different numerical methods to validate the results in order to distinguish the chaos of the numerical error. For the analysis of chaotic dynamics we have applied all methods of qualitative analysis. We have investigated the spatiotemporal chaos based on wavelet analysis. We have studied the effect of white noise in the contact interaction of elements of the multilayer structure. Also, the analysis of the complex vibrations of plates and beams in different intensities depending on the type of noise and load has been made. It was found that by using an external additive white noise, it became possible to control chaotic oscillations and transfer the system from a chaotic state to a harmonious one and enable or disable the contact interaction.

© PNRPU

---

## **Введение**

Конструкции современных приборов и техники представляют собой сложные многослойные пакеты из балок и пластин с малыми зазорами между элементами. Такие конструкции подвергаются работе в экстремальных условиях, вызванных детерминированным внешним воздействием различной природы и случайными флуктуациями в свойствах окружающей среды, что, в свою очередь, вызывает перестройку режимов динамических систем [1]. Необходимо учитывать контактное взаимодействие слоев, что приводит к конструктивной нелинейности [2]. Наличие зазора между элементами (пластинка-балка, пластинка-пластинка, балка-балка, оболочка-балка и другие сочетания), а также неидеальность изготовления прибора уже при малых прогибах, соизмеримых с зазором между элементами, может привести изучаемый объект в состояние хаотических колебаний [3–4]. Поэтому важно изучение влияния управляющих параметров, различных типов внешней нагрузки на функционирование системы. Такие системы широко применяются в различных приборах электронной техники, в частности в гироскопах (слоистые плоские микромеханические акселерометры (ММА), описанных в статьях [5–6], однако в этих работах не изучается контактное взаимодействие слоев. При моделировании поведения конструкций современной техники важным вопросом является тип характера хаотического состояния. Изучение такого явления возможно с позиции анализа всего многообразия знаков показателей Ляпунова [7–9], анализа Фурье и вейвлет-анализа [10]. Важным вопросом является проблема управления хаосом и сложными нелинейными колебаниями, которые приводят к различным погрешностям в работе датчиков измерительных приборов. Такие погрешности можно исследовать, учитывая математическую модель белого

шума. Проблема повышения точности приборов и прочности конструкций современной техники является актуальной. Такая задача может быть решена за счет применения новых технических решений, использования новых технологий, создания новых математических моделей, описывающих нелинейную динамику распределенных систем. В настоящее время как за рубежом, так и в российских научных школах повысился интерес к эффектам, связанным с воздействием внешних шумов на поведение динамических систем. В таких областях, как физика, химия, биология, уже показано, что случайные воздействия играют весьма существенную роль в поведении динамических систем [11–12]. Внешние шумы способны приводить не только к флуктуациям в характеристиках динамических систем, но и вызывать качественную перестройку их режимов [13–15]. В работе [16] на примере осциллятора Анищенко-Астахова показано, что воздействие шумового сигнала приводит к сдвигу бифуркаций удвоения в сторону роста управляющего параметра. В статье [17] показано, что неустойчивая по Ляпунову детерминированная параметрическая система может быть стабилизирована путем наложения на параметрическую нагрузку случайного шума. В работе [18] излагаются результаты опытного изучения балочно-ударной системы при возмущениях типа гауссова шума. Показано, что при учете нескольких форм колебаний реакция нелинейной модели сильно отличается от реакции расчетной модели с одной степенью свободы. В статье [19] показано, что учет количества степеней свободы существенно влияет на достоверность получаемых результатов. В работе [20] выполнены расчеты колебаний и радиации звука подкрепленных пластин, покрытых демпфирующим слоем при действии гармонической нагрузки и нагрузки типа белого шума. Решение получено путем разложения по собственным формам колебаний. В работе С.И. Денисова [21] рассмотрены индуцированные шумом переходы в одномерных системах, в результате которых их стационарные функции распределения претерпевают качественные изменения с изменением интенсивности шума. В случае когда флуктуации моделируются гауссовским белым шумом, необходимым условием существования таких переходов является мультипликативность шума. В статье [22] предложена теоретическая статическая модель равновесия капли жидкости на шероховатой плоской поверхности. Поверхность описывается случайной стационарной функцией типа белого шума в ограниченной полосе частот. Выполнено обобщение модели на случай рельефа поверхности в виде набора произвольных случайных функций. Вместе с тем работ, посвященных вопросам внешнего воздействия среды на нелинейные колебания многослойных пакетов в виде балок и пластин как систем с множеством степеней свободы, в известной нам литературе не имеется.

## 1. Постановка задачи

Построена математическая модель сложных колебаний многослойного пакета из пластины и трех балок, на который действует внешняя нагрузка разных типов (рис. 1). Верхний слой представляет собой пластинку, которая описывается уравнением типа Жермен-Лагранжа, а нижний слой – набор параллельных балок. Каждая из балок описывается уравнением Эйлера–Бернулли. Контактное взаимодействие учитывается по модели Винклера. Пластина и балки изотропные, между ними имеется малый зазор, соединены они через краевые условия. Математическая модель описывается системой уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial t} - q_1(x, y, t) - \\ & - K(w_1 - w_2 - h_k) \Psi_1 - K(w_1 - w_3 - h_k) \Psi_2 - K(w_1 - w_4 - h_k) \Psi_3 = 0, \\ & \frac{1}{12} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_2}{\partial t} - q_2(x, t) + K(w_1 - w_2 - h_k) \Psi_1 = 0, \\ & \frac{1}{12} \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_3}{\partial t} - q_3(x, t) + K(w_1 - w_3 - h_k) \Psi_2 = 0, \\ & \frac{1}{12} \frac{\partial^4 w_4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_4}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_4}{\partial t} - q_4(x, t) + K(w_1 - w_4 - h_k) \Psi_3 = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.1)$$

где функции  $\Psi_1 = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_2)]$ ;  $\Psi_2 = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_3)]$  и  $\Psi_3 = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_4)]$ .

Соотношение  $K(w_1 - w_i - h_k) \Psi_{i-1}$ , где  $i = 2; 3; 4$  – номер балки, представляет собой контактное давление между слоями. В контактных задачах теории пластин и балок это соотношение и есть винклера связь между обжатием и контактным давлением.

$\nabla_\lambda^4 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ ;  $\Psi_{i-1} = 1$ , если  $w_1 > w_i + h_k$ , – есть контакт между пластиной и балкой, иначе  $\Psi_{i-1} = 0$ ;  $w_1, w_i$  – функции прогибов пластины и балок соответственно;  $K$  – коэффициент жесткости трансверсального обжатия структуры в зоне контакта;  $h_k$  – зазор между слоями. Появление зон сцепления маловероятно, поскольку контактное давление между слоями невелико. Условия контакта между слоями могут зависеть от координат и включать все виды несовершенного одностороннего контакта [23].

Система уравнений (1.1) приведена к безразмерному виду следующим образом:  $x = a\bar{x}$ ,  $y = a\bar{y}$ ;  $q = q \frac{E(2h)^4}{a^2 b^2}$ ,  $\tau = \frac{ab}{2h} \sqrt{\frac{\gamma}{Eg}}$ ,  $\lambda = \frac{a}{b}$ , где  $a, b$  – размеры пластины по  $x$  и  $y$  соответственно;  $t$  – время;  $\varepsilon$  – коэффициент затухания;  $w$  – функция прогиба;  $2h$  – толщина пластины;  $\mu = 0,3$  – коэффициент Пуассона;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $E$  – модуль упругости;  $q_1(x, y, t)$  – поперечная нагрузка, действующая на пластинку;  $q_i(x, t)$  – поперечные нагрузки, действующие на балки;  $\gamma$  – удельный вес материала.

На многослойный пакет могут действовать внешние нагрузки различных типов: поперечные без учета и с учетом аддитивного шума.

Поперечные нагрузки в общем виде представляют собой выражения

$$q_1(x, y, t) = q_0 \sin(\omega_p t) + a^0 \frac{2rand}{rand\_max + 1} - 1, \quad (1.2)$$

$$q_i(x, t) = q_i^0 \sin(\omega_p t) + a_i^0 \frac{2rand}{rand\_max + 1} - 1, \quad (i = 2, \dots, 4). \quad (1.3)$$

Аддитивный шум представляет собой форму детерминированного входа, при этом шум используется только во внешней нагрузке и задается формулой  $a^0 \frac{2rand}{rand\_max+1} - 1$ , где  $a^0$  – это интенсивность шумового воздействия; функция  $rand$  – генератор случайных чисел некоторой случайной величины.

Для простоты записи черточки над безразмерными параметрами в системе уравнений (1.1) опущены.

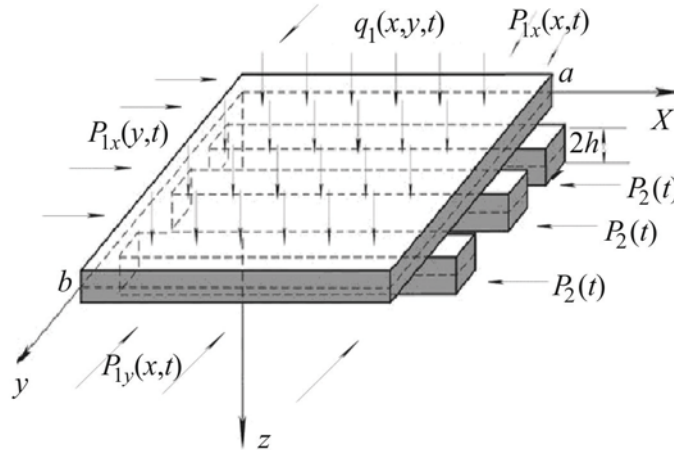


Рис. 1. Схема многослойной структуры из пластины и трех балок

К исходным уравнениям следует присоединить граничные условия – шарнирное опирание по контуру и нулевые начальные условия:

$$w_m = 0; \quad w_m''|_x = 0; \quad \text{при } x = 0; 1; \quad w_m = 0; \quad w_m''|_y = 0; \quad \text{при } y = 0; 1, \quad (1.4)$$

$m = 1, 2, 3, 4$  – индекс, соответствующий пластине и балкам;

$$w_1(x, y)|_{t=0} = 0, \quad w_2(x)|_{t=0} = 0, \quad w_3(x)|_{t=0} = 0, \quad w_4(x)|_{t=0} = 0, \quad \dot{w}_m|_{t=0} = 0, \quad (1.5)$$

$m = 1, 2, 3, 4$ .

К этим условиям следует добавить условия непроникновения одной системы в тело другой. Полученные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1.1) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом Фэдо–Галеркина [24]. Функции  $w_1$  и  $w_i$  ( $i = 2, \dots, 4$ ), являющиеся решениями системы (1.1), приближенно аппроксимируем выражением в виде произведения функций, зависящих от времени и от координат:

$$w_1 = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N A_{kj}(t) \varphi_{kj}(x, y), \quad w_i = \sum_{k=1}^N A_i^k(t) \varphi_i^k(x), \quad (i = 2, \dots, 4), \quad N = 6.$$

Функции  $\varphi_{kj}(x, y)$  и  $\varphi_i^k(x)$  выбираем таким образом, чтобы они были линейно независимы, непрерывны вместе со своими частными производными до четвертого порядка включительно, удовлетворяли граничным и начальным условиям. С этой целью положим

$$\varphi_{kj}(x, y) = \sin(k\pi x) \sin(j\pi y), \quad \varphi_i^k(x) = \sin(k\pi x), \quad (i = 2, \dots, 4).$$



Коэффициенты  $A_{kj}(t)$  и  $A_i^k(t)$  являются искомыми функциями времени. После применения метода Фаэдо–Галеркина получаем систему второго порядка относительно функций времени. Количество уравнений в системе зависит от количества балок. Систему уравнений второго порядка сводим к системе первого порядка с помощью метода замены переменной. Задачи Коши для нелинейной системы уравнений первого порядка решаются методами типа Рунге–Кутты по временной координате.

При решении задач, связанных с хаотическими колебаниями, встает вопрос о погрешности, поэтому необходимо применение разных численных методов для подтверждения достоверности результатов. С этой целью полученные дифференциальные уравнения сводились к задаче Коши методом конечных разностей с аппроксимацией  $O(h^2)$  и  $O(h^4)$  и методом Фаэдо–Галеркина в высших приближениях, исследовалась сходимость метода при разном числе членов ряда  $N = 1, \dots, 6$ , при этом точность устанавливалась по правилу Рунге. Полученные обыкновенные дифференциальные уравнения решались методами типа Рунге–Кутты 4, 6, 8-го порядка точности по временной координате, был проведен сравнительный анализ результатов [1, 4]. Так как система уравнений нелинейная, то решить ее аналитическим путем не представляется возможным.

На основании данного алгоритма создан программный комплекс, позволяющий исследовать многослойный пакет из пластины и трех балок, которые описываются системой уравнений (1.1). Анализ получаемых результатов осуществляется с помощью методов нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений: строятся для каждого слоя пакета сигналы, фазовые портреты, сечения Пуанкаре, Фурье-спектры, применяются вейвлет-преобразования и анализ знаков показателей Ляпунова. Используются различные вейвлеты: Морле, «мексиканская шляпа», Гаусса от 1-го до 8-го порядка включительно. Вейвлет Гаусса 8-го порядка и вейвлет Морле дают близкие результаты, тем не менее предпочтение отдаем вейвлету Морле, так как он обладает наилучшей способностью локализовать частоту во времени, то есть является наиболее информативным [25–26].

## 2. Численный эксперимент

Изучим сложные колебания многослойного пакета, который состоит из пластины и трех параллельных балок, расположенных на несимметричном расстоянии от центра пластины ( $y = 0, 2$ ,  $y = 0, 4$  и  $y = 0, 7$ ), зазор между пластиной и каждой из балок  $h_k = 0, 01$ . Исследуем контактное взаимодействие в зависимости от трех типов нагрузки:

1) только на верхнюю пластину действует внешняя распределенная поперечная нагрузка  $q_1(x, y, t) = q_0 \sin(\omega_p t)$ , балки находятся в состоянии покоя, то есть  $q_i(x, t) = 0$ ;

2) только на верхнюю пластину действует внешняя распределенная поперечная нагрузка с шумовой составляющей  $q_1(x, y, t) = q_0 \sin(\omega_p t) + a^0 \frac{2rand}{rand\_max+1} - 1$ , балки находятся в состоянии покоя ( $q_i(x, t) = 0$ );

3) на верхнюю пластину действует внешняя распределенная поперечная нагрузка  $q_1(x, y, t) = q_0 \sin(\omega_p t)$ , на все три балки действует аддитивный белый шум, то есть нагрузка задается формулой  $q_i(x, t) = a_i^0 \frac{2rand}{rand\_max+1} - 1$ .

Рассмотрим первый тип нагрузки. На верхнюю пластину действует внешняя распределенная поперечная нагрузка  $q_1(x, y, t) = q_0 \sin(\omega_p t)$  с интенсивностью  $q_0 < 0,065$  и частотой возбуждения  $\omega_p = 5$ , близкой к частоте собственных колебаний пластины. При этом пластина совершает гармонические колебания, а балки находятся в состоянии покоя. При амплитуде внешнего воздействия  $q_0 = 0,065$  происходит контакт пластины и балок, что приводит к непродолжительным по времени затухающим колебаниям балок. При  $q_0 = 0,07$  происходит смена характера колебания пластины и первой балки: система перешла в хаос, возникает утроение периода (рис. 2, б (b1, b2)), в то время как вторая и третья балки находятся в состоянии покоя. На рис. 2 приведены графики спектров мощности Фурье (b1, b2), 2D вейвлет-спектров Морле (рис. 2, в (c1, c2)) для пластины и первой балки соответственно, а также график совместных колебаний пластины и первой балки ( $y = 0, 2$ ) (рис. 2, а), сплошная линия соответствует пластинке, пунктир – балке.

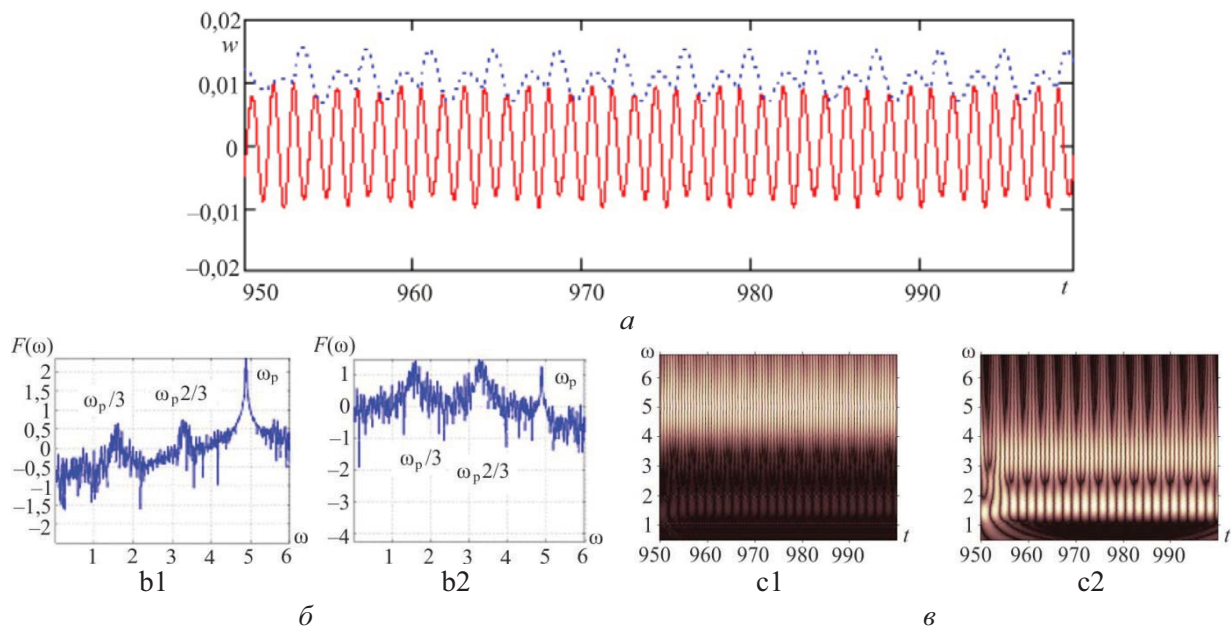


Рис. 2. Контактное взаимодействие пластины и трех несимметричных балок при амплитуде нагрузки  $q_0 = 0,07$  с зазором  $h_k = 0,01$

С увеличением амплитуды внешней нагрузки пластина совершает хаотические колебания на утроении периода поочередно с каждой из крайних балок. При амплитуде нагрузки в интервале  $q_0 \in [0,074; 0,09]$  колебания совершает каждый элемент двухслойного балочно-пластинчатого пакета (пластина и все три балки). Графики 2D вейвлет-спектров Морле показывают, что в разные интервалы времени колебания осуществляются на разных частотах (рис. 3, б (b1–b4)) в отличие от спектров мощности Фурье (рис. 3, а (a1–a4)), которые указывают суммарно частоты колебания за весь период времени. Проведенный анализ позволяет сделать вывод о наличии зон перемежаемости и окнах включения/выключения частот. Далее с увеличением нагрузки снова идет чередование колебаний пластинки с одной из трех балок. И, наконец, начиная с величины амплитуды нагрузки  $q_0 = 0,31$ , пластина взаимодействует одновременно с двумя крайними балками ( $y = 0, 2$ ,  $y = 0, 7$ ), при этом характер колебаний хаотический.

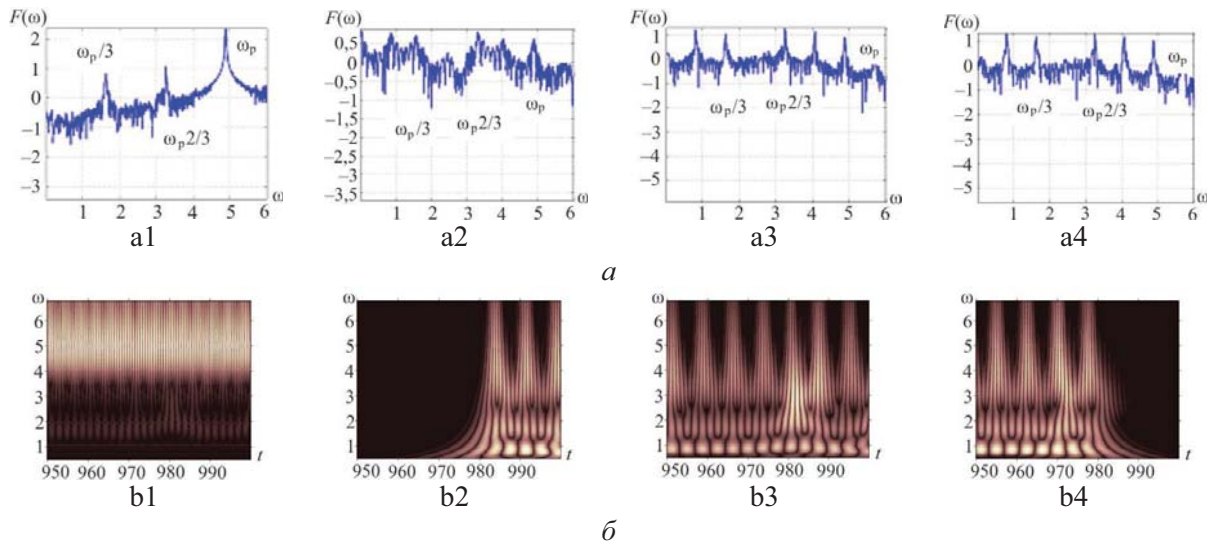


Рис. 3. Контактное взаимодействие пластины и трех несимметричных балок при амплитуде нагрузки  $q_0 = 0,077$  с зазором  $h_k = 0,01$

Рассмотрим второй тип нагрузки. На верхнюю пластину действует внешняя распределенная поперечная нагрузка с амплитудой  $q_0 = 0,07$ . Изучим влияние аддитивного шума, добавленного во внешнюю поперечную нагрузку на пластину, на сложные колебания многослойной структуры. Значение интенсивности шума из интервала  $a^0 \in [1 \cdot 10^{-6}; 6,6 \cdot 10^{-3}]$  абсолютно не влияет на характер колебаний (рис. 4 (a1, b1, c1, d1)). Система по-прежнему осталась детерминированной, происходит захват хаотических колебаний на утроении периода пластины и первой балки ( $y = 0, 2$ ). На рис. 4 для разной интенсивности шума приведены графики спектров мощности Фурье и 2D вейвлет-спектров Морле для пластины  $w_1(0, 5; t)$  (a1–a4 и b1–b4), для первой балки  $w_2(0, 5; t)$  (c1–c4 и d1–d4), для второй балки  $w_3(0, 5; t)$  (e3–e4 и f3–f4) и для третьей балки  $w_4(0, 5; t)$  (g3–g4 и h3–h4), соответственно. При увеличении интенсивности шумового воздействия  $a^0 = 6,7 \cdot 10^{-3}$  произошла перестройка характера колебаний всей системы. Колебания пластины стали гармоническими на частоте возбуждения внешней нагрузки  $\omega_p = 5$ , а балки находятся в состоянии покоя. Таким образом, с присутствием аддитивного шума  $a^0 = 6,7 \cdot 10^{-3}$  во внешней нагрузке контактное взаимодействие не происходит (рис. 4 (a2, b2)). При интенсивности шума  $a^0 \in [6,7 \cdot 10^{-3}; 5 \cdot 10^{-2}]$  и амплитуде внешнего поперечного воздействия  $q_0 = 0,07$  колебания системы гармонические, фазовый портрет представляет собой кольцо. При увеличении значения шума до  $a^0 = 6 \cdot 10^{-2}$ , при прежних значениях остальных управляющих параметров, происходит перестройка системы и на фазовом портрете пластины появляется утроение орбит. Из-за соприкосновения в результате контактного взаимодействия слоев возникает колебание балок (рис. 4 (c3, d3, e3, f3, g3, h3)). На спектре мощности Фурье для пластины наблюдается локализация частот вокруг частоты, которая произойдет при дальнейшем увеличении шума (рис. 4 (a3, b3)). При интенсивности шума  $a^0 = 7 \cdot 10^{-2}$  система совершает хаотические колебания на утроении периода. При увеличении шума до значения  $a^0 = 1 \cdot 10^{-1}$  многослойная структура совершает сложные хаотические колебания на утроении периода. На разных интервалах времени пластина взаимодействует поочередно с каждой из балок. Контактное взаимодействие пластины со второй ( $y = 0, 4$ ) и третьей ( $y = 0, 7$ ) балкой происходит только на коротком промежутке времени (рис. 4 (a4, b4, c4, d4, e4, f4, g4, h4)).



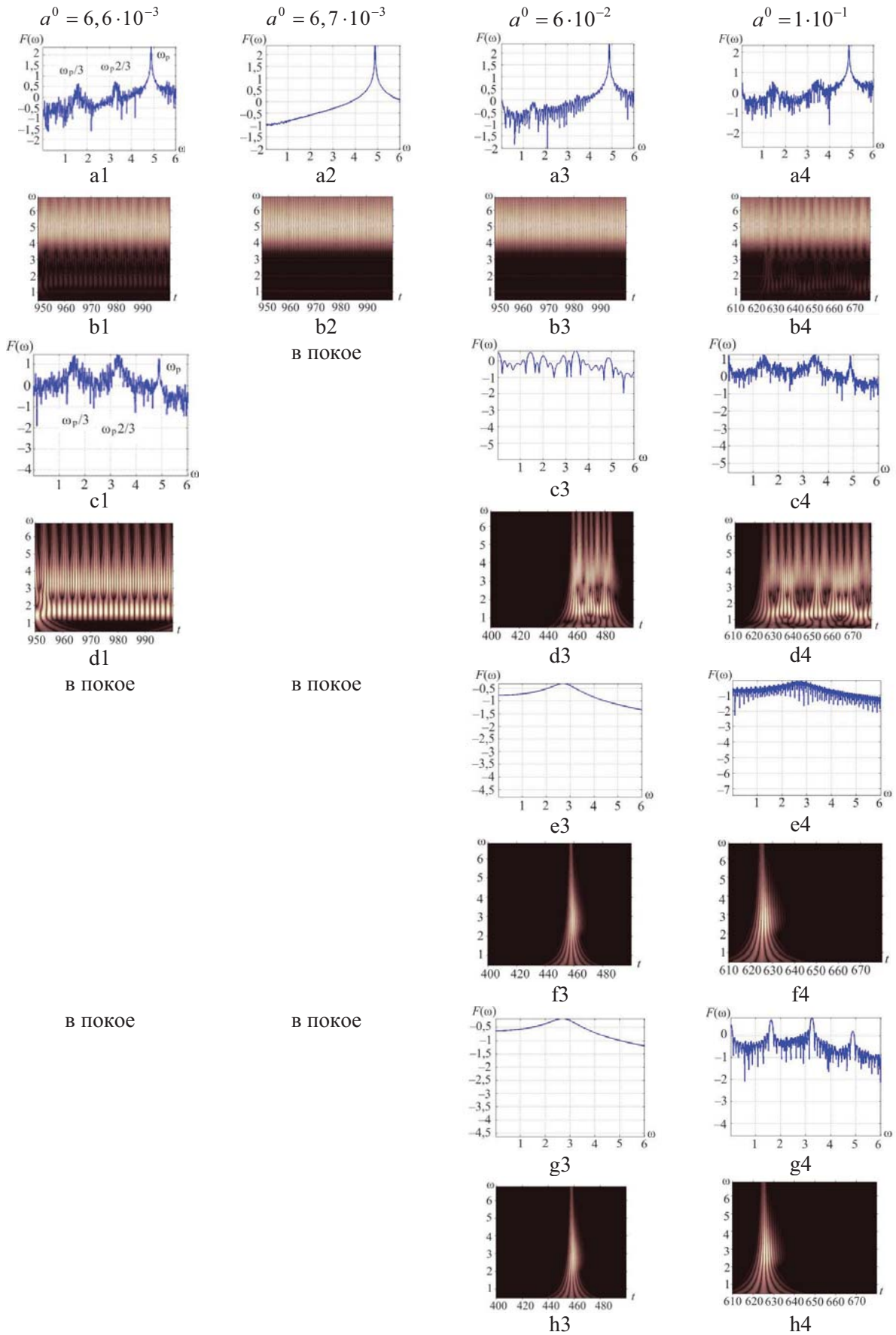


Рис. 4. Исследование влияния белого шума на основе Фурье- и вейвлет-анализа для колебаний многослойного пакета

Рассмотрим третий тип нагрузки. На верхнюю пластину действует внешняя распределенная поперечная нагрузка с амплитудой  $q_0 = 0,07$  и частотой возбуждения  $\omega_p = 5$ . Изучим контактное взаимодействие под влиянием аддитивного шума, действующего на все три балки, то есть нагрузка на балки задается формулой  $q_i(x, t) = a_i^0 \frac{2rand}{rand\_max+1} - 1$ .

При отсутствии внешнего белого шума ( $a_i^0 = 0$ ) происходит контакт пластины и первой балки ( $y = 0,2$ ), колебания пластины и балки совершаются на утроении периода, в то время как вторая ( $y = 0,4$ ) и третья ( $y = 0,7$ ) балки находятся в состоянии покоя. Увеличивая интенсивность аддитивного шума до  $a_i^0 = 0,001$ , наблюдаем перестройку системы. Вторая и третья балки совершают хаотические колебания с малой амплитудой по сравнению с зазором между балками и пластиной, фазовые портреты представляют собой сплошное пятно, спектры мощности Фурье и вейвлет-спектры свидетельствуют о глубоком хаосе. Контактное взаимодействие происходит между пластиной и первой балкой на утроении периода (рис. 5 (b1, b2)), но при этом появляется перемежаемость частот у этих элементов (рис. 5 (c1, c2)). На рис. 5 приведены графики сигнала (a1, a2), спектра мощности Фурье (b1, b2) и 2D вейвлет-спектров Морле (c1, c2) для пластины и первой балки соответственно.

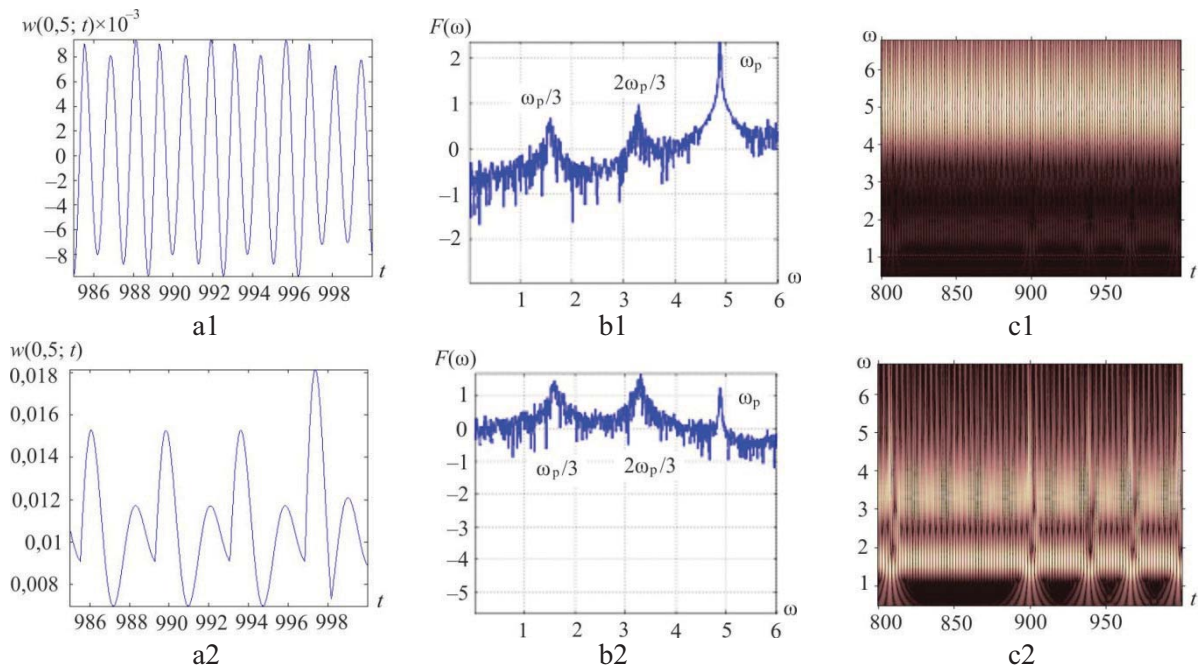


Рис. 5. Контактное взаимодействие пластины  $w_1(0,5; 0,5, t)$  и первой балки  $w_2(0,5; t)$  при белом шуме  $a_i^0 = 0,001$

При интенсивности шума  $a_i^0 = [0,002; 0,029]$  в контактное взаимодействие вступают пластина и третья балка на утроении периода, первая и вторая балки совершают хаотические колебания, но касания с пластинкой нет. При этом для  $a_i^0 = 0,002$  спектр мощности Фурье для пластины очистился, происходит синхронизация пластины и третьей балки с небольшими составляющими шума. Колебания совершаются на утроении периода, од-

нако у пластины доминирует частота  $\omega_p = 5$ , а у балки –  $\omega_p / 3 = 1,6$  и  $2\omega_p / 3 = 3,3$ . Далее при величине белого шума  $a_i^0 = 0,03$  пластинка совершает гармонические колебания, за счет того, что контакта ни с одной из балок нет, хотя они находятся в состоянии глубокого хаоса. При увеличении интенсивности шума до  $a_i^0 = 0,031$  пластина снова касается третьей балки с утроением периода частот, то есть происходит синхронизация этих двух элементов балочно-пластинчатой структуры (рис. 6).

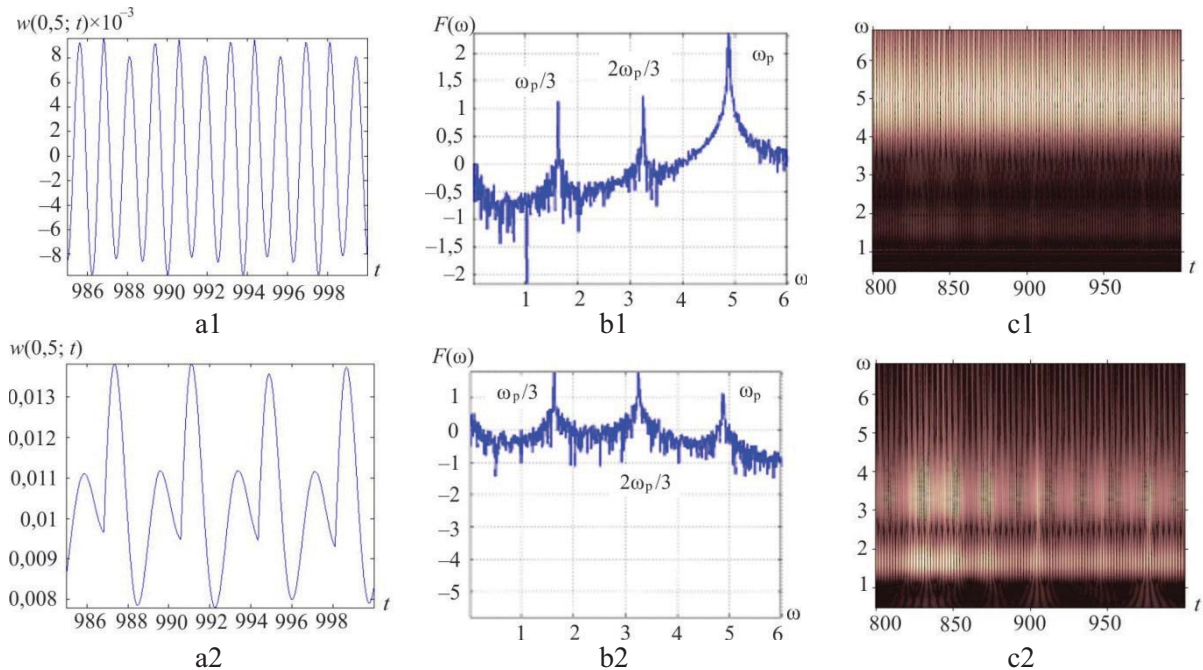


Рис. 6. Контактное взаимодействие пластины  $w_1(0,5; 0,5, t)$  и третьей балки  $w_4(0,5; t)$  при белом шуме  $a_i^0 = 0,031$

## Заключение

В работе представлена математическая модель контактного взаимодействия пластины, подкрепленной ребрами жесткости, с зазорами, при действии белого шума. В ходе исследования изучен характер сложных колебаний многослойного пакета в зависимости от трех типов нагружения с учетом белого шума. Таким образом, как только происходит соприкосновение элементов, независимо от наличия белого шума, колебания становятся хаотическими на линейно зависимых частотах  $\omega_p = 5$ ,  $\omega_p / 3 = 1,6$  и  $2\omega_p / 3 = 3,3$ .

Присутствие внешнего аддитивного белого шума может влиять на характер колебаний (на присутствие или отсутствие контактного взаимодействия элементов многослойного пакета). Отсутствие контактного взаимодействия приводит к тому, что система совершает гармонические колебания.

Параграф 1 статьи выполнен в Саратовском государственном техническом университете им. Ю.А. Гагарина, параграф 2 – в Научно-исследовательском институте механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-19-10039).

## **Библиографический список**

1. Chaotic nonlinear dynamics of cantilever beams under the action of signs-variables loads / A.V. Krysko [et al.] // PAMM. Special Issue: 82nd Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM). – Graz, 2011. – Vol. 11. – Iss. I. – P. 327–328.
2. Nonlinear dynamics and chaotic synchronization of contact interactions of multi-layer beams / J. Awrejcewicz, M.V. Zhigalov, I.V. Papkova, A.V. Krysko // Dynamical Systems – Theory / Eds. J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski. – TU of Lodz Press, 2013. – P. 283–292.
3. Фазовая хаотическая синхронизация многослойных балочных структур / В.А. Крысько [и др.] // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – № 3. – С. 166–175.
4. Chaotic synchronization of vibrations of a coupled mechanical system consisting of a plate and beams / J. Awrejcewicz [et al.] // Latin American Journal of Solids and Structures. – 2013. – Vol. 10. – P. 161–172.
5. Иерархические тепловые модели бесплатформенной инерциальной навигационной системы на волоконно-оптических гироскопах / В.Э. Джашитов [и др.] // Гироскопия и навигация. – 2013. – № 1 (80). – С. 49–63.
6. Джашитов В.Э., Панкратов В.М., Барулина М.А. Математические модели термоупругого напряженно-деформированного состояния и погрешности масштабного коэффициента волоконно-оптического гироскопического датчика // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2013. – № 2. – С. 43–52.
7. Routes to chaos in continuous mechanical systems. Part 1: Mathematical models and solution methods / J. Awrejcewicz, A.V. Krysko, V.A. Krysko, I.V. Papkova // Chaos. Solitons & Fractals. Non-linear Science and Nonequilibrium and Complex Phenomena. – 2012. – Vol. 45. – 22 p.
8. Добриян В.В., Папкина И.В., Крысько В.А. Метод Ляпуновских показателей для исследования хаотических колебаний конструктивно нелинейных распределенных систем [Электронный ресурс] // Ломоносов–2013: материалы междунар. науч. форума. – М.: МАКСПресс, 2013. – URL: [http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2013/2192/47410\\_3549.pdf](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2192/47410_3549.pdf).
9. Yang Caixia, Wu Christine Qiong. A robust method on estimation of Lyapunov exponents from a noisy time series // Nonlinear Dyn. – 2011. – Vol. 64. – No. 3. – P. 279–292.
10. Tarinejad R., Damadipour M. Modal identification of structures by a novel approach based on FDD-wavelet method // Journal of Sound and Vibration. – 2014. – Vol. 333. – No. 3. – P. 1024–1045.
11. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии: пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 400 с.
12. Stochastic minimax optimal time-delay state feedback control of uncertain quasi-integrable Hamiltonian systems / Feng Ju [et al.] // Acta mech. – 2011. – Vol. 222. – No. 3–4. – P. 309–319.
13. Vibration based damage detection of a beam-type structure using noise suppression method / U. Baneen [et al.] // J. Sound and Vibr. – 2012. – Vol. 331. – No. 8. – P. 1777–1788.
14. Stationary response of Duffing oscillator with hardening stiffness and fractional derivative / Chen Lincong [et al.] // Int. J. Non-Linear Mech. – 2013. – Vol. 48. – P. 44–50.
15. Ваганова Н.И., Руманов Э.Н. Предвестники катастроф // Неизотермические явления и процессы: От теории теплового взрыва к структурной макрокинетике: материалы междунар. конф., посвященной 80-летию академика А.Г. Мержанова. Черноголовка, Моск. обл., 27–30 нояб. 2011. – М., 2011. – С. 131.
16. Слепнев А.В., Вадивасова Т.Е. Бифуркации удвоения периода и эффекты шумового воздействия в мультистабильной автоколебательной среде // Прикладная нелинейная динамика. – 2011. – Т. 19, № 4. – С. 53–67.
17. Потапов В.Д. Об устойчивости стохастических вязкоупругих систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2009. – № 6. – С. 85–90.
18. Non-linear dynamics of a stochastically excited beam system with impact / N. van de Wouw, A. de Kraker, D.H. van Campen, H. Nijmeijer // Int. J. Non-Linear Mech. – 2003. – Vol. 38. – No. 5. – P. 767–779.



19. Awrejcewicz J., Krylova E.Y., Krysko V.A. Regular and chaotic dynamics of flexible plates // Proceedings of the International Conference on Structural Engineering Dynamics (ICEDyn 2013). – Portugal: Sesimbra, 2013. – 10 p.
20. Расчет колебаний и радиации звука конечных подкреплённых пластин, покрытых демпфирующим слоем / Yao Xiongliang [et al.] // J. Huazhong Univ. Sci. and Technol. Natur. Sci. – 2012. – Vol. 40. – No. 7. – P. 119–123.
21. Денисов С.И., Бондарь Е.А. Новый класс индуцируемых шумом переходов // Фізика, електроніка, електротехніка: матеріали та програма науково-технічної конференції, м. Суми, 21-26 2014 р. квітня / відп. за вип. С.І. Проценко. – Суми, 2014. – С. 52.
22. Nikos S., Grigorios P., Kalliadasis S. Contact lines over random topographical substrates // J. Fluid Mech. – 2011. – Vol. 672. – P. 358–383.
23. Кантор Б.Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 100.
24. Faedo S. Un nuovo metodo per lanalisi esistenziale e quantitative dei problem di propogazione // Ann. Scuola Norm, sur. – Pisa, 1949. – P. 1–40.
25. Крысько А.В., Жигалов М.В. Математические модели и методы исследования сложных колебаний неклассических распределённых механических систем. – Саратов: Изд-во Саратов. гос. техн. ун-та, 2008. – С. 301.
26. Grossman A., Morlet S. Decomposition of Hardy functions into square separable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. – 1984. – Vol. 15. – No. 4 – P. 723.

## References

1. Krysko A.V. [et al.] Chaotic nonlinear dynamics of cantilever beams under the action of sign-variables loads. *PAMM. Special Issue: 82nd Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM)*. Graz, 2011, vol. 11, iss. I, pp. 327-328.
2. Awrejcewicz J., Zhigalov M.V., Krysko V.A., Nackenhorst U., Papkova I.V., Krysko A.V. Non-linear dynamics and chaotic synchronization of contact interactions of multi-layer beams. *Dynamical Systems – Theory*. Eds. J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski. TU of Lodz Press, 2013, pp. 283-292.
3. Krysko V.A. [et al.] Fazovaia khaoticheskaia sinkhronizatsiia mnogoslownykh balochnykh struktur [Phase synchronization of chaotic laminated beam structures]. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaia fizika*, 2012, no. 3, pp. 166-175.
4. Awrejcewicz J. [et al.] Chaotic synchronization of vibrations of a coupled mechanical system consisting of a plate and beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 10, pp. 161-172.
5. Dzhashitov V.E. [et al.] Ierarkhicheskie teplovye modeli besplatformennoi inertsiial'noi navigatsionoi sistemy na volokonno-opticheskikh giroskopakh [Hierarchical thermal models strapdown inertial navigation system based on fiber-optic gyros]. *Giroskopiia i navigatsiia*, 2013, no. 1 (80), pp. 49-63.
6. Dzhashitov V.E., Pankratov V.M., Barulina M.A. Matematicheskie modeli termouprugogo napriazhenno-deformirovannogo sostoianiiia i pogreshnosti masshtabnogo koeffitsienta volokonno-opticheskogo giroskopicheskogo datchika [Mathematical models of thermal stress-strain state and the scale factor error of the fiber optic gyro sensor]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin*, 2013, no. 2, pp. 43-52.
7. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Krysko V.A., Papkova I.V. Routes to chaos in continuous mechanical systems. Part 1: Mathematical models and solution methods. *Chaos. Solitons & Fractals. Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena*, 2012, vol. 45, 22 p.
8. Dobriian V.V., Papkova I.V., Krysko V.A. Metod Liapunovskikh pokazatelei dlia issledovaniia khaoticheskikh kolebanii konstruktivnonelineinykh raspredelennykh system [Method of Lyapunov expo-



nents for the study of chaotic oscillations structurally nonlinear distributed systems]. *Materialy mezhdunarodnogo nauchnogo foruma "Lomonosov–2013"*. Moscow: MAKS Press, 2013, available at: [http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2013/2192/47410\\_3549.pdf](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2192/47410_3549.pdf).

9. Yang Caixia, Wu Christine Qiong A robust method on estimation of Lyapunov exponents from a noisy time series. *Nonlinear Dyn.*, 2011, vol. 64, no. 3, pp. 279-292.

10. Tarinejad R., Damadipour M. Modal identification of structures by a novel approach based on FDD-wavelet method. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, vol. 333, no. 3, pp. 1024-1045.

11. Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1984.

12. Feng Ju [et al.] Stochastic minimax optimal time-delay state feedback control of uncertain quasi-integrable Hamiltonian systems. *Acta mech.*, 2011, vol. 222, no. 3-4, pp. 309-319.

13. Baneen U. [et al.] Vibration based damage detection of a beam-type structure using noise suppression method. *J. Sound and Vibr.*, 2012, vol. 331, no. 8, pp. 1777-1788.

14. Chen Lincong [et al.] Stationary response of Duffing oscillator with hardening stiffness and fractional derivative. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 48, pp. 44-50.

15. Vaganova N.I., Rumanov E.N. Predvestniki katastrof [Harbingers of disaster]. *Materialy mezhdunarodnoi konferentsii "Neizotermicheskie iavleniia i protsessy: Ot teorii teplovogo vzryva k strukturnoi makrokinetike"*. Chernogolovka, 2011. 131 p.

16. Slepnev A.V., Vadivasova T.E. Bifurkatsii udvoeniia perioda i efekty shumovogo vozdeistviia v mul'tistabil'noi avtokolebatel'noi srede [Period-doubling bifurcations and the effects of noise exposure in the multi stable self-oscillating environment. Applied Nonlinear Dynamics]. *Prikladnaia nelineinaia dinamika*, 2011, vol. 19, no. 4, pp. 53-67.

17. Potapov V.D. Ob ustoiichivosti stokhasticheskikh viazkouprugikh system [On the stability of stochastic systems viscoelastic]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin*, 2009, no. 6, pp. 85-90.

18. Wouw N. van de, Kraker A. de, Campen D.H. van, Nijmeijer H. Non-linear dynamics of a stochastically excited beam system with impact. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2003, vol. 38, no. 5, pp. 767-779.

19. Awrejcewicz J., Krylova E.Y., Krysko V.A. Regular and chaotic dynamics of flexible plates. *Proceedings of the International Conference on Structural Engineering Dynamics (ICEDyn 2013)*. Portugal: Sesimbra, 2013. 10 p.

20. Yao Xiongliang [et al.] Raschet kolebanii i radiatsii zvuka konechnykh podkreplennykh plastin, pokrytykh dempfiuiushchim sloem [Calculation of vibrations and sound radiation supported by end plates coated with a layer of damping]. *J. Huazhong Univ. Sci. and Technol. Natur. Sci.*, 2012, vol. 40, no. 7, pp. 119-123.

21. Denisov S.I., Bondar' E.A. Novyi klass indutsiruemykh shumom perekhodov [A new class of noise-induced transitions]. *Materiali ta programma naukovo-tekhnichnoi konferentsii "Fizika, elektronika, elektrotehnika"*. Sumi, 2014, p. 52.

22. Nikos S., Grigorios P., Kalliadasis S. Contact lines over random topographical substrates. *J. Fluid Mech.*, 2011, vol. 672, pp. 358-383.

23. Kantor B.Ia. Kontaktnye zadachi nelineinoi teorii obolochek vrashcheniia [Contact problems of the nonlinear theory of shells of revolution]. Kiev: Naukova dumka, 1990. 100 p.

24. Faedo S. Un nuovo metodo per lanalisi esistenziale e quantitative dei problem di propogazione. *Ann. Scuola Norm. sur. Pisa*, 1949, pp. 1-40.

25. Krysko A.V., Ghigalov M.V. Matematicheskie modeli i metody issledovaniia slozhnykh kolebanii neklassicheskikh raspredelennykh mekhanicheskikh system [Mathematical models and methods of complex mechanical vibrations of non-classical distributed systems]. Saratovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2008, p. 301.

26. Grossman A., Morlet S. Decomposition of Hardy functions into square separable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 1984, vol. 15, no. 4, p. 723.