



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.1.02

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

А.А. Антипов<sup>1</sup>, А.А. Артемьева<sup>2</sup>, В.Г. Баженов<sup>2</sup>, М.Н. Жестков<sup>2</sup>, А.И. Кибец<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Российский Федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Россия

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 17 декабря 2014 г.  
Принята: 3 марта 2015 г.  
Опубликована: 31 марта 2015 г.

### Ключевые слова:

густо перфорированная оболочка, устойчивость, ортотропный материал, метод конечного элемента, внешнее давление

### АННОТАЦИЯ

Методом конечных элементов исследована устойчивость густо перфорированных цилиндрических оболочек под действием внешнего давления. Задача решена на основе теории оболочек с использованием конструктивно ортотропной модели. Параметры ортотропного материала в виде коэффициентов снижения жесткости определялись из решения задачи деформирования циклически повторяющегося элемента конструкции (структурного элемента) на растяжение, сдвиг и изгиб с различной степенью перфорации (пористости). Исследования структурного элемента проводились методами механики сплошной среды и теории оболочек типа Тимошенко. В результате получены коэффициенты снижения жесткости при различных значениях пористости и определена граница применимости теории оболочек для подобных задач. Проведено сравнение численно полученных результатов с аналитическими оценками Э.И. Григолюка и Л.А. Фильштинского.

Верификация численно полученных параметров ортотропии проведена на основе решения задачи изгиба 1/4 части цилиндрической полосы, перфорированной одним рядом отверстий. Задача решалась в постановках механики сплошной среды и теории оболочек в совокупности с конструктивно ортотропной моделью с различными значениями пористости. Показано, что использование конечных элементов конструктивно-ортотропной оболочки с параметрами, определенными из решения трехмерной задачи растяжения и сдвига структурного элемента, правомерно в задачах изгиба для длинных волн.

На основе теории оболочек в совокупности с конструктивно-ортотропной моделью проведено исследование устойчивости упругой цилиндрической перфорированной оболочки под действием внешнего давления для двух вариантов граничных условий. В результате получены значения критических давлений и соответствующие им формы потери устойчивости в зависимости от длины оболочки и степени перфорации.

© ПНИПУ

© Антипов Алексей Александрович, начальник расчетно-методического отдела, e-mail: antepov@mail.ru  
Артемьева Анастасия Анатольевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: aranan@mail.ru  
Баженов Валентин Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, e-mail: bazhenov@mech.unn.ru  
Жестков Максим Николаевич, аспирант, e-mail: mnzhestkov@yandex.ru  
Кибец Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, e-mail: kibec@mech.unn.ru

Alexey A. Antipov, Head of Department, e-mail: antepov@mail.ru  
Anastasia A. Artemyeva, Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: aranan@mail.ru  
Valentin G. Bazhenov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Senior Researcher, e-mail: bazhenov@mech.unn.ru  
Maxim N. Zhestkov, Postgraduate Student, e-mail: mnzhestkov@yandex.ru  
Alexander I. Kibec, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Senior Researcher, e-mail: kibec@mech.unn.ru

## NUMERICAL MODELLING OF PERFORATED SHELLS STABILITY

A.A. Antipov<sup>1</sup>, A.A. Artemyeva<sup>2</sup>, V.G. Bazhenov<sup>2</sup>, M.N. Zhestkov<sup>2</sup>, A.I. Kibec<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Russian Federal Nuclear Center – The All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov, Russian Federation

<sup>2</sup>Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 17 December 2014  
Accepted: 3 March 2015  
Published: 31 March 2015

#### Keywords:

densely perforated shell,  
stability, orthotropic material,  
finite element method,  
external pressure

### ABSTRACT

In this paper, the finite element method is applied to investigate the stability of densely perforated cylindrical shells under external pressure. The problem is resolved based on the shell theory with an orthotropic material model. The orthotropic material parameters in the form of softening coefficients are determined from the solution of the problem of deformation of cyclically repeating structural elements under tensile, shear and bending with variable rates of perforation (porosity). The research of the structural elements has been produced using methods of continuum mechanics and Timoshenko-type theory. As a result of these considerations, softening coefficients are obtained for different values of porosity, also the limits of applicability of the shell theory were defined for the similar problems. The comparison of numerical results with the analytical estimates, obtained by Grigolyuk and Filshinsky [1] is provided.

Verification of the numerically obtained orthotropic parameters is based on solving the problem of bending of a band quarter, which has been performed with one row of holes. The problem is solved in the framework of continuum mechanics and the shell theory in conjunction with the structurally orthotropic model with different rates of porosity. It is confirmed that using the finite element method for the structurally orthotropic shell with parameters, determined from the solution of three-dimensional tensile and shear behavior, is applicable to the long waves bending problem.

Investigation of the stability of perforated elastic cylindrical shell under external pressure is provided for two boundary conditions based on the shell theory and the structurally orthotropic mode. As a result, the critical pressure value and corresponding buckling modes are obtained depending on the shell length and perforation rates.

© PNRPU

## Введение

Теории и методам решения задач устойчивости перфорированных пластин и оболочек посвящено значительное число работ, опубликованных в России и за рубежом [1–4]. К настоящему времени достаточно полно разработана лишь теория тонких упругих оболочек с небольшим числом отверстий и конечными прогибами [5–7]. Исследование устойчивости оболочек при вариации степени перфорации, формы и размеров отверстий проведено в работах [8–17].

Статья посвящена исследованию устойчивости густо перфорированной цилиндрической оболочки под действием внешнего давления на основе конечно-элементного анализа. Расчет базируется на усреднении механических свойств материала в зависимости от степени перфорации. Подобный подход лежит в основе работы И.Н. Преображенского [2], в которой излагаются аналитические, численные и экспериментальные методы определения критических нагрузок тонкостенных конструкций с отверстиями. Однако применимость этого подхода для густо перфорированных оболочек не исследована. Методы расчета таких оболочек рассмотрены Э.И. Григолюком и Л.А. Фильштинским [1]. Авторы на основе аналитического решения задачи теории упругости получили коэффициенты снижения жесткости оболочки с регулярной перфорацией при растяжении, сдвиге и изгибе. Применимость этого подхода для задач устойчивости не рассмотрена.

## 1. Постановка задачи

Рассматривалась задача устойчивости упругой перфорированной, цилиндрической оболочки длиной  $L$  и радиусом  $R$  под действием внешнего давления. Задача решалась путем усреднения жесткостных характеристик для циклически повторяющегося элемента конструкции (структурного элемента) [18]. Для простоты представления результатов перфорация в продольном и окружном направлениях оболочки предполагалась одинаковой. В этом случае структурный элемент представляет собой квадратную призму толщиной  $h$  с длиной сторон, равной  $a$  (рис. 1). В центре элемента располагается отверстие диаметром  $d$ . В ходе всех исследований отношение толщины структурного элемента к диаметру отверстия оставалось постоянным,  $h/d = 1$ . Варьирование пористости конструкции осуществлялось изменением длины  $a$ . Под пористостью в данной задаче понимается отношение площади отверстия к общей площади лицевой плоскости структурного элемента:

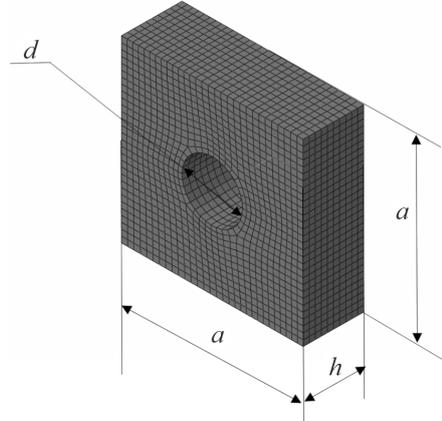


Рис. 1. Структурный элемент

$$\gamma = \frac{\pi d^2}{4a^2}. \quad (1)$$

Наряду с этими структурными элементами рассматривались элементы подобных размеров без отверстий.

Предполагалось, что форма потери устойчивости всей конструкции значительно превышает размер структурного элемента  $a$ . Тогда можно заменить перфорированную оболочку конструктивно ортотропным материалом.

Матрица жесткости  $D$  ортотропной оболочки будет зависеть от диаметра отверстия и шага перфорации. Симметричность матрицы  $D$  и равномерность перфорации в окружном и продольном направлениях приводят к тому, что определить необходимо лишь 6 компонент матрицы жесткости.

Компоненты матрицы можно выразить через модули упругости и коэффициенты Пуассона [19]:

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= D_{22} = E_1 (1 - \nu_{23}\nu_{32})\beta, \\ D_{33} &= E_3 (1 - \nu_{12}\nu_{21})\beta, \\ D_{12} &= E_1 (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})\beta = E_2 (\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})\beta, \\ D_{13} &= D_{23} = E_1 (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})\beta = E_3 (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})\beta, \\ D_{44} &= G_{12}, \\ D_{55} &= D_{66} = G_{13}, \\ \beta &= \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $E_i$  – модуль упругости вдоль  $i$ -й оси;  $\nu_{ij}$  – коэффициент Пуассона при растяжении вдоль  $i$ -й оси.

Далее определялись коэффициенты снижения жесткости конструкции, при помощи которых можно вычислить усредненные значения механических свойств. Для этого исследованы структурные элементы на растяжение, сдвиг и изгиб. Расчеты проводились методом конечного элемента [3, 20, 21].

На границах структурного элемента задавались кинематические граничные условия, которые соответствуют одноосному растяжению, чистому сдвигу и простому изгибу. Исследования проводились в трехмерной постановке механики сплошной среды и с использованием оболочечных элементов типа Тимошенко. При моделировании задачи в трехмерной постановке использовались линейные 8-узловые элементы. В оболочечной постановке применялись линейные 4-узловые элементы.

Результаты исследования приведены на рис. 2 в виде зависимости коэффициентов снижения жесткости от величины пористости. Выражения для коэффициентов снижения жесткости имеют вид

$$r_E = \frac{E_1}{E}, r_\nu = \frac{\nu_{12}}{\nu}, r_G = \frac{G_{12}}{G} \text{ и } r_C = \frac{C^*}{C}, \quad (3)$$

где  $E$  – модуль Юнга материала основы;  $E_1$  – усредненный модуль Юнга для структурного элемента с отверстием;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала основы;  $\nu_{12}$  – усредненный коэффициент Пуассона для структурного элемента с отверстием;  $G$  – модуль сдвига материала основы;  $G_{12}$  – усредненный модуль сдвига для структурного элемента с отверстием;  $C$  – жесткость при изгибе для материала основы;  $C^*$  – усредненная жесткость при изгибе структурного элемента с отверстием.

Э.И. Григолюком и Л.А. Фильштинским [1] получены аналитические оценки снижения жесткости перфорированных оболочек, которые также указаны на графиках.

Результаты показывают, что коэффициенты снижения жесткостей на растяжения и изгиб для трехмерной и оболочечной модели одинаковы. Разница между ними не превышает 1,5 %. Для коэффициентов  $r_\nu$  и  $r_G$  при пористости более 0,5 и 0,6 соответственно отличия между трехмерной и оболочечной моделью превышают 5 %.

Сравнение аналитических [1] и численно полученных результатов показывает, что максимальное отличие наблюдается для коэффициента  $r_E$  и составляет порядка 11 %. Стоит отметить, что приведенные в [1] аналитические оценки коэффициентов снижения жесткости при растяжении и сдвиге ограничиваются значением пористости 0,64, а при изгибе – 0,28. Максимальное значение пористости в рамках данного исследования составляло 0,77.

Таким образом, можно сделать вывод, что при  $h/d = 1$  и значениях пористости менее 0,5 коэффициенты снижения жесткости можно определять с помощью теории оболочек типа Тимошенко.

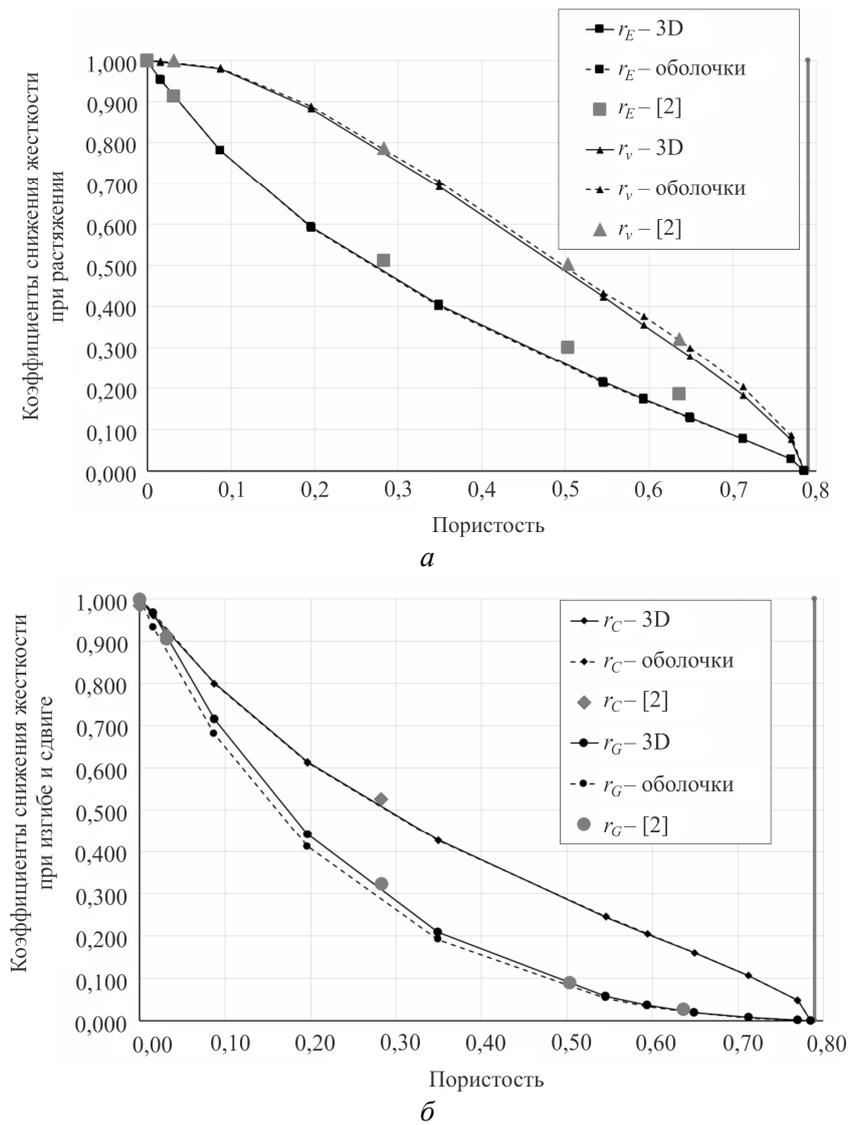


Рис. 2. Коэффициенты снижения прочности: *а* – при растяжении; *б* – при изгибе и сдвиге

## 2. Верификация параметров ортотропии

Для верификации полученных параметров ортотропии была решена задача изгиба 1/4 части цилиндрической полосы, перфорированной одним рядом отверстий. Задача решалась в постановках механики сплошной среды и теории оболочек с использованием конечного элемента типа Тимошенко в совокупности с конструктивно ортотропной моделью при различных значениях пористости.

Исследования в трехмерной постановке проводились с использованием 8-узлового линейного конечного элемента. Общая размерность сетки составляла порядка 47 000 элементов.

При решении задачи по теории оболочек использовались 4-узловые элементы типа Тимошенко. Общая размерность сетки составила порядка 2000 элементов. Геометрическая модель представляла собой часть цилиндрической поверхности без отверстий. Снижение жесткости за счет наличия отверстий учитывалось параметрами ортотропного ма-

териала, которые определялись на основе трехмерного исследования деформирования структурного элемента на растяжение и сдвиг.

На одном из концов полосы (рис. 3) была приложена единичная сила, другой конец – жестко зашумлен. На боковых сторонах полосы задавалось условие симметрии.

На рис. 3 представлены эпюры вертикальных перемещений вдоль линии дуги при значении пористости 0,77 (максимальное значение в рамках данного исследования).

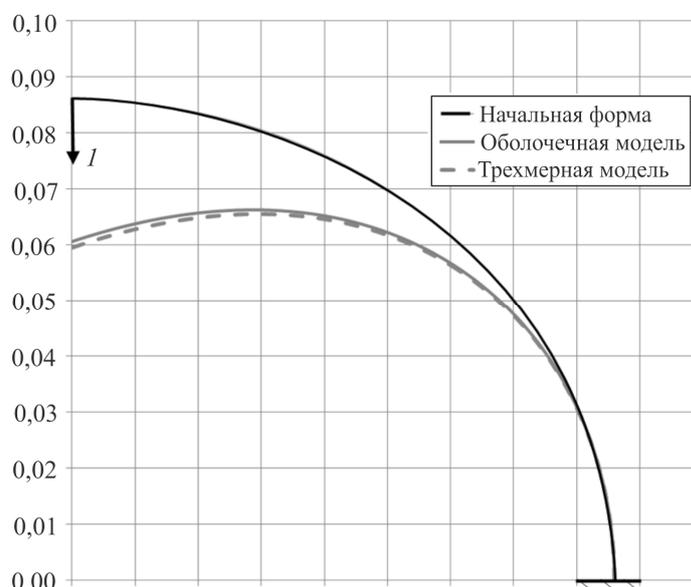


Рис. 3. Эпюра вертикальных перемещений

Для всех рассмотренных значений пористости погрешность вычислений не превышала 5 %. Таким образом, использование конечных элементов конструктивно ортотропной оболочки с параметрами, определенными из решения трехмерной задачи растяжения и сдвига структурного элемента, правомерно в задачах изгиба для длинных волн.

### 3. Расчет устойчивости перфорированных цилиндрических оболочек

Была рассмотрена задача устойчивости перфорированной цилиндрической оболочки для двух вариантов граничных условий. В первом варианте один из торцов оболочки был жестко заделан, а другой – свободен. Во втором варианте один из торцов оболочки был также жестко заделан, а на другом задавались нулевые значения радиального перемещения, угла поворота и осевой силы.

Перфорация оболочки учитывалась заданием ортотропного материала. В качестве конечного элемента, как и ранее, использовался 4-узловой оболочечный элемент.

В результате были получены критические значения давлений  $P_{кр}$  и соответствующие формы потери устойчивости. Отметим, что безразмерное критическое давление для бесконечной изотропной цилиндрической оболочки выражается формулой [22]

$$q = \frac{P_{кр}}{E} \left( \frac{R}{h} \right)^2. \quad (4)$$

На рис. 4 представлены зависимости безразмерного критического давления  $q$  от безразмерной длины цилиндрической оболочки  $L/R$  при значениях пористости  $\gamma = 0; 0,03; 0,2; 0,55; 0,77; 0,79$ .

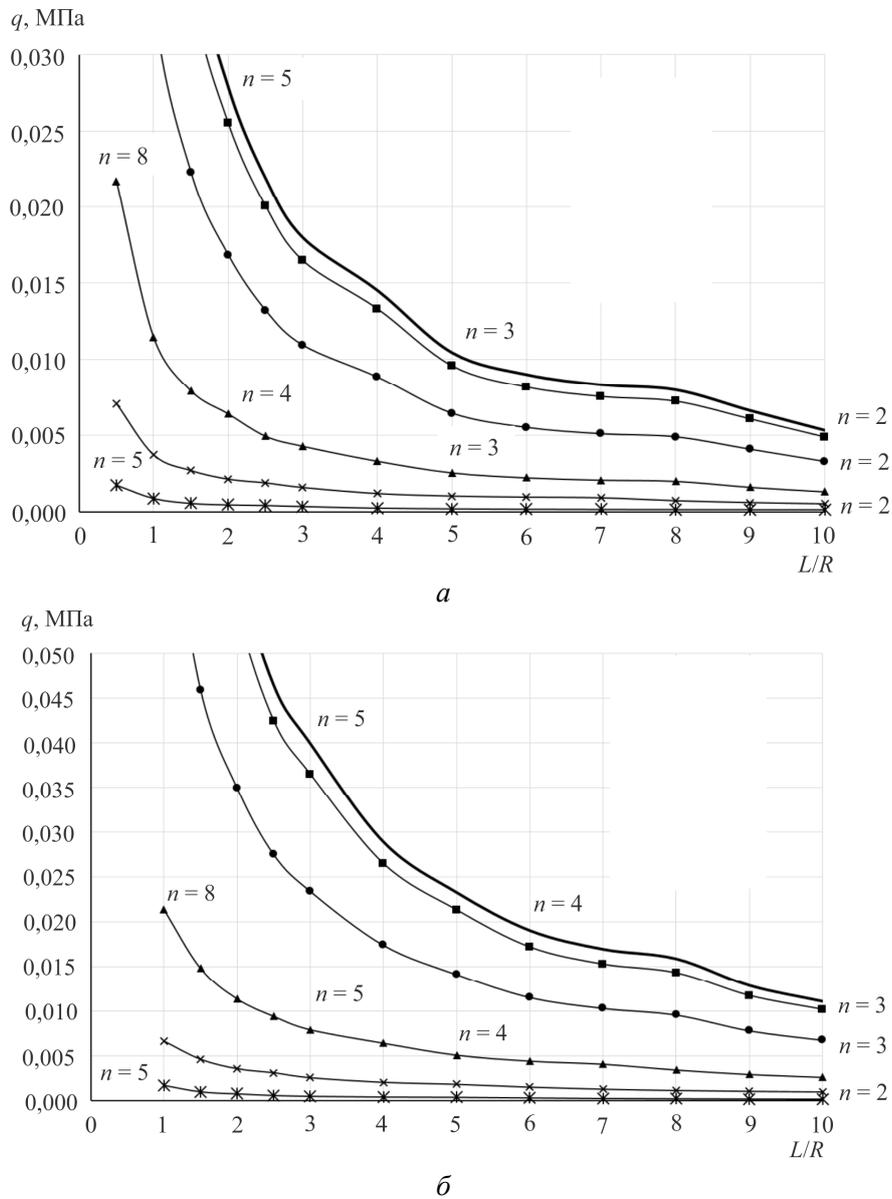


Рис. 4. Безразмерное критическое давление в зависимости от длины и степени перфорации оболочки: *а* – при жесткой заделке одного конца и свободном другом; *б* – при жесткой заделке одного конца и нулевых значениях радиального перемещения, угла поворота и осевой силы; — —  $\gamma = 0$ ; ■ —  $\gamma = 0,03$ ; ● —  $\gamma = 0,2$ ; ▲ —  $\gamma = 0,55$ ; \* —  $\gamma = 0,77$ ; \* —  $0,79$

При пористости  $\gamma = 0$  для длинной оболочки критическое давление совпадает с известным значением из [22] для изотропной сплошной оболочки. На графике дополнительно цифрами  $n = 2 \dots 8$  отображено количество полуволн в окружном направлении для смежной формы равновесия при различных значениях длины и пористости оболочки. Видно, что при больших значениях пористости для малых длин оболочки потеря устойчивости происходит по более низким формам. Этот эффект обусловлен снижением жесткости всей оболочки вследствие увеличения густоты перфорации.

## Заключение

Методом конечных элементов исследовано снижение жесткости густо перфорированных оболочек при растяжении, сдвиге и изгибе в рамках механики сплошной среды и теории оболочек. Установлено, что отличия между трехмерной и оболочечной моделью (типа Тимошенко) не превышают 5 % при значениях пористости менее 0,5. Осуществлена верификация полученных параметров ортотропии на примере решения задачи изгиба цилиндрической полосы с отверстиями в трехмерной и оболочечной постановках.

На основе конструктивно-ортотропной модели теории оболочек проведено исследование устойчивости перфорированных упругих цилиндрических оболочек с различной степенью перфорации (пористости). Получены критические давления и формы потери устойчивости в зависимости от пористости и длины цилиндрической оболочки.

Исследования проведены при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы». Уникальный идентификатор проекта RFMEFI57514X0026.

## Библиографический список

1. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
2. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. – М.: Машиностроение, 1981. – 191 с.
3. Cristopher D. Moen, Schafer B.W. Direct Strength Design of Cold - Formed Steel Members with Perforations / The Johns Hopkins University, Department of Civil Engineering. – Baltimore, 2008. – 488 p.
4. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. – М: Физматлит, 2010. – 119 с.
5. Воробкова Н.Л., Преображенский И.Н. Обзор исследований по устойчивости пластинок и оболочек, ослабленных отверстиями // Расчет пространственных конструкций, 1973. – С. 89–112.
6. Крысько В.А., Куцемако А.Н. Устойчивость и колебания неоднородных оболочек. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 1999. – 202 с.
7. Лебедев А.В. Устойчивость пластин и оболочек, ослабленных отверстиями // Пятые Поляховские чтения: межд. науч. конф. по механике. – СПб., 2009. – С. 171.
8. Fazilati J., Ovesy H.R. Finite strip dynamic instability analysis of perforated cylindrical shell panels // Composite Structures, ICCS. – 2012. – Vol. 94. – No. 3. – P. 1259–1264.
9. Eccher G., Rasmussen K.J.R., Zandonini R. Geometrically nonlinear isoparametric spline finite strip analysis of perforated thin-walled structures // Thin-Walled Structures. – 2009. – No. 47. – P. 21–32.
10. Buckling Optimization of Perforated Curved Shells / D. Wang [et al.] // Materials Science Forum. – Switzerland: Trans Tech Publications, 2012. – Vol. 697–698. – P. 614–617.
11. Moen C.D., Schafer B.W. Elastic buckling of thin plates with holes in compression or bending // Thin-Walled Structures. – 2009. – No. 47. – P. 1597–1607.
12. Shariati M., Ali Dadrasi A. Numerical and Experimental Investigation of Loading Band on Buckling of Perforated Rectangular Steel Plates // Research Journal of Recent Sciences. – 2012. – Vol. 1. – No. 10. – P. 63–71.

13. Конечно-элементное решение задачи упругопластического выпучивания сферической оболочки при квазистатическом сжатии в трехмерной постановке / А.А. Артемьева [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. – 2011. – № 73. – С. 45–50.

14. Верификация конечно-элементного решения трехмерных нестационарных задач упругопластического деформирования, устойчивости и критического поведения оболочек / А.А. Артемьева [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 5–14.

15. MacDonald M., Kulatunga M.P. Finite Element Analysis of Cold-Formed Steel Structural Members with Perforations Subjected to Compression Loading // *Mechanics and Mechanical Engineering*. – 2013. – Vol. 17. – No. 2. – P. 127–139.

16. Smirnov A.L., Lebedev A.V. Buckling of plates and shells weakened with cut-outs // 2nd South-East European Conference on Computational Mechanics. – Athens, Greece, 2009. – 209 p.

17. Purba R., Bruneau M. Finite-Element Investigation and Design Recommendations for Perforated Steel Plate Shear Walls // *Journal of Structural Engineering*. – 2009. – Vol. 135. – No. 11. – P. 1367–1376.

18. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – С. 71–74.

19. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит. – 1950. – С. 33–35.

20. Abaqus. Analysis User's Manual. Introduction, Spatial Modeling, and Execution. – Publisher-Simulia, 2008. – 711 p.

21. Matsagar Vasant A. Computing Stress and Displacement Response of Composite plates under blast // *Disaster Advances*. – 2014. – Vol. 7. – No. 1. – P. 23–38.

22. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 545 с.

## References

1. Grigoliuk E.I., Fil'shtinskii L.A. Perforirovannyye plastiny i obolochki. Moscow: Nauka, 1970. 556 p.

2. Preobrazhenskii I.N. Ustoichivost' i kolebaniia plastinok i obolochek s otverstiiami [Stability and oscillations of plates and shells with holes]. Moscow: Mashinostroenie, 1981. 191 p.

3. Moen C.D., Schafer B.W. Direct Strength Design of Cold - Formed Steel Members with Perforations. *The Johns Hopkins University, Department of Civil Engineering*, Baltimore, 2008. 488 p.

4. Karpov V.V. Prochnost' i ustoichivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniia [The strength and stability of reinforced shells of revolution]. Moscow: Fizmatlit, 2010. 119 p.

5. Vorobkova N.L., Preobrazhenskii I.N. Obzor issledovaniia po ustoichivosti plastinok i obolochek, oslablennykh otverstiiami [A review of studies on the stability of plates and shells, weakened holes]. *Raschet prostranstvennykh konstrukttsii*, 1973, pp. 89-112.

6. Krysko V.A., Kutsemako A.N. Ustoichivost' i kolebaniia neodnorodnykh obolochek [Stability and oscillations of inhomogeneous shells]. Saratovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 1999, 202 p.

7. Lebedev A.V. Ustoichivost' plastin i obolochek, oslablennykh otverstiiami. *Piatye Poliakhovskie chteniia*. Saint Petersburg, 2009. P. 171.

8. Fazilati J., Ovesy H.R. Finite strip dynamic instability analysis of perforated cylindrical shell panels. *Composite Structures, ICCS*, 2012, vol. 94, no. 3, pp. 1259-1264.

9. Eccher G., Rasmussen K.J.R., Zandonini R. Geometrically nonlinear isoparametric spline finite strip analysis of perforated thin-walled structures. *Thin-Walled Structures*, 2009, no. 47, pp. 21-32.

10. Wang D., Zhang W.H., Zhu J.H., Yang J.G., Zhang M.M. Buckling Optimization of Perforated Curved Shells. *Materials Science Forum*, Switzerland, Trans Tech Publications, 2012, vol. 697-698, pp. 614-617.

11. Moen C.D., Schafer B.W. Elastic buckling of thin plates with holes in compression or bending. *Thin-Walled Structures*, 2009, no. 47, pp. 1597-1607.
12. Shariati M., Ali Dadrasi A. Numerical and Experimental Investigation of Loading Band on Buckling of Perforated Rectangular Steel Plates. *Research Journal of Recent Sciences*, 2012, vol. 1, no. 10, pp. 63-71.
13. Artem'eva A.A., Kibets A.I., Kibets Yu.I., Shoshin D.V. Konechno-elementnoe reshenie zadachi uprugoplasticheskogo vypuchivaniia sfericheskoi obolochki pri kvazistaticheskom szhatii v trekhmernoi postanovke [Finite element solution of the elastic-plastic buckling of spherical shell under quasi-static compression in three-dimensional statement]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2011, no. 73, pp. 45-50.
14. Artemyeva A.A., Bazhenov V.G., Kibetz A.I., Laptev P.V., Shoshin D.V. Verifikatsiia konechno-elementnogo resheniia trekhmernykh nestatsionarnykh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniia, ustoychivosti i zakriticheskogo povedeniia obolochek [Verification of the finite-element solution of 3d non-stationary problems of elasto-plastic deformation, stability and supercritical behavior of shells]. *Vychislitel'naiia mekhanika sploshnykh sred*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 5-14.
15. MacDonald M., Kulatunga M.P. Finite Element Analysis of Cold-Formed Steel Structural Members with Performations Subjected to Compression Loading. *Mechanics and Mechanical Engineering*, 2013, vol. 17, no. 2, pp. 127-139.
16. Smirnov A.L., Lebedev A.V. Buckling of plates and shells weakened with cut-outs. *2nd South-East European Conference on Computational Mechanics*. Athens, Greece, 2009, p. 209.
17. Purba R., Bruneau M. Finite-Element Investigation and Design Recommendations for Perforated Steel Plate Shear Walls. *Journal of Structural Engineering*, 2009, vol. 135, no. 11, pp. 1367-1376.
18. Pobedrya B.Ye. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. Moskovskii universitet, 1984, pp. 71-74.
19. Lekhnitskii S.G. Teoriia uprugosti anizotropnogo tela [Theory of elasticity of an anisotropic body]. *Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury*, 1950, pp. 33-35.
20. Abaqus. Analysis User's Manual. Introduction, Spatial Modeling, and Execution. Publisher-Simulia, 2008, 711 p.
21. Matsagar Vasant A. Computing Stress and Displacement Response of Composite plates under blast. *Disaster Advances*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 23-38.
22. Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruemykh system [Stability of deforming systems]. Moscow: Nauka, 1967. 545 p.