

Оборин В.А., Банников М.В., Баяндин Ю.В., Соковиков М.А., Билалов Д.А., Наймарк О.Б. Фрактальный анализ поверхности разрушения сплава АМг6 при усталостном и динамическом нагружении // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 2. – С. 116–126. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.07

Oborin V.A., Bannikov M.V., Bayandin Y.V., Sokovikov M.A., Bilalov D.A., Naimark O.B. Fractal analysis of fracture surface of aluminum alloy AMg6 under fatigue and dynamic loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2015. No. 2. Pp. 116-126. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.07



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.07

УДК 538.951-405

## ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОВЕРХНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ СПЛАВА АМг6 ПРИ УСТАЛОСТНОМ И ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

**В.А. Оборин, М.В. Банников, Ю.В. Баяндин, М.А. Соковиков, Д.А. Билалов, О.Б. Наймарк**

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 21 февраля 2015 г.  
Принята: 15 июня 2015 г.  
Опубликована: 30 июня 2015 г.

#### Ключевые слова:

разрушение,  
гигацикловая усталость,  
скейлинг,  
морфология поверхности, фрактальный анализ,  
закон Пэриса

### АННОТАЦИЯ

Исследованы локализация деформации при высокоскоростном деформировании и распространение усталостных трещин в режиме гигациклового нагружения в сплаве алюминия и магния АМг6. Локализация пластической деформации в условиях, близких к чистому сдвигу, исследовалась на образцах типа «сдвиг-сжатие», которые испытывались в разрезном стержне Гопкинсона–Кольского. После эксперимента сохраненные образцы подвергались микроструктурному анализу с помощью оптического интерферометра-профилометра New-View 5010.

Усталостное нагружение осуществлялось на ультразвуковой испытательной машине Shimadzu USF-2000, которая позволяет испытывать образцы на базе  $10^5$ – $10^{10}$  циклов с амплитудой от одного и до нескольких десятков микрон с частотой 20 кГц, что сокращает время испытания до нескольких дней, в отличие от классических усталостных установок, в которых такое число циклов достигается за годы испытаний. В качестве метода количественного анализа для установления корреляций между механическими свойствами и масштабно-инвариантными (скейлинговыми) характеристиками дефектных структур, формирующихся в процессе динамического нагружения, и гигацикловой усталости использовались данные профилометрии, полученные с помощью интерферометра-профилометра New View 5010 (разрешение от 0,1 нм).

В статье предложено оригинальное кинетическое уравнение, устанавливающее связь между скоростью роста усталостной трещины, изменением коэффициента интенсивности напряжений и масштабными инвариантами, характеризующими коррелированное поведение дефектов различных структурных уровней. Показана связь параметров кинетического уравнения (показатель степени в обобщенном законе Пэриса) с масштабными инвариантами дефектных структур, формирующих рельеф поверхности разрушения в процессе гигациклового нагружения.

© ПНИПУ

© **Оборин Владимир Александрович** – ведущий инженер, e-mail: [oborin@icmm.ru](mailto:oborin@icmm.ru)

**Банников Михаил Владимирович** – кандидат физико-математических наук, инженер лаборатории, e-mail: [mbannikov@icmm.ru](mailto:mbannikov@icmm.ru)

**Баяндин Юрий Витальевич** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: [buv@icmm.ru](mailto:buv@icmm.ru)

**Соковиков Михаил Альбертович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: [sokovikov@icmm.ru](mailto:sokovikov@icmm.ru)

**Билалов Дмитрий Альфредович** – инженер-исследователь, e-mail: [ledon@icmm.ru](mailto:ledon@icmm.ru)

**Наймарк Олег Борисович** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: [naimark@icmm.ru](mailto:naimark@icmm.ru)

**Vladimir A. Oborin** – Leading Engineer, e-mail: [oborin@icmm.ru](mailto:oborin@icmm.ru)

**Mikhail V. Bannikov** – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Engineer, e-mail: [mbannikov@icmm.ru](mailto:mbannikov@icmm.ru)

**Yuri V. Bayandin** – PhD in Physical and Mathematical Sciences, e-mail: [buv@icmm.ru](mailto:buv@icmm.ru)

**Mikhail A. Sokovikov** – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: [sokovikov@icmm.ru](mailto:sokovikov@icmm.ru)

**Dmitry A. Bilalov** – Research Engineer, e-mail: [ledon@icmm.ru](mailto:ledon@icmm.ru)

**Oleg B. Naimark** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: [naimark@icmm.ru](mailto:naimark@icmm.ru)

## FRactal ANALYSIS OF FRACTURE SURFACE OF ALUMINUM ALLOY AMg6 UNDER FATIGUE AND DYNAMIC LOADING

V.A. Oborin, M.V. Bannikov, Y.V. Bayandin, M.A. Sokovikov,  
D.A. Bilalov, O.B. Naimark

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 21 February 2015  
Accepted: 15 June 2015  
Published: 30 June 2015

#### Keywords:

fracture, gigacycle fatigue,  
scaling, surface morphology,  
fractal analysis,  
Paris law

### ABSTRACT

In this paper we investigated the localization of deformation during high-speed deformation and fatigue crack propagation in gigacycle loading regime in the aluminum-magnesium alloy AMg6. Localization of plastic deformation under conditions closely approximating simple shear was investigated using the shear-compression specimens (SCS) tested on the split-Hopkinson bar device. After the experiment the maintained specimens were subject to microstructure analysis using the NewView-5010 optical interferometer.

Fatigue tests were conducted on Shimadzu USF-2000 ultrasonic fatigue testing machine. This machine provides 10<sup>9</sup>–10<sup>10</sup> loading cycles with the amplitude from 1 to several dozens of microns and frequency of 20 kHz, which reduces testing time to a few days, as opposed to the classical fatigue testing machines, in which the same number of cycles can be reached only in few years. The New View 5010 interferometer–profilometer of high structural resolution (resolution of 0,1 nm) was used as an instrument of qualitative analysis, which provided data allowing us to find correlation between the mechanical properties and scale-invariant characteristics of defective structures formed under dynamic and gigacycle fatigue loading conditions.

The authors propose an original form of writing the kinetic equation, which relates the rate of the fatigue crack growth with a change in the stress intensity factor. The scale invariance of defect structures responsible for the formation of the fracture surface relief under gigacycle fatigue loading was found to be related to the power exponent of the Paris law.

© PNRPU

## Введение

В работах [1–3] развит метод количественного анализа морфологии поверхностных структур, образующихся при деформировании и разрушении нагруженных твердых тел, основанный на концепции масштабной инвариантности рельефа поверхности, индуцированного дефектами [2]. Масштабная инвариантность анализируется на основе данных профилометрии высокого разрешения и вычисления показателей скейлинга (фрактальной размерности и показателя Херста [2]).

Концепция фрактальности, впервые предложенная Мандельбротом [2, 4], позволяет оценивать количественно морфологию поверхности разрушения различных материалов и устанавливать связь со структурными механизмами пластической деформации и разрушения. Математически концепция фрактальности применяется для описания шероховатых нерегулярных поверхностей, размерность которых превосходит топологическую.

В настоящей работе представлены результаты экспериментальных и теоретических исследований, устанавливающих связь масштабных инвариантов с формированием многомасштабных дефектных структур, отвечающих за механизмы структурной релаксации, пластическое деформирование и разрушение материалов.

## 1. Кинетическое уравнение роста усталостной трещины

Универсальность кинетических закономерностей, устанавливающих связь между скоростью роста усталостной трещины  $dl/dN$  и изменением коэффициента интенсивности напряжений  $\Delta K$ , является предметом интенсивных экспериментальных и теоретических

исследований. Степенные зависимости, впервые установленные в работах П. Пэриса (P. Paris) [5] и известные как закон Пэриса, отражают автомодельный характер развития усталостных трещин, обусловленный нелинейным характером развития поврежденности в окрестности вершины трещины (process zone – «зона процесса»):

$$\frac{dl}{dN} = A(\Delta K)^m, \quad (1)$$

где  $A$  и  $m$  экспериментально определяемые константы. Для широкого класса материалов и различных скоростей роста трещин в условиях многоциклового усталости показатель степени  $m$  близок к значениям 2–4.

Вывод кинетических соотношений, определяющих закономерности роста усталостной трещины, осуществлялся на основе методов теории подобия и размерностей [6–8]. Скорость роста трещины за один цикл  $a = dl/dN$  ( $l$  – длина трещины,  $N$  – число циклов) предполагалась зависящей от следующих параметров:  $a_1 = \Delta K$  – приращение коэффициента интенсивности напряжения;  $a_2 = E$  – модуль Юнга;  $a_3 = l_{sc}$  – масштаб корреляции в ансамбле дефектов;  $a_4 = L_{pz}$  – масштаб, связанный с зоной процесса.

С учетом размерностей переменных  $[dl/dN] = L$ ,  $[\Delta K] = FL^{-3/2}$ ,  $[l_{sc}] = [L_{pz}] = L$ ,  $[E] = FL^{-2}$  получаем кинетическое уравнение для роста трещины:

$$dl/dN = \Phi(\Delta K, E, l_{sc}, L_{pz}). \quad (2)$$

Применяя П-теорему, уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{dl}{dN} \frac{1}{l_{sc}} = \bar{\Phi} \left( \frac{\Delta K}{E\sqrt{l_{sc}}}, \frac{L_{pz}}{l_{sc}} \right). \quad (3)$$

Оценка значений  $\Delta K/(E\sqrt{l_{sc}}) \ll 1$  и  $L_{pz}/l_{sc} \gg 1$  позволяет предположить промежуточно-асимптотический характер кинетики роста трещины и записать (3) в виде

$$\frac{d\bar{l}}{dN} = \left( \frac{\Delta K}{E\sqrt{l_{sc}}} \right)^\alpha \left( \frac{L_{pz}}{l_{sc}} \right)^\beta, \quad (4)$$

где  $\bar{l} = l/l_{sc}$ . Введение параметра материала  $C = (L_{pz}/l_{sc})^\beta$  приводит соотношение (4) к виду, аналогичному закону Пэриса:

$$\frac{d\bar{l}}{dN} = C \left( \frac{\Delta K}{E\sqrt{l_{sc}}} \right)^\alpha, \quad (5)$$

где  $\alpha$  – универсальный показатель.

## 2. Материал и условия эксперимента

Образцы (рис. 1) из сплава алюминия и магния АМг6 подвергались усталостному нагружению в условиях симметричного цикла растяжения-сжатия с частотой 20 кГц (режим гигациклового нагружения [9]) при уровне напряжения 154, 155, 160 МПа на ультразву-

ковой испытательной машине (Shimadzu USF2000). Испытательная машина состоит из следующих основных частей: генератора, преобразующего частоту 50 Гц в ультразвуковой электрический синусоидальный сигнал с частотой 20 кГц; пьезоэлектрического преобразователя, генерирующего продольные ультразвуковые волны в механическое воздействие частотой 20 кГц; ультразвукового волновода, формирующего максимальную амплитуду механического напряжения в рабочей (средней) части образца [10].

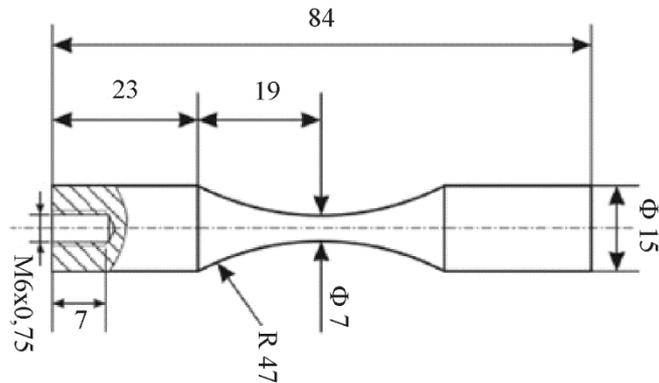


Рис. 1. Геометрия образцов (размеры указаны в миллиметрах)

Поверхностный рельеф разрушенных образцов регистрировался с помощью интерферометра-профилометра высокого разрешения New-View (при увеличении  $\times 2000$ ) и затем анализировался методами фрактального анализа для определения условий коррелированного поведения многомасштабных дефектных структур, с которым связывалось распространение трещины.

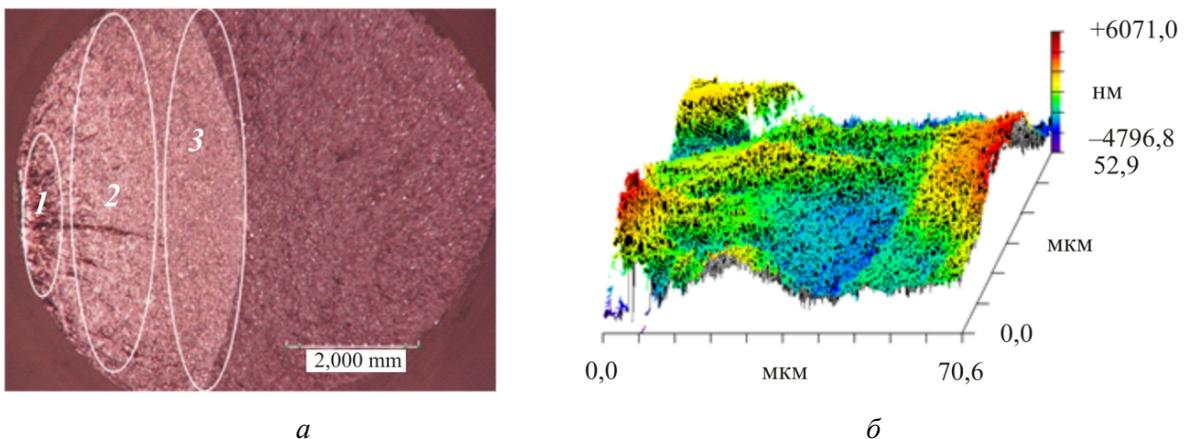


Рис. 2. Характерный рельеф поверхности зоны усталостного разрушения: *а* – оптическое изображение; *б* – 3D образ поверхности зоны 1

Области сканирования распределялись по трем зонам 1, 2, 3 (рис. 2, *а*) и анализировались одномерные образы-срезы рельефа поверхности в радиальном направлении по отношению к границе раздела между зонами 1 и 3. Около 10 одномерных «срезов» анализировались в пределах каждого «окна», обеспечивая представительность данных о структуре рельефа, индуцированного дефектами, с вертикальным разрешением  $\sim 0,1$  нм и горизонтальным  $\sim 0,1$  мкм. Для определения минимального (критического) масштаба  $l_{sc}$ , соответствующего установлению длинно-корреляционных взаимодействий в ансамблях

дефектов, использовался метод определения показателя Херста. По одномерным профилям рельефа поверхности разрушения вычислялась функция  $K(r)$  по формуле [1, 3, 11]

$$K(r) = \left\langle (z(x+r) - z(x))^2 \right\rangle_x^{1/2} \propto r^H, \quad (6)$$

где  $K(r)$  представляет собой усредненную разность значений высот рельефа поверхности  $z(x+r)$  и  $z(x)$  на окне размером  $r$ ;  $H$  – показатель Херста (показатель шероховатости).

Представление функции  $K(r)$  в логарифмических координатах в соответствии с соотношением (6) позволяет провести оценку критического масштаба  $l_{sc}$  (рис. 3, б). Значение нижней границы масштаба скейлинга принималось за значение критического масштаба  $l_{sc}$ , значение верхней границы принималось за значение масштаба, связанного с зоной процесса  $L_{pz}$  – областью коррелированного поведения дефектных структур (см. рис. 3, б).

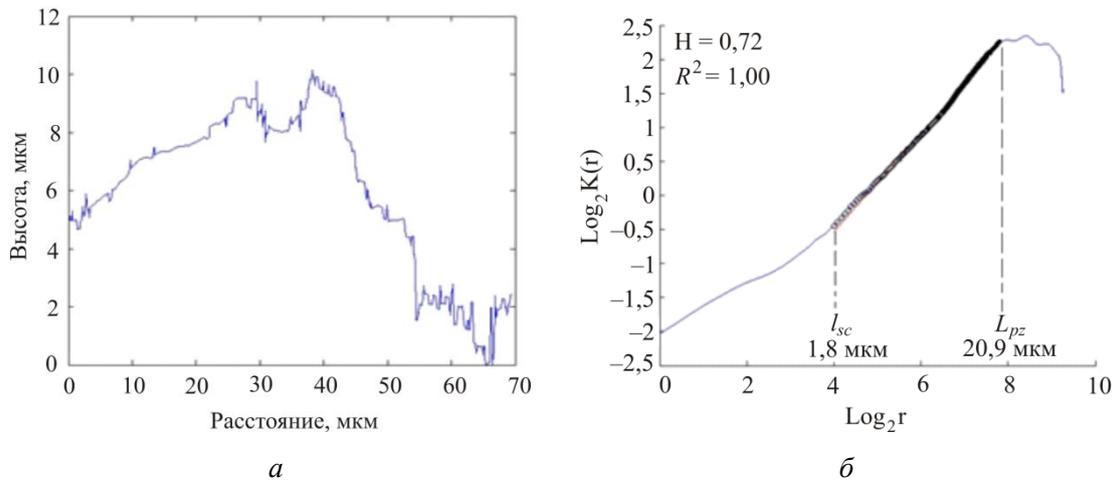


Рис. 3. Характерный одномерный профиль в зоне I (а); вид зависимости  $\ln K(r)$  от  $\ln(r)$  для зоны I (б)

Значения показателя Херста  $H$  и критических масштабов  $L_{pz}$  и  $l_{sc}$  для различных условий нагружения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения показателя Херста и значения критических масштабов при различных уровнях напряжения усталостной долговечности

$\sigma$ , МПа	$\Delta N$ , циклы	Номер зоны	$l_{sc}$ , мкм	$L_{pz}$ , мкм	$H$
155	$4,2 \cdot 10^{+6}$	1	1,1	20,3	0,51
		2	1,3	19,8	0,58
		3	0,4	12,9	0,58
154	$1,41 \cdot 10^{+9}$	1	1,8	21,1	0,61
		2	3,1	34,7	0,76
		3	1,1	22,8	0,48
160	$6,93 \cdot 10^{+6}$	1	1,6	19,8	0,72
		2	1,4	22,4	0,61
		3	1,2	24,3	0,64

### 3. Мультифрактальный анализ

Для анализа данных поверхностного рельефа разрушенных образцов использовался двумерный метод максимумов модулей вейвлет-преобразования (2D-wavelet transform maximum modulus method), позволяющий выделить характерные многомасштабные флуктуации локализованных полей деформаций, ассоциируемые с коллективными модами дефектов [12].

Алгоритм метода максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП) состоит из двух этапов. На первом этапе выполняется двумерное непрерывное вейвлет-преобразование (НВП) анализируемого сигнала  $f(x, y)$ :

$$(Wf)(x_0, y_0, a) = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \Psi\left(\frac{x-x_0}{a}, \frac{y-y_0}{a}\right) dx dy, \quad (7)$$

где  $x_0$  – пространственный параметр;  $a(>0)$  – масштабный параметр;  $\Psi(x)$  – анализирующий вейвлет, в качестве которого в данной работе используется производная от функции Гаусса.

В результате непрерывного вейвлет-преобразования функции  $f(x, y)$  определяются вейвлет-коэффициенты  $(Wf)(x, y, a)$ . Таким образом, в четырехмерном пространстве (вейвлет-коэффициентов, двух пространственных и масштабного параметров) можно построить поверхность вейвлет-коэффициентов. Наиболее важная информация содержится в линиях локальных экстремумов данной поверхности, поиск которых осуществляется на каждом масштабе по всему пространству. Совокупность таких линий называется скелетом. Выделением скелетона заканчивается первый шаг алгоритма метода ММВП.

Анализ скелетона позволяет вычислить показатель Гельдера, который является количественной характеристикой сингулярности функции на различных масштабах. Для получения более точных оценок показателя предложен метод расчета на основе частичных функций  $Z(q, a)$  [13]. Построение частичных функций осуществляется по следующей формуле:

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left( \sup_{a' \geq a} |(Wf)(x_l, y_l, a')| \right)^q, \quad (8)$$

где  $L(a)$  – множество линий локальных экстремумов ( $l$ ), соответствующих масштабу  $a$ , координаты  $x_l$  и  $y_l$  характеризуют положение на масштабе  $a$  экстремума, относящегося к линии  $l$ ;  $a'$  – масштаб, меньший заданного масштаба  $a$ . Соотношение (8) означает, что выбирается максимальное значение модуля локального экстремума (коэффициентов вейвлет-преобразования) вдоль каждой линии на масштабах, меньших заданного значения  $a$ . Показатель скейлинга (или скейлинговая экспонента)  $\tau(q)$  определяется согласно зависимости

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}. \quad (9)$$

Величина  $\tau(q)$  для некоторого значения  $q$  вычисляется по наклону зависимости  $\ln Z(q, a)$  от  $\ln(a)$ . Затем используется преобразование Лежандра для того, чтобы определить показатель Гельдера и построить спектр сингулярностей  $D(H)$  анализируемой функции:

$$\begin{cases} h = \partial\tau(q)/q, \\ D(H) = \min_q (qH - \tau(q)). \end{cases} \quad (10)$$

Если  $\tau(q)$  имеет линейную зависимость от  $q$  ( $H = \partial\tau(q)/\partial q = \text{const}$ ), то, следовательно, анализируемая функция монофрактальна, если же зависимость между  $\tau(q)$  и  $q$  нелинейная ( $H(q) = \partial\tau(q)/\partial q \neq \text{const}$ ), тогда это признак мультифрактальности.

Исследование на основе New-View данных профилометрии корреляционных (фрактальных) свойств многомасштабных флуктуаций для соответствующих стадий деформирования позволило идентифицировать «моды», отвечающие за развитие поврежденности. Анализ последних позволил изучить сценарии развития пластического течения, обусловленного формированием локализованных многомасштабных структур, и переход к критической стадии накопления поврежденности (формирование очагов макроскопических трещин).

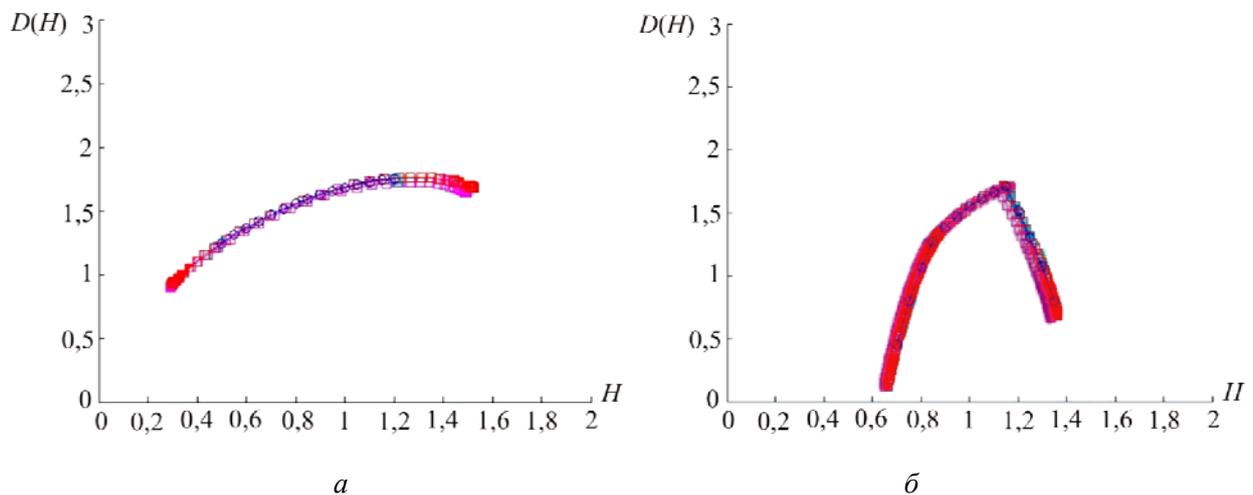


Рис. 4. Характерный вид зависимости спектра фрактальной размерности –  $D(H)$  от показателя Херста –  $H$ :  $a$  – зона зарождения трещины (зона 1);  $b$  – зона вблизи долома (зона 2)

Установлено, что переход от стадии формирования множественных областей локализованного деформирования к формированию очагов разрушения сопровождается качественной сменой нелинейной динамики системы – переходом от мультифрактальной к монофрактальной динамике, что характеризуется сужением мультифрактального спектра  $D(H)$  (рис. 4).

#### 4. Исследование локализации пластической деформации

Локализация пластической деформации в условиях, близких к чистому сдвигу, исследовалась на образцах типа «сдвиг-сжатие», которые испытывались на разрезном стержне Гопкинсона-Кольского [14]. Образцы «сдвиг-сжатие» представляют собой цилиндрические образцы диаметром 10 мм и высотой 20 мм, с вырезом прямоугольного сечения шириной 2 мм и глубиной 3,75 мм, под углом 45 градусов к оси образца, расположенным в центре симметрично с двух сторон. В силу своей геометрии данные образцы

видятся перспективными для изучения таких механизмов разрушения, как формирование адиабатических полос сдвига. Образцы испытывались на установке Гопкинсона-Кольского (сжатие) (рис. 5).



Рис. 5. Образец «сдвиг-сжатие» между входным и выходным стержнями Гопкинсона-Кольского (а) и после деформирования (б)

В ходе эксперимента в режиме реального времени боковая поверхность образцов исследовалась с помощью высокоскоростной инфракрасной камеры CEDIP Silver 450M. Температура в области локализации пластической деформации не превышает 70 °С.

Для того чтобы сделать приблизительные оценки параметров нагружения, перед испытанием образцов «сдвиг-сжатие» было проведено трехмерное моделирование в математическом пакете Abaqus. Использовалась стандартная упруго-пластическая модель. При численном моделировании так же рассчитывалась температура, поле распределения которой изображено на рис. 6.

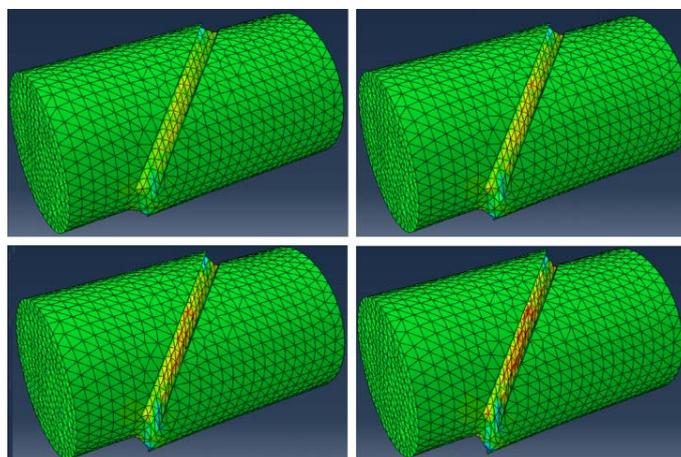


Рис. 6. Этапы процесса деформирования образца «сдвиг-сжатие», поле распределения сдвиговой компоненты тензора деформаций

На рис. 7 изображено поле распределения деформаций в различные моменты времени.

После эксперимента боковая поверхность вдоль выточки образцов снималась с помощью оптического интерферометра-профилометра NewView-5010 и подвергалась фрактальному анализу в терминах показателя Херста.

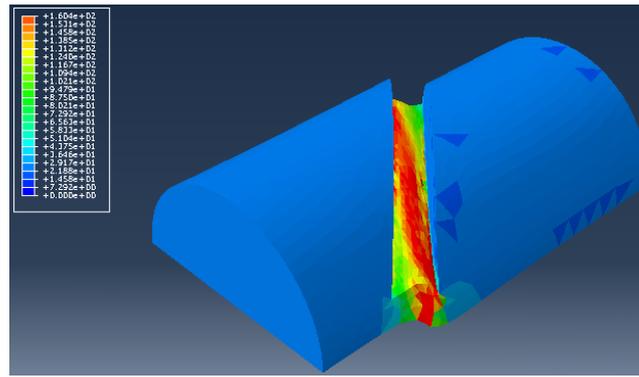
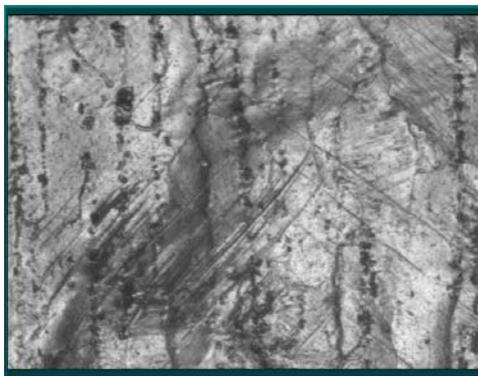
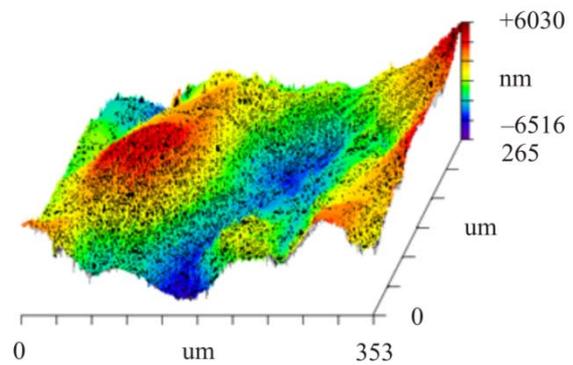


Рис. 7. Распределение поля температуры на образце «сдвиг-сжатие», полученное в численном расчете



*a*



*б*

Рис. 8. Поверхность образца № 1 после деформирования: *a* – оптическое изображение; *б* – 3D-изображение

Значения показателя Херста и критических масштабов для различных деформаций сдвига представлены в табл. 2.

Таблица 2

Значения показателя Херста и критических масштабов для различных деформаций сдвига

Образец	Деформация сдвига	$H$	$l_{sc}$ , мкм	$L_{pz}$ , мкм
1	0	0,20	2,2	24,9
	1,6	0,25	4,2	64,2
2	0	0,75	7,5	49,2
	2,23	0,68	14,7	81,8
3	0	0,26	1,5	50,2
	0,21	0,40	3,2	71,9

## Заключение

Сравнительный анализ скейлинговых характеристик образцов, нагруженных в условиях динамического нагружения, много- и гигацикловой усталости, позволил установить небольшое изменение показателя Херста при усталостном нагружении образцов и значи-

тельное изменение показателя Херста для динамически нагруженных образцов. В последнем случае качественные различия связаны с тенденцией к увеличению как  $l_{sc}$ , так и  $L_{pz}$  масштабов, что отражает более выраженные черты локализации деформации, предшествующей формированию разрушения адиабатическим сдвигом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01173).

## Библиографический список

1. Zaiser M. Scale invariance in plastic flow of crystalline solids // *Advances in Physics*. – 2006. – Vol. 55. – P. 185–245.
2. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
3. Bouchaud E. Scaling properties of cracks // *J. Phys. Condens. Matter*. – 1997. – Vol. 9. – P. 4319–4344.
4. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. – N.Y.: Freeman, 1983. – 480 p.
5. Paris P., Lados D., Tad H. Reflections on identifying the real  $\Delta K_{\text{effective}}$  in the threshold region and beyond // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2008. – Vol. 75. – P. 299–3052.
6. Barenblatt G.I. Scaling phenomena in fatigue and fracture // *Int. J. of Fracture*. – 2006. – Vol. 138. – P. 19–35.
7. Ritchie R.O. Incomplete self-similarity and fatigue-crack growth // *Int. J. of Fracture*. – 2005. – Vol. 132. – P. 197–203.
8. Масштабная инвариантность роста усталостной трещины при гигацикловом режиме нагружения / В.А. Оборин, М.В. Банников, О.Б. Наймарк, Т. Palin-Luc // *Письма в журнал технической физики*. – 2010. – Т. 36. – Вып. 22. – С. 76–82.
9. Ботвина Л.Р. Гигацикловая усталость – новая проблема физики и механики разрушения // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. – 2004. – Т. 70, № 4. – С. 41.
10. Bathias C., Paris P.C. *Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice*. – New York: CRC Press, 2004. – 328 p.
11. Microstructure scaling properties and fatigue resistance of pre-strained aluminium alloys (part 1: Al-Cu alloy) / C. Froustey, O. Naimark, M. Bannikov, V. Oborin // *European Journal of Mechanics A/Solids*. – 2010. – Vol. 29. – P. 1008–1014.
12. A wavelet-based method for multifractal analysis in medical signals: application to dynamic infrared thermograms of breast cancer / E. Gerasimova, B. Audit, S.-G. Roux, A. Khalil, O. Gileva, F. Argoul, O. Naimark, A. Arneodo // *Nonlinear dynamics of electronic systems. Communication in computer and information science*. – 2014. – Vol. 438. – P. 288–300.
13. Scaling behavior of high resolution temporal rainfall: New insights from a wavelet-based cumulant analysis / V. Venugopal, S.G. Roux, E. Foufoula-Georgiou, A. Arneodo // *Phys. Let. A*. – 2006. – Vol. 348. – P. 335–345.
14. Rittel D., G. Ravichandran, Venkert A. The mechanical response of pure iron at high strain rates under dominant shear // *Materials Science and Engineering A*. – 2006. – Vol. 432. – P. 191–201.

## References

1. Zaiser M. Scale invariance in plastic flow of crystalline solids. *Advances in Physics*, 2006, vol. 55, pp. 185-245.
2. Feder E. *Fractals* [Fractals]. Moscow: Mir, 1991. 254 p.
3. Bouchaud E. Scaling properties of cracks. *J. Phys. Condens. Matter.*, 1997, vol. 9, pp. 4319-4344.

4. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. N.Y.: Freeman 1983. 480 p.
5. Paris P., Lados D., Tad H. Reflections on identifying the real  $\square K_{\text{effective}}$  in the threshold region and beyond. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, vol. 75, pp. 299-3052.
6. Barenblatt G.I. Scaling phenomena in fatigue and fracture. *Int. J. of Fracture*, 2006, vol. 138, pp. 19-35.
7. Ritchie R.O. Incomplete self-similarity and fatigue-crack growth. *Int. J. of Fracture*, 2005, vol. 132, pp. 197-203.
8. Oborin V., Bannikov M., Naimark O., Palin-Luc T. Scaling invariance of fatigue crack growth in gigacycle loading regime. *Technical Physics Letters*, 2010, vol. 36, no. 11, pp. 1061-1063.
9. Botvina L. Gigaciklovaya ystalost – novaya problema fiziki i mehaniki razrysheniya [Gigacycle fatigue – new problem of physics and mechanical damage]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2004, vol. 70, no. 4, pp. 41-51.
10. Bathias C., Paris P.C. Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. New York: CRC Press, 2004. 328 p.
11. Froustey C., Naimark O., Bannikov M., Oborin V. Microstructure scaling properties and fatigue resistance of pre-strained aluminium alloys (part 1: Al-Cu alloy). *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2010, vol. 29, pp. 1008-1014.
12. Gerasimova E., Audit B., Roux S.-G., Khalil A., Gileva O., Argoul F., Naimark O., Arneodo A. A wavelet-based method for multifractal analysis in medical signals: application to dynamic infrared thermograms of breast cancer. *Nonlinear dynamics of electronic systems. Communication in computer and information science*, 2014, vol. 438, pp. 288-300.
13. Venugopal V., Roux S.G., Fofoula-Georgiou E., Arneodo A. Scaling behavior of high resolution temporal rainfall: New insights from a wavelet-based cumulant analysis. *Phys. Let. A.*, 2006, vol. 348, pp. 335-345.
14. Rittel D., Ravichandran G., Venkert A. The mechanical response of pure iron at high strain rates under dominant shear. *Materials Science and Engineering A.*, 2006, vol. 432, pp. 191-201.