



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.12

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

М.А. Ташкинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 1 августа 2015 г.
Принята: 5 сентября 2015 г.
Опубликована: 30 сентября 2015 г.

Ключевые слова:

моментные функции, случайная микроструктура, статистические характеристики, композиты с металлической матрицей, многокомпонентные представительные объемы, геометрическая модель, локальные поля напряжений и деформаций, стохастическая краевая задача, метод последовательных приближений, теория упругости

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена методам статистической механики, их разработке и применению для изучения микроструктурного поведения многокомпонентных композитов. Объектом исследования являются структурно-неоднородные материалы, состоящие из более чем двух компонентов.

Целью работы является разработка аналитического инструментария для анализа полей микроструктурных напряжений и деформаций в многокомпонентных средах, позволяющего учитывать геометрические и физико-механические свойства компонентов, на основе вычисления статистических характеристик локальных полей напряжений и деформаций в компонентах.

Исследование поведения компонентов микроструктуры композитов основано на концепции представительного объема материалов. Предполагается, что компоненты являются однородными и изотропными. Информация о внутренней морфологии представительных объемов формализуется с помощью моментных функций различных порядков. В качестве характеристик процессов деформирования выступают статистические моменты (статистики) полей напряжений и деформаций в компонентах материала. Аналитические выражения для статистических характеристик локальных полей напряжений и деформаций получены с использованием решения краевой задачи теории упругости в стохастической постановке. Краевая задача решена с помощью метода функций Грина для упругой среды.

Разработанная аналитическая модель позволяет учитывать как геометрические параметры микроструктуры, так и физико-механические свойства компонентов. Впервые получены выражения для моментов первого и второго порядка локальных полей напряжений для многокомпонентных материалов. Исследованы частные случаи композитов с титановой (Ti) матрицей, армированных случайно расположенными частицами карбида кремния (SiC). Выполнен анализ влияния микроструктурных параметров на поведение каждой из фаз в отдельности. Представлены численные результаты, полученные для статистик полей напряжений и деформаций.

© ПНИПУ

© **Ташкинов Михаил Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: m.tashkinov@pstu.ru

Mikhail A. Tashkinov – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: m.tashkinov@pstu.ru

MODELING OF ELASTIC BEHAVIOR OF MULTICOMPONENT COMPOSITE MATERIALS BASED ON APPROXIMATE SOLUTION OF STOCHASTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

M.A. Tashkinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 1 August 2015
Accepted: 5 September 2015
Published: 30 September 2015

Keywords:

correlation functions,
random microstructure,
statistical characteristics,
metal matrix composites,
multiphase representative volume
elements, geometry model,
local stress and strain fields,
stochastic boundary value
problem, successive
approximations,
theory of elasticity

ABSTRACT

This work is devoted to development and application of the statistical mechanics approaches to studying microstructural behavior of multi-component composites. The object of the study is heterogeneous materials consisting of more than two components.

The aim is to develop analytical tools for the analysis of the microstructural stress and strain fields in multicomponent media taking into account geometrical and mechanical properties of components and based on calculation of the statistical characteristics of the local fields of stress and strain in components.

Research of the microstructure behavior of components of composites is based on the concept of representative volume elements. It is assumed that the components are homogeneous and isotropic. Information about the internal morphology of the representative volume is formalized by means of correlation functions of various orders. Characteristics of the deformation processes are the statistical moments (statistics) of stress and strain fields in the components of the material. Analytical expressions for the statistical characteristics of the local stress and strain fields are obtained using the solution of the boundary problem of elasticity theory in a stochastic formulation. The boundary value problem is solved using the Green's functions method for the elastic medium.

The developed analytical model takes into account both the geometrical parameters of the microstructure and mechanical properties of components. For the first time expressions for the moments of the first and second order of local stress fields for the multicomponent materials were derived. Case studies of composites with titanium (Ti) matrix reinforced with randomly distributed particles of silicon carbide (SiC) were investigated. Analysis of the influence of microstructural parameters on the behavior of each phase separately was performed. Numerical results for the statistics of stress and strain fields are presented.

© PNRPU

Введение

Появление и широкое распространение новых композиционных материалов связано с необходимостью решения сложных прикладных задач, продиктованных потребностями высокотехнологичных отраслей промышленности, таких как аэрокосмическая, автомобильная, электронная и др. Создание аналитических инструментов, позволяющих предоставлять рекомендации для оптимального проектирования композитов, наиболее соответствующих условиям эксплуатации конкретных приложений, является актуальной проблемой. В отдельный класс можно выделить многокомпонентные композиты, состоящие из двух и более фаз, отличающихся по своим исходным свойствам. Развитие подходов к многомасштабному моделированию механической микроструктуры таких материалов дает возможность прогнозирования эффективного поведения композиционного материала с учетом микроструктурных особенностей, таких как размер частиц фаз, их объемная доля, ориентация, дисперсия и кластеризация [1–6].

Метод, используемый в данной работе, основан на статистических подходах и теории случайных функций. Его суть заключается в том, что поведение отдельных компонентов микроструктуры при нагружении представительного объема оценивается с помощью статистических характеристик локальных полей напряжений и деформаций, таких как моменты первого и второго порядка [7–9], которые вычисляются с помощью решения стохастических краевых задач.

Стохастические краевые задачи могут быть сформулированы в реализациях случайной структуры [10] и в моментных функциях [9, 11–13], когда усреднение числа реализаций заменяется усреднением по объему. Решение краевых задач в последнем случае сводится к интегрально-дифференциальному уравнению, содержащему функцию Грина [13]. Уравнение может быть решено различными способами, каждый из которых основан на определенном упрощающем предположении о статистических свойствах материальных характеристик полей композита, что позволяет упростить бесконечную цепочку стохастических уравнений, образованных путем последовательного статистического усреднения определяющих соотношений для компонентов в неоднородных средах [14]. Начало изучению деформирования композитов со случайными структурами в рамках статистического подхода положено фундаментальными работами И.М. Лифшица и Л.Н. Розенцвейга, в которых приведена постановка стохастической краевой задачи теории упругости для поликристаллических сред [15]. Впоследствии этот подход получил развитие в работах В.В. Болотина [15], В.А. Ломакина [12], Т.Д. Шермергора [13], С.Д. Волкова и соавторов [11], Г.А. Ванина [10], а также М. Берана [14], Ю.В. Соколкина, А.А. Ташкинова [9, 17], А.А. Панькова [18], Л.П. Хорошуна [19], Л.А. Сараева [20] и др.

Несмотря на большое количество вариаций статистических подходов, существуют различия в получаемых различными методами результатах для эффективных свойств композитов и в большей мере для статистических характеристик полей напряжений и деформаций в компонентах композитов. Это обусловлено статистической нелинейностью исследуемой задачи и построением приближенных решений, которые в различной степени соответствуют физической модели композита, в частности, его структуре. Отсюда необходимость в получении более точного приближенного решения задачи в рамках существующего подхода, а также обобщения подхода для решения более широкого круга задач.

Данная работа посвящена методологии получения статистических характеристик для многокомпонентных матричных композитов со случайно распределенными включениями на основе решения стохастических краевых задач теории упругости для неоднородных сред.

1. Методология описания характеристик случайной микроструктуры

Внутренняя микроструктура композитов зачастую представляет собой случайную гетерогенную многофазную среду. Согласно статистическому подходу для определения морфологии таких материалов на микромасштабном уровне могут быть введены индикаторные функции $\lambda_C(\vec{r})$ [8, 9, 21, 22]. Значения этих функций зависят от положения радиуса-вектора в представительном объеме. В частности, $\lambda_C(\vec{r})=1$, если радиус-вектор находится в компоненте C , и $\lambda_C(\vec{r})=0$ в других случаях. Тогда тензор модулей упругости для представительного объема определяется как сумма произведений тензора модулей упругости $C_{ijkl}^{(z)}$ для каждой компоненты и соответствующих индикаторных функций $\lambda_{(z)}(\vec{r})$. В результате он принимает форму кусочно-постоянной функции координат:

$$C_{ijkl}(\vec{r}) = \sum_{z=1}^n \lambda_{(z)}(\vec{r}) C_{ijkl}^{(z)}. \quad (1)$$

Гипотеза эргодичности случайных функций $\lambda_C(\vec{r})$ позволяет рассматривать усреднение по ансамблю реализаций представительных объемов равным усреднению по объему [11, 14]. Другими словами, $\langle \lambda_{(z)}(\vec{r}) \rangle = \langle \lambda_{(z)}(\vec{r}_1) \rangle$ для каждого \vec{r} и \vec{r}_1 . Принимая это во внимание, тензор $C_{ijkl}(\vec{r})$ и индикаторные функции $\lambda_C(\vec{r})$ для представительных объемов можно разложить на два слагаемых – среднее значение и флуктуацию:

$$C_{mnkl}(\vec{r}) = \langle C_{mnkl}(\vec{r}) \rangle + C'_{mnkl}(\vec{r}), \quad (2)$$

$$\lambda_C(\vec{r}) = \langle \lambda_C(\vec{r}) \rangle + \lambda'_C(\vec{r}), \quad (3)$$

где флуктуации определяют степень, с которой значение функции отличается от усредненного. Другими словами, они показывают, как случайная структура будет отличаться от периодической структуры с теми же самыми геометрическими параметрами [24].

Усреднение уравнения (1) дает постоянный изотропный тензор, который зависит от объемных долей компонент:

$$\langle C_{ijkl}(\vec{r}) \rangle = \sum_{z=1}^n p_{(z)} C_{ijkl}^{(z)}, \quad (4)$$

где $p_{(z)} = \langle \lambda_{(z)}(\vec{r}) \rangle$ – объемная доля фазы z в представительном объеме.

Кроме констант, количественно определяющих структурные геометрические основы, инструменты статистического подхода предлагают механизмы оценки пространственного взаимодействия между микроструктурными компонентами [8]. Так, одним из наиболее широко используемых механизмов являются моментные функции, которые характеризуют связь микрочастиц внутри представительного объема [9, 13, 22]. Таким образом, моментная функция n -го порядка может быть определена как среднее скалярного произведения n случайных величин в различных положениях радиусов-векторов $\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$.

Выражение для моментной функции n -го порядка флуктуаций случайной индикаторной функции в компоненте C можно записать в общем виде:

$$\langle \lambda'_C(\vec{r}_1) \lambda'_C(\vec{r}_2) \dots \lambda'_C(\vec{r}_n) \rangle = \langle (\lambda_C(\vec{r}_1) - p_C)(\lambda_C(\vec{r}_2) - p_C) \dots (\lambda_C(\vec{r}_n) - p_C) \rangle, \quad (5)$$

где p_C – объемная доля.

Моментные функции чувствительны к таким параметрам, как распределение, ориентация и форма микроструктурных составляющих. Теоретически микроструктурная морфология композитов может быть однозначно определена бесконечным числом моментных функций. Эти функции используются в качестве геометрических характеристик в задачах получения статистик высоких порядков для микроскопических полей напряжений и деформаций [8, 9, 13, 16, 22, 24, 27, 28].

Методология моментных функций требует некоторых начальных экспериментальных данных относительно внутренней структуры представительного объема композита. Обычно для получения микроструктурных характеристик используются экспериментальные методы визуализации [23], такие как микрокомпьютерная томография. Другой способ – создание моделей с помощью некоторых заранее определенных геометрических параметров.

Для того чтобы получить значения моментных функций микроструктуры (5), необходимо знать поля значений индикаторных функций (4). Они могут быть вычислены путем выполнения алгоритма, который разбивает представительный объем сеткой с фиксированным шагом и проверяет наличие фаз в каждом ее узле. Точность функций при этом зависит от шага сетки.

В терминах статистического подхода локальные поля, такие как поля перемещений u_m , деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} внутри представительного объема со случайной микроструктурой, как правило, считаются случайными функциями. Они зависят от радиуса-вектора и могут быть представлены аналогично формулам (3) и (4):

$$u_m(\vec{r}) = \langle u_m(\vec{r}) \rangle + u'_m(\vec{r}), \quad (6)$$

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = \langle \varepsilon_{ij}(\vec{r}) \rangle + \varepsilon'_{ij}(\vec{r}), \quad (7)$$

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = \langle \sigma_{ij}(\vec{r}) \rangle + \sigma'_{ij}(\vec{r}). \quad (8)$$

Многоточечные статистики, рассчитанные для полей напряжений и деформаций в представительном объеме и в каждой фазе отдельно, могут быть использованы для анализа влияния микроструктурных параметров на поведение гетерогенных материалов. Средние (по представительному объему) значения в формулах (6)–(8) являются константами, поэтому статистики строятся для флуктуаций. Распространенные модели для расчета эффективных характеристик материала, как правило, используют моменты локальных полей первого и второго порядка [7, 8]. Моменты первого порядка представляют собой средние значения, в то время как моменты второго порядка также называют дисперсиями. Моменты полей деформаций могут быть определены с использованием флуктуаций перемещений и соотношения Коши: $\varepsilon'_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(u'_{i,j}(\vec{r}) + u'_{j,i}(\vec{r}))$. Флуктуации напряжений можно представить с учетом уравнения состояния $\sigma_{ij}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r})\varepsilon_{kl}(\vec{r})$ в следующем виде:

$$\sigma'_{ij}(\vec{r}) = \sigma'_{ij}(\vec{r}) - \langle \sigma_{ij} \rangle = C'_{ijkl}(\vec{r})\langle \varepsilon_{kl}(\vec{r}) \rangle - \langle C'_{ijkl}(\vec{r})\varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle + \langle C_{ijkl}(\vec{r}) \rangle \varepsilon'_{kl}(\vec{r}). \quad (9)$$

Формулы для моментов первого и второго порядка деформаций и напряжений в компонентах были впервые получены С. Волковым и выражаются через смешанные моменты, объединяющие флуктуации индикаторных функций и локальные поля деформаций [11, 25]:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_C = e_{ij} + \frac{1}{\langle \lambda_C(\vec{r}) \rangle} \langle \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \rangle, \quad (10)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_C = \langle \sigma_{ij} \rangle + \frac{1}{\langle \lambda_C(\vec{r}) \rangle} \langle \lambda'_C(\vec{r}) \sigma'_{ij}(\vec{r}) \rangle, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle_C &= \langle \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle + e_{ij} e_{\alpha\beta} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle_C \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_C + \\ &+ \frac{1}{\langle \lambda_C(\vec{r}) \rangle} \left(\langle \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle + e_{ij} \langle \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle + e_{\alpha\beta} \langle \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \rangle \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle_C &= \langle \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle + \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle - \langle \sigma_{ij} \rangle_C \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle_C + \\ &+ \frac{1}{\langle \lambda_C(\vec{r}) \rangle} \left(\langle \lambda'_C(\vec{r}) \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle + \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \lambda'_C(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle + \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle \langle \lambda'_C(\vec{r}) \sigma'_{ij}(\vec{r}) \rangle \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Численный расчет статистик локальных полей связан с нахождением флуктуаций перемещений, которые могут быть найдены из решения краевой задачи в стохастической постановке [9, 25].

2. Решение стохастической краевой задачи в упругой постановке

Стохастическая краевая задача содержит следующие уравнения:

$$\sigma_{ij,j}(\vec{r}) = 0, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\vec{r}) + u_{j,i}(\vec{r})), \quad (15)$$

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r}) \varepsilon_{kl}(\vec{r}), \quad (16)$$

$$u_i(\vec{r})|_{\vec{r} \in \Gamma_V} = e_{ij} r_j, \quad (17)$$

где (14) – уравнение равновесия; j обозначает частную производную $\frac{\partial}{\partial x_j}$; (15) – соотношение Коши; (16) – уравнение состояния. Адгезия между компонентами считается идеальной.

Для получения решения для флуктуации перемещений в виде рекуррентного интегрально-дифференциального уравнения был использован метод функций Грина [13, 25]:

$$\frac{\partial u_i^{(\chi)}(\vec{r})}{\partial x_j} = \int_{V_1} \frac{\partial G_{im}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial x_j} \left[C'_{mnl}(\vec{r}_1) e_{kl} + C'_{mnl}(\vec{r}_1) \frac{\partial u_k^{(\chi-1)}(\vec{r}_1)}{\partial x_l} \right]_{,1n} dV_1, \quad (18)$$

где χ – порядок аппроксимации; $C'_{mnl}(\vec{r}) = \sum_{z=1}^n \lambda'_{(z)}(\vec{r}) C_{mnl}^{(z)}$. Последовательная процедура, когда каждое предыдущее приближение подставляется в правую часть, позволяет получить более точные решения [25, 26].

Когда размеры представительного объема много меньше характерных размеров твердого тела, а также в случае изотропного тензора $\langle C_{ijmn}(\vec{r}) \rangle$, в качестве функции Грина $G_{im}(\vec{r}, \vec{r}_1)$ может быть использован тензор Кельвина-Сомильяны [11, 25]:

$$G_{mk}(\vec{r}, \vec{r}_1) = A \frac{\delta_{mk}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + B \frac{(r_m - \rho_m)(r_k - \rho_k)}{|\vec{r} - \vec{\rho}|^3}, \quad (19)$$

где A и B – константы, зависящие от свойств материала микроструктурных фаз.

С использованием первого приближения уравнения (18)

$$\frac{\partial u_i^{(1)}(\vec{r})}{\partial x_j} = e_{kl} \sum_{z=1}^n C_{mnl}^{(z)} \int_{V_1} G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) \left[\lambda'_{(z)}(\vec{r}_1) \right]_{,n} dV_1 \quad (20)$$

флуктуации деформаций из уравнения (7), которые используются в формулах для моментов, выражаются с помощью уравнения (20):

$$\varepsilon'_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(u'_{i,j}(\vec{r}) + u'_{j,i}(\vec{r})) = \frac{1}{2} \left(e_{kl} \sum_{z=1}^n C_{mnkl}^{(z)} \int_{V_1} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) (\lambda'_{(z)}(\vec{r}_1))_{,ln} dV_1 \right). \quad (21)$$

Решение (20) содержит флуктуации индикаторной функций под интегралом. Формулы для моментов (10)–(13) также включают эти флуктуации. Таким образом, в аналитических выражениях выделяются в явном виде структурные моментные функции (5). Например:

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_{(y)}(\vec{r}) \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \rangle^{(1)} &= \frac{1}{2} e_{kl} \left(C_{mnkl}^{(y)} \int_{V_1} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \frac{\partial K_{(y)}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial x_{1n}} dV_1 + \right. \\ &+ \left. \sum_{z=1, z \neq y}^n C_{mnkl}^{(z)} \int_{V_1} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \frac{\partial \langle \lambda'_{(y)}(\vec{r}_1) \lambda'_{(z)}(\vec{r}_1) \rangle}{\partial x_{1n}} dV_1 \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где $K_{(y)}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1) = \langle \lambda'_{(y)}(\vec{r}) \lambda'_{(y)}(\vec{r}_1) \rangle$ – моментная функция второго порядка.

Можно показать, что второе слагаемое в выражении (22), содержащее произведение флуктуаций индикаторных функций различных компонент $\langle \lambda'_{(y)}(\vec{r}_1) \lambda'_{(z)}(\vec{r}_1) \rangle$, обращается в ноль. Так, по определению, флуктуация индикаторной функции в компоненте C выражается как

$$\lambda'_C(\vec{r}) = \langle \lambda_C(\vec{r}) \rangle - \lambda_C(\vec{r}), \quad (23)$$

где $\langle \lambda_C(\vec{r}) \rangle$ является константой и отражает объемную долю компоненты в представительном объеме. Тогда осредненное произведение флуктуаций индикаторных функций для двух разных компонент вырождается в константу:

$$\langle \lambda'_{(x)}(\vec{r}) \lambda'_{(y)}(\vec{r}) \rangle = \langle (p_{(x)} - \lambda_{(x)}(\vec{r})) (p_{(y)} - \lambda_{(y)}(\vec{r})) \rangle = \text{const}, \quad (24)$$

что обращает производную в подынтегральном выражении в уравнении (22) в ноль. Следовательно,

$$\langle \lambda'_{(y)}(\vec{r}) \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{2} \left(e_{kl} C_{mnkl}^{(y)} \int_{V_1} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \frac{\partial K_{(y)}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial x_{1n}} dV_1 \right). \quad (25)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_{(y)}(\vec{r}) \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{4} e_{kl} e_{\phi\eta} C_{mnkl}^{(y)} C_{\gamma\eta\phi h}^{(y)} \times \\ &\times \int_{V_1} \int_{V_2} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) (G_{\alpha\gamma,\beta}(\vec{r}, \vec{r}_2) + G_{\beta\gamma,\alpha}(\vec{r}, \vec{r}_2)) \frac{\partial^3 K_{(y)}^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial x_{1n} \partial x_{2\eta}} dV_2 dV_1, \end{aligned} \quad (26)$$

где $K_{\lambda_C}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1) = \langle \lambda'_C(\vec{r}) \lambda'_C(\vec{r}_1) \rangle$ – моментная функция второго порядка; $K_{\lambda_C}^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \lambda'_C(\vec{r}) \lambda'_C(\vec{r}_1) \lambda'_C(\vec{r}_2) \rangle$ – моментная функция третьего порядка.

С учетом равенства (9) смешанные моменты, входящие в выражения для моментов первого и второго порядка полей напряжений в компонентах и содержащие флуктуации полей напряжений, выражаются через флуктуации полей деформаций:

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_{(y)}(\vec{r}) \sigma'_{ij}(\vec{r}) \rangle &= \\ &= e_{kl} \left(D_{(y)}^{(2)} C_{ijkl}^{(y)} - \sum_{z=1, z \neq y}^n p_{(y)} p_{(z)} C_{ijkl}^{(z)} \right) - \\ &- \langle \lambda'_{(y)}(\vec{r}) \lambda'_{(y)}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle C_{ijkl}^{(y)} + \langle \lambda'_{(y)}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle \langle C_{ijkl} \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Момент $\langle \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle$ равен дисперсии напряжений в представительном объеме как однородной среде:

$$\begin{aligned} \langle \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle &= e_{kl} e_{\phi h} \left(\sum_{z=1}^n D_{(z)}^{(2)} C_{ijkl}^{(z)} C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} - \sum_{z=1, z \neq y}^n p_{(y)} p_{(z)} C_{ijkl}^{(y)} C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} \right) + \\ &+ e_{kl} \langle C_{\alpha\beta\phi h} \rangle \sum_{z=1}^n C_{ijkl}^{(z)} \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle + e_{\phi h} \langle C_{ijkl} \rangle \sum_{z=1}^n C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle + \\ &+ \langle C_{ijkl} \rangle \langle C_{\alpha\beta\phi h} \rangle \langle \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle - e_{kl} \sum_{z=1}^n C_{ijkl}^{(z)} C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle - \\ &- e_{\phi h} \sum_{z=1}^n C_{ijkl}^{(z)} C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle - \\ &- \langle C_{\alpha\beta\phi h} \rangle \sum_{z=1}^n C_{ijkl}^{(z)} \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle + \sum_{z=1}^n C_{ijkl}^{(z)} C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle, \end{aligned} \quad (28)$$

где $D_C^{(2)} = \langle \lambda'_C(\vec{r}) \lambda'_C(\vec{r}) \rangle = p_C(1 - p_C)$ – центральный момент второго порядка (дисперсия) для индикаторной функции компоненты C .

В силу свойств индикаторных функций принимать значения, равные либо нулю, либо единице, связь моментов, содержащих произведение индикаторных функций от одного и того же аргумента, выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_C(\vec{r}) \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle &= (1 - 2p_C) \langle \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle, \\ \langle \lambda'_C(\vec{r}) \lambda'_C(\vec{r}) \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle &= (1 - 3D_C^{(2)}) \langle \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle, \\ \langle \lambda'_C(\vec{r}) \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle &= (1 - 2p_C) \langle \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle + D_C^{(2)} \langle \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle, \\ \langle \lambda'_C(\vec{r}) \lambda'_C(\vec{r}) \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle &= (1 - 3D_C^{(2)}) \langle \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle + D_C^{(3)} \langle \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle, \end{aligned}$$

где $D_C^{(n)} = (1 - p_C)^n p_C + (-p_C)^n (1 - p_C)$ – центральный момент n -го порядка для индикаторной функции компоненты C .

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_{(y)}(\vec{r}) \sigma'_{ij}(\vec{r}) \rangle &= \\ &= e_{kl} \left(D_{(y)}^{(2)} C_{ijkl}^{(y)} - \sum_{z=1, z \neq y}^n p_{(y)} p_{(z)} C_{ijkl}^{(z)} \right) + \langle \lambda'_{(y)}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle \left(\langle C_{ijkl} \rangle - (1 - 2p) C_{ijkl}^{(y)} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Для дисперсий напряжений в представительном объеме

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle &= e_{kl} e_{\phi h} \left(\sum_{z=1}^n D_{(z)}^{(2)} C_{ijkl}^{(z)} C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} - \sum_{z=1, z \neq y}^n p_{(y)} p_{(z)} C_{ijkl}^{(y)} C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} \right) + \\
 &+ e_{kl} \langle C_{\alpha\beta\phi h} \rangle \sum_{z=1}^n C_{ijkl}^{(z)} \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle + e_{\phi h} \langle C_{ijkl} \rangle \sum_{z=1}^n C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle + \\
 &+ \langle C_{ijkl} \rangle \langle C_{\alpha\beta\phi h} \rangle \langle \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle - e_{kl} \sum_{z=1}^n C_{ijkl}^{(z)} C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} (1 - 2p_{(z)}) \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \rangle - \\
 &- e_{\phi h} \sum_{z=1}^n C_{ijkl}^{(z)} C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} (1 - 2p_{(z)}) \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle - \langle C_{ijkl} \rangle \sum_{z=1}^n C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle - \\
 &- \langle C_{\alpha\beta\phi h} \rangle \sum_{z=1}^n C_{ijkl}^{(z)} \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle + \\
 &+ \sum_{z=1}^n C_{ijkl}^{(z)} C_{\alpha\beta\phi h}^{(z)} \left((1 - 2p_{(z)}) \langle \lambda'_{(z)}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle + D_{(z)}^{(2)} \langle \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle \right).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Аналогичным образом выводится выражение для $\langle \lambda'_C(\vec{r}) \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle$.

Полученные аналитические выражения для статистик деформаций и напряжений зависят от свойств материала (через константы, входящие в функцию Грина) и формализованной информации о микроструктурной геометрии (посредством моментных функций различных порядков). Порядок необходимых моментных функций зависит от точности решения (18). С возрастанием его приближения выражения, содержащие интегралы в уравнениях (22) и (23), становятся более громоздкими и включают моментные функции более высокого порядка.

3. Численная реализация методики на примере композитов с металлической матрицей

В качестве частного случая были рассмотрены композиты с металлической матрицей с матрицей из титана (Ti), армированные включениями из карбида кремния (SiC). По сравнению с традиционными материалами и композитами с полимерной матрицей, используемыми для многих прикладных задач, такие композиты проявляют себя лучшим образом при высоких температурах, большую прочность, повышенную устойчивость к износу и высокоцикловой усталости, имеют более высокое отношение жесткости к весу, значительную электрическую и тепловую проводимость.

Микроструктурные составляющие представительного объема композитов были смоделированы как случайно расположенные, непересекающиеся сферы различных размеров. Были рассмотрены три фазы внутри представительного объема: Ti-матрица, армирующие SiC-частицы и пустоты (поры) в разных пропорциях. Такие модели соответствуют данным изображений, полученных из микроструктурных экспериментов, например в [6] и [29].

Геометрические характеристики моделируемых представительных объемов отображены в табл. 1. Поскольку предложенная методика не зависит от масштабных факторов, все величины, характеризующие размеры, представлены в условных масштабных единицах. В качестве представительного объема был рассмотрен куб со стороной 200.

Таблица 1

Геометрические характеристики многокомпонентных представительных объемов

Предст. объем	Объемная доля, p , %		Количество включений, N	Минимальный радиус		Максимальный радиус	
	Фаза #1 (SiC)	Фаза #2 (Поры)		Фаза #1 (SiC)	Фаза #2 (Поры)	Фаза #1 (SiC)	Фаза #2 (Поры)
1	10	1	222	8	8	8	12
2	15	1	327	8	8	8	12
3	20	1	445	8	8	8	12
4	25	1	603	8	8	8	12
6	10	4	351	8	8	8	12
7	10	8	511	8	8	8	12
8	10	12	685	8	8	8	12

Первые четыре структуры отличаются объемной долей первой фазы (SiC). Структуры 6–8 имеют одинаковую долю SiC-включений, но различные концентрации пор (от 4 до 16 %). Все величины представлены в условных масштабных единицах. 3D-графические изображения этих структур представлены на рис. 1.

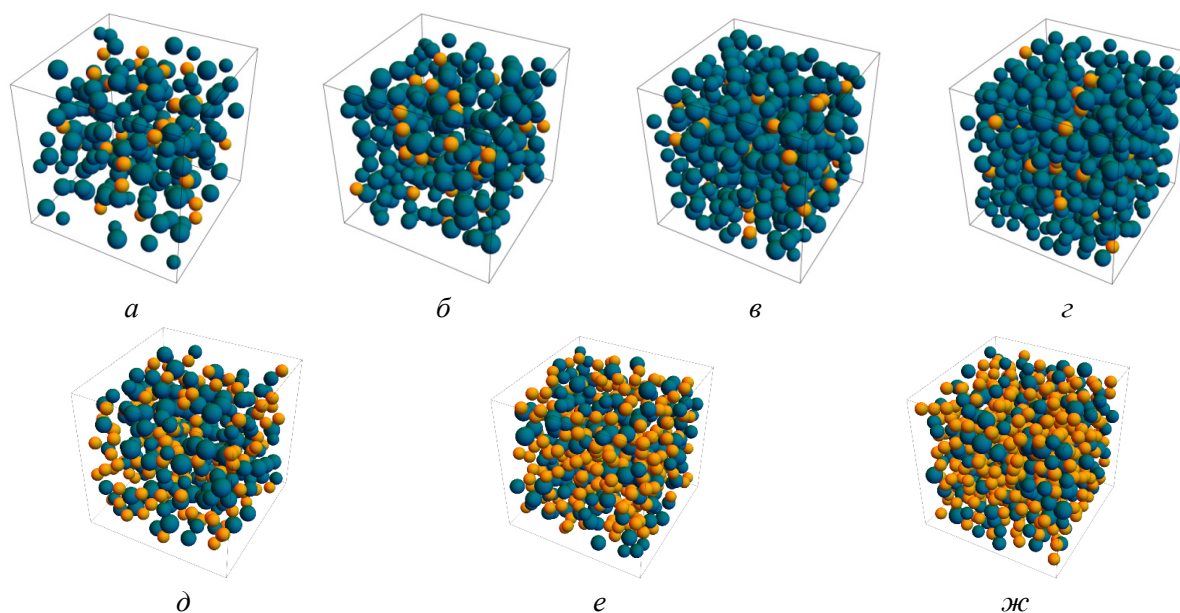


Рис. 1. Трехкомпонентные представительные объемы материалов с различными объемными долями фаз: *a* – 10–1 %; *б* – 15–1 %; *в* – 20–1 %; *г* – 25–1 %; *д* – 10–4 %; *е* – 10–8 %; *ж* – 10–12 %

Заданные механические свойства SiC-включений и Ti-матрицы представлены в табл. 2. Поры считались заполненными вакуумом.

Таблица 2

Механические свойства фаз для случая Ti + SiC-композитов

	Включения (SiC)	Матрица (Ti)
Упругий модуль	$E_C = 410$ ГПа	$E_M = 116$ ГПа
Коэффициент Пуассона	$\nu_C = 0,14$	$\nu_M = 0,32$

Нагружение представительного объема соответствовало простому сдвигу и было определено путем задания компонент макромасштабного тензора деформаций e_{ij} в граничных условиях (17):

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 10^{-6} & 0 \\ 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

В случае когда матрица и включения являются упругими, однородными и изотропными, тензор упругих модулей для каждой компоненты является постоянным и может быть представлен в следующем виде:

$$C_{ijkl}^{(z)} = \lambda^{(z)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^{(z)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (32)$$

где $\lambda^{(z)}$, $\mu^{(z)}$ – постоянные Ламе компоненты z ,

$$\lambda^{(z)} = \frac{E^{(z)} \nu^{(z)}}{(1 + \nu^{(z)})(1 - 2\nu^{(z)})}, \quad (33)$$

$$\mu^{(z)} = \frac{E^{(z)}}{2(1 + \nu^{(z)})}, \quad (34)$$

где $E^{(z)}$ – упругий модуль; $\nu^{(z)}$ – коэффициент Пуассона.

Коэффициенты A и B функции Грина (19) в случае упругих компонентов связаны с константами Ламе:

$$A = \frac{\langle \lambda \rangle + \langle 3\mu \rangle}{8\pi \langle \mu \rangle \langle \lambda + 2\mu \rangle}, \quad B = \frac{\langle \lambda \rangle + \langle \mu \rangle}{8\pi \langle \mu \rangle \langle \lambda + 2\mu \rangle}, \quad (35)$$

где $\langle \lambda \rangle = \sum_{z=1}^n \lambda^{(z)} p_{(z)}$, $\langle \mu \rangle = \sum_{z=1}^n \mu^{(z)} p_{(z)}$.

Методология, описанная в п. 1, позволяет вычислять дискретные значения моментных функций, которые не могут быть непосредственно использованы в аналитических выражениях для статистических характеристик. Переход от дискретных значений к непрерывным функциям осуществляется с помощью аппроксимации. Аппроксимация функций может быть проведена путем построения нелинейной аналитической модели со структурой, которая соответствует некоторому заданному выражению для последовательно вычисленных дискретных значений моментных функций. С помощью вычислительных экспериментов ранее было показано [25, 30–32], что степенное выражение с двумя периодическими функциями и тремя независимыми коэффициентами в наибольшей степени подходит для аппроксимации (разница составляет не более 1–1,5 %):

$$f_K^{(n)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \exp(-c_1 \Delta \vec{r}) \left[\cos(c_2 \Delta \vec{r}^a) + c_3 \sin(c_2 \Delta \vec{r}^2) \right]. \quad (36)$$

Здесь $\Delta \vec{r}$ – расстояние между радиусами-векторами; c_i – коэффициенты аппроксимации. Степень a в соотношении (36) равна 2 для функций второго порядка и 1 – для функций

более высоких порядков. Предполагается, что все компоненты являются изотропными, что позволяет принимать все расстояния между радиусами-векторами одинаковыми [24]:

$$\Delta \vec{r} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = \dots = |\vec{r}_{n-1} - \vec{r}_n|. \quad (37)$$

Для каждого частного случая были вычислены моменты первого и второго порядка полей напряжений и деформаций в компонентах. Подробности об используемых при этом численных методиках содержатся в работах [30, 31].

На рис. 2 отображены изменения статистических характеристик как для титановой матрицы, так и для включений в зависимости от объемной доли частиц карбида кремния.

Графики демонстрируют близкую к линейной зависимость для моментов первого порядка – средних значений напряжения и деформации, в то время как дисперсии полей во включениях значительно выше, чем в матрице. С увеличением объемной доли средние деформации как в матрице, так и во включениях непропорционально увеличиваются, что соответствует предсказываемому поведению. Дисперсии напряжений и деформаций в компонентах имеют тенденцию к сходимости с увеличением объемной доли армирующих включений.

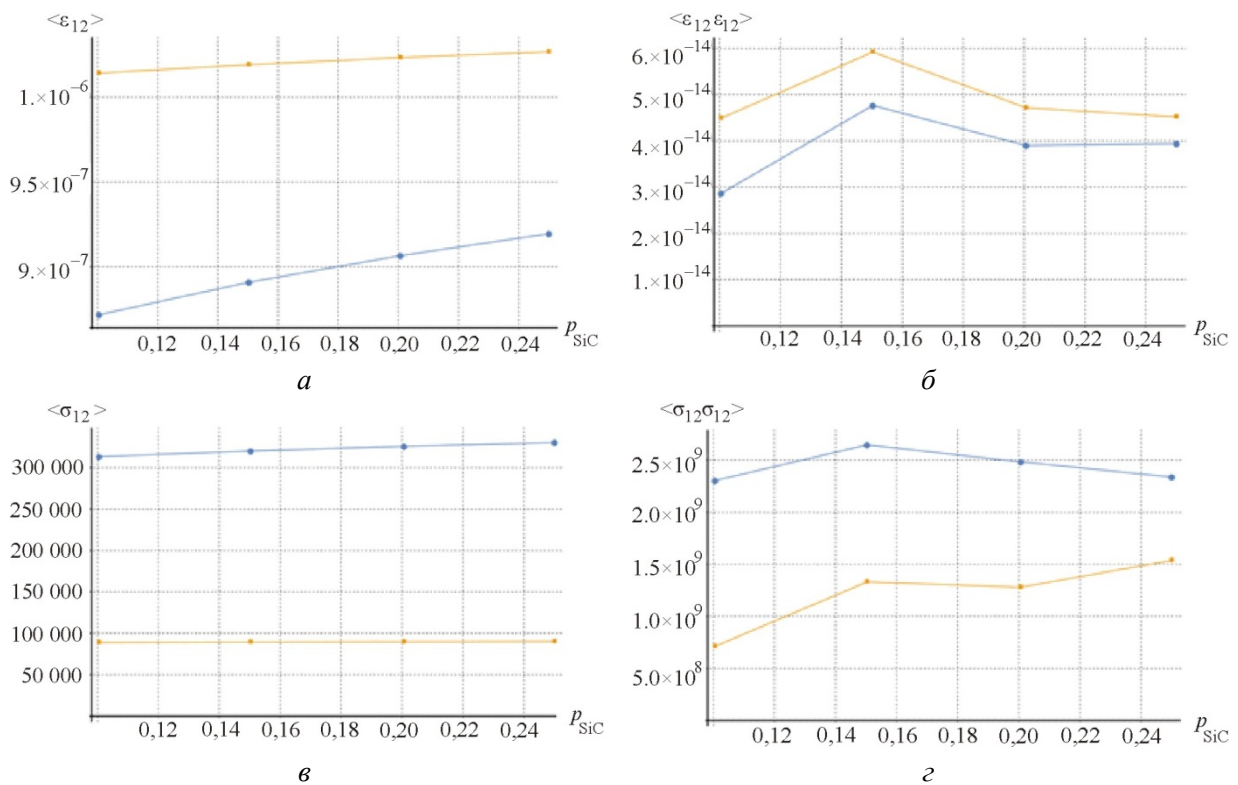


Рис. 2. Значения моментов первого (а, в) и второго (б, г) порядков для представительных объемов Ti+SiC-композитов в зависимости от объемной доли карбида кремния: —●— включения (SiC), —■— матрица (Ti)

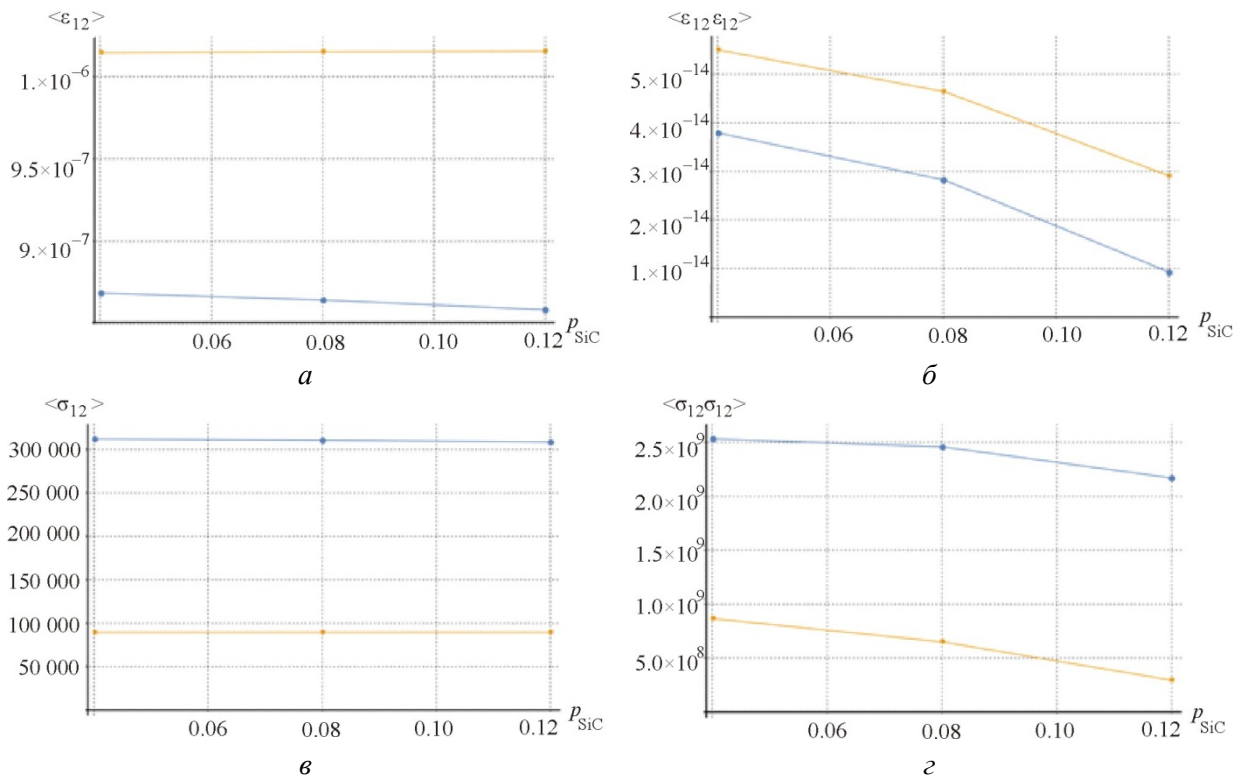


Рис. 3. Моменты первого (а, в) и второго (б, г) порядков для Ti+SiC-композиов в зависимости от объемной доли пор: —●— включения (SiC), —■— матрица (Ti)

Рис. 3 позволяет проследить влияние микроструктурных дефектов, которые были смоделированы, как поры. Как видно, увеличение пористости практически не оказывает влияния на матрицу. В то же время для статистик первого и второго порядка наблюдаются нелинейные зависимости от объемной доли пор, что свидетельствует о том, что не только количество дефектов, но и их распределение и позиционирование в представительном объеме оказывает влияние на напряжения и деформации в компонентах.

Заключение

Данная работа демонстрирует комплексную методику для получения статистических характеристик полей микроструктурных напряжений и деформаций в многокомпонентных материалах с помощью статистического подхода. Описание геометрии случайной микроструктуры проводилось с использованием методологии моментных функций. Аналитические выражения для статистик были получены с помощью стохастического решения краевой задачи в виде перемещений и учитывают внутреннюю информацию о морфологии посредством моментных функций различных порядков. Точность численных вычислений для статистик с использованием представленной модели может быть улучшена путем использования последовательных приближений решений уравнения (18) более высоких порядков.

Одним из возможных применений для самих статистик локальных микроструктурных полей является создание статистических моделей разрушения в компонентах, где они используются для обнаружения начала разрушения, а также для создания на их основе новых критериев прочности, которые могут адекватно отражать процессы деформации и разрушения.

Исследование возможных вариаций механических и геометрических свойств микроструктуры позволяют оценить их влияние на внутренние поля напряжений и деформаций. Эти результаты могут быть использованы при проектировании новых композитов с предопределенными свойствами и оптимизированной микроструктурой, которые могут быть пригодны для широкой области возможных применений.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-5172.2015.1).

Библиографический список

1. Liu K.C., Ghoshal A. Validity of random microstructures simulation in fiber-reinforced composite materials // *Composites. Part B: Engineering*. – 2014. – Vol. 57. – P. 56–70. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.08.006
2. Rasool A., Böhm H.J. Effects of particle shape on the macroscopic and microscopic linear behaviors of particle reinforced composites // *International Journal of Engineering Science*. – 2012. – Vol. 58. – P. 21–34. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.03.022
3. Mishnaevsky Jr.L., Derrien K., Baptiste D. Effect of microstructure of particle reinforced composites on the damage evolution: probabilistic and numerical analysis // *Composites Science and Technolog.* – 2004. – Vol. 64. – Iss. 12. – P. 1805–1818. DOI: 10.1016/j.compscitech.2004.01.013
4. Influence of waviness and curliness of fibres on mechanical properties of composites / A.Y. Matveeva, S.V. Pyrlin, M.M.D. Ramos, H.J. Böhm, F.W.J. van Hattum // *Computational Materials Science*. – 2014. – Vol. 87. – P. 1–11. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.01.061
5. Yu M., Zhu P., Ma Y. Effects of particle clustering on the tensile properties and failure mechanisms of hollow spheres filled syntactic foams: A numerical investigation by microstructure based modeling // *Materials & Design*. – 2013. – Vol. 47. – P. 80–89. DOI: 10.1016/j.matdes.2012.12.004
6. Effects of random particle dispersion and size on the indentation behavior of SiC particle reinforced metal matrix composites / R. Ekici, M. Kemal Apalak, M. Yıldırım, F. Nair // *Materials & Design*. – 2010. – Vol. 31. – Iss. 6. – P. 2818–2833. DOI: 10.1016/j.matdes.2010.01.001.
7. Ghossein E., Lévesque M. Homogenization models for predicting local field statistics in ellipsoidal particles reinforced composites: Comparisons and validations // *International Journal of Solids and Structures*. – 2015. – Vol. 58. – P. 91–105. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.12.021.
8. Buryachenko V. *Micromechanics of heterogeneous materials*. – New York: Springer, 2007. – 686 p.
9. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. – М.: Наука, 1997. – 288 с.
10. Ванин Г.А. *Микромеханика композиционных материалов*. – Киев: Наукова думка, 1985. – 302 с.
11. Волков С.Д., Ставров В.П. *Статистическая механика композитных материалов*. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 208 с.
12. Ломакин В.А. *Статистические задачи механики твердых деформируемых тел*. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
13. Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
14. Beran M. J. *Statistical continuum theories*. – New-York: Wiley. Intersci. Publ., 1968. – 493 p.
15. Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н. К теории упругих свойств поликристаллов // *Журн. эксперим. и теорет. физики*. – 1946. – № 16. – Вып. 11. – С. 967–980.
16. Болотин В.В., Москаленко В.К. К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композиционных материалов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1967. – № 3. – С. 106–111.

17. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. – М.: Наука, 1984. – 116 с.
18. Паньков А.А. Статистическая механика пьезокомпозитов. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 480 с.
19. Хорошун Л.П. Методы случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14. – Вып. 2. – С. 3–17.
20. Сараев Л.А., Глушцов В.С. Неупругие свойства многокомпонентных композитов со случайной структурой. – Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2004. – 163 с.
21. Tashkinov M.A., Vildeman V.E., Mikhailova N.V. Method of successive approximations in a stochastic boundary-value problem in the elasticity theory of structurally heterogeneous media // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2011. – Vol. 2. – No. 1. – P. 21–37.
22. Torquato S. Random heterogenous materials, microstructure and macroscopic properties. – Springer, 2001. – 701 p.
23. Lee H., Gillman A.S., Matouš K. Computing overall elastic constants of polydisperse particulate composites from microtomographic data // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2011. – Vol. 59. – Iss. 9. – P. 1838–1857. DOI: 10.1016/j.jmps.2011.05.010
24. Torquato S. Modeling of physical properties of composite materials // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – Vol. 37. – P. 411–422.
25. Tashkinov M.A. Methods of Stochastic Mechanics for Characterization of Deformation in Randomly Reinforced Composite Materials // Mechanics of Advanced Materials / Eds. V.V. Silberschmidt, V.P. Matveenko. – Springer, 2015. – P. 43–78. DOI: 10.1007/978-3-319-17118-0_3
26. Tashkinov M. Statistical characteristics of structural stochastic stress and strain fields in polydisperse heterogeneous solid media // Computational Materials Science. – 2014. – Vol. 94. – P. 44–50. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.01.050
27. Tashkinov M. Probabilistic description of stochastic processes of structural failure in advanced polydisperse composites // Proceedings of 11th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI) / Eds. Eugenio Oñate, Xavier Oliver and Antonio Huerta. – Barcelona: CIMNE, 2014.
28. Tashkinov M., Mikhailova N., Wildemann V. Characterisation of Micro-Scale Mechanical Behaviour of Composites Using Stochastic Boundary Value Problem Solutions // Proceedings of 20th International Conference on Composite Materials. – Copenhagen: Denmark, 2015. – P. 3315-3322, available at: <http://iccm20.org/fullpapers/file?f=6OwZadRnYW> (accessed 22 August 2015).
29. Hybrid composites – Metallic and ceramic reinforcements influence on mechanical and wear behavior / G. Miranda, M. Buciumeanu, S. Madeira, O. Carvalho, D. Soares, F.S. Silva // Composites. Part B: Engineering. – 2015. – Vol. 74. – P. 153–165. DOI: 10.1016/j.compositesb.2015.01.007
30. Ташкинов М. Статистические характеристики полей напряжений и деформаций в компонентах композитов со сферическими включениями при различных видах макрооднородного напряженно-деформированного состояния // Решение инженерных задач на высокопроизводительном вычислительном комплексе Пермского национального исследовательского политехнического университета: моногр. / под ред. В.Я. Модорского. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. – С. 172–192.
31. Ташкинов М.А. Применение системы WOLFRAM MATHEMATICA для вычисления многомерных интегралов в задачах стохастической механики // Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах (HPC 2014): материалы XIV Междунар. конф. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. – С. 432–439.
32. Ташкинов М.А., Михайлова Н.В. Многоточечные приближения высших порядков в краевой задаче упругости полидисперсных композитов со случайной структурой // Вестник Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4–4. – С. 1799–1800.

References

1. Liu K.C., Ghoshal A. Validity of random microstructures simulation in fiber-reinforced composite materials. *Composites Part B: Engineering*, 2014, vol. 57, pp. 56-70. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.08.006
2. Rasool A., Böhm H.J. Effects of particle shape on the macroscopic and microscopic linear behaviors of particle reinforced composites. *International Journal of Engineering Science*, 2012, vol. 58, pp. 21-34. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.03.022
3. Mishnaevsky Jr.L., Derrien K., Baptiste D. Effect of microstructure of particle reinforced composites on the damage evolution: probabilistic and numerical analysis. *Composites Science and Technology*, 2004, vol. 64, iss. 12, pp. 1805-1818. DOI: 10.1016/j.compscitech.2004.01.013
4. Matveeva A.Y., Pyrlin S.V., Ramos M.M.D., Böhm H.J., van Hattum F.W.J. Influence of waviness and curliness of fibres on mechanical properties of composites. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 87, pp. 1-11. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.01.061
5. Yu M., Zhu P., Ma Y. Effects of particle clustering on the tensile properties and failure mechanisms of hollow spheres filled syntactic foams: A numerical investigation by microstructure based modeling. *Materials & Design*, 2013, vol. 47, pp. 80-89. DOI: 10.1016/j.matdes.2012.12.004
6. Ekici R., Kemal Apalak M., Yıldırım M., Nair F. Effects of random particle dispersion and size on the indentation behavior of SiC particle reinforced metal matrix composites. *Materials & Design*, 2010, vol. 31, iss. 6, pp. 2818-2833. DOI: 10.1016/j.matdes.2010.01.001.
7. Ghossein E., Lévesque M. Homogenization models for predicting local field statistics in ellipsoidal particles reinforced composites: Comparisons and validations. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 58, pp. 91-105. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.12.021
8. Buryachenko V. *Micromechanics of heterogeneous materials*. New York: Springer, 2007. 686 p.
9. Vil'deman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniia i razrusheniia kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of nonlinear deformation and failure of composite materials]. Moscow: Nauka, 1997. 288 p.
10. Vanin G.A. *Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev: Naukova dumka, 1985. 302 p.
11. Volkov S.D., Stavrov V.P. *Statisticheskaiia mekhanika kompozitnykh materialov* [Statistical mechanics of composite materials]. Minsk: Belorusskii gosudarstvennyi universitet, 1978. 208 p.
12. Lomakin V.A. *Statisticheskie zadachi mekhaniki tverdykh deformiruemykh tel* [Statistical Problems of the Mechanics of Solid Deformable Bodies]. Moscow: Nauka, 1970. 139 p.
13. Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnyh sred* [Elasticity theory of microinhomogeneous media]. Moscow: Nauka, 1976. 400 p.
14. Beran M.J. *Statistical continuum theories*. New-York: Wiley. Intersci. Publ., 1968. 493 p.
15. Lifshitz I.M., Rosenzweig L.N. K teorii uprugikh svoistv polikristallov [On the theory of the elastic properties of polycrystals]. *Journal of Experiment and Theor. Physics*, 1946, vol. 16, pp. 967-980.
16. Bolotin V.V., Moskalenko V.K. K raschetu makroskopicheskikh postoiannykh sil'no izotropnykh kompozitsionnykh materialov [Calculation of macroscopic permanent strongly isotropic composites]. *Izvestiia Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1967, no. 3, pp. 106-111.
17. Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika deformirovaniia i razrusheniia strukturneodnorodnykh tel* [Mechanics of deformation and failure of structurally heterogeneous bodies]. Moscow: Nauka, 1984. 116 p.
18. Pan'kov A.A. *Statisticheskaiia mekhanika piezokompozitov* [Statistical mechanics of piezocomposites]. Permskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2009. 480 p.
19. Khoroshun L.P. *Metody sluchainykh funktsii v zadachakh o makroskopicheskikh svoistvakh mikroneodnorodnykh sred* [Methods of random functions in the problems of macroscopic properties of microinhomogeneous media]. *Prikladnaia mekhanika*, 1978, vol. 14, no. 2, pp. 3-17.

20. Saraev L.A., Glushchenkov V.S. Neuprugie svoistva mnogokomponentnykh kompozitov so sluchainoi strukturoi [Inelastic properties of multi-component composites with random structure]. Samarskii universitet, 2004. 163 p.

21. Tashkinov M.A., Vildeman V.E., Mikhailova N.V. Method of successive approximations in a stochastic boundary-value problem in the elasticity theory of structurally heterogeneous media. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 21-37.

22. Torquato S. Random heterogeneous materials, microstructure and macroscopic properties. Springer, 2001. 701 p.

23. Lee H., Gillman A.S., Matouš K. Computing overall elastic constants of polydisperse particulate composites from microtomographic data. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, vol. 59, no. 9, pp. 1838-1857. DOI: 10.1016/j.jmps.2011.05.010

24. Torquato S. Modeling of physical properties of composite materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, vol. 37, pp. 411-422.

25. Tashkinov M.A. Methods of Stochastic Mechanics for Characterization of Deformation in Randomly Reinforced Composite Materials. *Mechanics of Advanced Material*. Eds. V.V. Silberschmidt, V.P. Matveenko. Springer, 2015, pp. 43-78. DOI: 10.1007/978-3-319-17118-0_3

26. Tashkinov M. Statistical characteristics of structural stochastic stress and strain fields in polydisperse heterogeneous solid media. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 94, pp. 44-50. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.01.050

27. Tashkinov M. Probabilistic description of stochastic processes of structural failure in advanced polydisperse composites. *Proceedings of 11th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)*. Eds. Eugenio Oñate, Xavier Oliver and Antonio Huerta. Barcelona: CIMNE, 2014.

28. Tashkinov M., Mikhailova N., Wildemann V. Characterisation of Micro-Scale Mechanical Behaviour of Composites Using Stochastic Boundary Value Problem Solutions. *Proceedings of 20th International Conference on Composite Materials*. Copenhagen, Denmark, 2015, 19-24 July, pp. 3315-3322, available at: <http://iccm20.org/fullpapers/file?f=6OwZadRnYW> (accessed 22 August 2015).

29. Miranda G., Buciumeanu M., Madeira S., Carvalho O., Soares D., Silva F.S. Hybrid composites – Metallic and ceramic reinforcements influence on mechanical and wear behavior. *Composites. Part B: Engineering*, 2015, vol. 74, pp. 153-165. DOI: 10.1016/j.compositesb.2015.01.007

30. Tashkinov M. Statisticheskie kharakteristiki polei napriazhenii i deformatsii v komponentakh kompozitov so sfericheskimi vklucheniiami pri razlichnykh vidakh makroodnorodnogo napriazhenno-deformirovannogo sostoiianiia [Statistical characteristics of stress and strain fields in the components of the composite with spherical inclusions subjected to various macroscopic stress-strain state]. *Reshenie inzhenernykh zadach na vysokoproizvoditel'nom vychislitel'nom komplekse Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta*. Ed. by V.Ia. Modorskii. Permskii natsionalnyi issledovatel'skii politekhnicheskii universitet, 2014, pp. 172-192.

31. Tashkinov M.A. Primenenie sistemy WOLFRAM MATHEMATICA dlia vychisleniia mnogomernykh integralov v zadachakh stokhasticheskoi mekhaniki [Application of WOLFRAM MATHEMATICA for the calculation of multidimensional integrals in problems of stochastic mechanics]. *Materialy XIV Mezhdunarodnoi konferentsii "Vysokoproizvoditel'nye parallel'nye vychisleniia na klasternykh sistemakh (HPC 2014)"*. Permskii natsionalnyi issledovatel'skii politekhnicheskii universitet, 2014, pp. 432-439.

32. Tashkinov M.A., Mikhailova N.V. Mnogotochechnye priblizheniia vysshikh poriadkov v kraevoi zadache uprugosti polidispersnykh kompozitov so sluchainoi strukturoi [Multipoint higher-order approximation in the boundary value problem of elasticity polydisperse composites with random structure]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta imeni N.I. Lobachevskogo*, 2011, vol. 4, no. 4, p. 1799-1800.