



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.11

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ

Д.А. Шляхин

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 17 марта 2015 г.

Принята: 18 июня 2015 г.

Опубликована: 30 июня 2015 г.

Ключевые слова:

биморфная пластина,
многослойная конструкция,
задача обратного
пьезоэффекта,
теория электроупругости,
динамическая нагрузка,
конечные интегральные
преобразования

АННОТАЦИЯ

Рассматривается нестационарная осесимметричная задача для круглой жестко закрепленной биморфной пластины, состоящей из металлической подложки и двух пьезокерамических элементов. Механические колебания конструкции осуществляются за счет действия на ее торцевых поверхностях электрического потенциала, являющегося произвольной функцией радиальной координаты и времени. Новое замкнутое решение построено в рамках теории электроупругости в трехмерной постановке путем последовательного использования метода неполного разделения переменных в виде конечных интегральных преобразований. Последовательно применяются преобразование Ханкеля с конечными пределами по аксиальной координате и обобщенное конечное преобразование (КИП) по радиальной переменной. При этом на каждом этапе решения проводится процедура стандартизации, которая позволяет реализовать соответствующий алгоритм преобразования.

Полученные расчетные соотношения относительно компонент вектора перемещений и потенциала электрического поля позволяют исследовать характер изменения напряженно-деформированного состояния биморфной пластины. Построенное решение дает возможность провести качественный и количественный анализ связанности электромеханических полей напряжений в составных многослойных электроупругих конструкциях, что позволяет описать работу и подобрать геометрические характеристики типовых элементов пьезокерамических преобразователей резонансного и нерезонансного классов.

На основании анализа результатов расчета сделаны выводы о необходимости использования в жестко закрепленных биморфных системах для возбуждения изгибных колебаний разрезных кольцевых электродов, расположенных на лицевых поверхностях пьезокерамических пластин, применении в прикладных теориях для тонких пластин системы уравнений Тимошенко, учитывающей деформацию поперечного сдвига. Кроме того, получены законы изменения потенциала, аксиальной компоненты вектора напряженности и индукции электрического поля по высоте тонкой пьезокерамической пластины.

© ПНИПУ

© Шляхин Дмитрий Аверкиевич – доктор технических наук, доцент, e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Dmitry A. Shlyakhin – Doctor of Technical Sciences, Assistant Professor, e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

DYNAMIC AXISYMMETRIC PROBLEM OF ELECTROELASTICITY FOR A RIGIDLY FIXED BIMORPH PLATE

D.A. Shlyakhin

Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 17 March 2015
Accepted: 18 June 2015
Published: 30 June 2015

Keywords:

bimorph plate,
task inverse piezoelectric effect,
theory of electroelasticity,
dynamic load,
finite integral transforms

ABSTRACT

A nonstationary axisymmetric problem for a circular rigidly fixed bimorph plate consisting of a metal substrate and two piezoelectric elements is studied in this paper. Mechanical vibrations of the structure are made by the action of its end surfaces of electric potential, which is an arbitrary function of the radial coordinate and time. New closed solution is constructed in the framework of electrostatics in three-dimensional statement by the consistent use of the method of incomplete separation of variables in the form of integral transformations. Consistently Hankel transformation with finite limits on the axial coordinate and generalized finite transformation (FIT) on the radial variable are applied. At each stage of the solution there is a procedure of standardization which allows the appropriate conversion algorithm.

The calculated ratio for the components of the displacement vector and the electric field potential allow us to study the variation of the stress-strain state of the bimorph plate. The constructed solution provides an opportunity to make a qualitative and quantitative analysis of connection of electromechanical stress fields in composite laminated electroelastic structures that allow describing the work and finding the geometric characteristics of the typical elements of piezoceramic transducers of resonant and nonresonant classes.

Based on the analysis results, it becomes obvious that there is the need for rigidly fixed bimorph systems for excitation of flexural vibrations of the split ring electrodes located on the faces of the piezoceramic plates and for the application of Timoshenko system of equations in applied theory for thin plates taking into account shear deformations. In addition, it became possible to obtain potential change laws, axial-vector components in the tensions and induction of electric field along the thin piezoceramic plate.

© PNRPU

Введение

В различных технических устройствах, использующих принцип прямого и обратного пьезоэффекта, в качестве преобразователя энергии используются тонкие биморфные пластины [1–3]. Наиболее эффективной конструкцией, обладающей высокой механической прочностью и чувствительностью, является круглая металлическая подложка с наклеенными с двух сторон пьезокерамическими пластинами. Для исследования их напряженно-деформированного состояния, как правило, используется прикладная теория для тонких пластин, в которой гипотезы для тонкостенных упругих элементов дополняются аналогичными допущениями о характере изменения электрического поля [4–12]. Данный подход позволяет с помощью простых расчетных соотношений описать работу конструкции и подобрать ее геометрические размеры, позволяющие повысить эффективность трансформации энергии.

Однако вопрос о характере изменения физических полей в пьезокерамических пластинах, особенно при исследовании систем с разрезными электродами, до настоящего времени изучен недостаточно полно. Поэтому для решения данной проблемы исследуется биморфная пластина в рамках теории электроупругости в трехмерной постановке. Новое замкнутое решение построено методом конечных интегральных преобразований.

1. Постановка задачи

Пусть круглая жестко закрепленная пластина, занимающая в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$, состоит из металлической подложки толщиной h_2^* и двух наклеенных на нее пьезокерамических элементов высотой h_1^* , выполненных из материала гексагональной системы класса бттм. Изгибные осесимметричные колебания возбуждаются за счет подведения к лицевым электродам пьезопластин с противоположным направлением вектора аксиальной поляризации, электрического напряжения $V^*(r_*, t_*)$ и заземления подложки (рис.1).

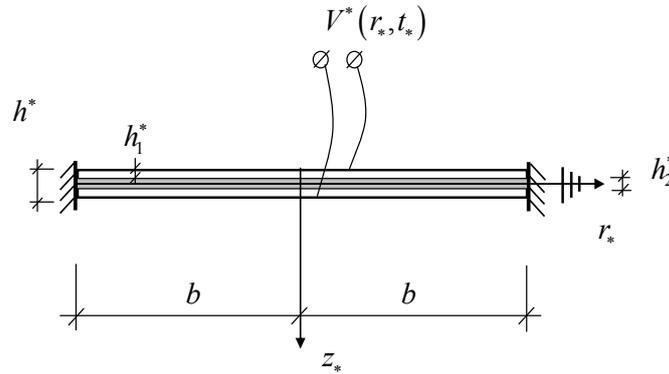


Рис. 1. Биморфная пластина

Дифференциальные уравнения движения и электростатики, а также краевые условия в цилиндрической системе координат и безразмерной форме имеют следующий вид [13,14]:

$$\nabla_1^2 U + \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \nabla_2^2 W + \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial}{\partial z} \nabla U + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \frac{\partial}{\partial z} \nabla U + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{C_{11}^{(1)} \epsilon_{11}}{e_{33}^2} \nabla_2^2 \phi - \frac{C_{11}^{(1)} \epsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0;$$

$$r = 0, 1 \quad W(0, z, t) < \infty, \quad U(0, z, t) < \infty, \quad \phi(0, z, t) < \infty, \quad (1.2)$$

$$D_{r|r=1} = -\frac{C_{11}^{(1)} \epsilon_{11}}{e_{33}^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0, \quad U(1, z, t) = 0, \quad W(1, z, t) = 0;$$

$$z = 0, h \quad \sigma_{zz} = \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (1.3)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \phi(r, z, t) = \pm V(r, t) / 2;$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (1.4)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right),$$

$$U(z+0) = U(z-0), \quad W(z+0) = W(z-0) \quad \phi = 0;$$

$$t = 0 \quad U(r, z, 0) = U_0(r, z), \quad W(r, z, 0) = W_0(r, z), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial U(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_0(r, z), \quad \frac{\partial W(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r, z);$$

где $\{U, W, r, z, h, h_1, h_2\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, h^*, h_1^*, h_2^*\} / b$; $\phi(r, z, t) = \phi^*(r, z, t) \cdot e_{33} / (bC_{11}^{(1)})$, $U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$ – радиальная и аксиальная компоненты вектора перемещений; $\sigma_{zz}(r_*, z_*, t_*)$, $\sigma_{rz}(r_*, z_*, t_*)$ – нормальные и касательные механические напряжения; $\phi^*(r_*, z_*, t_*)$ – потенциал электрического поля; e_{mk} , ε_{11} , ε_{33} – пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости электроупругого материала ($m, k = \overline{1, 5}$); $\rho^{(s)}$, $C_{mk}^{(s)}$ – объемная плотность и модули упругости пьезокерамического ($s = 1$) и упругого ($s = 2$) материалов; U_0, \dot{U}_0 , W_0, \dot{W}_0 – известные в начальный момент времени перемещения, скорости перемещений;

$$t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{11}^{(2)} / \rho^{(2)}}, \quad \Phi^{(1)} = \frac{\rho^{(1)} C_{11}^{(2)}}{\rho^{(2)} C_{11}^{(1)}}, \quad \Phi^{(2)} = 1, \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2},$$

$$\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

Соотношения (1.1)–(1.5) представляют математическую формулировку рассматриваемой краевой задачи электроупругости.

2. Построение общего решения

Решение осуществляется методом интегральных преобразований с использованием последовательно преобразования Ханкеля [15] с конечными пределами по переменной r и обобщенного конечного преобразования (КИП) [16,17] по радиальной координате z . Первоначально соотношения (1.1)–(1.5) приводятся к стандартной форме, позволяющей провести данную процедуру разделения переменных. Для этого последнее равенство (1.2) заменяется условием отсутствия касательных напряжений:

$$\sigma_{rz|r=1} = \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad (2.1)$$

и на основании теоремы о суперпозиции решений вводится новая функция $w(r, z, t)$, связанная с $W(r, z, t)$ соотношением

$$W(r, z, t) = W_1(t) + w(r, z, t), \quad (2.2)$$

где $W_1(t)$ – дважды дифференцируемая функция, определяемая в процессе решения задачи из условия отсутствия вертикальных перемещений срединной поверхности пластины при $r = 1$ *.

В результате подстановки (2.2) в (1.1)–(1.5), (2.1) получаем новую краевую задачу относительно функций U, w, ϕ . При этом правые части второго дифференциального уравнения (1.1) и начальных условий (1.5) w_0, \dot{w}_0 принимают следующий вид:

$$R_2 = \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}, \quad w_0 = W_0(r, z) - W_{1|t=0}, \quad \dot{w}_0 = \dot{W}_0(r, z) - \dot{W}_{1|t=0},$$

а условия (1.2) с учетом (2.1) при $r = 1$ определяются равенствами**

$$U(1, z, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad (2.3)$$

К краевой задаче относительно U, w, ϕ применяем преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной r , используя следующие трансформанты:

$$u_H(j_n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad (2.4)$$

$$\{w_H(j_n, z, t), \phi_H(j_n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), \phi(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr$$

и формулы обращения

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (2.5)$$

$$w(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r), \quad \phi(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

где j_n – положительные нули функции $J_1(j_n)$, расположенные в порядке их возрастания ($n = \overline{0, \infty}$; $j_0 = 0$).

* Многочисленные исследования тонких систем [18] показывают, что степень их сжатия по высоте незначительна, поэтому условие отсутствия перемещений цилиндрической поверхности пластины можно заменить более простым, принятым в работе.

** В отличие от классической постановки задач теории упругости и электроупругости [19] в настоящем исследовании «жесткое» закрепление характеризуется также отсутствием угла поворота.

В пространстве изображений получаем новую краевую задачу:

$$-j_n^2 u_H + \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} - \frac{(e_{31} - e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} = 0, \quad (2.6)$$

$$-\frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} j_n^2 w_H + \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 \varphi_H + \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = R_{2H},$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 w_H + \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + \frac{C_{11}^{(1)} \epsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 \varphi_H - \frac{C_{11}^{(1)} \epsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} = 0;$$

$$z = 0, h \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n u_H + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial w_H}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n \varphi_H = 0, \quad \varphi_H = \pm V_H;$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n u_H + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial w_H}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} = \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} j_n u_H + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial w_H}{\partial z}, \quad (2.8)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n \varphi_H = \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right),$$

$$t = 0 \quad \begin{aligned} u_H(z+0) &= u_H(z-0), \quad w_H(z+0) = w_H(z-0), \quad \varphi_H = 0; \\ u_H(n, z, 0) &= u_{0H}(n, z), \quad \dot{u}_H(n, z, 0) = \dot{u}_{0H}(n, z), \\ w_H(n, z, 0) &= w_{0H}(n, z), \quad \dot{w}_H(n, z, 0) = \dot{w}_{0H}(n, z), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\{u_{0H}, \dot{u}_{0H}\} = \int_0^1 \{U_0, \dot{U}_0\} r J_1(j_n r) dr$, $\{R_{2H}, V_H, w_{0H}, \dot{w}_{0H}\} = \int_0^1 \{\tilde{R}_2, V/2, w_0, \dot{w}_0\} r J_0(j_n r) dr$.

На втором этапе решения процедура стандартизации связана с приведением граничных условий (2.7),(2.8) к однородным при использовании следующих разложений:

$$w_H(n, z, t) = S_1(n, z, t) + W_H(n, z, t), \quad (2.10)$$

$$\varphi_H(n, z, t) = S_2(n, z, t) + \chi_H(n, z, t),$$

где $[S_1, S_2] = \{[f_1(z), f_3(z)][1 - H(z - h_1)] + [f_2(z), f_4(z)]H(z - h_1 - h_2)\} V_H$; $H(\dots)$ – единичная функция Хэвисайда [20]; $f_1(z) \dots f_4(z)$ – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие следующим условиям*:

$$f_1(0) = -f_2(h) = -\frac{C_{11}^{(1)} e_{15}}{C_{55}^{(1)} e_{33}}, \quad f_1'(0) = -f_2'(h) = -\frac{C_{11}^{(1)} h}{C_{33}^{(1)} h_1 (h_1 + h_2)}, \quad (2.11)$$

* Последнее условие учитывает противоположное направление вектора аксиальной поляризации пьезопластин.

$$f_1(h_1) = f_2(h_1 + h_2) = 0, \quad f_1'(h_1) = -f_2'(h_1 + h_2) = -\frac{C_{11}^{(1)}}{C_{33}^{(1)}} \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)},$$

$$f_3(0) = -f_4(h) = 1, \quad f_3(h_1) = f_4(h_1 + h_2) = 0, \quad f_3(z) = -f_4(z).$$

В результате подстановки (2.10) в (2.6)–(2.9) получаем новую краевую задачу относительно функций u_H, W_H, χ_H . При этом правые части дифференциальных уравнений (2.6) и начальные условия w_{0H}, \dot{w}_{0H} (2.9) следует заменить на $F_{1H} - F_{3H}, W_{0H}, \dot{W}_{0H}$:

$$F_{1H} = \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{\partial S_1}{\partial z} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial S_2}{\partial z},$$

$$F_{2H} = R_{2H} + \frac{C_{55}}{C_{11}} j_n^2 S_1 - \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} + \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 S_2 - \frac{\partial^2 S_2}{\partial z^2} + \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2},$$

$$F_{3H} = \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 S_1 - \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} - \frac{C_{11} \epsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 S_2 + \frac{C_{11} \epsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial z^2},$$

$$W_{0H} = w_{0H} - S_{|r=0}, \quad \dot{W}_{0H} = \dot{w}_{0H} - \dot{S}_{|r=0}.$$

Начально-краевую задачу (2.6)–(2.9) относительно функций u_H, W_H, χ_H решаем, используя структурный алгоритм обобщенного метода конечных интегральных преобразований (КИП) [16]. Введем на сегменте $[0, h]$ вырожденное КИП с неизвестными компонентами $K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z)$ вектора-функции ядра преобразования:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h (u_H K_{1in} + W_H K_{2in}) dz, \tag{2.12}$$

$$\{u_H, W_H, \chi_H\} = \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} \{K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}\} \|K_{in}\|^{-2}, \tag{2.13}$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h (K_{1in}^2 + K_{2in}^2 + K_{3in}^2) dz,$$

где λ_{in} – положительные параметры, образующие счетное множество $(i = \overline{1, \infty})$.

Круговые частоты осесимметричных колебаний цилиндра ω_{in} связаны с λ_{in} зависимостью

$$\omega_{in} = \lambda_{in} b^{-1} \sqrt{C_{11}^{(2)} / \rho^{(2)}}. \tag{2.14}$$

Подвергаем систему уравнений (2.6) и начальные условия (2.9) относительно функций u_H, W_H, χ_H преобразованиям КИП в соответствии со структурным алгоритмом [16], представляя кусочно-гладкие функции $u_H(n, z, t), W_H(n, z, t), \chi_H(n, z, t)$ в виде

$$\begin{aligned} \{u_H, W_H, \chi_H\} &= \{u_H^{(1)}, W_H^{(1)}, \chi_H^{(1)}\} [1 - H(z - h_1) + H(z - h_1 - h_2)] + \\ &+ \{u_H^{(2)}, W_H^{(2)}\} [H(z - h_1) - H(z - h_1 - h_2)]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В результате получаем счетное множество задач Коши для трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$, решение которых имеет вид

$$G(\lambda_{in}, n, t) = G_0 \cos \lambda_{in} t + \dot{G}_0 \lambda_{in}^{-1} \sin \lambda_{in} t - \lambda_{in}^{-1} \int_0^t F(\lambda_{in}, n, \tau) \sin \lambda_{in} (t - \tau) d\tau, \quad (2.16)$$

и однородную краевую задачу с учетом граничных условий (2.7), (2.8) относительно компонент ядра преобразований $K_{1in}^{(s)}, K_{2in}^{(s)}, K_{3in}^{(s)}$:

$$-j_n^2 K_{1in}^{(s)} + \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 K_{1in}^{(s)}}{dz^2} - \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{dK_{2in}^{(s)}}{dz} - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dK_{3in}^{(s)}}{dz} + \Phi^{(s)} \lambda_{in}^2 K_{1in}^{(s)} = 0, \quad (2.17)$$

$$-\frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} j_n^2 K_{2in}^{(s)} + \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 K_{2in}^{(s)}}{dz^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{dK_{1in}^{(s)}}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 K_{3in}^{(s)} + \frac{d^2 K_{3in}^{(s)}}{dz^2} + \Phi^{(s)} \lambda_{in}^2 K_{2in}^{(s)} = 0,$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dK_{1in}^{(1)}}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 K_{2in}^{(1)} + \frac{d^2 K_{2in}^{(1)}}{dz^2} + \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 K_{3in}^{(1)} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{d^2 K_{3in}^{(1)}}{dz^2} = 0;$$

$$z = 0, h \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n K_{1in}^{(1)} + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{dK_{2in}^{(1)}}{dz} + \frac{dK_{3in}^{(1)}}{dz} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{dK_{1in}^{(1)}}{dz} - j_n K_{2in}^{(1)} = 0, \quad K_{3in}^{(1)} = 0;$$

$$z = h_1, \quad h_1 + h_2 \quad K_{1in}^{(1)} = K_{1in}^{(2)}, \quad K_{2in}^{(1)} = K_{2in}^{(2)}, \quad K_{3in}^{(1)} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n K_{1in}^{(1)} + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{dK_{2in}^{(1)}}{dz} + \frac{dK_{3in}^{(1)}}{dz} = \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} j_n K_{1in}^{(2)} + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{dK_{2in}^{(2)}}{dz},$$

$$\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{dK_{1in}^{(1)}}{dz} - j_n K_{2in}^{(1)} \right) = \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{dK_{1in}^{(2)}}{dz} - j_n K_{2in}^{(2)} \right).$$

В соотношениях (2.16)–(2.19) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \{K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}\} &= \{K_{1in}^{(1)}, K_{2in}^{(1)}, K_{3in}^{(1)}\} [1 - H(z - h_1) + H(z - h_1 - h_2)] + \\ &+ \{K_{1in}^{(2)}, K_{2in}^{(2)}\} [H(z - h_1) - H(z - h_1 - h_2)], \end{aligned}$$

$$F(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h (\Phi^{-1} F_{1H} K_{1in} + \Phi^{-1} F_{2H} K_{2in} + F_{3H} K_{3in}) dz,$$

$$G_0(\lambda_{in}, n) = \int_0^h (u_{0H} K_{1in} + W_{0H} K_{2in}) dz, \quad \dot{G}_0(\lambda_{in}, n) = \int_0^h (\dot{u}_{0H} K_{1in} + \dot{W}_{0H} K_{2in}) dz.$$

При исследовании системы уравнений (2.17) необходимо отдельно рассмотреть задачи теории электроупругости ($s = 1$) и упругости ($s = 2$).

В работах автора [21,22] приведены общие решения данных задач, в которых получены выражения для функций $K_1^{(s)}(\lambda_{in}, z), K_2^{(s)}(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z)$. Их подстановка в граничные условия (2.18), (2.19) формирует однородную систему уравнений относительно постоянных D_{1in}, \dots, D_{16in} . Разыскивая ее нетривиальные решения, получаем трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений λ_{in} , а также выражения постоянных интегрирования.

Функции $f_1(z), \dots, f_4(z)$, входящие в разложения (2.10), с учетом условий (2.11) принимаются в виде

$$f_1(z) = N_1 \left| \left(z - \frac{h}{2} \right) \right|^3 + N_2 \left| \left(z - \frac{h}{2} \right) \right|^2 + N_3 \left| \left(z - \frac{h}{2} \right) \right| + N_4, \quad f_2(z) = -f_1(z),$$

$$f_3(z) = [h_1(h_1 + h_2)]^{-1} \left[\left| \left(z - \frac{h}{2} \right) \right|^2 - \frac{h_2^2}{4} \right], \quad f_4(z) = -f_3(z),$$

$$N_1 = \frac{2}{h_1^3} \left(\frac{C_{11}^{(1)}}{C_{55}^{(1)}} e_{15} - \frac{C_{11}^{(1)}}{C_{33}^{(1)}} \right), \quad N_2 = \frac{C_{11}^{(1)}(h_1 + h_2)}{C_{33}^{(1)} h_1^3} \left[\frac{2h_1^2 + 3hh_2}{(h_1 + h_2)^2} - 3 \frac{C_{33}^{(1)} e_{15}}{C_{55}^{(1)} e_{33}} \right],$$

$$N_3 = \frac{3h_2h}{4} N_1, \quad N_4 = \frac{C_{11}^{(1)} h_2^2}{C_{33}^{(1)} 4h_1^3} \left[\frac{h^2}{h_1 + h_2} - \frac{C_{33}^{(1)} e_{15}}{C_{55}^{(1)} e_{33}} (h + h_1) \right].$$

Окончательные выражения функций $U(r, z, t), W(r, z, t), \phi(r, z, t)$ получим, применяя к трансформанте (2.16) последовательно формулы обращения КИП (2.13) и метод конечных преобразований Ханкеля (2.5). В результате с учетом (2.2), (2.10) имеем

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_0(j_n)^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{1in} \|K_{in}\|^{-2} J_1(j_n r), \quad (2.20)$$

$$W(r, z, t) = W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-2} \left[S_1 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{2in} \|K_{in}\|^{-2} \right] J_0(j_n r),$$

$$\phi(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-2} \left[S_2 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{3in} \|K_{in}\|^{-2} \right] J_0(j_n r).$$

Функция $W_1(t)$ определяется с помощью второго равенства (2.20) при удовлетворении условия об отсутствии вертикальных перемещений срединной поверхности пластины при $r = 1$:

$$W_1(t) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2^{(2)}\left(\lambda_{in}, \frac{h}{2}\right) \|K_{in}\|^{-2}. \quad (2.21)$$

Полученные расчетные соотношения (2.20) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.1) и краевым условиям (1.2)–(1.5) (последнее граничное условие (1.2) только для срединной плоскости), т.е. представляют замкнутое решение рассматриваемой краевой задачи электроупругости.

3. Численные результаты. Выводы

В качестве примера рассматривается биморфная пластина, имеющая следующие физические и геометрические характеристики аксиально поляризованных пьезокерамических пластин состава ЦТС–19 [23] и металлической стальной подложки:

$$\begin{aligned} \{C_{11}^{(1)}, C_{33}^{(1)}, C_{12}^{(1)}, C_{13}^{(1)}, C_{55}^{(1)}\} &= \{10.9, 9.1, 6.1, 5.4, 2.4\} \times 10^{10} \text{ Н/м}^2, \{e_{31}, e_{33}, e_{15}\} = \\ &= \{-4.9, 14.9, 10.6\} \text{ Кл/м}^2, \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{7.73, 7.26\} \times 10^{-9} \text{ Ф/м}, \\ \rho^{(1)} &= 7730 \text{ кг/м}^3, \{C_{11}^{(2)}, C_{33}^{(2)}, C_{12}^{(2)}, C_{13}^{(2)}, C_{55}^{(2)}\} = \{21, 21, 2, 2, 9.3\} \times 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ \rho^{(2)} &= 7800 \text{ кг/м}^3, h_2^* = 2h_1^* = 10^{-3} \text{ м}, b = 33 \times 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

Анализ полученных расчетных соотношений подтверждает экспериментальные данные, а именно: при жестком закреплении биморфной конструкции изгибные колебания возбуждаются только при наличии системы разрезных кольцевых электродов, расположенных на лицевых поверхностях пьезокерамических пластин. Причем в этом случае электрический потенциал подводится к соседним электродам в противофазе.

Рассмотрим работу электроупругой системы на первой резонансной частоте. В этом случае для наиболее эффективного преобразования внешнего электрического воздействия необходимо использовать два электрода (количество и размеры электродов определяют нулевые значения функции $J_1(j_n)$) с радиусом их раздела $a = 20,7 \times 10^{-3}$ м ($r_1 = a/b = 0,628$). Представляем электрическую нагрузку $V(r, t)$ в виде

$$V(r, t) = V_0 [H(r_1 - r) - H(r - r_1)] \sin \theta t,$$

где V_0, θ – амплитуда и частота внешнего воздействия в безразмерной форме.

На рис. 2–5 изображены графики, характеризующие изменение по пространственным координатам и времени составляющих механических и электрических полей напряжений ($\theta = 0,8\lambda_{11}$).

На основании анализа результатов расчета можно сделать следующие выводы.

1. При высокочастотном внешнем воздействии наблюдается сложная зависимость изменения напряженно-деформированного состояния системы во времени (рис. 2). Поэтому обычно применяемое при исследовании подобных задач [2–4] допущение об установившемся режиме вынужденных колебаний можно использовать только при решении задач на собственные значения.

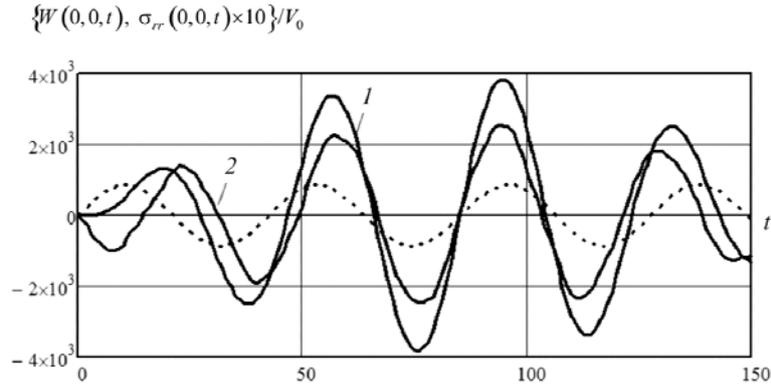


Рис. 2. Изменение $W(0,0,t) - 1$; $\sigma_{rr}(0,0,t) - 2$ по времени (пунктирная линия показывает характер изменения по времени электрической нагрузки)

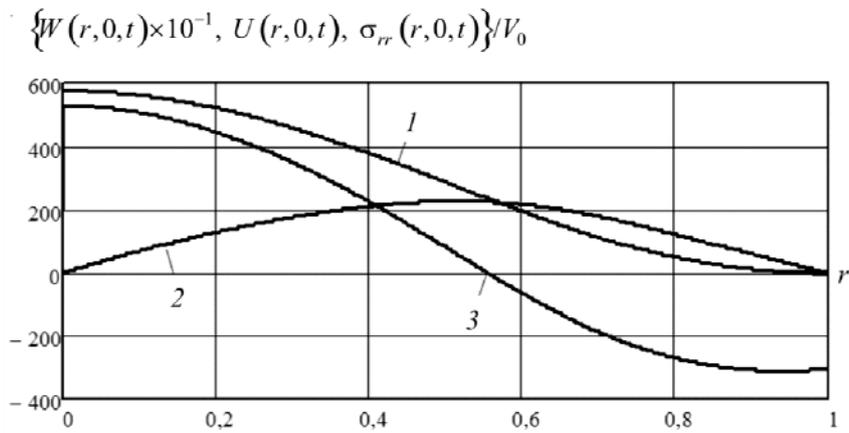


Рис. 3. Изменение амплитудных значений $W(r,0,t) - 1$; $U(r,0,t) - 2$; $\sigma_{rr}(r,0,t) - 3$ по радиальной координате

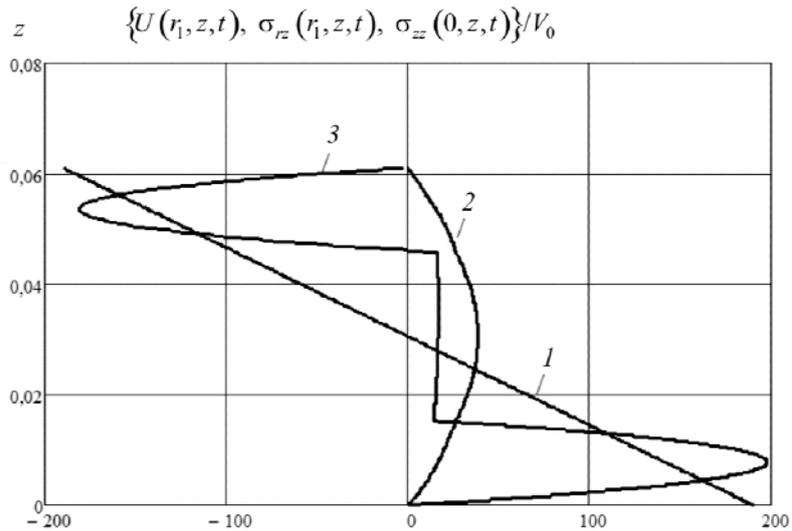


Рис. 4. Изменение амплитудных значений $U(r_1,z,t) - 1$; $\sigma_{rz}(r_1,z,t) - 2$; $\sigma_{zz}(0,z,t) - 3$ по аксиальной координате

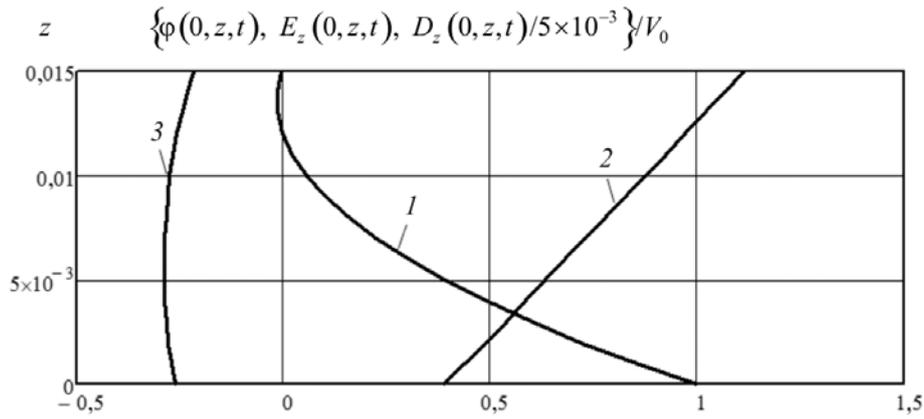


Рис. 5. Изменение амплитудных значений $\phi(0, z, t) - 1$; $E_z(0, z, t) - 2$; $D_z(0, z, t) - 3$ по аксиальной координате

2. Использование двух разрезных круговых электродов и отсутствие угла поворота в жестком закреплении (см. рис. 3, кривая 1) приводят к образованию в пьезокерамических пластинах в радиальной плоскости зон растяжения и сжатия (см. рис. 3, кривая 3). Кроме того, максимальное значение радиальной компоненты вектора перемещений $U(r, 0, t)$ наблюдается в области разреза электродов (см. рис. 3, кривая 2).

3. График « $U(r_1, 0, t) \div z$ » (см. рис. 4, кривая 1) показывает, что гипотезу плоских сечений, применяемую в прикладной теории для тонких систем, можно использовать также при исследовании составных тонких пластин, имеющих различные физические характеристики по высоте сечения.

4. В зоне раздела электродов (см. рис. 4, кривая 2, $r = r_1, z = h/2$) наблюдаются максимальные значения касательных напряжений σ_{rz} . Поэтому для расчета тонких электроупругих систем с разрезными электродами с помощью прикладных теорий необходимо использовать систему уравнений Тимошенко, учитывающую деформации поперечного сдвига.

5. При расчете тонких пластин используется допущение об отсутствии давления слоев друг на друга. Однако в пьезокерамических тонких пластинах нормальные напряжения σ_{zz} существенны (см. рис. 4, кривая 3).

6. Потенциал электрического поля $\phi(r, z, t)$ по высоте пьезокерамической пластины изменяется по параболической зависимости (см. рис. 5, кривая 1), соответственно, график, описывающий изменение аксиальной компоненты вектора напряженности $E_z(r, z, t)$, представляет собой прямую линию (см. рис. 5, кривая 2).

7. Радиальная компонента вектора напряженности электрического поля E_r практически равна нулю, за исключением точек раздела двух электродов. Максимальное значение данной функции наблюдается на лицевых поверхностях пьезокерамических пластин $E_r(a, t_*)|_{z=0, h^*} = \pm V^*(t_*)/b$. Однако даже незначительная величина электрического поля в радиальной плоскости вносит существенный вклад в график изменения аксиальной компоненты индукции электрического поля $D_z(r, z, t)$ по высоте пьезокерамической пласти-

ны (в прикладных теориях функция D_z принимается постоянной по высоте сечения [5, 6, 8, 12]). В данной задаче разница численных значений D_z по координате z (см. рис. 5, кривая 3) достигает 30 %.

В заключение следует отметить, что данный подход можно использовать также при расчете многослойных упругих и электроупругих пологих сферических оболочек.

Библиографический список

1. Подводные электроакустические преобразователи: справочник / под ред. В.В. Богородского. – Л.: Судостроение, 1983. – 248 с.
2. Sharapov V. Piezoceramic sensors. – Springer Verlag, 2010. – 498 p.
3. Датчики / под ред. В.М. Шарапова. – М.: Техносфера, 2012. – 616 с.
4. Adelman N.T., Stavsky Y. Flexural-extensional behavior piezoelectric circular plates // J. Acoust. Soc. Amer. – 1980. – Vol. 67. – No. 3. – P. 819–822.
5. Чувствительность биморфного преобразователя типа металл-пьезокерамика/ Ю.Б. Евсейчик [и др.] // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 12. – С. 67–75.
6. Ватульян А.О., Рынкова А.А. Изгибные колебания пьезоэлектрического биморфа с внутренним разрезным электродом // ПМТФ. – 2001. – Т. 42, № 1. – С.184–189.
7. Karlash V.L. Resonance Electro-Mechanic Vibration of Piezo-Ceramic Plates // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41. – No. 7. – P. 535–541.
8. Ватульян А.О., Рынкова А.А. Об одной модели изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с разрезными электродами и ее приложениях // Изв. РАН. МТТ. – 2007. – № 4. – С. 114–122.
9. Янчевский И.В. Нестационарные колебания круглого асимметричного биморфа при электрическом нагружении // Вісник Донецького нац. ун-та. – 2010. – Вып. 2. – С. 101–105.
10. Wang Y., Xu R.Q., Ding H.J. Analytical solutions of functionally graded piezoelectric circular plates subjected to axisymmetric loads // Acta Mechanica. – 2010. – Vol. 215. – Iss. 1–4. – P. 287–305.
11. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания пьезокерамической тонкой биморфной пластины // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 2. – С. 77–85.
12. Shlyakhin D.A., Kazakova O.V. Non-Stationary Flexural Fluctuations of a Round Flat Bimorph Plate with Graded-Varying Thickness // Procedia Engineering. – 2014. – Vol. 91. – P. 69–74. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.014
13. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – 279 с.
14. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. II. Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел / Д.И. Бардзокас [и др.]. – М.: Комкнига, 2005. – 376 с.
15. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1963. – 367 с.
16. Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 4. – С. 57–63.
17. Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований – обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Матем., механ., информатика. – 2011. – № 3(1). – С. 61–89.
18. Прочность, устойчивость, колебания: справочник: в 3 т. / под. общ. ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 567 с.

19. Пространственные задачи теории упругости и пластичности / под ред. А.Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1986. – 286 с.
20. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1978. – 318 с.
21. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания толстой круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – № 4. – С. 90–100.
22. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные изгибные колебания толстой круглой жестко закрепленной пластины // Вестник Самар. гос. ун-та. Ест.-науч. серия. – 2011. – № 8(89). – С. 142–152.
23. Пьезокерамические преобразователи: справочник / В.В. Ганопольский, Б.А. Касаткин, Ф.Ф. Легуша [и др.]. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.

References

1. Underwater electroacoustic transducers. Ed. by B.B. Bogorodsky. Leningrad: Shipbuilding, 1983. 248 p.
2. Sharapov V. Piezoceramic sensors. Springer Verlag, 2010. 498 p.
3. Sensors. Ed. by V.M. Sharapov. Moscow: Technosphere, 2012. 616 p.
4. Adelman N.T., Stavsky Y. Flexural-extensional behavior piezoelectric circular plates. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1980, vol. 67, no. 3, pp. 819-822.
5. Evseichik Y.B., Rudnitsky S.I., Sharapov C.M., Shul'ga N.A. The sensitivity of the bimorph transducer type metal-piezoelectric ceramics. *App. Mechanics*, 1990, vol. 26, no. 12, pp. 67-75.
6. Vatulyan A.O., Rynkova A.A. Bending Vibrations of the PZ Bimorphs With Internal Cut Electrode. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2001, vol. 42, no. 1, pp. 184-189.
7. Karlash V.L. Resonance Electro-Mechanic Vibration of Piezo-Ceramic Plates. *Int. Appl. Mech.*, 2005, vol. 41, no. 7, pp. 535-541.
8. Vatulyan A.O., Rynkova A.A. A model of bending vibrations of piezoelectric bimorphs with split electrodes and its applications. *Mech. Solids.*, 2007, vol. 42, no. 4, pp. 595-602.
9. Yanchevskii I.V. Nestacionarnye kolebaniia kruglogo asimmetrichnogo bimorfa pri jelektricheskom nagruzhenii [Unsteady fluctuations round the asymmetric bimorph under electrical stress]. *Bulletin of Donetsk national University*, 2010, no. 2, pp. 101-105.
10. Wang Y., Xu R.Q., Ding H.J. Analytical solutions of functionally graded piezoelectric circular plates subjected to axisymmetric loads. *Acta Mechanica*, 2010, vol. 215, iss. 1-4, pp. 287-305.
11. Shlyakhin D.A. Forced nonstationary axisymmetric vibrations of a piezoceramic thin bimorph plate. *Mech. Solids.*, 2013, vol. 48, no. 2, pp. 178-185.
12. Shlyakhin D.A., Kazakova O.V. Non-Stationary Flexural Fluctuations of a Round Flat Bimorph Plate with Graded-Varying Thickness. *Procedia Engineering*, 2014, vol. 91, pp. 69-74. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.014
13. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. Mehanika svjazannyh polej v jelementah konstrukcij [Mechanics of coupled fields in structural elements]. Kiev: Naukova Dumka, 1989. 279 p.
14. Bardzokas D.I. [et al.] Matematicheskoe modelirovanie v zadachah mehaniki svjazannyh polej [Mathematical modeling in mechanics-related fields. Vol. 2. Static and dynamic problem of electroelasticity for a compound multiply-connected bodies]. Moscow: Combook, 2005. 376 p.
15. Upland J.S. Integral'nye preobrazovaniya v zadachah teorii uprugosti [Integral transforms in the theory of elasticity]. Moscow-Leningrad: Publ. of Academy of Sciences of the USSR, 1963. 367 p.
16. Senitsky Yu.E. Mnogokomponentnoe obobshhennoe konechnoe integral'noe preobrazovanie i ego prilozhenie k nestacionarnym zadacham mehaniki [Multicomponent generalized finite integral transformation and its application to non-stationary problems of mechanics]. *Izvestiya vuzov. Mathematics*, 1991, no. 4, pp. 57-63.

17. Senitsky Yu.E. Metod konechnykh integral'nyh preobrazovaniy – obobshhenie klassicheskoy procedury razlozheniya po sobstvennym vektor-funkcijam [Finite integral transform is a generalization of the classical procedure of expansion in eigen vector-functions]. *The news of the Saratov University. The new series. Mat., the tavern., Informatics*. 2011, no. 3(1), pp. 61-89.

18. Prochnost', ustojchivost', kolebanija: spravochnik v 3 t. [Strength, stability, vibration: a Handbook in 3 vol.]. Ed. by I.A. Birger, J.G. Panovko. Vol. 3. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 567 p.

19. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti [Spatial problems of the theory of elasticity and plasticity]. Ed. A.N. Guz. Kiev: Naukova Dumka, 1989, vol. 5. 279 p.

20. Vladimirov C.C. Obobshhennye funkicii v matematicheskoj fizike [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow: Science, 1978. 318 p.

21. Shlyakhin D.A. Forced axisymmetric vibrations of a thick circular rigidly fixed piezoceramic plate. *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 435-444.

22. Shlyakhin D.A. Vynuzhdennye osesimmetrichnye izgibnye kolebanija tolstoj krugloj zhestko zakrep-lennoj plastiny [The compelled axisymmetric bending fluctuations of thick round rigid plate]. *Vestnik Samarskogo universiteta*, 2011, no. 8(89), pp. 142-152.

23. Ganopolsky V.V., Kasatkin B.A., Legusha F.F. [et al.]. P'ezokeramicheskie preobrazovateli [The piezoceramic transducers Handbook]. Leningrad: Shipbuilding, 1984. 256 p.