Осипенко М.А., Няшин Ю.И., Касаткин А.А. Особенности контактных задач для систем струн и балок со слабо закрепленными элементами // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 1. – С. 121–129. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.1.08

Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Kasatkin A.A. Singularities of contact problems for systems of strings and beams with weakly restrained elements. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2015. No. 1. Pp. 121-129. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.1.08

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/

DOI: 10.15593/perm.mech/2015.1.08

УДК 539.319

ОСОБЕННОСТИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ СТРУН И БАЛОК СО СЛАБО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

М.А. Осипенко, Ю.И. Няшин, А.А. Касаткин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 12 сентября 2014 г.
Принята: 27 февраля 2015 г.
Опубликована: 31 марта 2015 г.

Ключевые слова:

струна,
балка Бернулли–Эйлера,
слабо закрепленный элемент,
условие равновесия,
неопределенное перемещение,
контактная задача,
контактные силы,
контактные расстояния,
единственность решения,
аналитическое решение

АННОТАЦИЯ

В известных контактных задачах для струн и балок контактирующие упругие элементы закреплены так, что каждый из них может оставаться в равновесии при любой приложенной к нему нагрузке. Возможно, однако, закрепление, при котором для одного из элементов (его можно назвать слабо закрепленным) это свойство не выполняется, но вся система в целом может находиться в равновесии для достаточно широкого множества внешних (по отношению к системе) нагрузок. Для таких систем постановка контактной задачи, доказательство единственности решения и построение аналитического решения имеют по сравнению с известными задачами некоторые особенности: наличие в постановке задачи условия равновесия слабо закрепленного элемента и наличие дополнительного (подлежащего нахождению, наряду с внутренними силами) параметра, описывающего неопределенную часть перемещения этого элемента; необходимость доказательства единственности определения не только контактных сил, но и упомянутого параметра; расширение множества допустимых контактных сил; исключение нулевых внешних нагрузок. Эти особенности рассмотрены на примерах: 1) две струны, одна из которых имеет свободные концы, а один из концов второй закреплен; 2) две разделенные зазором балки, одна из которых имеет шарнирно закрепленный и свободный концы, а вторая закреплена консольно. Предложена сохраняющая основные идеи модификация обычной схемы рассмотрения таких задач, позволяющая учесть наличие слабо закрепленных элементов. В каждом примере доказана единственность решения контактной задачи и построено в явном виде ее аналитическое решение.

© **Осипенко Михаил Анатольевич,** кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru
Няшин Юрий Иванович, доктор технических наук, профессор, e-mail: nyashin@inbox.ru
Касаткин Антон Александрович, аспирант, e-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

Michael A. Osipenko, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, e-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru
Yuri I. Nyashin, Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: nyashin@inbox.ru
Anton A. Kasatkin, Postgraduate Student, e-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

SINGULARITIES OF CONTACT PROBLEMS FOR SYSTEMS OF STRINGS AND BEAMS WITH WEAKLY RESTRAINED ELEMENTS

M.A. Osipenko, Yu.I. Nyashin, A.A. Kasatkin

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received 12 September 2014
Accepted 27 February 2015
Published 31 March 2015

Keywords:
string, Bernoulli–Euler beam, weakly restrained element, equilibrium condition, indefinite displacement, contact problem, contact forces, contact distances, uniqueness of solution, analytical solution

ABSTRACT

In known contact problems for strings and beams, contact elastic elements are restrained in such a way that each of them can be in the equilibrium for the arbitrary applied load. However, other types of restraint are possible where the above-mentioned condition does not hold for one of the elements; this element can be called weakly restrained. At the same time, the system as a whole can be in the equilibrium for the wide set of external loads. The systems of this type have some singularities in the contact problem statement, in the proof of the uniqueness of solution and in constructing the analytical solution. The singularities are as follows: the special condition for the weakly restrained element equilibrium, the additional unknown parameter describing the indefinite part of the weakly restrained element displacement, the necessity to prove the uniqueness of not only the contact forces but also this parameter, the expansion of the set of allowable contact loads, the exclusion of zero external loads. These singularities are considered for two following examples: 1) two strings; the first one has the free edges; 2) two beams with the gap between them; the first one has the hinted bearing and the free edge. The modification of the usual plan of consideration of contact problems for strings and beams is proposed. This modification keeps the main ideas of the usual plan and gives the opportunity to take the weakly restrained elements into account. For each example, the uniqueness of the solution of the contact problem is proved and the analytical solution is built.

Введение

Решения ряда контактных задач для струн и балок могут быть получены в явном аналитическом виде [1–10]. В этих задачах контактирующие упругие элементы закреплены так, что каждый из них может оставаться в равновесии при любой приложенной к нему нагрузке, например обе струны и обе балки (рис. 1).

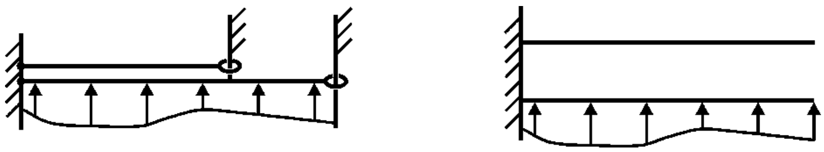

Рис. 1. Системы струн и балок без слабо закрепленных элементов

Возможно, однако, закрепление, при котором для одного из элементов (его можно назвать *слабо закрепленным*) это свойство не выполняется, но вся система в целом может находиться в равновесии для достаточно широкого множества внешних (по отношению к системе) нагрузок (рис. 2, 3).

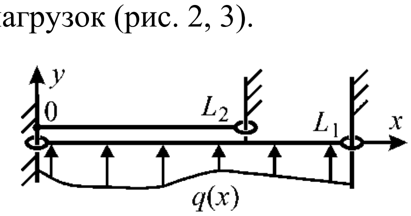

Рис. 2. Система струн со слабо закрепленной нижней струной

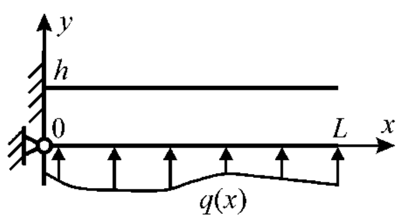

Рис. 3. Система балок со слабо закрепленной нижней балкой

Для таких систем постановка контактной задачи, доказательство единственности решения и построение аналитического решения имеют по сравнению с задачами [1–10] некоторые особенности: наличие в постановке задачи условия равновесия слабо закрепленного элемента и наличие дополнительного (подлежащего нахождению наряду с контактными силами) параметра, описывающего неопределенную часть перемещения этого элемента; необходимость доказательства единственности определения не только контактных сил, но и упомянутого параметра; расширение множества допустимых контактных сил; исключение нулевых внешних нагрузок. Эти особенности рассмотрены далее на примере систем, показанных на рис. 2, 3. Заметим, что данные особенности должны проявляться и при численном решении соответствующих контактных задач [11–13], а также в задачах о вдавливании абсолютно твердых свободных тел (штампов) [14–18], что требует отдельного исследования.

1. Односторонний контакт двух струн

Рассмотрим две струны с различным закреплением концов (см. рис. 2). У первой струны (слабо закрепленный элемент) оба конца свободны; у второй струны левый конец закреплен, правый – свободен; $L_1 > L_2$ – длины струн; T_1, T_2 – натяжения струн; нагрузка с заданной плотностью $q(x)$ приложена к нижней струне. Трение между струнами отсутствует. Пусть $f(x)$ – плотность сил взаимодействия струн. Из стандартной теории [19] следует, что для первой струны должно выполняться условие равновесия

$$\int_0^{L_2} f(x)dx = \int_0^{L_1} q(x)dx\,, \tag{1}$$

а формы струн при $0 \le x \le L_2$ имеют вид

$$y_1(x) = C + \frac{1}{T_1}\int_0^x \left(\int_s^{L_1} q(t)dt - \int_s^{L_2} f(t)dt \right) ds\,, \tag{2}$$

$$y_2(x) = \frac{1}{T_2}\int_0^x \left(\int_s^{L_2} f(t)dt \right) ds\,, \tag{3}$$

где C – неопределенная постоянная. Контактная задача заключается в отыскании $f(x)$ и C. Будем считать, что функция $f(x)$ имеет вид

$$p(x) + \sum\nolimits_i P_i \delta(x - x_i)\,, \tag{4}$$

где $p(x) \ge 0$ – кусочно-непрерывна, непрерывна слева при $0 < x \le L_2$ и непрерывна справа при $x = 0$; $P_i \ge 0$; $x_i \ge 0$ (все x_i различны); сумма конечна; δ – дельта-функция Дирака. Заметим, что по сравнению с задачей [7], в которой первая струна также имела закрепленный левый конец, здесь следует расширить множество (4), допустив $x_i = 0$, так как сосредоточенная сила на левом конце теперь влияет на первую струну. Обозначим $r(x) = y_2(x) - y_1(x)$ (расстояние между струнами). Из (2) и (3) следует, что

$$r(x) = -C + a\int_0^x \left(\int_s^{L_2} f(t)dt - b\int_s^{L_1} q(t)dt \right) ds\,, \tag{5}$$

где

$$a = 1/T_1 + 1/T_2, \quad b = 1/(1 + T_1/T_2).$$

Будем считать, что $q(x) \geq 0$ непрерывна при $0 \leq x \leq L_1$, причем $q(x) \not\equiv 0$ (последнее условие необходимо для единственности решения, см. ниже). Условие контакта струн состоит, помимо неотрицательности плотности сил взаимодействия, в том, что расстояние между струнами неотрицательно, а в тех точках, где плотность сил взаимодействия положительна, равно нулю. Окончательно приходим к следующей математической постановке задачи.

Задача 1. Найти функцию $f(x)$ вида (4) и число C такие, что выполнено (1) и при $0 \leq x \leq L_2$:

$$r(x) \begin{cases} = 0 & (f(x) > 0), \\ \geq 0 & (f(x) = 0), \end{cases} \tag{6}$$

где $r(x)$ выражается формулой (5).

Утверждение 1. Задача 1 может иметь только одно решение.

Доказательство. Пусть $f(x)$, C и $f^*(x)$, C^* – два решения задачи 1. По формуле (5) им соответствуют функции $r(x)$ и $r^*(x)$. Обозначим

$$\varphi(x) = f(x) - f^*(x). \tag{7}$$

Так как $f(x)$ и $f^*(x)$ имеют вид (4), то $\varphi(x)$ также имеет вид (4), но $p(x)$ и P_i могут быть неположительными. Обозначим

$$A = \int_0^{L_2} \left(r(x) - r^*(x) \right) \varphi(x) dx. \tag{8}$$

Из (6, 7) нетрудно установить, что в (8) подынтегральная функция неположительна, следовательно, $A \leq 0$. С другой стороны, подставляя (5) в (8) и учитывая (7), найдем

$$A = -(C - C^*) \int_0^{L_2} \varphi(x) dx + a \int_0^{L_2} J^2(x) dx, \tag{9}$$

где

$$J(x) = \int_x^{L_2} \varphi(s) ds. \tag{10}$$

Из (1) и (7) следует, что первое слагаемое в (9) равно нулю; тогда из (9) следует, что $A \geq 0$. Так как выше было доказано неравенство $A \leq 0$, то $A = 0$. Далее, учитывая (10) и упомянутый выше вид $\varphi(x)$, легко установить, что из (9) и равенства $A = 0$ следует, что если в $\varphi(x)$ не содержится слагаемое, пропорциональное $\delta(x)$, то $J(x) = 0$ при $0 \leq x \leq L_2$. Тогда можно доказать [7], что $\varphi(x) = 0$ при $0 \leq x \leq L_2$. Если же $\varphi(x) = P\delta(x)$, то из (1) и (7) следует, что $P = 0$, то есть $\varphi(x) = 0$ и в этом случае. Таким образом, $f(x) = f^*(x)$ при $0 \leq x \leq L_2$. Остается доказать, что $C = C^*$. Из (5) следует, что $r(x) - r^*(x) = -(C - C^*)$. Если $C \neq C^*$, то $r(x)$ и $r^*(x)$ не обращаются в нуль одновременно, поэтому при каждом

$0 \le x \le L_2$ либо $r(x) > 0$ и тогда $f(x) = 0$, либо $r^*(x) > 0$ и тогда $f^*(x) = f(x) = 0$, то есть $f(x) = 0$ при $0 \le x \le L_2$. Это противоречит (1) в принятом предположении непрерывной неотрицательной $q(x) \not\equiv 0$. Таким образом, $C = C^*$, тем самым утверждение 1 полностью доказано.

Утверждение 2. Решение задачи 1 имеет вид

$$f(x) = F_1\delta(x) + F_2\delta(x - L_2) + bq(x), \quad C = 0, \tag{11}$$

где

$$F_1 = (1-b)\int_0^{L_1} q(x)dx, \quad F_2 = b\int_{L_2}^{L_1} q(x)dx. \tag{12}$$

Доказательство. Очевидно, что функция (11) имеет вид (4). Подставляя (11), (12) в (1), нетрудно установить, что (1) выполнено. Подставляя (11) и (12) в (5), найдем, что $r(x) = 0$ при $0 \le x \le L_2$, тем самым (6) выполнено.

Замечание. Функция $f(x)$ содержит слагаемое $F_1\delta(x)$; это означает, что упомянутое выше соответствующее расширение множества допустимых $f(x)$ по сравнению с системой [7] (без элементов со слабым закреплением) не является формальным, а определяется существенными свойствами данной задачи.

2. Односторонний контакт двух балок

Рассмотрим две балки с одинаковыми размерами и физическими свойствами, но с различным закреплением концов (см. рис. 3). У первой балки (слабо закрепленный элемент) левый конец закреплен шарнирно, правый – свободен; у второй балки левый конец защемлен, правый – свободен; E, L, w, H – соответственно модуль Юнга, длина, ширина и толщина каждой балки (сечения балок – прямоугольники); h – расстояние между точками закрепления балок. Трение между балками отсутствует. Пусть $f(x)$ – плотность сил взаимодействия балок. Для первой балки должно выполняться условие равновесия

$$\int_0^L f(x)\,x\,dx = \int_0^L q(x)\,x\,dx. \tag{13}$$

Из теории Бернулли–Эйлера [20] следует, что упругие линии балок имеют вид

$$y_1(x) = Cx + a\int_0^x (x-s)\left(\int_s^L (t-s)(q(t) - f(t))dt\right)ds, \tag{14}$$

$$y_2(x) = h + a\int_0^x (x-s)\left(\int_s^L (t-s)f(t)dt\right)ds, \tag{15}$$

где $a = 12/(EwH^3)$; C – неопределенная постоянная. Контактная задача заключается в отыскании $f(x)$ и C. Будем считать, что функция $f(x)$ имеет вид (4), но $x_i > 0$ (не допускается не влияющая на балки сосредоточенная сила на левом конце балок). Обозначим $r(x) = y_2(x) - y_1(x)$ (расстояние между балками). Из (14) и (15) следует, что

$$r(x) = -Cx + h + a\int_0^x (x-s)\left(\int_s^L (t-s)(2f(t) - q(t))dt\right)ds. \tag{16}$$

Будем считать, что $q(x) \geq 0$ непрерывна при $0 \leq x \leq L$, причем $q(x) \not\equiv 0$. Условие контакта балок аналогично указанному выше условию контакта струн, поэтому приходим к аналогичной математической постановке задачи.

Задача 2. Найти функцию $f(x)$ вида (4) (где $x_i > 0$) и число C такие, что выполнено (13) и при $0 \leq x \leq L$ выполнено (6), где $r(x)$ выражается формулой (16).

Утверждение 3. Задача 2 может иметь только одно решение.

Доказательство. Пусть $f(x)$, C и $f^*(x)$, C^* – два решения задачи 2. По формуле (16) им соответствуют функции $r(x)$ и $r^*(x)$. Введем $\varphi(x)$ по формуле (7); эта функция имеет вид, указанный в доказательстве утверждения 1. Введем A по формуле (8) (положив $L_2 = L$), тогда аналогично упомянутому доказательству, с одной стороны, $A \leq 0$, а с другой стороны,

$$A = -(C - C^*)\int_0^L \varphi(x)\,x\,dx + 2a\int_0^L J^2(x)dx\,, \tag{17}$$

где

$$J(x) = \int_x^L (s - x)\varphi(s)ds\,. \tag{18}$$

Из (7) и (13) следует, что первое слагаемое в (17) равно нулю, тогда из (17) следует, что $A \geq 0$; так как $A \leq 0$, то $A = 0$. Далее, учитывая (17) и (18), можно из равенства $A = 0$ вывести [6], что $\varphi(x) = 0$, то есть $f(x) = f^*(x)$ при $0 \leq x \leq L$. Остается доказать, что $C = C^*$. Из (16) следует, что $r(x) - r^*(x) = -(C - C^*)x$. Если $C \neq C^*$, то $r(x)$ и $r^*(x)$ могут обращаться в нуль одновременно только при $x = 0$, поэтому при каждом $0 < x \leq L$ либо $r(x) > 0$ и тогда $f(x) = 0$, либо $r^*(x) > 0$ и тогда $f^*(x) = f(x) = 0$, то есть $f(x) = 0$ при $0 < x \leq L$. Так как кусочно-непрерывная часть $f(x)$ непрерывна справа при $x = 0$, а $\delta(x)$ не может, как предполагалось выше, содержаться в $f(x)$, то $f(x) = 0$ при $0 \leq x \leq L.$ Это противоречит (13) в принятом предположении непрерывной неотрицательной $q(x) \not\equiv 0$. Таким образом, $C = C^*$, тем самым утверждение 3 полностью доказано.

Утверждение 4. Если $\Phi(L) > 0$, то решение задачи 2 имеет вид

$$f(x) = F\delta(x - \lambda) + \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \lambda), \\ q(x)/2 & (\lambda < x \leq L), \end{cases} \tag{19}$$

$$C = a\int_0^\lambda q(x)(\lambda - x/2)\,x\,dx + \left(a\lambda/2\right)\int_\lambda^L q(x)\,x\,dx\,, \tag{20}$$

где

$$F = \left(\left(1/\lambda\right)\int_0^\lambda q(x)\,x\,dx + \left(1/(2\lambda)\right)\right)\int_\lambda^L q(x)\,x\,dx\,, \tag{21}$$

$$0 < \lambda < L \text{ – корень уравнения } \Phi(\Lambda) = 0\,, \tag{22}$$

$$\Phi(\Lambda) = \int_0^\Lambda (2\Lambda^2 - x^2)q(x)\,x\,dx + \Lambda^2\int_\Lambda^L q(x)\,x\,dx - 6h/a\,. \tag{23}$$

Доказательство. Существование корня $0 < \lambda < L$ следует из непрерывности $\Phi(\Lambda)$ и значений $\Phi(0) = -6h/a < 0$, $\Phi(L) > 0$ (единственность корня следует из утверждения 3). Очевидно, что функция (19) имеет вид (4). Подставляя (19) и (21) в (13), нетрудно установить, что (13) выполнено. Подставляя (19)–(23) в (16), можно найти, что

$$r(x) = -Cx + h + a\int_0^x (x-s)\left(2(\lambda - s)F - \int_s^\lambda (t-s)q(t)dt\right)ds \qquad (24)$$

при $0 \le x \le \lambda$ и $r(x) = 0$ при $\lambda \le x \le L$. Функция $f(x)$ может быть положительна только при $\lambda \le x \le L$, поэтому первое условие (6) выполнено. Остается доказать, что $r(x) \ge 0$ при $0 \le x \le \lambda$. Из (24) находим, что $r^{IV}(x) \le 0$, $r'''(\lambda) < 0$, $r''(\lambda) = 0$, тогда либо $r''(x) \ge 0$ при $0 \le x \le \lambda$, либо существует x_* такое, что $0 \le x_* \le \lambda$, $r''(x) \le 0$ при $0 \le x \le x_*$ и $r''(x) \ge 0$ при $x_* \le x \le \lambda$. Из (24) также следует, что $r'(0) < 0$ и (с учетом (20)–(23)) $r'(\lambda) = 0$. Тогда нетрудно установить, что в обоих упомянутых выше случаях $r'(x) \le 0$ при $0 \le x \le \lambda$. Отсюда с учетом равенства $r(\lambda) = 0$ следует, что $r(x) \ge 0$ при $0 \le x \le \lambda$, тем самым второе условие (6) выполнено, и утверждение 4 полностью доказано.

Замечание. Случай $\Phi(L) > 0$ возможен: например, при $q(x) \equiv q_0$ это условие сводится к неравенству $q_0 > 8h/(aL^4)$. Можно показать, что в случае $\Phi(L) \le 0$ имеется только сосредоточенная контактная сила при $x = L$.

Выводы

Контактные задачи для систем струн и балок, содержащих слабо закрепленные элементы, имеют особенности, не позволяющие непосредственно применить стандартные схемы постановок и решений, разработанные для систем без таких элементов. Однако можно модифицировать стандартные схемы, сохраняя их основные идеи, и учесть эти особенности; тогда и здесь можно дать строгую постановку контактной задачи и построить в явном виде ее аналитическое решение. Предложенная модификация допускает дальнейшее развитие и распространение на более сложные контактные задачи.

Библиографический список

1. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1 / С.Д. Пономарев [и др.] – М.: Машгиз, 1956. – 884 с.

2. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

3. Пархиловский И.Г. Автомобильные листовые рессоры. – М.: Машиностроение, 1978. – 232 с.

4. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 415 с.

5. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

6. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N. A contact problem in the theory of leaf spring bending // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – No. 40 – P. 3129–3136.

7. Осипенко М.А. Об одной контактной задаче для системы струн // Вестник Перм. гос. техн. ун-та. Прикладная математика и механика. – 2005. – № 1 – С. 82–86.

8. Осипенко М.А., Няшин Ю.И. Об одном подходе к решению некоторых одномерных контактных задач // Известия Саратовского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11. – Вып. 1 – С. 77–84.

9. Осипенко М.А. О точности модели Бернулли–Эйлера в контактных задачах для балок // Вестник Ижев. гос. техн. ун-та. – 2013. – № 2 (58). – С. 147–149.

10. Осипенко М.А. Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с листами, искривленными по дуге окружности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 1. –С. 142–152.

11. Li H., Dempsey J.P. Unbonded Contact of Finite Timoshenko Beam on Elastic Layer // Journal of Engineering Mechanics. – 1988. – July, Vol. 114. – No. 7 – P. 1265–1284.

12. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 1. – С. 45–87.

13. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Таланцев Н.Ф. Численный анализ напряженно-деформированного состояния листовых рессор // Вычисл. мех. спл. сред. – 2009. – Т. 2, № 2 – С. 74–84.

14. Александров В.М. Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек // Инженерный журнал. – 1965. – Т. 5, № 4 – С. 782–785.

15. Попов Г.Я. Об интегральных уравнениях контактных задач для тонкостенных элементов // Прикладная математика и механика. – 1976. – Т. 40. – Вып. 4 – С. 662–673.

16. Попов Г.Я., Толкачев В.М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1980. – № 4. – С. 192–206.

17. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / Моск. гос. акад. приборостр. и информатики. – М., 1997. – 340 с.

18. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. – М.; Ростов н/Д, 2007. – 113 с.

19. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.

20. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 711 с.

References

1. Ponomaryov S.D. [et al.] Raschety na prochnost v mashinostroenii. Vol. 1 [Stress calculation in mechanical engineering]. Moscow: Mashgiz, 1956. 884 p.

2. Feodosyev V.I. Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniiu materialov [Selected problems and questions on the strength of materials]. Moscow: Nauka, 1973. 400 p.

3. Parhilovsky I.G. Avtomobilnye listovye ressory [Automotive leaf springs]. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 232 p.

4. Grigoluk E.I., Tolkachuov V.M. Kontaktnye zadachi teorii plastin i obolochek [The contact problems for plates and shells]. Moscow: Mashinostroenie, 1980. 415 p.

5. Johnson K.L. Contact mechanics. Cambridge University Press; Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1985. 510 p.

6. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N. A contact problem in the theory of leaf spring bending. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, no. 40, pp. 3129-3136.

7. Osipenko M.A. Ob odnoi kotaktnoi zadache dlya sistemy strun [A contact problem on the system of strings]. *Vyestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2005, no. 1, pp. 82-86.

8. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I. Ob odnom podkhode k resheniiy nekotorykh odnomernykh kontaktnykh zadach [A certain approach to solving of some one-dimensional contact problems]. *Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2011, vol. 11, iss. 1, pp. 77-84.

9. Osipenko M.A. O tochnosti modeli Bernoulli – Euler v kontaktnyh zadachah dlya balok [On the precision of Bernoulli – Euler model in the contact problems for the beams]. *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2013, no. 2 (58), pp. 147-149.

10. Osipenko M.A. Kontaktnaya zadacha ob izgibe dvuhlistovoy ressory s listami, iskrivlyonnymi po duge okruznosty [A contact problem for bending of two-leaf spring with the leaves curved along the circular arc]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 1, pp. 142-152.

11. Li H., Dempsey J.P. Unbonded Contact of Finite Timoshenko Beam on Elastic Layer. *Journal of Engineering Mechanics*, 1988, July, vol. 114, no. 7, pp. 1265-1284.

12. Burago N.G., Kukudzhanov V.N. Obzor kontakthykh algoritmov [The review of contact algorithms]. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences, Mechanics of Solids*, 2005, no. 1, pp. 45-87.

13. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Talantsev N.F. Chislennyi analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoianiia listovykh ressor [The numerical analysis of stress-strain state of leaf springs]. *Vychislitelnaia mekhanika sploshnykh sred*, 2009, vol. 2, no. 2, pp. 74-84.

14. Aleksandrov V.M. Nekotorye kontaktnye zadachi dlya balok, plastinok i obolochek [Some contact problems for beams, plates and shells]. *Inzhenernyi zhurnal*, 1965, vol. 5, no. 4, pp. 782-785.

15. Popov G.Ya. Ob integralnykh uravneniuiakh kontakthykh zadach dlya tonkostennykh elementov [On the integral equations for the contact problems for thin-walled elements]. *Prikladnyaya matematika i mekhanika*, 1976, vol. 40, iss. 4, pp. 662-673.

16. Popov G.Ya., Tolkachev V.M. Problema kontakta zhestkikh tel s tonkostennymi elementami [A problem of the rigid bodies contact with the thin-walled elements]. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids*, 1980, no. 4, pp. 192-206.

17. Kravtchuk A.S. Variatsionnye i kvazivariatsionnye neravenstva v mekhanike [Variational and quasi-variational inequalities in mechanics]. Moscovskaya gosudarstvennaya akademiia priborostroeniia i informatiki, 1997. 340 p.

18. Aleksandrov V.M., Chebakov M.I. Vvedenie v mekhaniku kontaktnyh vzaimodeistvii [Introduction to the contact mechanics]. Moscow, Rostov-on-Don, 2007. 113 p.

19. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniia matematicheskoi fiziki [The equations of mathematical physics]. Moscovskii gosudarstvennyi universitet, 1999. 798 p.

20. Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of deformable solids]. Moscow: Nauka, 1988. 711 p.