

DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.06

УДК 539.4+539.37

**Т.П. Романова**Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия**ОПТИМАЛЬНОЕ ОПИРАНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ  
ОДНО- И ДВУСВЯЗНЫХ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ПЛАСТИН**

В рамках модели идеального жесткопластического тела получено общее решение задачи о предельном поведении и динамическом изгибе одно- и двусвязных правильных полигональных пластин, шарнирно опертых по неподвижному полигональному контуру, расположенному внутри пластины. На пластину действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Показано, что существует несколько механизмов предельного и динамического деформирования пластин в зависимости от расположения контура опирания и наличия отверстия. При всех схемах пластина деформируется в виде совокупности одинаковых жестких областей в форме трапеций, разделенных линейными пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом, равным предельному значению. Для каждого из механизмов получены определяющие уравнения и определены условия их реализации. Получены простые аналитические выражения для предельной нагрузки и максимального остаточного прогиба пластины. Определено оптимальное расположение опоры. Оптимальной считается опора, при которой пластина имеет наибольшую предельную нагрузку. Получено, что внутренняя опора является оптимальной, если на ней образуется пластический шарнир. Определены такие положения опорного контура, при которых пластина с отверстием является более прочной, чем пластина без отверстия. Решение задачи распространено на случай пластин с полигональными контурами, в которые можно вписать окружность. Показано, что такие пластины имеют одинаковые соответствующие предельные нагрузки, время деформирования, максимальный остаточный прогиб, которые не зависят от количества сторон полигональных контуров и совпадают с этими же величинами для круглых и кольцевых пластин. Приведены численные примеры.

**Ключевые слова:** жесткопластическая модель, полигональная пластина, двусвязная пластина, внутренняя опора, взрывная нагрузка, предельная нагрузка, остаточный прогиб, оптимальное расположение опоры.

**T.P. Romanova**

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS,  
Novosibirsk, Russian Federation

## **OPTIMAL SUPPORT OF RIGID-PLASTIC SINGLY AND DOUBLY CONNECTED POLYGONAL PLATES**

In the model of an ideal rigid-plastic body the general solution of a problem of the limit behavior and dynamic bend is obtained for regular singly and doubly connected polygonal plates, hinge supported on immobile polygonal contour, located inside of the plate. The plate is under a short-term dynamic load of an explosive type with high intensity, uniformly distributed over the surface. It is shown that there are several mechanisms of limit and dynamic deformation of plates depending on the location of the support contour and on the availability of hole. In all schemes the plate deforms as a set of identical rigid areas in the form of a trapezium, separated by linear plastic hinges with normal bending moment equal to the limit value. For each of the mechanisms the governing equations are obtained and the conditions of their implementation are defined. The simple analytic expressions are obtained for the limit load and maximum final deflection of plates. The optimal location of support is determined. The optimal support is a support at which the plate has a maximum limit load. The study shows that the inner support is optimal if a plastic hinge is formed on it. We have defined the locations of the support contour at which the plate with a hole will be more durable than a plate without a hole.

The solution of the problem extended to the case of plates with polygon contours, into which you can inscribe the circle. The study obtained that these plates have the same respective limit loads, time of deformation and the maximum final deflection which does not depend on the number of sides of the polygon contours and coincides with the same values for circular and annular plate. Numerical examples are given. The solution can be useful in engineering.

**Keywords:** rigid-plastic model, polygonal plate, double connected plate, internal support, explosive load, limit load, final deflection, optimal location of support

### **Введение**

Расчет пластин, разнообразных по форме и способам крепления, являющихся элементами многих технических конструкций, при воздействии нагрузок взрывного типа необходим для анализа их работоспособности в чрезвычайных ситуациях, а также при создании таких элементов методами импульсной штамповки, например, в авиационной, судо- и машиностроительной промышленности. Для решения указанных задач широкое распространение получила модель жесткопластического тела [1, 2]. Достоинство решений идеальной жесткопластической теории состоит в том, что, будучи довольно простыми, они способны давать быстрое и качественно верное представление о деформации конструкции, при этом следует учитывать, что область применения этой модели ограничена прогибами порядка толщины пластины [3, 4]. В работах [4–13] рассмотрено предельное и динамическое поведение разнообразных по форме, полигональных и криволинейных,

жесткопластических пластин, закрепленных по своим контурам. В [12] для полигональных пластин с контуром, в который можно вписать окружность, при вычислении предельных нагрузок повторены результаты, полученные ранее в [5]. В работе [14] для защемленных правильных полигональных пластин и пластин, в контур которых можно вписать окружность, определены предельные нагрузки и схемы предельного деформирования, при которых деформируется только часть пластины внутри защемленного контура. Предельное деформирование произвольной пластины, опертой по гладкой линии внутри своего контура, под действием сосредоточенной нагрузки рассмотрено в [15]. В работе [16] на основе модели идеального жесткопластического тела получено общее решение для динамического изгиба произвольных криволинейных пластин, шарнирно опертых по произвольному криволинейному гладкому контуру, расположенному внутри пластины, под действием равномерно распределенной нагрузки. В работе [17] рассмотрено оптимальное расположение дополнительной внутренней круговой опоры для шарнирно опертой, защемленной и свободной на контуре круглой жесткопластической пластины под действием импульса, когда все точки пластины, за исключением опорных, движутся в начальный момент времени с одинаковой скоростью. Задачи оптимизации упругих и пластических балок, круглых пластин с дополнительной опорой при статическом и импульсном нагружении рассмотрены в [18–22]. Способ создания упругопластической опоры в середине пролета пластины, деформирующейся по цилиндрической поверхности, рассмотрен в [23]. Численному анализу динамического поведения тонкостенных элементов конструкций в упругопластической постановке посвящены работы [24, 25].

В настоящей работе построена математическая модель поведения жесткопластических одно- и двусвязных правильных полигональных пластин под действием равномерно распределенной по поверхности динамической нагрузки взрывного типа; внешний контур пластин свободен, а опора является правильным полигональным контуром и расположена внутри области пластины. Получены простые аналитические выражения для предельной нагрузки и максимального остаточного прогиба пластины. Определено оптимальное расположение опоры, при котором пластина имеет наименьшую повреждаемость с точки зрения максимума предельной нагрузки. Решение задачи распространено на

случай пластин с полигональными контурами, в которые можно вписать окружность. Решения таких динамических задач для жесткопластических пластин в литературе не известно. Предложенное решение будет полезно для инженерных расчетов.

### 1. Двусвязные правильные полигональные пластины

Рассмотрим двусвязную пластину из идеального жесткопластического материала, шарнирно опертую по правильному  $n$ -угольному контуру  $L_1$ , расположенному внутри пластины. Правильные полигональные внешний контур пластины  $L_2$  и внутренний контур  $L_3$  являются свободными (рис. 1). Центры всех многоугольных контуров совпадают, а соответствующие стороны контуров параллельны. Радиус окружности, вписанной в контур  $L_j$ , равен  $R_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ;  $0 < R_3 < R_2$ ). Опорный контур  $L_1$  может проходить по одному из контуров  $L_2$  и  $L_3$  или располагаться между ними, следовательно,  $R_3 \leq R_1 \leq R_2$ . На пластину действует равномерно распределенная по поверхности динамическая нагрузка высокой интенсивности  $P(t)$  взрывного типа, которая достигает максимального значения  $P_{\max} = P(0)$  в начальный момент времени  $t = 0$  и затем быстро убывает ( $t$  – текущее время). Прогибы считаются малыми.

Рассмотрим поведение пластины при нагрузках, незначительно превышающих предельные (так называемых «средних» нагрузках [3, 5–7]). В этом случае схемы движения пластины совпадают со схемами предельного поведения. Для рассматриваемой пластины из жесткопластического материала возможны несколько схем деформирования в зависимости от расположения контура  $L_1$ . При всех схемах пластина деформируется в виде совокупности  $n$  одинаковых жестких областей в форме трапеций, разделенных линейными пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом, равным предельному значению  $M_0$ .

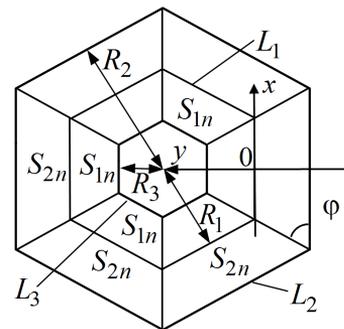


Рис. 1. Двусвязная правильная полигональная пластина

Обозначим область пластины внутри контура  $L_1$  через  $S_1$ , а остальную часть – через  $S_2$ ; область  $S_{kn}$  –  $n$ -я часть области  $S_k$  ( $k=1,2$ );  $S_n = S_{1n} \cup S_{2n}$ . Расположим в области  $S_n$  декартовую систему координат так, что ось  $OX$  проходит по части опорного контура  $L_1$ , а ось  $OY$  – по радиусу окружности, вписанной в опорный контур (см. рис. 1). Скорости прогибов пластины в сечении  $x=0$  представлены на рис. 2. При схеме 1 (рис. 2, а) каждая из  $n$  жестких областей вращается вокруг соответствующего участка опорного контура  $L_1$ , при этом движется вниз в направлении действия нагрузки, область  $S_{2n}$  движется вверх. При схеме 2 (рис. 2, б) область  $S_{1n}$  движется вверх, а область  $S_{2n}$  движется вниз. В схемах 3 и 4 (рис. 2, в, г) возможно образование дополнительных пластических шарнирных полигональных контуров  $l_1$  и  $l_2$ , расположенных на расстоянии  $d_1$  и  $d_2$  от опорного контура  $L_1$ . Обозначим область между контурами  $l_1$  и  $L_3$  через  $S_{11n}$ , а ее  $n$ -ю часть – через  $S_{11n}$ , и область между контурами  $l_2$  и  $L_2$  – через  $S_{22n}$ , а ее  $n$ -ю часть – как  $S_{22n}$  (рис. 3). Все области  $S_{11n}$  и  $S_{22n}$  жестко вращаются независимо друг от друга вниз, вокруг соответствующих участков контуров  $l_1$  и  $l_2$ .

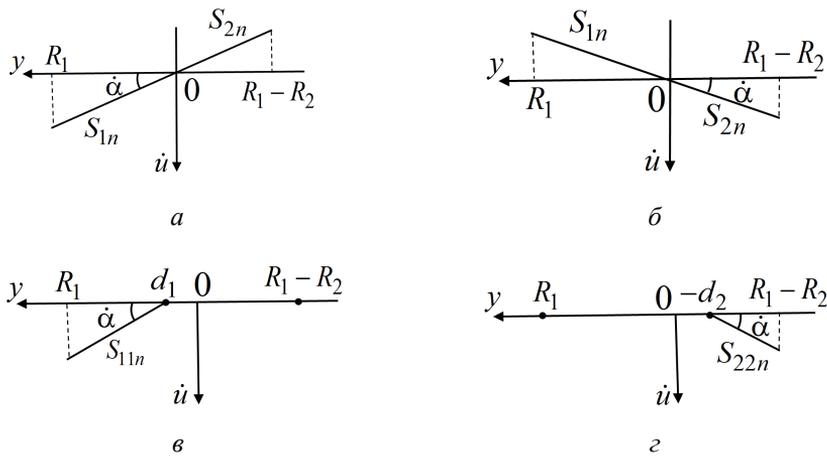


Рис. 2. Скорости прогибов пластины в сечении  $x=0$  при разных схемах деформирования: а – схема 1; б – схема 2; в – схема 3; г – схема 4

Обозначим угол поворота плоскости пластины в направлении действия нагрузки через  $\alpha$ , тогда его скорость равна  $\dot{\alpha}$  (см. рис. 2);  $(\dot{\bullet}) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$ . Уравнение движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [2]:

$$K_i = A_i - N_i \quad (i = \overline{1,4}), \quad (1)$$

$$K_i = \iint_S \rho \ddot{u} \dot{u}^* ds; \quad A_i = \iint_S P(t) \dot{u}^* ds; \quad (2)$$

$$N_i = \sum_m \int_{l_m} M_m [\dot{\theta}^*]_m dl_m.$$

Здесь  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $N_i$  – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно;  $S$  – площадь пластины;  $\rho$  – поверхностная плотность материала пластины;  $u$  – прогиб;  $ds$  – элемент площади;  $l_m$ ,  $m$  – линии разрыва угловых скоростей и их количество;  $M_m$  – изгибающий момент на  $l_m$ ;  $[\dot{\theta}^*]_m$  – разрыв угловой скорости на  $l_m$ ;  $dl_m$  – элемент линии  $l_m$ . Верхним индексом “\*” обозначены кинематически допустимые скорости. Нижний индекс  $i$  обозначает номер схемы, по которой деформируется пластина.

Рассмотрим подробно схемы 1 и 2. Скорости прогибов пластины для схем 1 и 2 (см. рис. 2, а, б) будут представлены в виде

$$\dot{u}(x, y, t) = (-1)^{i+1} \dot{\alpha}(t) y \quad (i = 1, 2), \quad (x, y) \in S_n, \quad (3)$$

где  $i = 1$  для схемы 1 и  $i = 2$  для схемы 2.

Тогда выражения (2)

$$K_i = n \rho \ddot{\alpha} \dot{\alpha}^* \iint_{S_n} y^2 ds =$$

$$= 2n \rho \ddot{\alpha} \dot{\alpha}^* \left[ \int_0^{R_3/\text{tg}\varphi} \left( \int_{R_1-R_2}^{R_1-R_3} y^2 dy \right) dx + \int_{R_3/\text{tg}\varphi}^{R_2/\text{tg}\varphi} \left( \int_{R_1-R_2}^{-x\text{tg}\varphi+R_1} y^2 dy \right) dx \right] = \quad (4)$$

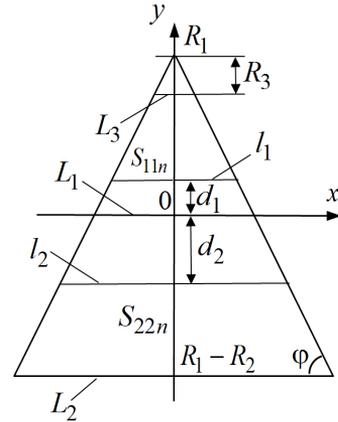


Рис. 3.  $n$ -я часть двусвязной правильной полигональной пластины

$$= n\rho\ddot{\alpha}^*(R_2 - R_3)[3(R_2 + R_3)(2R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) - 8R_1(R_2^2 + R_2R_3 + R_3^2)]/(6\text{tg}\varphi);$$

$$A_i = nP(t)(-1)^{i+1}\dot{\alpha}^* \iint_{S_n} yds =$$

$$= 2nP(t)(-1)^{i+1}\dot{\alpha}^* \left[ \int_0^{R_3/\text{tg}\varphi} \left( \int_{R_1-R_2}^{R_1-R_3} ydy \right) dx + \int_{R_3/\text{tg}\varphi}^{R_2/\text{tg}\varphi} \left( \int_{R_1-R_2}^{-x\text{tg}\varphi+R_1} ydy \right) dx \right] = \quad (5)$$

$$= nP(t)(-1)^{i+1}\dot{\alpha}^*(t)(R_2 - R_3)[3R_1(R_2 + R_3) - 2(R_2^2 + R_3R_2 + R_3^2)]/(3\text{tg}\varphi),$$

где  $\varphi$  – угол при основании равнобедренной трапеции  $S_n$  (см. рис. 1),  $\varphi = \pi(n-2)/2n$ .

На свободных контурах  $L_2$  и  $L_3$  нормальный изгибающий момент  $M_{nn}$  равен нулю; на линиях, являющихся границами областей  $S_n$ , он равен  $M_0$ . Разрыв угловой скорости на опоре  $L_1$  равен  $[\dot{\theta}]_{L_1} = 0$ . При повороте области  $S_n$  вокруг опоры на угол  $\alpha$  угол между двумя смежными областями  $S_n$  будет равен  $2\alpha \cos \varphi$  (при малых прогибах). Следовательно, разрыв угловой скорости на границах областей  $S_n$  равен  $2\dot{\alpha} \cos \varphi$ . Длина границы двух смежных областей  $S_n$  равна  $(R_2 - R_3)/\sin \varphi$ . Тогда для мощности внутренних сил в (2) получаем

$$N_i = 2n\dot{\alpha}^* M_0(R_2 - R_3)/\text{tg}\varphi. \quad (i=1, 2). \quad (6)$$

Подставляя (4)–(6) в (1), получаем уравнение движения для схем 1, 2:

$$\rho\ddot{\alpha}[3(R_2 + R_3)(2R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) - 8R_1(R_2^2 + R_2R_3 + R_3^2)] = 2(-1)^{i+1}P(t)[3R_1(R_2 + R_3) - 2(R_2^2 + R_3R_2 + R_3^2)] - 12M_0 \quad (i=1, 2). \quad (7)$$

Начальные условия имеют вид

$$\dot{\alpha}(0) = \alpha(0) = 0. \quad (8)$$

Предельную нагрузку  $P_{0i}$  ( $i=1, 2$ ;  $i$  – номер схемы деформирования) определим из уравнения движения (7), учитывая, что  $\ddot{\alpha} = 0$  согласно принципу Даламбера:

$$P_{0i} = 6M_0(-1)^{i+1} / [3R_1(R_2 + R_3) - 2(R_2^2 + R_3R_2 + R_3^2)] \quad (i=1,2). \quad (9)$$

Поскольку  $P_{0i} > 0$ , из (9) следует: если  $3R_1(R_2 + R_3) - 2(R_2^2 + R_3R_2 + R_3^2) > 0$ , то реализуется схема 1, если  $3R_1(R_2 + R_3) - 2(R_2^2 + R_3R_2 + R_3^2) < 0$ , то будет схема 2.

Динамическое поведение по схеме 3 области  $S_{11}$  как защемленной правильной полигональной пластины со свободным полигональным отверстием можно получить на основе [7]. В этом случае, поскольку деформируется только внутренняя от опоры часть пластины, поведение и предельная нагрузка для области  $S_{11}$  не зависят от величины  $R_2$ . Скорости прогибов пластины при схеме 3 (рис. 2, в) определяются соотношениями (3) при  $i=1$  и  $(x, y) \in S_{11n}$ . Выражения (2) примут вид

$$\begin{aligned} K_3 &= 2n\rho\ddot{\alpha}\dot{\alpha}^* \left\{ \int_0^{R_3/\text{tg}\varphi} \left[ \int_{d_1}^{R_1-R_3} (y-d_1)^2 dy \right] dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{R_3/\text{tg}\varphi}^{(R_1-d_1)/\text{tg}\varphi} \left[ \int_{d_1}^{-x\text{tg}\varphi+R_1} (y-d_1)^2 dy \right] dx = \right. \\ &= \frac{n\rho\ddot{\alpha}\dot{\alpha}^*}{6\text{tg}\varphi} (R_1 - d_1 - R_3)^3 (R_1 - d_1 + 3R_3); \\ A_3 &= 2n\dot{\alpha}^* P(t) \left\{ \int_0^{R_3/\text{tg}\varphi} \left[ \int_{d_1}^{R_1-R_3} (y-d_1) dy \right] dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{R_3/\text{tg}\varphi}^{(R_1-d_1)/\text{tg}\varphi} \left[ \int_{d_1}^{-x\text{tg}\varphi+R_1} (y-d_1) dy \right] dx \right\} = \\ &= \frac{n\dot{\alpha}^* P(t)}{3\text{tg}\varphi} (R_1 - d_1 - R_3)^2 (R_1 - d_1 + 2R_3); \\ N_3 &= 2n\dot{\alpha}^* M_0 [2(R_1 - d_1) - R_3] / \text{tg}\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем уравнение движения для схемы 3:

$$\rho\ddot{\alpha} = 2P(t) \frac{R_1 - d_1 + 2R_3}{(R_1 - d_1 - R_3)(R_1 - d_1 + 3R_3)} - 12M_0 \frac{2(R_1 - d_1) - R_3}{(R_1 - d_1 - R_3)^3 (R_1 - d_1 + 3R_3)}.$$

Из него при  $\ddot{\alpha} = 0$  для схемы 3 получаем предельную нагрузку  $P_{03}$ ,

$$P_{03} = 6M_0 \min_{0 \leq d_1 < R_1 - R_3} \left[ 2(R_1 - d_1) - R_3 \right] / \left[ (R_1 - d_1 - R_3)^2 (R_1 - d_1 + 2R_3) \right] = 6M_0 \left[ 2(R_1 - d_1) - R_3 \right] / \left[ (R_1 - d_1 - R_3)^2 (R_1 - d_1 + 2R_3) \right] \Big|_{d_1=0}.$$

Следовательно, при схеме 3 контур  $l_1$  проходит по контуру  $L_1$  и  $d_2 = 0$ .

Тогда

$$P_{03} = 6M_0(2R_1 - R_3) / \left[ (R_1 - R_3)^2 (R_1 + 2R_3) \right], \quad (10)$$

и уравнение движения для схемы 3 примет вид

$$\rho\ddot{\alpha} = 2P(t) \frac{R_1 + 2R_3}{(R_1 - R_3)(R_1 + 3R_3)} - 12M_0 \frac{2R_1 - R_3}{(R_1 - R_3)^3 (R_1 + 3R_3)}. \quad (11)$$

В случае схемы 4 динамическое поведение области  $S_{22}$  как двусвязной полигональной пластины, защемленной по внутреннему контуру, можно получить на основе [8]. Поскольку деформируется только внешняя от опоры часть пластины  $S_{22}$ , то поведение пластины и предельная нагрузка не зависят от наличия отверстия и величины  $R_3$ . Скорости прогибов пластины для схемы 4 (см. рис. 2, з) определяются соотношениями (3) при  $i = 2$  и  $(x, y) \in S_{22n}$ . Выражения (2) будут выглядеть так:

$$K_4 = 2n\rho\ddot{\alpha}\dot{\alpha}^* \left\{ \int_0^{(R_1+d_2)/\text{tg}\varphi} \left[ \int_{d_2}^{R_2-R_1} (y-d_2)^2 dy \right] dx + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{(R_1+d_2)/\operatorname{tg}\varphi}^{R_2/\operatorname{tg}\varphi} \left[ \int_{x\operatorname{tg}\varphi-R_1}^{R_2-R_1} (y-d_2)^2 dy \right] dx \Big\} = n\rho\ddot{\alpha}^* \frac{(R_2-R_1-d_2)^3 (R_1+d_2+3R_2)}{6\operatorname{tg}\varphi}; \\
 A_4 & = 2n\dot{\alpha}^* P(t) \left\{ \int_0^{(R_1+d_2)/\operatorname{tg}\varphi} \left[ \int_{d_2}^{R_2-R_1} (y-d_2) dy \right] dx + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{(R_1+d_2)/\operatorname{tg}\varphi}^{R_2/\operatorname{tg}\varphi} \left[ \int_{x\operatorname{tg}\varphi-R_1}^{R_2-R_1} (y-d_2) dy \right] dx \right\} = \\
 & = 2n\dot{\alpha}^* \frac{P(t)}{6\operatorname{tg}\varphi} (R_2-R_1-d_2)^2 (2R_2+R_1+d_2); \quad N_4 = 2n\dot{\alpha}^* M_0 R_2 / \operatorname{tg}\varphi.
 \end{aligned}$$

Из равенства  $A_4 = N_4$  следует, что предельная нагрузка  $P_{04}$  для схемы 4 определяется как

$$\begin{aligned}
 P_{04} & = 6M_0 R_2 \min_{0 \leq d_2 < R_2 - R_1} \frac{1}{(R_2 - R_1 - d_2)^2 (2R_2 + R_1 + d_2)} = \\
 & = 6M_0 \frac{R_2}{(R_2 - R_1 - d_2)^2 (2R_2 + R_1 + d_2)} \Big|_{d_2=0} = \frac{6M_0 R_2}{(R_2 - R_1)^2 (2R_2 + R_1)}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Таким образом, при схеме 4 контур  $l_2$  проходит по опорному контуру  $L_1$  и  $d_2 = 0$ . Подставляя последние выражения  $K_4$ ,  $A_4$ ,  $N_4$  при  $d_2 = 0$  в (1), получаем уравнение деформирования пластины в случае схемы 4:

$$\rho\ddot{\alpha}(R_2 - R_1)^3 (R_1 + 3R_2) = 2P(t)(R_2 - R_1)^2 (2R_2 + R_1) - 12M_0 R_2. \quad (13)$$

Предельная нагрузка  $P_0$  для двусвязной пластины определится как

$$P_0 = \min(P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}). \quad (14)$$

Номер  $i$ , соответствующий минимальному значению величин  $P_{0i}$ , определяет номер схемы деформирования пластины ( $i = \overline{1, 4}$ ).

## 2. Односвязные правильные полигональные пластины

Уравнения поведения односвязной полигональной пластины можно получить из уравнений для двусвязной пластины, считая  $R_3 = 0$ . Тогда для схем 1, 2 из (7) имеем

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\alpha} [3 R_2 (2 R_1^2 + R_2^2) - 8 R_2^2 R_1] = \\ = 2(-1)^{i+1} P(t) R_2 (3 R_1 - 2 R_2) - 12 M_0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (15)$$

Предельная нагрузка  $\bar{P}_{0i}$  односвязной пластины для схем 1, 2

$$\bar{P}_{0i} = 6 M_0 (-1)^{i+1} / [R_2 (3 R_1 - 2 R_2)] \quad (i = 1, 2). \quad (16)$$

Из (16) следует: если  $3 R_1 > 2 R_2$ , то реализуется схема 1, если  $3 R_1 < 2 R_2$ , то – схема 2.

Для схемы 3 из (11) при  $R_3 = 0$  имеем

$$\rho \ddot{\alpha} = 2 P(t) / R_1 - 24 M_0 / R_1^3, \quad (17)$$

и предельная нагрузка  $\bar{P}_{03}$  определяется как

$$\bar{P}_{03} = 12 M_0 / R_1^2. \quad (18)$$

Для схемы 4 поведение пластины не зависит от наличия отверстия, поэтому оно описывается уравнением (13), и предельная нагрузка  $\bar{P}_{04}$

$$\bar{P}_{04} = P_{04} = 6 M_0 R_2 / [(R_2 - R_1)^2 (2 R_2 + R_1)]. \quad (19)$$

Из (16), (19) при  $R_1 = 0$  следует  $\bar{P}_{04} = \bar{P}_{02}$ . При любых соотношениях параметров  $R_1 > 0$  и  $R_2$  выполняется неравенство  $\bar{P}_{04} < \bar{P}_{02}$ . Поскольку при  $R_1 = 0$  схемы 2 и 4 совпадают, следовательно, в пластине без отверстия схема 2 вообще не реализуется.

Предельная нагрузка  $\bar{P}_0$  для пластины без отверстия определится как

$$\bar{P}_0 = \min(\bar{P}_{01}, \bar{P}_{03}, \bar{P}_{04}). \quad (20)$$

Номер  $k$ , соответствующий минимальному значению величин  $\bar{P}_{0k}$ , определяет номер схемы деформирования пластины ( $k = 1, 3, 4$ ).

### 3. Интегрирование уравнений движения

Рассмотрим движение одно- и двусвязных полигональных пластин под действием «средних» нагрузок при  $P_{\max} > \bar{P}_0$  и  $P_{\max} > P_0$  соответственно, где  $P_0$ ,  $\bar{P}_0$  зависят от параметра расположения опоры  $R_1$ . Деформирование двусвязных пластин по схемам 1–4 определяется уравнениями (7), (11), (13). Поведение односвязных пластин по схемам 1, 3, 4 описывается уравнениями (15), (17), (13). Все эти уравнения движения можно записать в едином виде:

$$\ddot{\alpha}(t) = Q \left[ P(t) - P_0^* \right]; \quad Q = G_i^{a-1} B_k^{a-2}; \quad P_0^* = P_0^{a-1} \bar{P}_0^{a-2}. \quad (21)$$

Здесь показатель степени  $a = 2$  для двусвязной пластины и  $a = 1$  – для односвязной пластины. Нижние индексы  $i$ ,  $k$  указывают на номер схемы для двусвязной пластины (коэффициенты  $G_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ ) и для пластины без отверстия (коэффициенты  $B_k$ ,  $k = \overline{1,3,4}$ ).

$$G_i = (-1)^{i+1} \frac{2[3R_1(R_2 + R_3) - 2(R_2^2 + R_3R_2 + R_3^2)]}{\rho[3(R_2 + R_3)(2R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) - 8R_1(R_2^2 + R_2R_3 + R_3^2)]} \quad (22)$$

$(i = \overline{1,2});$

$$G_3 = 2(R_1 + 2R_3) / [\rho(R_1 - R_3)(R_1 + 3R_3)];$$

$$G_4 = 2(R_1 + 2R_2) / [\rho(R_2 - R_1)(R_1 + 3R_2)];$$

$$B_1 = 2R_2(3R_1 - 2R_2) / [\rho(6R_2R_1^2 + 3R_2^3 - 8R_2^2R_1)]; \quad B_3 = 2 / (\rho R_1);$$

$$B_4 = G_4 = 2(R_1 + 2R_2) / [\rho(R_2 - R_1)(R_1 + 3R_2)].$$

Начальные условия имеют вид (8).

В момент времени  $t = T$  нагрузка снимается, и пластина движется далее по инерции. При  $0 \leq t \leq T$ , интегрируя уравнение (21), получаем

$$\dot{\alpha}(t) = Q \left[ \int_0^t P(\tau) d\tau - P_0^* t \right]; \quad \alpha(t) = Q \left[ \int_0^t \int_0^m P(\tau) d\tau dm - P_0^* \frac{t^2}{2} \right].$$

При  $T < t \leq t_f$  движение пластины происходит по инерции до остановки в момент  $t_f$  и описывается уравнением (21) при  $P(t) = 0$ :

$$\ddot{\alpha}(t) = -QP_0^* \quad (23)$$

с начальными условиями  $\dot{\alpha}(T)$ ,  $\alpha(T)$ . Момент  $t_f$  определяется из условия

$$\dot{\alpha}(t_f) = 0. \quad (24)$$

Интегрируя уравнение движения (23), получаем

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(T) - QP_0^*(t - T), \quad (25)$$

$$\alpha(t) = \alpha(T) + \dot{\alpha}(T)(t - T) - QP_0^*(t - T)^2 / 2. \quad (26)$$

Из уравнений (24), (25) следует

$$t_f = \left( \int_0^T P(t) dt \right) / P_0^*. \quad (27)$$

По правилу интегрирования по частям справедливо равенство

$$\int_0^T \int_0^t P(\tau) d\tau dt = T \int_0^T P(t) dt - \int_0^T tP(t) dt,$$

учитывая которое, из (26), (27) можно получить выражение для остаточного угла поворота:

$$\alpha(t_f) = QF(P(t), P_0^*, T), \quad F(P(t), P_0^*, T) = \left( \int_0^T P(t) dt \right)^2 / (2P_0^*) - \int_0^T tP(t) dt. \quad (28)$$

Прогибы пластины определяются из равенств (3) для схем 1, 2; соотношениями (3) при  $i = 1$  и  $(x, y) \in S_{11n}$  для схемы 3; выражениями (3) при  $i = 2$  и  $(x, y) \in S_{22n}$  для схемы 4. Максимальный остаточный прогиб пластины

$$W_{\max} = z\alpha(t_f) = zQF(P(t), P_0^*, T), \quad (29)$$

где  $z$  – расстояние от опорного контура до точки максимального прогиба,  $z = b_i^{a-1} c_k^{a-2}$  и  $a, i, k$  обозначают то же, что и в уравнении (21):

$$b_1 = b_3 = R_1 - R_3, \quad b_2 = b_4 = R_2 - R_1 \quad (\text{для двусвязной пластины});$$

$$c_1 = c_3 = R_1, \quad c_4 = R_2 - R_1 \quad (\text{для односвязной пластины}).$$

#### 4. Полигональные пластины, в контуры которых можно вписать окружности

Используя решение задачи о динамическом изгибе одно- и двусвязных правильных полигональных пластин, можно проанализировать динамическое деформирование одно- и двусвязных пластин с произвольными полигональными контурами, в которые можно вписать окружности.

Рассмотрим двусвязную полигональную пластину из идеального жесткопластического материала, шарнирно опертую по выпуклому  $n$ -угольному контуру  $L_1$ , расположенному внутри пластины. Выпуклые  $n$ -угольные внешний контур пластины  $L_2$  и внутренний контур  $L_3$  являются свободными. В каждый контур  $L_j$  можно вписать окружность радиуса  $R_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ). Центры этих окружностей совпадают, а соответствующие участки контуров параллельны (рис. 4). В предельном состоянии таких пластин линейные шарниры, проходящие через вершины контуров, пересекаются в центре вписанных окружностей, как и в [5, 6, 15].

Для рассматриваемой двусвязной пластины возможно деформирование по четырем схемам, аналогичным рассмотренным в п. 2. В случае схем 1, 2 пластина будет деформироваться в виде совокупности  $n$  жестких областей в форме изображенных на рис. 4 трапеций  $A_j B_j C_j D_j$  с углами при основании  $\varphi_j$  и  $\varphi_{j+1}$  ( $j = \overline{1, n}$ ;  $n+1 \equiv 1$ ). Из условия непрерывности скоростей на границах областей  $A_j B_j C_j D_j$

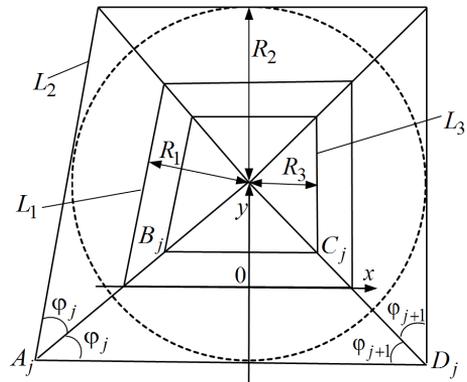


Рис. 4. Двусвязная полигональная пластина, в контуры которой можно вписать окружности

и  $A_{j+1} B_{j+1} C_{j+1} D_{j+1}$  ( $j = \overline{1, n}$ ) следует, что все эти области вращаются вокруг опорных участков с одинаковой скоростью  $\dot{\alpha}(t)$ . Скорости про-

гибов для схем 1, 2 имеют вид (3), где  $(x, y) \in A_j B_j C_j D_j$ , а направление координатных осей  $OX$  и  $OY$  показано на рис. 4.

Мощности инерционных, внешних и внутренних сил в (2) для рассматриваемых пластин обозначим как  $\tilde{K}_i, \tilde{A}_i, \tilde{N}_i$  ( $i$  – номер схемы деформирования). Тогда

$$\tilde{K}_i = K_i \Sigma, \quad \tilde{A}_i = A_i \Sigma, \quad \tilde{N}_i = N_i \Sigma, \quad \Sigma = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2n} \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_j} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_{j+1}} \right), \quad (30)$$

где  $\varphi$  – угол при основании для правильной  $n$ -угольной пластины, с контурами, описанными около окружностей радиусов  $R_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ );  $K_i, A_i, N_i$  – мощности инерционных, внешних и внутренних сил для правильной  $n$ -угольной пластины, определенные в (4)–(6).

Подставляя полученные выражения (30) для мощностей в (1), получаем, что поведение рассматриваемой пластины в случае схем 1, 2 описывается теми же уравнениями (7), которые получены для правильной полигональной пластины.

Действуя аналогично для схем 3, 4 и для пластин без отверстия, получаем, что динамическое поведение  $n$ -угольных одно- и двусвязных пластин с произвольными полигональными контурами, в которые можно вписать окружности, описывается теми же уравнениями, которые получены для соответствующих  $n$ -угольных правильных пластин, и, следовательно, такие пластины имеют одинаковые соответствующие предельные нагрузки, время деформирования, максимальный остаточный прогиб. Кроме этого, все предельные нагрузки  $P_{0i}, \bar{P}_{0k}$  ( $i = \overline{1, 4}, k = 1, 3, 4$ ) для одно- и двусвязных пластин с произвольными полигональными контурами, в которые можно вписать окружности, и уравнения движения для них не зависят от угла  $\varphi$  и количества сторон  $n$  и совпадают с соответствующими величинами для круглых и кольцевых пластин ( $n = \infty$ ). Поэтому оптимальное расположение опор, вычисленное ниже, будет совпадать для указанных пластин с одинаковыми значениями  $R_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ).

## 5. Вычисление оптимальной опоры

Оптимальной будем считать такую опору, при которой пластина имеет максимальную предельную нагрузку и, следовательно, минимальную повреждаемость. Обозначим радиус окружности, вписанной в оптимальную опору, через  $R_{10}$  для двусвязной пластины и  $\bar{R}_{10}$  – для пластины без отверстия.

На рис. 5 приведена безразмерная предельная нагрузка для рассматриваемых пластин в зависимости от параметра  $R_1 / R_2$ , то есть от расположения опорного контура. Линия  $f_1 f_2 f_3 f_4 f_5$  изображает безразмерную предельную нагрузку  $p_0 = P_0 R_2^2 / M_0$ , вычисленную по формулам (9), (10), (12), (14), для полигональной пластины с отверстием, у которого  $R_3 = 0,35 R_2$ . На интервале  $f_1 f_2$  реализуется схема 2, на интервале  $f_2 f_3$  – схема 4, на интервале  $f_3 f_4$  – схема 3, на интервале  $f_4 f_5$  – схема 1. Рассматриваемая пластина имеет оптимальную опору, которая расположена на контуре с радиусом вписанной окружности  $R_{10} = 0,74 R_2$  (в точке  $f_3$ ), в этом случае  $p_0 = 31,46$ .

Линия  $q_1 q_2 q_3 q_4$  на рис. 5 изображает безразмерную предельную нагрузку  $\bar{p}_0 = \bar{P}_0 R_2^2 / M_0$ , вычисленную по (16) при  $i = 1$ , (18)–(20) для полигональной пластины без отверстия. В такой пластине схема 2 не реализуется; на интервале  $q_1 q_2$  пластина деформируется по схеме 4, на интервале  $q_2 q_3$  – по схеме 3, на интервале  $q_3 q_4$  – по схеме 1. Оптимальная опора расположена на контуре с радиусом вписанной окружности  $R_{10} = 0,7 R_2$  (в точке  $q_2$ ), при этом  $\bar{p}_0 = 24,5$ . Такое расположение опоры совпадает с оптимальным, полученным в [17] для круглой пластины на основе точного решения с использованием условия пластичности Йогансена.

Если пластина оперта на внешнем контуре ( $R_1 = R_2$ ), то  $p_0 < \bar{p}_0$ . Из рис. 5 видно, что  $p_0 > \bar{p}_0$  на участке  $0,65 \leq R_1 / R_2 \leq 0,88$ . Следовательно, изменяя расположение опорного контура внутри области пластины, можно найти такое положение опоры, при котором пластина с отверстием будет более прочной, чем пластина без отверстия.

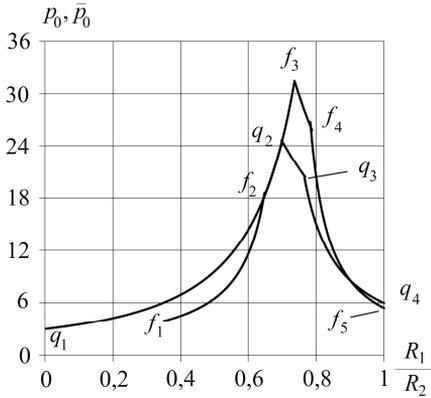


Рис. 5. Безразмерная предельная нагрузка для одно- и двусвязных правильных полигональных пластин:

линия  $f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 - P_0$ ; линия  $q_1 q_2 q_3 q_4 - \bar{P}_0$

Из приведенных численных примеров, а также из анализа выражений для определения предельной нагрузки для одно- и двусвязных полигональных пластин следует, что оптимальная опора расположена там, где схема 3 переходит в схему 4, то есть при образовании пластического шарнира на опорном контуре. Поэтому условие оптимальности для одно- и двусвязных полигональных пластин имеет вид

$$P_{03} = P_{04}; \bar{P}_{03} = \bar{P}_{04}. \quad (31)$$

С учетом (10), (12), (18), (19) условие (31) приводит к алгебраическим уравнениям для определения параметров оптимальных опор  $R_{10}$  для двусвязных пластин:

$$\frac{2R_{10} - R_3}{(R_{10} - R_3)^2 (R_{10} + 2R_3)} = \frac{R_2}{(R_2 - R_{10})^2 (2R_2 + R_{10})} \quad (32)$$

и  $\bar{R}_{10}$  для пластин без отверстия:

$$2 / \bar{R}_{10}^2 = R_2 / [(R_2 - \bar{R}_{10})^2 (2R_2 + \bar{R}_{10})]. \quad (33)$$

Численное решение уравнения (33) методом деления пополам дает оптимальное значение опоры с радиусом вписанной окружности  $\bar{R}_{10} = 0,7R_2$ . Для двусвязных пластин значение параметра оптимальной опоры  $R_{10} / R_2$ , полученное численно из (32), в зависимости от параметра размера отверстия  $R_3 / R_2$  изображено на рис. 6.

Из выражений (28), (29) следует, что максимальный остаточный прогиб при оптимально расположенной опоре  $w_{\max}$  для двусвязных пластин определяется как

$$\begin{aligned}
 w_{\max} &= F(P(t), P_0^*, T) \max \left[ (R_{10} - R_3) G_3 \Big|_{R_1=R_{10}} ; (R_2 - R_{10}) G_4 \Big|_{R_1=R_{10}} \right] = \\
 &= \frac{2}{\rho} F(P(t), P_0^*, T) \max (R_{10} + 2R_3) \max \left( \frac{R_{10} + 2R_3}{R_{10} + 3R_3}, \frac{R_{10} + 2R_2}{R_{10} + 3R_2} \right) = \quad (34) \\
 &= \frac{2}{\rho} F(P(t), P_0^*, T) \left( 1 - \frac{R_3}{R_{10} + 3R_3} \right)
 \end{aligned}$$

и  $\bar{w}_{\max}$  для пластин без отверстия

$$\begin{aligned}
 \bar{w}_{\max} &= F(P(t), P_0^*, T) \max \left[ \bar{R}_{10} B_3 \Big|_{R_1=\bar{R}_{10}} ; (R_2 - \bar{R}_{10}) B_4 \Big|_{R_1=\bar{R}_{10}} \right] = \\
 &= \frac{2}{\rho} F(P(t), P_0^*, T) \max \left[ 1, \frac{\bar{R}_{10} + 2R_2}{\bar{R}_{10} + 3R_2} \right] = \frac{2}{\rho} F(P(t), P_0^*, T),
 \end{aligned}$$

где  $F(P(t)P_0^*, T)$ ,  $G_3$ ,  $G_4$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  определены в (22), (28).

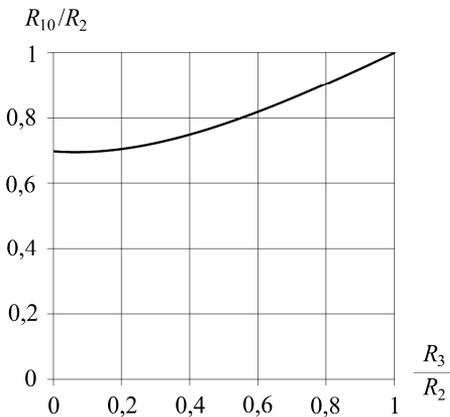


Рис. 6. Зависимость параметра оптимальной опоры  $R_{10} / R_2$  от размера отверстия для двусвязных полигональных пластин

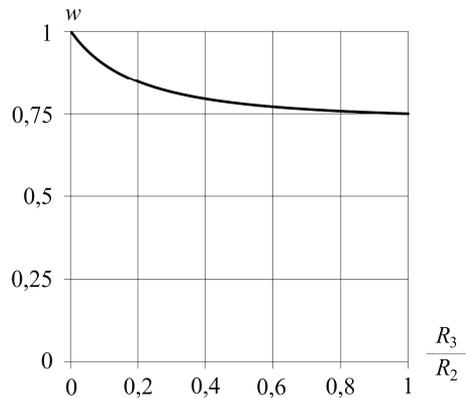


Рис. 7. Значения безразмерного максимального остаточного прогиба  $w$  в зависимости от параметра отверстия  $R_3 / R_2$  при оптимально расположенной опоре для двусвязных полигональных пластин

Для двусвязных пластин значение безразмерного максимального остаточного прогиба  $w = w_{\max} \rho / \left[ 2F(P(t), P_0^*, T) \right]$  при оптимально расположенной опоре, вычисленное из (34), изображено на рис. 7. При

воздействии на пластину одной и той же нагрузкой увеличение размеров отверстия ведет к уменьшению значения  $w$ .

Таким образом, изменяя расположение опорного полигонального контура внутри области полигональной пластины, можно найти такую опору, при которой пластина будет наиболее прочной. Максимальный остаточный прогиб  $W_{\max}$  при неоптимальном расположении опоры будет больше значения  $w_{\max}$ .

### Заключение

На основе модели идеального жесткопластического материала получено общее решение задачи о предельном и динамическом поведении правильных одно- и двусвязных полигональных пластин, шарнирно опертых по неподвижному полигональному контуру, расположенному внутри области пластины. Пластина находится под действием равномерно распределенной по поверхности динамической нагрузки высокой интенсивности взрывного типа, амплитуда которой в начальный момент незначительно превышает предельные значения нагрузки, поэтому схема движения пластины совпадает со схемой предельного деформирования. Показано, что в зависимости от расположения опоры двусвязные пластины могут деформироваться по четырем схемам, а пластины без отверстия – по трем. При всех схемах пластина деформируется в виде совокупности одинаковых жестких областей в форме трапеций, разделенных линейными пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом, равным предельному значению. Для всех схем получены уравнения движения и проанализированы условия реализации схем. Получены простые аналитические выражения для предельной нагрузки и максимального остаточного прогиба пластины. Получены и численно решены алгебраические уравнения, которые определяют оптимальное расположение опорного контура, соответствующее наибольшему значению предельной нагрузки пластины, и, следовательно, наименьшей ее повреждаемости. Получено, что внутренняя опора является оптимальной, если на ней образуется пластический шарнир. Показано, что изменяя расположение опорного контура в пластине с отверстием, можно найти такие положения, при которых эта пластина будет более прочной, чем пластина без отверстия. Получено, что при воздействии на пластину одной и той же нагрузкой увеличение размеров отверстия ведет к уменьшению значения

максимального остаточного прогиба при оптимально расположенной опоре.

Решение задачи распространено на случай одно- и двусвязных пластин с полигональными контурами, в которые можно вписать окружность. Показано, что такие пластины имеют одинаковые соответствующие предельные нагрузки, время деформирования, максимальный остаточный прогиб, которые не зависят от количества сторон полигональных контуров и совпадают с этими же величинами для круглых и кольцевых пластин. Получено, что оптимальное расположение опоры для правильных полигональных пластин без отверстия совпадает с оптимальным, полученным для круглых пластин на основе точного решения с использованием условия пластичности Йогансена.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00102-а).

### **Библиографический список**

1. Комаров К.Л., Немировский Ю.В. Динамика жесткопластических элементов конструкций. – Новосибирск: Наука, 1984. – 234 с.
2. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
3. Баженов В.Г., Ломунов В.К., Осетров С.Л. Исследование применимости жесткопластической модели в задачах импульсного деформирования упругопластических пластин при малых и больших прогибах // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та. Механика предельного состояния. – 2008. – № 1. – С. 64–69.
4. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамическое сопротивление плоских пластических преград. – Новосибирск: ГЕО, 2009. – 311 с.
5. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамический изгиб пластических полигональных плит // Прикл. мех. и техн. физика. – 1988. – № 4. – С. 149–156.
6. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамическое поведение двусвязных полигональных пластических плит // Прикл. мех. – 1987. – Т. 23, № 5. – С. 52–59.
7. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамика жесткопластической правильной полигональной пластины с отверстием под действием взрывных нагрузок // Краевые задачи и математическое моделирование

ние: материалы 9-й Всерос. науч. конф. (28–29 ноября 2008 г., Новокузнецк); Кемер. гос. ун-т. – Новокузнецк, 2008. – Т. 1. – С. 93–97.

8. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Моделирование динамического поведения двусвязной жесткопластической криволинейной пластины, закрепленной по внутреннему контуру // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. 5-й Всерос. конф. с междунар. участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций (г. Самара, 29-30 мая 2008 г.); Самар. гос. ун-т. – Самара, 2008. – С. 197–207.

9. Коробко В.И., Морозов С.А., Прокуров М.Ю. Расчет прямоугольных шарнирно опертых пластинок, нагруженных произвольно приложенной сосредоточенной силой, методом предельного равновесия // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – № 2. – С. 2–8.

10. Коробко В.И., Прокуров М.Ю. Определение разрушающих нагрузок для шарнирно и свободно опертых по контуру пластинок, нагруженных сосредоточенной силой в центре, путем геометрического моделирования их формы // Вестник Брян. гос. техн. ун-та. Машиностроение и транспорт. – 2013. – № 4(40). – С. 122–128.

11. Коробко В.И., Морозов С.А., Прокуров М.Ю. Расчет шарнирно опертых параллелограммных пластинок, нагруженных в центре сосредоточенной силой, методом предельного равновесия // Строительство и реконструкция / Орл. гос. техн. ун-т. – Орел, 2011. – № 3. – С. 22–26.

12. Морозов С.А. Расчет полигональных пластинок постоянной толщины, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой, методом предельного равновесия // Строительство и реконструкция / Орл. гос. техн. ун-т. – Орел, 2011. – № 1. – С. 26–34.

13. Старов А.В. Динамика идеально пластической круглой пластинки с шарнирно неподвижным опиранием // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – № 1(1). – С. 9–15.

14. Lowe P.G. Conjectures relating to rigid-plastic plate bending // Int. J. Mech. Sci. – 1988. – Vol. 30. – No. 5. – P. 365–370.

15. Ржаницын А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1983. – 288 с.

16. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Моделирование предельного и динамического поведения жесткопластической пластины про-

извольной формы с внутренней криволинейной опорой // Вест. Чуваш. гос. пед. ун-та. Механика предельного состояния. – 2013. – № 3 (17). – С. 79–88.

17. Оленев Г.М. Оптимальное расположение дополнительных опор к жесткопластическим круглым пластинкам в случае импульсного нагружения // Уч. зап. Тарт. гос. ун-та. – 1983. – Вып. 659. – С. 30–41.

18. Лепик Ю.Р. Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. – Таллин: Валгус, 1982. – 196 с.

19. Рожваны Д.Н. Оптимальное проектирование изгибаемых систем. – М.: Стройиздат, 1980. – 316 с.

20. Prager W., Rozvany G.I.N. Plastic design of beams: optimal locations of supports and steps in yield moment // Int. J. Mech. Sci. – 1975. – Vol. 17. – No 10 – P. 627–631.

21. Mroz Z., Rozvany G.I.N. Optimal design of structures with variable support conditions // J. Optimiz. Theory Appl. – 1975. – Vol. 15. – No. 1. – P. 85–101.

22. Леллеп Я. Оптимальное расположение дополнительной опоры для импульсивно нагруженной пластической балки // Уч. зап. Тарт. гос. ун-та. – 1979. – Вып. 487. – С. 52–57.

23. Бураковский П.Е. Способ повышения несущей способности пластин бортовой обшивки // Вестник Астрахан. гос. техн. ун-та. Морская техника и технология. – 2013. – № 1. – С. 9–15.

24. Численные и экспериментальные исследования динамического деформирования и разрушения пластины при локальном нагружении / В.Г. Баженов, А.К. Ботвинкин, С.С. Куканов, В.И. Романов, А.А. Рябов, С.Г. Скурихин // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 1, № 1. – С. 31–38.

25. Баженов В.Г., Павленкова Е.В., Артемьева А.А. Численное решение обобщенных осесимметричных задач динамики упругопластических оболочек вращения при больших деформациях // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 427–434.

## **References**

1. Komarov K.L., Nemirovsky Yu. V. Dinamika zhestkoplasticheskikh elementov konstruksii [Dynamics of rigid-plastic structural elements]. Novosibirsk: Nauka, 1984. 234 p.

2. Erkhov M.I. Teoriia ideal'no plasticheskikh tel i konstruksii [Theory of ideal plastic solids and structures]. Moscow: Nauka, 1978. 352 p.

3. Bazhenov V.G., Lomunov V.K., Osetrov S.L. Issledovanie primenimosti zhestkoplasticheskoi modeli v zadachakh impul'snogo deformirovaniia uprugoplasticheskikh plastin pri mal'nykh i bol'shikh progibakh [Investigation of the applicability of rigid-plastic models in problems of pulse deformation of elastic-plastic plates with small and large deflections]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2008, no. 1, pp. 64-69.

4. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Dinamicheskoe soprotivlenie ploskikh plasticheskikh pregrad [Dynamic behavior of flat plastic barriers]. Novosibirsk: GEO, 2009. 311 p.

5. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Dynamic bending of polygonal plastic slabs. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1988, vol. 29, no. 4, pp. 591-597.

6. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P., Dynamic behavior of doubly connected polygonal plastic plates. *Int. Appl. Mech.*, 1987, vol. 23, no. 5, pp. 458-464.

7. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Dinamika zhestkoplasticheskoi pravil'noi poligonal'noi plastiny s otverstiem pod deistviem vzryvnykh nagruzok [Dynamics of rigid-plastic regular polygonal plate with hole under explosive loads]. *Materialy 9 Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii "Kraevye zadachi i matematicheskoe modelirovanie"*. Novokuznetsk: Kemerovskii gosudarstvennyi universitet, 2008, pp. 93-97.

8. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Modelirovanie dinamicheskogo povedeniia dvusviaznoi zhestkoplasticheskoi krivolineinoi plastiny, zakreplennoi po vnutrennemu konturu [Modeling of dynamic behaviour of doubly connected rigid-plastic curved plates supported on the internal contour]. *Trudy 5 Vserossiiskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem "Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi". 1. Matematicheskie modeli mekhaniki, prochnosti i nadezhnosti elementov konstruksii*. Samarskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2008, pp. 197-207.

9. Korobko V.I., Morozov S.A., Procurov M.Yu. Raschet priamougol'nykh sharnirno opertykh plastinok, nagruzhennykh proizvol'no prilozhennoi sosredotochennoi siloi, metodom predel'nogo ravnovesiia [Calculation of rectangular hinge supported plates loaded with concentrated force applied arbitrarily by limit state method]. *Stroitel'naiia mekhanika i raschet sooruzhenii*, 2011, no 2, pp. 2-8.

10. Korobko V.I., Procurow M.Yu. Opredelenie razrushaiushchikh nagruzok dlya sharnirno i svobodno opertykh po konturu plastinok, nagruzhennykh sosredotochennoi siloi v tsentre, putem geometricheskogo modelirovaniya ikh formy [Finding fracture loads for hinge and simply supported along the contour plates, loaded with concentrated force at the center, by geometric modeling of their form]. *Vestnik Brianskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Mashinostroenie i transport*, 2013, no. 4(40), pp. 122-128.

11. Korobko V.I., Morozov S.A., Procurow M.Yu. Raschet sharnirno opertykh parallelogramnykh plastinok, nagruzhennykh v tsentre sosredotochennoi siloi, metodom predel'nogo ravnovesiya [Calculation of hinge supported parallelogram plates, loaded with concentrated force at the center by limit state method]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiia*. Orlovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2011, no. 3, pp. 22-26.

12. Morozov S.A. Raschet poligonal'nykh plastinok postoyannoi tolshchiny, nagruzhennykh ravnomerno raspredelennoi nagruzkoi, metodom predel'nogo ravnovesiya [Computation of polygonal plates with constant thickness and loaded with uniformly distributed load by limit state method]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiia*. Orlovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2011, no. 1, pp. 26-34.

13. Starov A.V. Dinamika ideal'no plasticheskoi krugloi plastinki s sharnirno nepodvizhnym opiraniem [Dynamics of ideal plastic circular plate with fixed hinged support]. *Stroitel'naiia mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii*, 2013, no. 1(1), pp. 9-15.

14. Lowe P.G. Conjectures relating to rigid-plastic plate bending. *Int. J. Mech. Sci.*, 1988, vol. 30, no. 5, pp. 365-370.

15. Rzhanitsyn A.R. Predel'noe ravnovesie plastinok i obolochek [Limit state of plates and shells]. Moscow: Nauka, 1983. 288 p.

16. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Modelirovanie predel'nogo i dinamicheskogo povedeniia zhestkoplasticheskoi plastiny proizvol'noi formy s vnutrennei krivolineinoi oporoi [Modelling of limit and dynamic behaviour of the rigid-plastic plate of any form with the internal curvilinear support]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Mekhanika predel'nogo sostoiianiia*, 2013, no. 3 (17), pp. 79-88.

17. Olenev G.M. Optimal'noe raspolozhenie dopolnitel'nykh opor k zhestkoplasticheskim kruglym plastinkam v sluchae impul'snogo nagruzheniia [Optimal location of additional supports to rigid-plastic circular plates in case of impulse loading]. *Uchenye zapiski Tartuskogo universiteta*, 1983, iss. 659, pp. 30-41.

18. Lepik Yu.R. Optimal'noe proektirovanie neuprugikh konstruksii v sluchae dinamicheskogo nagruzheniia [Optimal design of inelastic structures in the case of dynamic loading]. Tallinn: Valgus, 1982. 196 p.

19. Rozvany G.I.N. Optimal'noe proektirovanie izgibaemykh sistem [Optimal design of flexural systems: beams, grillages, slabs, plates and shells]. Oxford; New York etc.: Pergamon Press, 1976. 297 p.

20. Prager W., Rozvany G.I.N. Plastic design of beams: optimal locations of supports and steps in yield moment. *Int. J. Mech. Sci.*, 1975, vol. 17, no. 10, pp. 627-631.

21. Mroz Z., Rozvany G.I.N. Optimal design of structures with variable support conditions. *J. Optimiz. Theory Appl.*, 1975, vol. 15, no. 1, pp. 85-101.

22. Lellep Ya. Optimal'noe raspolozhenie dopolnitel'noi opory dlia impul'sivno nagruzhennoi plasticheskoi balki [The optimal location of additional support for impulsive loaded plastic beam]. *Uchenye zapiski Tartuskogo universiteta*, 1979, iss. 487, pp. 52-57.

23. Burakovskiy P.E. Sposob povysheniia nesushchei sposobnosti plastin bortovoi obshivki [Method of increasing the carrying capacity of the plates of side planking]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Morskaiia tekhnika i tekhnologiya*, 2013, no. 1, pp. 9-15.

24. Bazhenov V.G., Botvinkin A.K., Kukanov S.S., Romanov V.I., Riabov A.A., Skurikhin S.G. Chislennye i eksperimental'nye issledovaniya dinamicheskogo deformirovaniia i razrusheniia plastiny pri lokal'nom nagruzhenii [Numerical and experimental investigation of dynamic deformation and destruction of plate subjected to local loading]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred*, 2008, vol. 1, no. 1, pp. 31-38.

25. Bazhenov V.G., Pavlenkova E.V., Artem'eva A.A. Chislennoe reshenie obobshchennykh osesimmetrichnykh zadach dinamiki uprugoplasticheskikh obolochek vrashcheniia pri bol'shikh deformatsiakh [Numerical solution of generalized dynamic axisymmetric problems for elastoplastic shells of revolution under large deformations]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 427-434.

### Об авторе

**Романова Татьяна Павловна** (Новосибирск, Россия) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физики быстропотекающих процессов Института теоретической

и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1, e-mail: lab4nemir@gmail.com)

### **About the author**

**Tatiana P. Romanova** (Novosibirsk, Russian Federation) – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher; Laboratory of Physics of Fast Processes; Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics (4/1 Institutskaya str., 630090, Novosibirsk, Russian Federation, e-mail: lab4nemir@gmail.com).

Получено 22.08.2014

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Романова Т.П. Оптимальное опирание жесткопластических одно- и двусвязных полигональных пластин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 4. – С. 152–177. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.06

Please cite this article in English as:

Romanova T.P. Optimal support of rigid-plastic singly and doubly connected polygonal plates. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No. 4. Pp. 152-177. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.06