

DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.04

УДК 539.3

В.В. Елисеев, Т.В. ЗиновьеваСанкт-Петербургский государственный политехнический университет,
Санкт-Петербург, Россия**ДВУМЕРНЫЕ (ОБОЛОЧЕЧНЫЕ) И ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛИ
ДЛЯ УПРУГОГО ТОНКОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА**

Рассматривается вариант классической теории оболочек (ВКО), построенный на основе аналитической механики Лагранжа. Применяется прямой подход к оболочкам как материальным поверхностям, элементами которых являются материальные нормали с пятью степенями свободы – тремя трансляциями и двумя поворотами. Система уравнений и граничных условий выводится из принципа виртуальной работы с прямым тензорным исчислением. Такой подход позволяет снять проблемы и противоречия, характерные для традиционных представлений. Сопоставление этой теории оболочек (ВКО) с широкоизвестными вариантами, а также с решением пространственной задачи – цель данной работы.

Поставлены и решены задачи для тонкостенного бесконечного цилиндра по трем теориям: ВКО, известной теории А.Л. Гольденвейзера и трехмерной теории упругости. Для оболочечных моделей имеем линейные алгебраические системы, для трехмерной модели – ОДУ по толщине. Аналитически построены экспоненциальные решения статических задач с различной изменяемостью. Найдены численные решения с применением компьютерной математики.

При сравнении показателей экспонент решений с краевой нагрузкой обнаружено, что для малых значений волнового числа и толщины оболочки обе оболочечные теории хорошо согласуются с трехмерной теорией. С уменьшением длины волны относительно толщины оболочки их погрешность возрастает, однако область применимости ВКО оказалась несколько шире, чем у теории А.Л. Гольденвейзера.

Найденные перемещения оболочки под быстроменяющейся по координатам нагрузкой по обеим теориям хорошо согласуются друг с другом. Согласие же с трехмерной теорией – для малых значений волновых чисел. Расчеты показали, что при внешней нагрузке, имеющей осевую и окружную составляющие, ВКО предсказывает нормальную компоненту смещения с большей точностью.

Ключевые слова: упругая оболочка, лагранжева механика, тонкостенный цилиндр, теория упругости, статика, быстроменяющаяся нагрузка.

V.V. Yeliseyev, T.V. Zinovieva

Saint-Petersburg State Polytechnic University, Saint-Petersburg,
Russian Federation

TWO-DIMENSIONAL (SHELL-TYPE) AND THREE-DIMENSIONAL MODELS FOR ELASTIC THIN-WALLED CYLINDER

The variant of the classical theory of shells (CTS) built on the basis of Lagrange analytical mechanics is under analysis. The direct approach to shells as material surfaces, the elements of which are material normals with five degrees of freedom – three translations and two rotations, is used. The system of equations and boundary conditions is derived from the principle of virtual work with direct tensor calculus. Such approach makes it possible to discard the problems and controversies characteristic of conventional concepts. This paper is aimed at comparing this theory of shells (CTS) with widely known variants, as well as with the solution of the spatial problem.

Problems for the thin-walled infinite cylinder have been formulated and solved on the basis of three theories: CTS, the well-known theory of A.L. Goldenweiser and three-dimensional elasticity theory. For the shell-based models, we have linear algebraic systems, for the three-dimensional models – the ordinary differential equation (ODE) over the thickness. Exponential solutions of static problems with different variability are built analytically. Numerical solutions using computer mathematics have been found.

In comparing exponents of solutions with the boundary load, it was found that for small values of the wave number and the shell thickness, both shell theories agree well with the three-dimensional theory. As the wavelength decreases relative to the shell thickness, their uncertainty increases, though the area of CTS applicability has turned to be somewhat wider than that in the theory of A.L. Goldenweiser.

According to both theories, the detected displacements of the shell under the load rapidly changing by the coordinates are well coordinated with each other. The coordination with the three-dimensional theory is suitable for small values of wave numbers. The calculations have shown that, under external load having the axial and circumferential components, CTS predicts a normal displacement component with a greater accuracy.

Keywords: elastic shell, Lagrange mechanics, thin-walled cylinder, theory of elasticity, statics, rapidly changing load.

Введение

В основе многих важных для практики расчетов на прочность, жесткость и устойчивость оболочечных конструкций по-прежнему лежат «двумерные» теории, несмотря на растущую доступность численных решений трехмерных задач. Основы теории упругих оболочек были и остаются предметом дискуссий [2–13]. Однако в результате работы целого ряда авторов формирование этих основ близится к завершению благодаря эффективным аналитическим технологиям лагранжевой механики упругих тел с вариационным и тензорным исчислением [14–18].

В статье представлен вариант классической теории оболочек как поверхностей с материальными нормальными, построенной на основе механики Лагранжа [14, 15, 17, 18]. Система уравнений и граничных условий выводится из дифференциального вариационного принципа виртуальной работы. При таком подходе не возникает проблем и противоречий, характерных для традиционных представлений (отбрасывание «малых» членов, «шестое» уравнение равновесия, граничные условия на свободном крае). Интерес представляет сопоставление этой теории с общепризнанными теориями оболочек.

Цель данной работы – сопоставление результатов по новому варианту классической теории оболочек (ВКО) [14, 15], теории А.Л. Гольденвейзера [4, 5] и «трехмерной» теории.

Проведены аналитико-численные расчеты бесконечной цилиндрической оболочки по двум оболочечным моделям и трехмерной теории упругости. Сравнивались решения статических задач двух типов: экспоненциальные решения с краевой нагрузкой и решения с быстроменяющейся распределенной нагрузкой.

1. Уравнения теории тонких оболочек

Предполагается, что частицы поверхности обладают пятью степенями свободы: тремя трансляциями и двумя поворотами. В линейной теории движение определяется векторами малых перемещений \mathbf{u} в пространстве и поворота $\boldsymbol{\theta}$ в касательной плоскости. Отличие от моделей Коссера и Тимошенко в том, что поворот вокруг нормали не вводится (как и соответствующие моменты).

Удобнее работать с вектором изменения нормали к оболочке: $\boldsymbol{\varphi} \triangleq \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n} = \dot{\mathbf{n}}$. Точка означает малое приращение при деформации. По выражению работы внешнего распределенного момента вводится соответствующая $\boldsymbol{\varphi}$ обобщенная сила: $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{m}' \triangleq \mathbf{m} \times \mathbf{n}$.

Деформация поверхности определяется двумя симметричными тензорами в касательной плоскости:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \widetilde{\nabla \mathbf{u}}^S, \quad \boldsymbol{\kappa} = -\widetilde{\nabla \boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}^T \quad (\mathbf{b} \triangleq -\nabla \mathbf{n}). \quad (1)$$

Здесь и далее волнистая черта обозначает составляющую тензора в касательной плоскости; значки $(\dots)^S, (\dots)^T$ указывают на симметризацию

и транспонирование. Согласно кинематической гипотезе Кирхгофа, поворот связан с перемещением:

$$\varphi = -\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \quad (2)$$

Уравнение виртуальной работы для оболочки имеет вид

$$\int (\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m}' \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} - \delta \Pi) dO + \oint (\mathbf{F}^0 \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}^0 \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) dl = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{q} и \mathbf{m}' – внешняя распределенная нагрузка и момент на поверхности; \mathbf{F}^0 и \mathbf{M}^0 – на контуре. Вариация энергии деформации $\delta \Pi$ определяет работу внутренних сил (с минусом) на единицу площади. Принимая очевидное $\Pi = \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa})$, получим $\delta \Pi = \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\tau} \triangleq \partial \Pi / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\mu} \triangleq \partial \Pi / \partial \boldsymbol{\kappa}$. Вводя векторный множитель Лагранжа \mathbf{Q} в связи с (2), получим уравнения баланса сил и моментов

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{Qn}) + \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{b}, \quad \widetilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{Q} = \mathbf{m}' \quad (4)$$

и граничные условия

$$[\mathbf{F}^0 - \mathbf{v}(\mathbf{T} + \mathbf{Qn}) + \partial_l (\mathbf{A} \cdot \mathbf{ln})] \cdot \delta \mathbf{u} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{vn} \cdot \partial_v \delta \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{M}^0 \times \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}. \quad (5)$$

Всего в компонентах имеем пять уравнений равновесия и четыре скалярных условия на контуре оболочки.

Для изотропного материала простейшие соотношения упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= C[(1-\nu)\boldsymbol{\varepsilon} + \nu \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a}], \quad \boldsymbol{\mu} = D[(1-\nu)\boldsymbol{\kappa} + \nu \boldsymbol{\kappa} \mathbf{a}], \\ \mathbf{a} &\triangleq \nabla \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \triangleq \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \boldsymbol{\kappa} \triangleq \text{tr}(\boldsymbol{\kappa}), \\ C &= Eh/(1-\nu^2), \quad D = Ch^2/12. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь коэффициенты C, D взяты как в пластине Кирхгофа; E – модуль упругости материала оболочки; h – ее толщина; ν – коэффициент Пуассона. Соотношений упругости для вектора перерезывающих сил \mathbf{Q} в классической теории нет, вместо него имеем соотношение (2).

В неклассической модели Тимошенко элемент оболочки может отклоняться от нормали к ее поверхности, ограничение (2) отсутствует:

$$\boldsymbol{\varphi} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \triangleq \boldsymbol{\gamma} \neq 0. \quad \text{Теперь } \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \delta \Pi = \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{Q} \triangleq \partial \Pi / \partial \boldsymbol{\gamma}.$$

В работе [19] уравнения (4)–(6) расписаны для случая осесимметричных деформаций цилиндрической и гофрированной оболочек.

2. Однородная задача для оболочки

Рассматривается решение уравнений без нагрузок для бесконечной замкнутой круговой цилиндрической оболочки: $-\infty < z < \infty$, $0 < \theta < 2\pi$ (рис. 1).

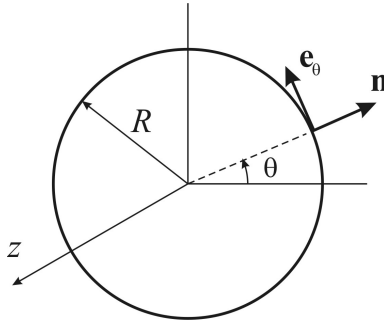


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка

Для цилиндрической оболочки распишем геометрические уравнения и вектор перемещения:

$$\mathbf{r}(\theta, z) = R\mathbf{n}(\theta) + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{e}_\theta \Rightarrow \nabla = R^{-1}\mathbf{e}_\theta\partial_\theta + \mathbf{k}\partial_z, \quad \underline{\underline{b}} = -R^{-1}\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta,$$

$$\mathbf{u} = u_\theta\mathbf{e}_\theta + u_z\mathbf{k} + u_n\mathbf{n}, \quad \nabla\mathbf{u} \triangleq \mathbf{g} = \varepsilon_\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta + \varepsilon_z\mathbf{k}\mathbf{k} + g_{\theta z}\mathbf{e}_\theta\mathbf{k} + g_{z\theta}\mathbf{k}\mathbf{e}_\theta - \varphi\mathbf{n}.$$

По формулам (1), (2) определим поворот, деформации удлинения и изгиба:

$$\varepsilon_\theta = R^{-1}(\partial_\theta u_\theta + u_n), \quad \varepsilon_z = \partial_z u_z, \quad g_{\theta z} = R^{-1}\partial_\theta u_z, \quad g_{z\theta} = \partial_z u_\theta, \quad 2\varepsilon_{\theta z} = g_{\theta z} + g_{z\theta},$$

$$\varphi_\theta = R^{-1}(u_\theta - \partial_\theta u_n), \quad \varphi_z = -\partial_z u_n; \quad \nabla\varphi \triangleq \mathbf{G}, \quad \mathbf{b} \cdot \nabla\mathbf{u}^T = -R^{-1}\mathbf{e}_\theta(\varepsilon_\theta\mathbf{e}_\theta + g_{z\theta}\mathbf{k}),$$

$$\kappa_\theta = -G_\theta - R^{-1}\varepsilon_\theta, \quad \kappa_z = -G_z, \quad \kappa_{\theta z} = -G_{\theta z} - R^{-1}g_{z\theta}.$$

Соотношения упругости (6) примут вид

$$\tau_\theta = C(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_z), \quad \tau_z = C(\varepsilon_z + \nu\varepsilon_\theta), \quad \tau_{\theta z} = C(1-\nu)\varepsilon_{\theta z},$$

$$\mu_\theta = D(\kappa_\theta + \nu\kappa_z), \quad \mu_z = D(\kappa_z + \nu\kappa_\theta), \quad \mu_{\theta z} = D(1-\nu)\kappa_{\theta z},$$

$$T_\theta = \tau_\theta - R^{-1}\mu_\theta, \quad T_z = \tau_z, \quad T_{\theta z} = \tau_{\theta z}, \quad T_{z\theta} = \tau_{\theta z} - R^{-1}\mu_{\theta z}.$$

Уравнения баланса сил и моментов (4) при отсутствии внешних моментов

$$\begin{aligned} R^{-1}\partial_{\theta}T_{\theta} + \partial_z T_{z\theta} - R^{-1}Q_{\theta} + f_{\theta} &= 0, & R^{-1}\partial_{\theta}T_{\theta z} + \partial_z T_z + f_z &= 0, \\ R^{-1}(-T_{\theta} + \partial_{\theta}Q_{\theta}) + \partial_z Q_z + f_n &= 0, \\ R^{-1}\partial_{\theta}\mu_{\theta} + \partial_z \mu_{\theta z} &= -Q_{\theta}, & R^{-1}\partial_{\theta}\mu_{\theta z} + \partial_z \mu_z &= -Q_z. \end{aligned}$$

Всю систему можно переписать в виде «разрешающего уравнения в перемещениях», используя матричные обозначения:

$$Lu + f = 0, \quad (7)$$

где введены столбцы

$$u \triangleq (u_{\theta} \quad u_z \quad u_n)^T, \quad f \triangleq (f_{\theta} \quad f_z \quad f_n)^T = (q_{\theta} \quad q_z \quad q_n)^T (1-\nu^2)R^2/Eh$$

и операторная матрица

$$L \triangleq \begin{pmatrix} L_{\theta\theta} & L_{\theta z} & L_{\theta n} \\ L_{\theta z} & L_{zz} & L_{zn} \\ -L_{\theta n} & -L_{zn} & L_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} L_{\theta\theta} &\equiv (1+4\alpha^2)\left[\partial_{\theta}^2 + (1-\nu)R^2\partial_z^2/2\right], & L_{\theta z} &\equiv (1+\nu)R\partial_{\theta}\partial_z/2, \\ L_{\theta n} &\equiv (1+2\alpha^2)\partial_{\theta} - 2\alpha^2(\partial_{\theta}^3 + R^2\partial_{\theta}\partial_z^2), \\ L_{zz} &\equiv (1-\nu)\partial_{\theta}^2/2 + R^2\partial_z^2, & L_{zn} &\equiv \nu R\partial_z, \\ L_{nn} &\equiv -(1+\alpha^2) + 2\alpha^2(\partial_{\theta}^2 + \nu R^2\partial_z^2) - \alpha^2(\partial_{\theta}^2 + R^2\partial_z^2)^2. \end{aligned}$$

Далее разыскиваем решение в виде

$$u(\theta, z) = Ue^{(im\theta - \lambda z)} \Rightarrow \partial_{\theta}u \rightarrow imU, \quad \partial_z u \rightarrow -\lambda U \quad m=0,1,2,\dots,$$

что приведет к линейной алгебраической однородной системе. Приравняв нулю определитель, получим биквадратное уравнение 8-й степени для λ . Представляет большой интерес рассмотрение корней (комплексных) этого уравнения при возрастающих m для разных теорий. Эта задача легко решается средствами компьютерной математики.

Согласно теории оболочек А.Л. Гольденвейзера [4] элементы матрицы в (7) должны измениться так:

$$\begin{aligned} L_{\theta\theta} &\equiv (1+\alpha^2)\partial_{\theta}^2 + (1-\nu)(1+4\alpha^2)R^2\partial_z^2/2, & L_{\theta n} &\equiv \partial_{\theta} - \alpha^2\partial_{\theta}^3 - (2-\nu)\alpha^2R^2\partial_{\theta}\partial_z^2, \\ L_{nn} &\equiv -1 - \alpha^2(\partial_{\theta}^2 + R^2\partial_z^2)^2. \end{aligned}$$

3. Полый цилиндр

Рассмотрим ту же задачу с позиций трехмерной теории упругости для полого цилиндра (рис. 2). Отметим, что подобный анализ был проделан еще в работе [1].

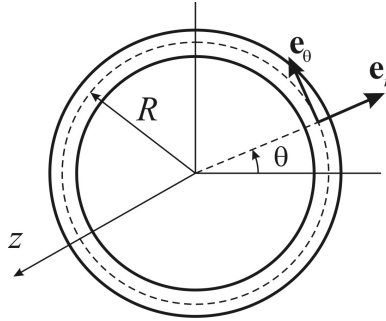


Рис. 2. Полый цилиндр

Соотношения упругости и баланс сил в цилиндре

$$\nabla \mathbf{u}^S = \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\boldsymbol{\tau} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \mathbf{E} \right), \quad \sigma \triangleq \text{tr}(\boldsymbol{\tau}), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{f} = 0$$

распишем в компонентах

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{k}, \quad \varepsilon_r = \partial_r u_r, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} (\partial_\theta u_\theta + u_r), \quad \varepsilon_z = \partial_z u_z, \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \partial_r u_\theta + \frac{1}{r} (\partial_\theta u_r - u_\theta), \quad 2\varepsilon_{rz} = \partial_r u_z + \partial_z u_r, \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \partial_\theta u_z + \partial_z u_\theta; \\ \boldsymbol{\tau} &= \sigma_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \sigma_\theta \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \sigma_z \mathbf{k} \mathbf{k} + \tau_{r\theta} (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r) + \\ &+ \tau_{rz} (\mathbf{e}_r \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{e}_r) + \tau_{\theta z} (\mathbf{e}_\theta \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{e}_\theta); \quad \partial_r \sigma_r + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta + \partial_\theta \tau_{r\theta}) + \partial_z \tau_{rz} + f_r = 0, \\ \partial_r \tau_{r\theta} + \frac{1}{r} (\partial_\theta \sigma_\theta + 2\tau_{r\theta}) + \partial_z \tau_{\theta z} + f_\theta &= 0, \quad \partial_r \tau_{rz} + \frac{1}{r} (\tau_{rz} + \partial_\theta \tau_{\theta z}) + \partial_z \sigma_z + f_z = 0. \end{aligned}$$

Представляя все неизвестные в виде $\Phi(r) \exp(im\theta - \lambda z)$, получим систему ОДУ

$$\begin{aligned} \sigma_r' + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta + im\tau_{r\theta}) - \lambda\tau_{rz} &= 0, \quad \tau_{r\theta}' + \frac{1}{r}(im\sigma_\theta + 2\tau_{r\theta}) - \lambda\tau_{\theta z} = 0, \\ \tau_{rz}' + \frac{1}{r}(\tau_{rz} + im\tau_{\theta z}) - \lambda\sigma_z &= 0, \quad u_r' = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \\ u_\theta' &= \frac{1}{r}(u_\theta - imu_r) + \frac{\tau_{r\theta}}{\mu}, \quad u_z' = \lambda u_r + \frac{\tau_{rz}}{\mu}, \end{aligned} \quad (8)$$

где для исключения $\sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\theta z}$ служат уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{1-\nu}[2\mu(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_z) + \nu\sigma_r], \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}(u_r + imu_\theta), \quad \varepsilon_z = -\lambda u_z, \\ \sigma_z &= \frac{1}{1-\nu}[2\mu(\varepsilon_z + \nu\varepsilon_\theta) + \nu\sigma_r], \quad \tau_{\theta z} = \mu\left(\frac{im}{r}u_z - \lambda u_\theta\right). \end{aligned}$$

Перепишем систему (8) в матричном виде:

$$y' = A(r, \lambda)y, \quad y \triangleq (\sigma_r \quad \tau_{r\theta} \quad \tau_{rz} \quad u_r \quad u_\theta \quad u_z)^T. \quad (9)$$

Это матричное ОДУ вместе с шестью однородными граничными условиями

$$r = R \pm h/2: \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0 \quad (10)$$

образуют задачу с собственным значением λ .

4. Численный расчет однородной задачи для цилиндра

Задача (9)–(10) решается численно методом конечных разностей. Исходная система ОДУ и граничных условий аппроксимируется разностными уравнениями с равномерным шагом по радиусу $\delta = 1/N$; вектор-функция $y(r)$ непрерывного аргумента r заменяется сеточной вектор-функцией y_i , ($i = 0, \dots, N$). Для аппроксимации этой системы используется неявная симметричная одношаговая разностная схема, имеющая второй порядок точности [20, 21]:

$$(y_{i+1} - y_i)/\delta = [A_i(\lambda)y_i + A_{i+1}(\lambda)y_{i+1}]/2, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Для неизвестных $6(N+1)$ значений вектор-функции y_i записывается разностный аналог уравнений (9) для узлов с номерами $i = 0 \dots N-1$ – это система $6N$ алгебраических уравнений, которую дополняют шесть граничных условий (10) в узлах $i = 0, N$. В итоге при-

ходим к линейной алгебраической однородной системе, определитель которой зависит от λ .

Разделяя вещественную и мнимую части λ и приравнявая определитель к нулю, приходим к системе двух нелинейных уравнений относительно $\text{Re}(\lambda)$ и $\text{Im}(\lambda)$. Решение этой системы проводилось методом Ньютона, в качестве начального приближения использованы значения, полученные по оболочечной модели. Изложенный алгоритм реализован в пакете Mathematica.

Расчеты проводились для оболочки радиусом $R=1$ м при различных значениях волнового числа m и толщины оболочки h . Под терминами «волновое число» и «длина волны» будем понимать характеристики периодического решения рассматриваемой статической задачи.

Материал оболочки – сталь с модулем упругости $E=210$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu=0,3$.

По оболочечным моделям найдем всего 8 комплекснозначных λ . Будем строить корни из первого квадранта, исключая из рассмотрения комплексно-сопряженные и корни, отличающиеся знаком.

На рис. 3 приведены значения λ , найденные для оболочки толщиной $h=0,05$ м по двум оболочечным теориям при изменении волнового числа m от 0 до 100 (m принимает целые значения, корни соединены линиями только для наглядности). Направление движения вдоль веток с ростом m отмечено на графике стрелками. Ветки, найденные по формулам для полого цилиндра, на этом графике показаны сплошной линией.

Здесь и далее корни первой ветви помечены квадратами, второй – треугольниками, также помечены соответствующие им погрешности. Отметим, что пересечения корневых веток не происходит, поскольку соответствующие корни отвечают разным значениям m .

Для того чтобы оценить близость решения λ по оболочечным моделям к решению λ_{3D} по трехмерной теории упругости, рассчитаем относительные погрешности по формулам

$$\Delta_{\text{Re}} = \frac{[\text{Re}(\lambda) - \text{Re}(\lambda_{3D})]}{|\text{Re}(\lambda_{3D})|} 100\%, \quad \Delta_{\text{Im}} = \frac{[\text{Im}(\lambda) - \text{Im}(\lambda_{3D})]}{|\text{Im}(\lambda_{3D})|} 100\%.$$

Погрешности представлены на рис. 4.

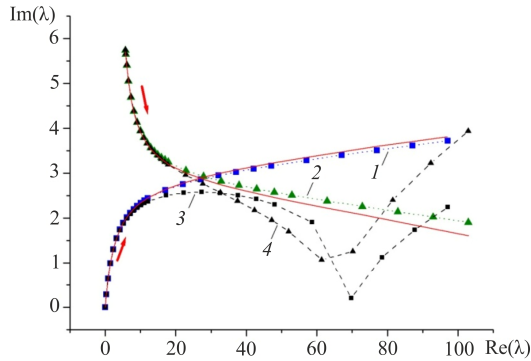


Рис. 3. Комплексные корни для разных m по теориям оболочек: ВКО (1, 2), теории А.Л. Гольденвейзера (3, 4)

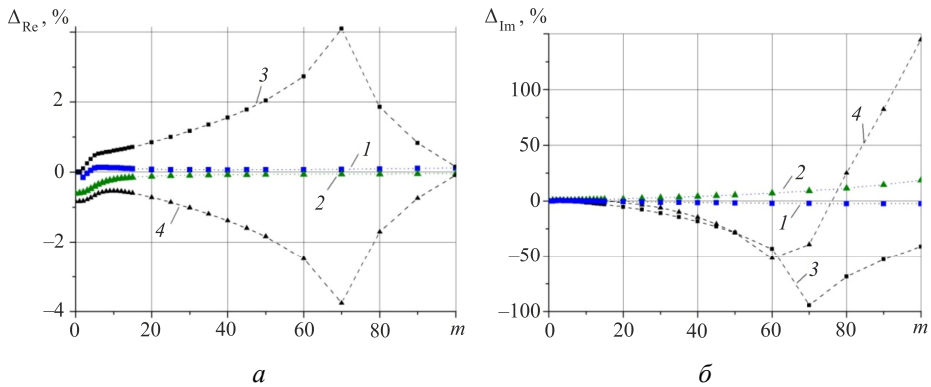


Рис. 4. Зависимость относительной погрешности от m для ВКО (1, 2) (а), для теории А.Л. Гольденвейзера (3, 4) (б)

На рис. 5, 6 приведены аналогичные зависимости, найденные при $m=50$ для разных толщин оболочки $h=0,01...0,1$ м (направление движения также показывают стрелки). На комплексной плоскости рис. 5 сплошной линией показаны ветви решений по трехмерной теории упругости.

Из приведенных зависимостей видно, что для малых значений волнового числа m и толщины оболочки h обе оболочечные теории хорошо согласуются с трехмерной теорией. С уменьшением длины волны l относительно толщины h оболочки их погрешность возрастает, однако результаты для уравнений Гольденвейзера соответствуют трехмерному решению несколько хуже, чем результаты по новой версии классической теории, особенно это касается мнимой составляющей собственных значений. Отметим, что при отношении $l/h \approx 1,8$ ($mh \approx 3,5$ м) погрешность теории А.Л. Гольденвейзера скачкообразно возрастает.

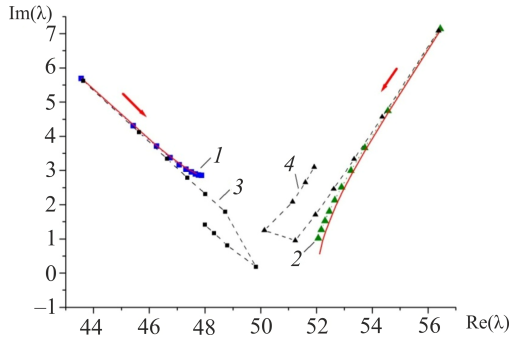


Рис. 5. Комплексные корни для разных h по теориям оболочек: ВКО (1, 2), теории А.Л. Гольденвейзера (3, 4)

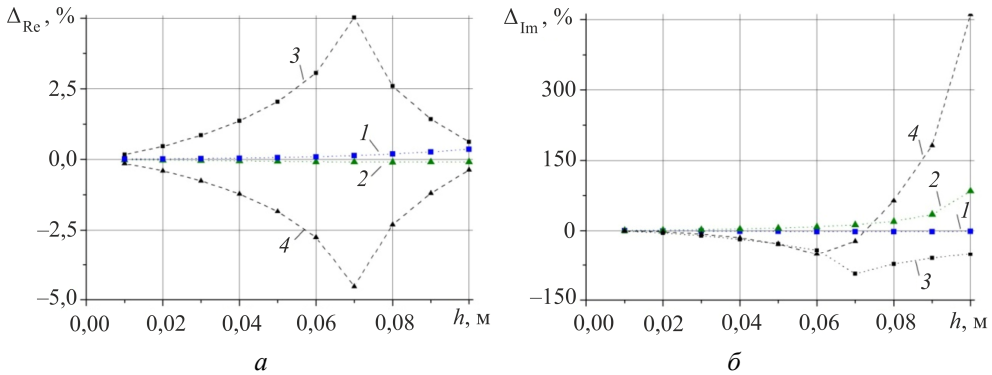


Рис. 6. Зависимость относительной погрешности от h для ВКО (1, 2) (а), для теории А.Л. Гольденвейзера (3, 4) (б)

Различие между теориями оболочек проявится наиболее заметно при решении краевых задач для конечной цилиндрической оболочки большой толщины, нагруженной воздействием с большой изменчивостью по координатам. Отметим, что проведенные исследования позволяют ожидать различий между теориями и в динамике, в частности, при расчете высоких собственных частот оболочки.

5. Расчет нагруженного цилиндра

Изменим постановку задачи для оболочечной модели: рассмотрим равновесие при самоуравновешенной периодической нагрузке:

$$q_\theta = Q_\theta \sin m\theta \cos nz, \quad q_z = Q_z \cos m\theta \sin nz, \quad q_n = Q_n \cos m\theta \cos nz, \\ m, n = 1, 2, \dots$$

Разыскивая частное решение системы (7) в виде

$$u_\theta = U_\theta \sin m\theta \cos nz, \quad u_z = U_z \cos m\theta \sin nz, \quad u_n = U_n \cos m\theta \cos nz,$$

получим для амплитуд $U \triangleq (U_\theta \quad U_z \quad U_n)^T$ неоднородную алгебраическую систему

$$MU = -F, \quad M = M^T, \quad (11)$$

где $F \triangleq (F_\theta \quad F_z \quad F_n)^T = (Q_\theta \quad Q_z \quad Q_n)^T (1 - \nu^2) R^2 / Eh$.

В силу условий ограниченности на бесконечности общее решение задачи совпадает с частным.

В соответствующей постановке для трехмерного цилиндра из п.3 компоненты нагрузки, напряжений и перемещений зависят от 2 координат следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos m\theta \cos nz: & \quad f_r, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, u_r, \\ \sin m\theta \cos nz: & \quad f_\theta, \tau_{r\theta}, u_\theta, \\ \cos m\theta \sin nz: & \quad f_z, \tau_{rz}, u_z, \\ \sin m\theta \sin nz: & \quad \tau_{\theta z}. \end{aligned}$$

Для неизвестных амплитуд, функций r , получим систему ОДУ

$$Y' = B(r)Y - \Phi, \quad Y \triangleq (\Sigma_r \quad T_{r\theta} \quad T_{rz} \quad U_r \quad U_\theta \quad U_z)^T \quad (12)$$

со столбцом нагрузок $\Phi \triangleq (Q_n/h \quad Q_\theta/h \quad Q_z/h \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$. Она дополняется однородными граничными условиями

$$r = R \pm h/2: \quad \Sigma_r = T_{r\theta} = T_{rz} = 0. \quad (13)$$

Вид матриц M и $B(r)$ здесь не приводится из-за их громоздкости.

Краевая задача (12)–(13) сводится методом конечных разностей, как было описано в п. 4, к неоднородной алгебраической системе относительно значений неизвестных функций в узлах разностной сетки. Эта система решается встроенной в пакет Mathematica процедурой [22]. Сами функции затем восстанавливаются посредством интерполяции. Задача решалась также методом стрельбы в пакете Mathcad (с использованием встроенных функций “sbval” и “rkfixed”). Результаты совпали.

С целью сравнения двух оболочечных теорий далее рассматривались три варианта нагрузки (отдельно по каждой компоненте) при различных значениях m и n , полученные компоненты смещений оболочки

сопоставлялись с перемещениями срединной поверхности трехмерного цилиндра.

Расчеты проводились для цилиндра радиусом $R=1$ м и толщиной $h=0,05$ м. Материал – сталь с модулем упругости $E=210$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu=0,3$.

Нормальная нагрузка

Задачи (11) и (12)–(13) решались для нагрузки $Q_n=10^5$ Па, $Q_\theta=Q_z=0$ Па. В этом случае оболочка имеет смещения преимущественно вдоль нормали, поэтому сравнивались только компоненты U_n . Для оценки погрешности относительно перемещений по трехмерной теории использовалась формула

$$\Delta_U = \frac{U - U_{3D}}{|U_{3D}|} 100\%.$$

На рис. 7 приведен график зависимости относительной погрешности нормального смещения от m по новой теории оболочек для трех значений волнового числа $n=1; 10; 15$. Кривые, соответствующие теории оболочек А.Л. Гольденвейзера, не показаны, так как практически совпали с приведенными.

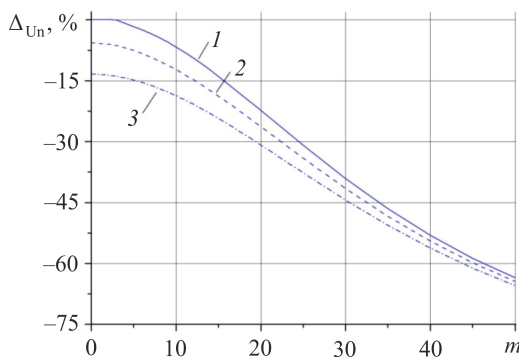


Рис. 7. Зависимость относительной погрешности по ВКО для n : 1 (1), 10 (2), 15 (3)

Из графика видно, что, как и для однородной задачи, с ростом волновых чисел m и n погрешность оболочечных теорий возрастает. Ошибка при использовании оболочечной модели не превышает 10 % для $m \leq 12$ при $n = 1$ и для $m \leq 7$ при $n = 10$.

Касательная нагрузка

При нагрузке $Q_\theta = 10^5$ Па, $Q_n = Q_z = 0$ Па все компоненты смещения оболочки сравнимы друг с другом (рис. 8).

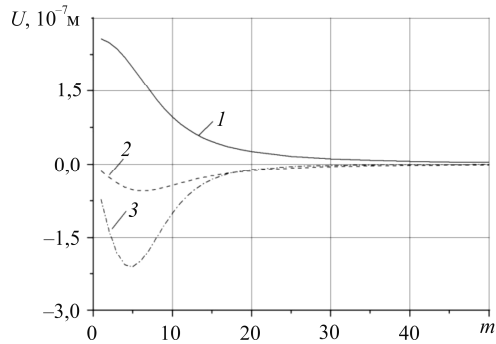


Рис. 8. Компоненты смещения оболочки по трехмерной теории при касательной нагрузке для $n = 10$: U_θ (1), U_z (2), U_n (3)

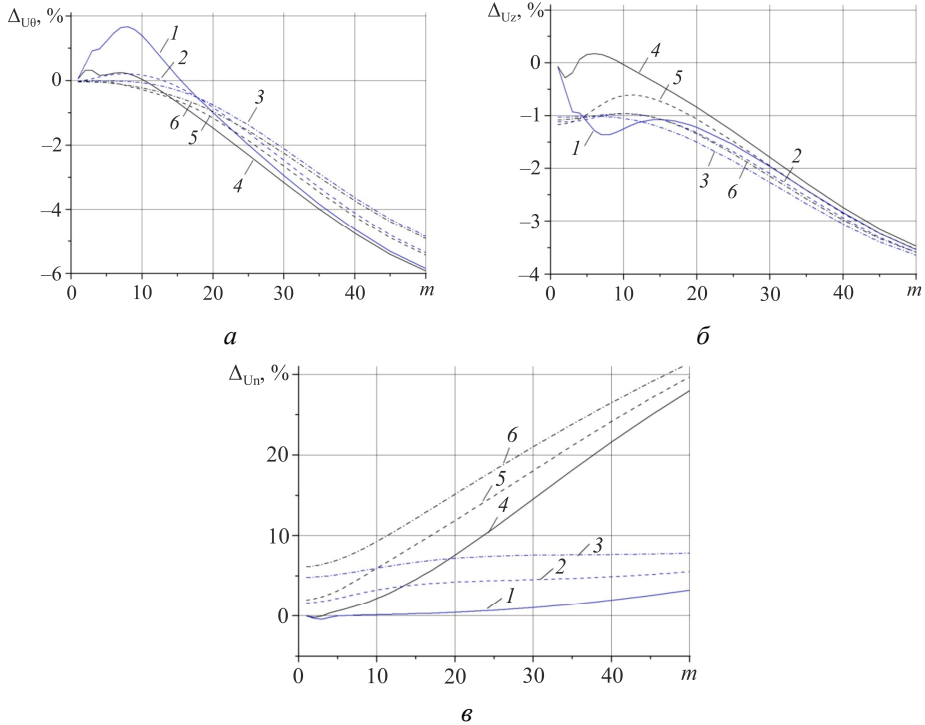


Рис. 9. Относительная погрешность при касательной нагрузке для окружной (а), осевой (б), нормальной (в) компонент смещения по ВКО для n : 1 (1), 10 (2), 15 (3); по теории А.Л. Гольденвейзера для n : 1 (4), 10 (5), 15 (6)

Расчеты показали, что при такой нагрузке теория А.Л. Гольденвейзера для малых волновых чисел несколько лучше (в пределах 1,5%) предсказывает перемещения U_θ и U_z , а при $m > 25$ погрешности обеих теорий почти одинаковы (рис. 9). Однако нормальная компонента U_n , по теории А.Л. Гольденвейзера, имеет завышенное значение. Так, при $n = 15$ и $m = 20$ ее погрешность составляет 15 %, а по новой теории – 7 %.

Осевая нагрузка

При осевой нагрузке $Q_z = 10^5$ Па, $Q_\theta = Q_n = 0$ Па, как и при касательной, все компоненты смещения оболочки сравнимы друг с другом (рис. 10).

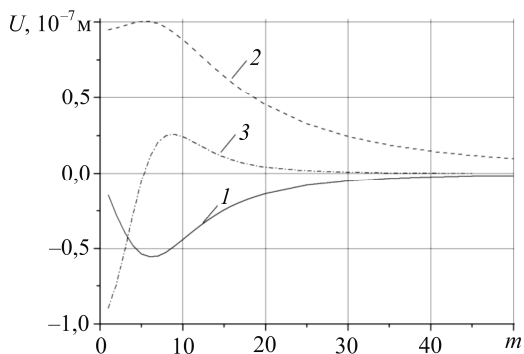


Рис. 10. Компоненты смещения оболочки по трехмерной теории при осевой нагрузке для $n = 10$: U_θ (1), U_z (2), U_n (3)

В этом случае обе теории оболочек очень хорошо (в пределах 1 % погрешности) предсказывают осевую компоненту смещения даже при больших волновых числах (рис. 11). Расхождения между ними при расчете U_θ не превышают 1,5 %, а вот при расчете нормальной компоненты расхождения велики. При $n = 15$ и $m = 15$ погрешность теории Гольденвейзера для U_n составляет 19,6 %, а новой теории – 9,9 %.

Отметим, что при значениях параметров задачи $n = 10$, $m = 5$ и $n = 15$, $m = 7,8$ происходит всплеск относительной погрешности по обеим теориям оболочек, однако это несущественно для практических приложений, поскольку при этих параметрах происходит обнуление нормальной компоненты смещения.

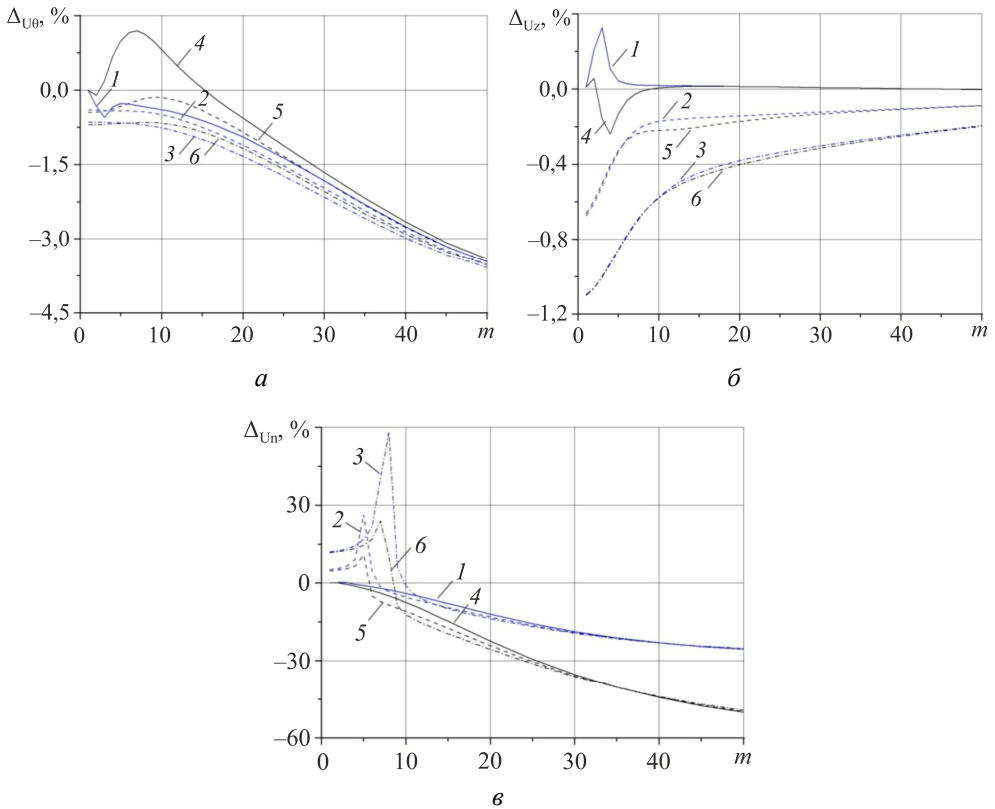


Рис. 11. Относительная погрешность при осевой нагрузке для окружной (а), осевой (б), нормальной (в) компоненты смещения по ВКО для n : 1 (1), 10 (2), 15 (3); по теории А.Л. Гольденвейзера для n : 1 (4), 10 (5), 15 (6)

Заключение

Для бесконечной цилиндрической оболочки поставлены и решены две статические задачи: однородная – на существование экспоненциальных решений и неоднородная задача с быстроменяющейся по координатам нагрузкой. Результаты получены по двум теориям оболочек, теории А.Л. Гольденвейзера и нового варианта классической теории, а также по трехмерной теории упругости для полого цилиндра.

Расчеты однородной задачи показали, что область применимости новой теории оболочек оказалась несколько шире, чем у теории А.Л. Гольденвейзера; даже при длине волны, сравнимой с толщиной оболочки, она дает собственные значения, близкие к решению трехмерной задачи.

Перемещения оболочки в неоднородной задаче по обеим теориям хорошо согласуются друг с другом и для малых значений волновых чисел с трехмерной теорией. Однако при внешней нагрузке, имеющей осевую и окружную составляющие, теория А.Л. Гольденвейзера предсказывает нормальную компоненту смещения с большей погрешностью.

Библиографический список

1. Базаренко Н.А., Ворович И.И. Асимптотическое поведение решения задач теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине // Прикладная математика и механика. – 1965. – Т. 29, вып. 6. – С. 1035–1062.
2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 485 с.
3. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. – М.: Наука, 1992. – 392 с.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
5. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1979. – 383 с.
6. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
7. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Механика упругих оболочек. – М.: Наука, 2008. – 280 с.
8. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.М. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
9. Петрашкевич В. Геометрически нелинейные теории тонких упругих оболочек // Успехи механики – 1989. – Т. 12 – С. 51–130.
10. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. – М.: Наука, 1968. – 456 с.
11. Lewicka M., Pakzad M.R. The infinite hierarchy of elastic shell models: some recent results and a conjecture // Infinite Dimensional Dynamical Systems. Series: Fields Institute Communications. – Springer, 2013. – Vol. 64. – P. 407–420. DOI: 10.1007/978-1-4614-4523-4_16
12. Steigmann D.J. Koiter's Shell theory from the perspective of three-dimensional nonlinear elasticity // Journal of Elasticity. – 2013. – Vol. 111. – Iss. 1. – P. 91–107.

13. Yaghoubshahi M., Asadi E., Fariborz S.J. A Higher-order shell model applied to shells with mixed boundary conditions // *Journal of Mechanical Engineering Science*. – 2011. – Vol. 225. – No. 2. – P. 292–303. DOI:10.1243/09544062JMES2050

14. Елисеев В.В. *Механика упругих тел*. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. гос. политехн. ун-та, 2003. – 336 с.

15. Елисеев В.В. К нелинейной теории упругих оболочек // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного технического университета*. – 2006. – № 3. – С. 35–39.

16. Berdichevsky V.L. *Variational principles of continuum mechanics. Vol. 2. Applications*. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – 1014 p.

17. Eliseev V., Vetyukov Yu. Finite deformation of thin shells in the context of analytical mechanics of material surfaces // *Acta Mechanica*. – 2010. – Vol. 209. – Iss. 1–2. – P. 43–57. DOI: 10.1007/s00707-009-0154-7

18. Eliseev V., Vetyukov Yu. Theory of shells as a product of analytical technologies in elastic body mechanics // *Shell Structures: Theory and Applications*. – 2014. – Vol. 3. – P. 81–85.

19. Зиновьева Т.В. Вычислительная механика упругих оболочек вращения в машиностроительных расчетах // *Современное машиностроение. Наука и образование: материалы 2-й Междунар. науч.-практ. конф.* – Санкт-Петербург, 2012. – С. 335–343.

20. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Г. *Численные методы*. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.

21. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

22. Borwein J.M., Skerritt M.B. *An introduction to modern mathematical computing: with Mathematica*. – Springer, 2012. – Vol. XVI. – 224 p.

References

1. Bazarenko N.A., Vorovich I.I. Asimptoticheskoe povedenie resheniya zadach teorii uprugosti dlia pologo tsilindra konechnoi dliny pri maloi tolshchine [Asimptotic behavior of theory of elasticity problems solution for the hollow cylinder of finite length with small thickness]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 29, iss. 6, pp. 1035-1062.

2. Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruksii* [Mechanics of thin-walled structures]. Moscow: Mashinostroenie, 1977, 485 p.

3. Birger I.A. Sterzhni, plastinki, obolochki [Rods, plates, shells]. Moscow: Nauka, 1992, 392 p.

4. Goldenweiser A.L. Teoriya uprugikh tonkikh obolochek [Theory of thin elastic shells]. Moscow: Nauka, 1976, 512 p.

5. Goldenweiser A.L., Lidskii V.B., Tovstik P.E. Svobodnye kolebaniia tonkikh uprugikh obolochek [Free oscillations of thin elastic shells]. Moscow: Nauka, 1979, 383 p.

6. Donnell L.G. Balki, plastiny i obolochki [Beams, plates and shells]. Moscow: Nauka, 1982, 568 p.

7. Eremeev V.A., Zubov L.M. Mekhanika uprugikh obolochek [Mechanics of elastic shells]. Moscow: Nauka, 2008, 280 p.

8. Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovskii E.M. Lineinaia teoriia tonkikh obolochek [Linear theory of thin shells]. Leningrad: Politekhnik, 1991, 656 p.

9. Pietraszkiewicz W. Geometricheski nelineinye teorii tonkikh uprugikh obolochek [Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells]. *Advances in Mechanics*, 1989, vol. 12, pp. 51-130.

10. Chernina V.S. Statika tonkostennykh obolochek vrashcheniia [Statics of thin-walled shells of revolution]. Moscow: Nauka, 1968, 456 p.

11. Lewicka M., Pakzad M.R. The infinite hierarchy of elastic shell models: some recent results and a conjecture. *Infinite Dimensional Dynamical Systems*. Series: Fields Institute Communications. Springer, 2013, vol. 64, pp. 407-420. DOI: 10.1007/978-1-4614-4523-4_16

12. Steigmann D.J. Koiter's Shell theory from the perspective of three-dimensional nonlinear elasticity. *Journal of Elasticity*, 2013, vol. 111, iss. 1, pp. 91-107.

13. Yaghoubshahi M., Asadi E., Fariborz S.J. A Higher-order shell model applied to shells with mixed boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 2011, vol. 225, no. 2, pp. 292-303. DOI: 10.1243/09544062JMES2050

14. Eliseev V.V. Mekhanika uprugikh tel [Mechanics of elastic bodies]. Sankt-Peterburgskii Gosudarstvennyi Polytehnicheskii Universitet, 2003, 336 p.

15. Eliseev V.V. K nelineinnoi teorii uprugikh obolochek [On a nonlinear theory of elastic shells]. *Scientific and technical statements SPbSTU*, 2006, no. 3, pp. 35-39.

16. Berdichevsky V.L. Variational principles of continuum mechanics. Vol. 2. Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, 1014 p.

17. Eliseev V., Vetyukov Yu. Finite deformation of thin shells in the context of analytical mechanics of material surfaces. *Acta Mechanica*, 2010, vol. 209, iss. 1-2, pp. 43-57. DOI: 10.1007/s00707-009-0154-7

18. Eliseev V., Vetyukov Yu. Theory of shells as a product of analytical technologies in elastic body mechanics. *Shell Structures: Theory and Applications*, 2014, vol. 3, pp. 81-85.

19. Zinovieva T.V. Vychislitel'naya mekhanika uprugikh obolochek vrashcheniya v mashinostroitel'nykh raschetakh [Computational mechanics of elastic shells of revolution in engineering calculations]. *Materialy 2 mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie*. Saint-Petersburg, 2012, pp. 335-343.

20. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.G. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Binom, Laboratoriya znaniy, 2011, 640 p.

21. Samarskii A.A., Gulin A.V. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1989, 432 p.

22. Borwein J.M., Skerritt M.B. An introduction to modern mathematical computing: with Mathematica. Springer, 2012, vol. XVI. 224 p.

Об авторах

Елисеев Владимир Васильевич (Санкт-Петербург, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Машиноведение и основы конструирования» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, e-mail: yeliseyev@inbox.ru).

Зиновьева Татьяна Владимировна (Санкт-Петербург, Россия) – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Компьютерные технологии в машиностроении» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, e-mail: tatiana.zinovieva@gmail.com).

About the authors

Vladimir V. Yeliseyev (Saint-Petersburg, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Engineering Science and Construction Principles, Saint-Petersburg State Polytechnic University (29, Polytechnicheskaya str., 195251, Saint-Petersburg, Russian Federation, e-mail: yeliseyev@inbox.ru).

Tatiana V. Zinovieva (Saint-Petersburg, Russian Federation) – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Computer Technologies in Engineering, Saint-Petersburg State Polytechnic University (29, Polytechnicheskaya str., 195251, Saint-Petersburg, Russian Federation, e-mail: tatiana.zinovieva@gmail.com).

Получено 14.05.2014

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Елисейев В.В., Зиновьева Т.В. Двумерные (оболочечные) и трехмерная модель для упругого тонкостенного цилиндра // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 3. – С. 50–70. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.04

Please cite this article in English as:

Yeliseyev V.V., Zinovieva T.V. Two-Dimensional (Shell-Type) and Three-Dimensional Models for Elastic Thin-Walled Cylinder. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No. 3. Pp. 50-70. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.04