

УДК 539.374

**В.С. Бондарь, В.В. Даншин, Д.А. Макаров**Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ),  
Москва, Россия**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ И НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ  
ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ**

Для построения теории, адекватно описывающей эффекты циклических нагружений, вначале анализируется экспериментальная петля пластического гистерезиса нержавеющей стали SS304, и на ней выделяются три типа микронапряжений, отвечающих за смещение центра поверхности нагружения. Для каждого типа микронапряжений формулируются эволюционные уравнения и на их основе уравнения теории пластического течения при комбинированном упрочнении. Выделяются материальные функции, замыкающие теорию, формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций.

Вычисление работы микронапряжений различных типов на поле пластических деформаций при циклических нагружениях с различными размахами деформации вплоть до экспериментальных значений количества циклов до разрушения, показало, что работа микронапряжений второго типа является универсальной характеристикой материала. Этот результат позволил сформулировать кинетическое уравнение накопления повреждений, на основе которого были рассмотрены процессы нелинейного накопления повреждений. Для определения материальных функций, отвечающих за разрушение, сформулирован базовый эксперимент и метод идентификации. Приведены материальные функции для нержавеющей стали SS304.

Исследованы процессы упругопластического деформирования нержавеющей стали SS304 при нестационарных жестких режимах циклического нагружения при блочном изменении амплитуды и средней деформации цикла. Рассматриваются также процессы мягкого нестационарного и несимметричного циклического нагружения (ratcheting) при блочном изменении амплитуды и среднего напряжения цикла. Результаты расчетов сопоставляются с результатами экспериментов.

Расчетные исследования нелинейных процессов накопления повреждений и малоциклового усталости нержавеющей стали SS304 проводятся при симметричном жестком циклическом нагружении как при постоянной амплитуде деформации, так и при блочном изменении амплитуды деформации. Результаты расчетов показывают, что с уменьшением размаха деформации нелинейность процесса накопления повреждений возрастает, а с увеличением размаха деформации процесс накопления повреждений стремится к линейному. Наблюдается существенное отклонение от правила линейного суммирования повреждений при удовлетворительном соответствии результатов расчетов и экспериментов.

Новыми результатами работы являются:

- выделение на основе анализа экспериментальной петли пластического гистерезиса микронапряжений трех типов, отвечающих за кинематическое упрочнение;
- установление на основе анализа экспериментальных результатов универсальности работы микронапряжений второго типа при малоциклового и многоциклового усталости;
- построение на основе эволюционных уравнений для трех типов микронапряжений теории пластического течения при комбинированном упрочнении и кинетических уравнений накопления повреждений;
- формулировка процедуры идентификации материальных параметров и проведение верификации предлагаемого варианта теории.

**Ключевые слова:** пластическая деформация, микронапряжения, накопление повреждений, циклическое нагружение, малоцикловая прочность, нелинейное суммирование повреждений.

**V.S. Bondar, V.V. Danshin, D.A. Makarov**

Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI),  
Moscow, Russian Federation

## **MATHEMATICAL MODELLING OF DEFORMATION AND DAMAGE ACCUMULATION UNDER CYCLIC LOADING**

In order to construct a theory that adequately describes the effects of cyclic loadings, it is initially necessary to analyze the experimental plastic loop of a hysteresis stainless steel SS304; and three types of backstresses responsible for the displacement of the center of the surface of loading are specified on this steel. For each type of backstresses we have formulated evolutionary equations on basis of the equations of the theory of plastic flow in the combined hardening. We have allocated the material functions which close the theory. We have also formulated the basic experiment and method of the material functions identification.

Evaluating the work of different types of backstresses on the field of plastic deformations under cyclic loadings with various magnitude of the deformation up to the experimental values of the number of cycles before failure, it has been obtained that the work of backstresses second type is a universal characteristic of the material. This result made it possible to formulate the kinetic equation of damage accumulation, based on which we have considered the nonlinear processes of damage accumulation. To determine the material functions responsible for the destruction, we have formulated the basic experiment and identification method. The authors have given material functions for stainless steel SS304.

We have investigated the processes of elastic-plastic deformation of stainless steel SS304 with non-stationary hard cyclic loading under block changes of amplitude and mean deformation of the cycle. Also the processes of soft non-stationary and non-symmetric cyclic loading (ratcheting) under block changes of amplitude and mean stress cycle have been examined. The results of calculations are compared with the experimental results.

Computational research of nonlinear processes of damage accumulation and low cycle fatigue of stainless steel SS304 are conducted under symmetric hard cyclic loading both at the constant amplitude of strain and block change of the amplitude of strain. The calculation results show that the scope of deformation reduction leads to increase of the nonlinearity of damage accumulation, while the increase of the deformation scale results in the fact that the accumulation of damages tends to be linear. There is a significant deviation from the rule of linear summation of damages under a satisfactory conformity of calculation results with the experiments.

The paper presents such new results as:

- specifying three types of backstresses responsible for kinematic hardening analyzing the experimental loops of plastic hysteresis;
- establishing the work universality of the second type backstresses under low-cycle and high-cycle fatigue on basis of experimental results analysis;
- constructing the theory of plastic flow under combined hardening and kinetic equations of damage accumulation on the basis of the evolution equations for three types of backstresses;
- identifying the material parameters and verifying the proposed theory.

**Keywords:** plastic deformation, backstresses, damage accumulation, cyclic loading, low-cycle durability, nonlinear summation of damages.

## **Введение**

Математическое моделирование процессов деформирования при циклических нагружениях в основном строится на вариантах теории пластического течения при комбинированном упрочнении, обзор и анализ которых содержится в работах [1–13]. Основной проблемой построения этих вариантов является формулировка достаточно адекватных эволюционных уравнений для смещения центра поверхности нагружения (тензора микронапряжений). Для описания смещения поверхности нагружения используется модель Новожилова–Шабоши [14, 15], подразумевающая, что полное смещение есть сумма смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение. В качестве таких эволюционных уравнений принимаются в основном уравнения Ишлинского-Прагера [16, 17], Амстронга-Фредерика-Кадашевича [18,19], а также Оно-Ванга [20]. Верификация различных вариантов теории течения при комбинированном упрочнении приводится в работах [2,4–13].

Для описания процесса накопления повреждений формулируются [1–4, 21] кинетические уравнения накопления повреждений, где в качестве энергии, расходуемой на создание повреждений в материале, принимается работа микронапряжений (тензор смещения) на поле пластических деформаций. Ответственность микронапряжений за процесс накопления повреждений следует из гипотезы Новожилова–Рыбакиной [22] о пропорциональности скорости накопления повреждений интенсивности микронапряжений. Экспериментальное обоснование этого утверждения содержится в работе [23], а кинетическое уравнение на основе работы микронапряжений на поле пластических деформаций (критерий работы микронапряжений) впервые было рассмотрено в работе [24] при исследовании малоциклового прочностного поведения оболочек при теплосменах, когда критерий работы микронапряжений впервые был опробован при сложном неизотермическом нагружении.

В настоящей работе на основе анализа экспериментальных результатов при циклических нагружениях выделены три типа микронапряжений, отвечающих за кинематическое упрочнение. Получено, что работа микронапряжений второго типа при малоциклового и многоциклового усталости (до  $10^6$ – $10^7$  циклов) является универсальной характеристикой разрушения. На основе этих результатов формулируется ва-

риант теории пластического течения при комбинированном упрочнении и кинетические уравнения для нелинейных процессов накопления повреждений. Формулируется базовый эксперимент и процедура идентификации материальных параметров. Проводится верификация варианта теории при нестационарных и несимметричных циклических нагружениях нержавеющей стали SS304 как при жестких, так и при мягких одноосных циклических нагружениях.

### 1. Основные положения и уравнения теории

Материал однороден и начально изотропен. Рассматриваются только поликристаллические конструкционные стали и сплавы. В процессе упругопластического деформирования в материале может возникать только пластическая деформационная анизотропия. Процесс циклического деформирования может проходить в условиях мягкого, жесткого или смешанного режимов нагружения, быть стационарным или нестационарным, симметричным или несимметричным.

Тензор скоростей деформаций представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой и пластической деформаций

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p. \quad (1)$$

Упругие деформации следуют обобщенному закону Гука

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} \left[ \dot{\sigma}_{ij} - \nu (3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}) \right] (\sigma_0 = \sigma_{ii} / 3), \quad (2)$$

где  $E, \nu$  – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Полагается, что в пространстве составляющих тензора напряжений существует поверхность нагружения, разделяющая области упругого и упругопластического состояний,

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} (s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - [C_p (\epsilon_{u^*}^p)]^2 = 0, \quad (3)$$

$$\left( s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}, \sigma_u^* = \left( \frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^* \right)^{\frac{1}{2}}, \dot{\epsilon}_{u^*}^p = \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Здесь  $s_{ij}, s_{ij}^*, a_{ij}$  – девиаторы напряжений, активных напряжений, микронапряжений (добавочных напряжений, остаточных микронапряже-

ний);  $\varepsilon_{u^*}^p$  – длина дуги пластической деформации (накопленная пластическая деформация, параметр Одквиста). Тензор  $a_{ij}$  характеризует смещение поверхности нагружения (анизотропное упрочнение), а скаляр  $C_p$  – отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения и характеризует изотропное упрочнение. В случае возрастания  $C_p(\varepsilon_{u^*}^p)$  материал является циклически упрочняющимся, в случае убывания – циклически разупрочняющимся, а при постоянном значении – циклически стабильным.

Смещение поверхности нагружения описывается на основе модели Новожилова–Шабоши [14, 15], подразумевающей, что полное смещение есть сумма смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение,

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^M a_{ij}^{(m)}. \quad (4)$$

Для анализа характера поведения микронапряжений и выбора эволюционных уравнений рассматривается стабилизированная петля пластического гистерезиса в координатах: напряжение  $\sigma$ , пластическая деформация  $\varepsilon^p$ . На рис. 1 приведена такая петля (циклическая диаграмма) для нержавеющей стали SS304 [25, 26]. Далее на полуцикле от предела пропорциональности (начало отклонения от вертикали) вводится система координат: микронапряжения  $a$ , пластическая деформация  $\varepsilon^p$ . Кривая в координатах  $a, \varepsilon^p$  характеризует снятие и образование микронапряжений в процессе циклического нагружения. Размах пластической деформации здесь составляет порядка 0,012, что позволяет выйти на линейную асимптоту кривой образования микронапряжений.

Далее вычисляется производная  $da/d\varepsilon^p$  и строится кривая в координатах  $da/d\varepsilon^p$  и  $a$  (рис. 2). Здесь вычисление производной  $da/d\varepsilon^p$  проводится численно на основе осредненных разностей. На полученной кривой можно выделить три участка, характеризующие различное поведение микронапряжений. На первом участке производная имеет практически постоянное значение, и здесь для микронапряжений первого типа имеет место эволюционное уравнение Ишлинского–Прагера [16, 17]; на втором участке производная меняется по линейному закону, и здесь для микронапряжений второго типа имеет место эволюци-

онное уравнение Амстронга–Фредерика–Кадашевича [18, 19]. Далее на третьем участке производная меняется по нелинейному закону, который может быть описан серией эволюционных уравнений Оно–Ванга [20].

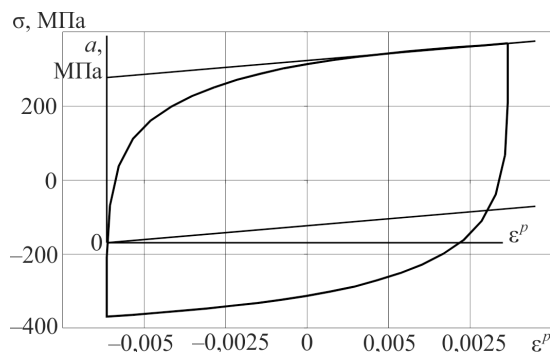


Рис. 1. Циклическая диаграмма

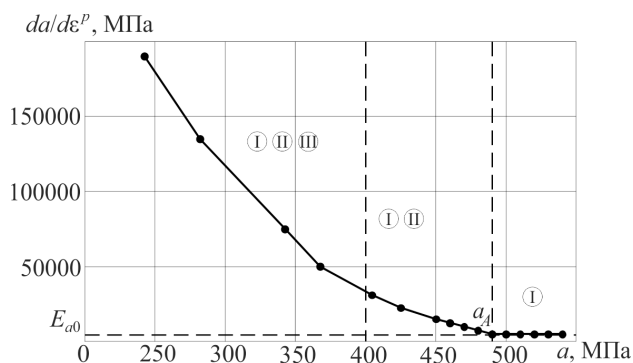


Рис. 2. Изменение микронапряжений на первом, втором и третьем участках. Римские цифры в кружках соответствуют микронапряжениям I, II и III типов

Таким образом, в качестве первого эволюционного уравнения для микронапряжений первого типа принимается уравнение Ишлинского–Прагера [16, 17]

$$\dot{a}_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} g^{(1)} \dot{\epsilon}_{ij}^p. \quad (5)$$

В качестве второго эволюционного уравнения для микронапряжений второго типа принимается уравнение Амстронга–Фредерика–Кадашевича [18, 19]

$$\dot{a}_{ij}^{(2)} = \frac{2}{3} g^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(2)} a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p. \quad (6)$$

Последующие эволюционные уравнения для микронапряжений третьего типа соответствуют простейшему аналогу [3, 21] уравнений Оно–Ванга [20]

$$\dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (m=3, \dots, M). \quad (7)$$

Определяющие функции, входящие в уравнения (5)–(7), выражаются через материальные следующим образом:

$$g^{(1)} = E_a, \quad g^{(2)} = \beta \cdot \sigma_a, \quad g_a^{(2)} = -\beta, \quad (8)$$

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)} \sigma_a^{(m)} \\ 0, \text{ если } a_u^{(m)} \geq \sigma_a^{(m)} \cap a_{ij}^{(m)} s_{ij}^* > 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\left( a_u^{(m)} = \left( \frac{3}{2} a_{ij}^{(m)} a_{ij}^{(m)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m=3, \dots, M \right).$$

Здесь  $E_a, \sigma_a, \beta, \sigma_a^{(m)}, \beta^{(m)}$  – материальные параметры.

Введение дополнительных уравнений (7) к ранее уже предложенному и достаточно опробованному уравнению с трехчленной структурой [1–3], эквивалентному уравнениям (4)–(6), позволяет описать более тонкие эффекты циклического нагружения, возникающие при нестационарных и несимметричных циклических нагружениях. К таким эффектам можно отнести эффект малого цикла в большом [5], заключающийся в том, что петля первого малого цикла практически возвращается в ту же начальную точку, из которой и начался малый цикл. Окончательно уравнение для смещения поверхности нагружения с учетом (4)–(9) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_{ij} &= \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \left( \frac{2}{3} g_\varepsilon \varepsilon_{ij}^p + g_a a_{ij}^* \right) \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \\ g &= \sum_{m=1}^M g^{(m)} = E_a + \beta \sigma_a + \sum_{m=3}^M g^{(m)}, \\ g_\varepsilon &= \beta E_a, \quad g_a = -\beta, \quad a_{ij}^* = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

При несимметричных циклических как пропорциональных мягких, так и непропорциональных мягких и смешанных режимах нагружения происходит одностороннее накопление деформации (вышагивание петли пластического гистерезиса, ratcheting), интенсивность которого увеличивается с возрастанием несимметричности процесса нагружения. В работе [27] показано, что явление вышагивания является следствием принципа симметрии циклических свойств материалов.

Описание явления вышагивания (ratcheting) в рамках рассматриваемого варианта теории пластического течения состоит в том, что параметр  $E_a$ , входящий в первое эволюционное уравнение для микронапряжений первого типа, принимается зависящим от накопленной пластической деформации следующим образом:

$$E_a = E_{a0} \left[ 1 + K_E (\epsilon_{u^*}^p)^{n_E + 1} \right]. \quad (11)$$

Здесь  $K_E, n_E$  – материальные параметры.

Пластические деформации определяются на основе ассоциированного с поверхностью (3) закона течения следующим образом:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \lambda = \frac{3 s_{ij}^*}{2 \sigma_u^*} \dot{\epsilon}_{u^*}^p. \quad (12)$$

Для скорости накопленной пластической деформации, соответственно для мягкого и жесткого нагружений, можно получить [1–3] следующие уравнения:

$$\dot{\epsilon}_{u^*}^p = \frac{1}{E_*} \frac{3 s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{2 \sigma_u^*}, \quad (13)$$

$$\dot{\epsilon}_{u^*}^p = \frac{3G}{E_* + 3G} \frac{s_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}}{\sigma_u^*}, \quad (14)$$

$$E_* = q_\epsilon + g + g_\epsilon \epsilon_{u^*}^{p*} + g_a a_u^*,$$

$$q_\epsilon = \frac{dC_p}{d\epsilon_{u^*}^p}, \quad \epsilon_{u^*}^{p*} = \frac{s_{ij}^* \epsilon_{ij}^p}{\sigma_u^*}, \quad a_u^* = \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}^*}{2 \sigma_u^*}.$$

Здесь  $G$  – модуль сдвига. Для смешанных режимов нагружения уравнения для  $\dot{\epsilon}_{u^*}^p$  приводятся в работах [1–3].



Условия упругого и упругопластического состояний имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_u^* < C_p \cup \dot{\epsilon}_{u^*}^p \leq 0 & \text{ – упругость,} \\ \sigma_u^* = C_p \cap \dot{\epsilon}_{u^*}^p > 0 & \text{ – упругопластичность.}\end{aligned}\tag{15}$$

Здесь скорость накопленной пластической деформации задается выражениями (13) или (14) или любым другим выражением, связывающим скорость накопленной пластической деформации и скорости напряжений и деформаций (смешанные режимы нагружения).

В работе [4] приводятся результаты экспериментальных исследований нелинейных процессов накопления повреждений, где за меру повреждения принимается относительная объемная доля дефектов, определяемых на основе ультразвуковых и металлографических исследований. Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводится следующее кинетическое уравнение накопления повреждений, базирующееся на энергетическом принципе, где в качестве энергии расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия, равная работе микронапряжений второго типа на поле пластических деформаций. Кинетическое уравнение, описывающее нелинейные процессы накопления повреждений, имеет следующий вид:

$$\dot{\omega}_2 = \alpha \omega_2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{a_{ij}^{(2)} \dot{\epsilon}_{ij}^p}{W_a},\tag{16}$$

$$\alpha = \left( \sigma_a / a_u^{(2)} \right)^{n_\alpha}.\tag{17}$$

Здесь  $\omega_2$  – мера повреждения;  $W_a$  – энергия разрушения;  $\alpha$  и  $n_\alpha$  – функция и параметр нелинейности процесса накопления повреждений (при  $n_\alpha = 0$  процесс накопления повреждений является линейным);  $a_u^{(2)}$  – интенсивность микронапряжений второго типа.

При несимметричном мягком циклическом нагружении происходит вышагивание петли пластического гистерезиса. В этом случае работа микронапряжений первого типа будет не равна нулю в отличие от симметричного циклического нагружения, когда эта работа равна нулю. Как следует из экспериментальных результатов [28], несимметричность мягкого циклического нагружения существенно влияет на малоцикловую усталость. К тому же повреждение, обусловленное од-

носторонним увеличением деформации, определяется отношением односторонней деформации к предельной деформации разрушения материала, т.е. так называемое квазистатическое повреждение [28]. Поэтому кинетическое уравнение для повреждения, обусловленное работой микронапряжений первого типа, будет иметь следующий вид:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{a_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^p}{W_B}, \quad (18)$$

где  $W_B$  – энергия разрушения за счет вышагивания. Тогда полное повреждение будет равно сумме повреждений первого и второго типов

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2. \quad (19)$$

Критерием разрушения (появления макротрещин длиной порядка 1 мм) будет достижение повреждением предельной величины, обычно принимаемой равной единице.

Уравнение, аналогичное (16), встречается в работе [29]. Но в отличие от работы [29], а также [30], в которых энергия разрушения  $W_a$  зависит от уровня достигнутых микронапряжений ( $\rho_{\max}$ ), здесь показатель нелинейности процесса  $\alpha$  определяется согласно (17) уровнем микронапряжений второго типа. Кинетическое уравнение (16) и (17) адекватно описывает процессы нелинейного суммирования повреждений, что подтверждается в работе [31].

Ответственность за накопление повреждений работы микронапряжений второго типа иллюстрируется результатами, приведенными на рис. 3, где показаны изменения работы микронапряжений второго (кривая 2) и третьего (кривая 3) типов, соответствующих экспериментальным [32] значениям числа циклов до разрушения для нержавеющей стали SS304.

Результаты, приведенные на рис. 3, показывают, что энергия разрушения, равная работе микронапряжений второго типа (микронапряжения Амстронга–Фредерика–Кадашевича), является постоянной величиной на рассматриваемом диапазоне числа циклов до разрушения от  $10^2$  до  $10^5$ , т.е. энергия разрушения для микронапряжений второго типа является универсальной характеристикой разрушения материала. Возможно, эта характеристика будет универсальной до многоцикловой

усталости, т.е. до  $10^6$ – $10^7$  циклов. Сопоставление расчетных и экспериментальных результатов до  $10^6$  циклов приводится в работах [2, 27].

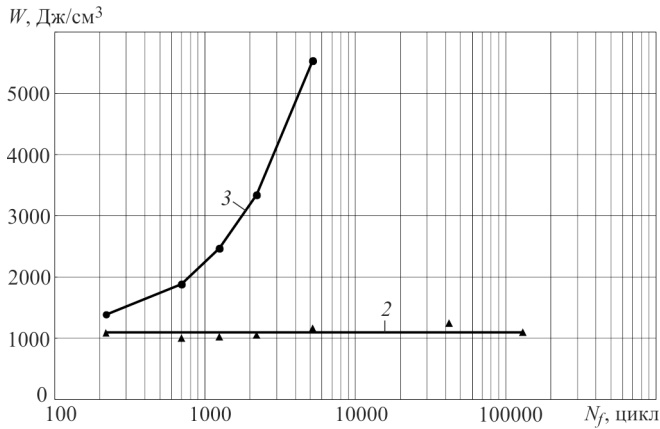


Рис. 3. Изменение работ микронапряжений второго и третьего типов

Таким образом, данный вариант теории пластического течения при комбинированном упрочнении замыкают следующие материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

$E, \nu$  – упругие параметры;

$E_{ao}, \sigma_a, \beta$  – модули анизотропного упрочнения;

$K_E, n_E$  – модули вышагивания;

$\sigma_a^{(m)}, \beta^{(m)} (m=3, \dots, M)$  – модули анизотропного упрочнения, соответствующие аналогу модели Оно–Ванга;

$C_p(\epsilon_{u^*}^p)$  – функция изотропного упрочнения;

$W_a$  – энергия разрушения;

$n_\alpha$  – параметр нелинейности процесса накопления повреждений;

$W_b$  – энергия разрушения при вышагивании.

## 2. Расчетно-экспериментальный метод определения материальных функций

Материальные функции определяются по результатам испытаний в условиях упругопластического одноосного напряженного состояния. Базовый эксперимент включает в себя следующий набор данных:

- упругие параметры, которые определяются традиционными методами;
- диаграмма пластического деформирования при растяжении до деформации 0,05–0,1;
- циклические диаграммы при симметричном растяжении-сжатии при постоянном размахе деформаций 0,015–0,02;
- циклические диаграммы при несимметричном растяжении-сжатии при постоянном размахе деформаций 0,005–0,01 и средней деформацией цикла 0,05–0,1;
- данные по малоцикловой усталости при одноблочном жестком симметричном циклическом нагружении;
- данные по малоцикловой усталости при двухблочном жестком симметричном циклическом нагружении;
- данные по малоцикловой усталости при одноблочном мягком несимметричном циклическом нагружении.

Для определения модулей анизотропного упрочнения стабилизированная петля пластического гистерезиса (циклическая диаграмма) перестраивается в координатах: напряжение  $\sigma$ , пластическая деформация  $\epsilon^p$  (см. рис. 1). Затем на циклической диаграмме выделяется кривая, отвечающая за смещение поверхности нагружения в координатах: смещение (микронапряжение)  $a$ , пластическая деформация  $\epsilon^p$  (см. рис. 1). Начало этой системы координат определяется пределом пропорциональности (начало отклонения от вертикали).

Далее вычисляется производная  $da/d\epsilon^p$  и строится кривая в координатах:  $da/d\epsilon^p, a$  (см. рис. 2). На кривой (см. рис. 2) выделяются три участка, характеризующие различное поведение микронапряжений. На первом участке производная имеет практически постоянное значение, и здесь для микронапряжения первого типа имеет место эволюционное уравнение Ишлинского–Прагера, и значение производной равно значению параметра  $E_{ao}$ . Затем кривая на рис. 2 перестраивается

в координатах  $\frac{d\hat{a}}{d\epsilon^p} = \left( \frac{da}{d\epsilon^p} - E_{ao} \right)$ ,  $\hat{a} = (a - E_{ao}\epsilon^p)$ , т.е. исключается влияние микронапряжения первого типа. Полученная линейная зависимость на втором участке позволяет (рис. 4) найти параметры  $\sigma_a$  и  $\beta$  по формулам

$$\beta = \frac{d\hat{a}}{d\varepsilon^p} \Big|_M, \quad (20)$$

$$\sigma_a = \frac{\hat{a}_A - \hat{a}_M}{2 \exp(-\beta \varepsilon_M^p)}. \quad (21)$$

Здесь  $\varepsilon_M^p$  – пластическая деформация окончания третьего участка (окончания изменений микронапряжения третьего типа, соответствующих эволюционным уравнениям Оно–Ванга).

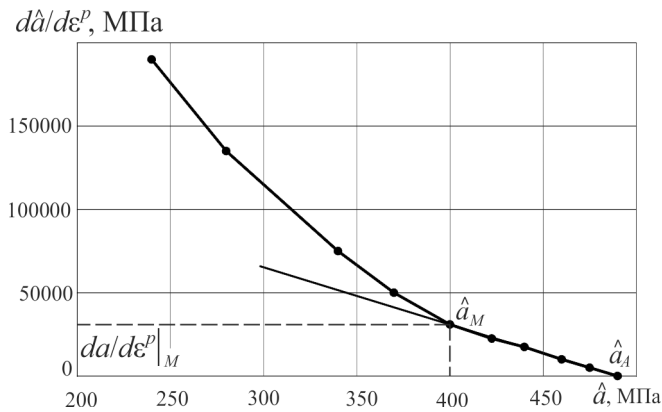


Рис. 4. Изменение микронапряжений второго и третьего типов

Далее кривая, отвечающая за смещение поверхности нагружения (см. рис. 1), перестраивается в координатах:  $\tilde{a} = a - E_{ao} \varepsilon^p - 2\sigma_a [1 - \exp(-\beta \varepsilon^p)]$ , пластическая деформация  $\varepsilon^p$  ( $\varepsilon^p \in [0, \varepsilon_M^p]$ ). Полученная кривая (рис. 5) отвечает микронапряжениям только третьего типа. Длительность третьего участка достаточно мала  $\varepsilon_M^p \approx 0,001 - 0,003$ , т.е. микронапряжения третьего типа (Оно–Ванга) возникают практически в пределах допуска на остаточную деформацию ( $\varepsilon^p = 0,002$ ) при определении условного предела текучести. Далее интервал  $[0; \tilde{a}_M]$  разбивается на  $(M - 2)$  частей и параметры анизотропного упрочнения, соответствующие модели Оно–Ванга, вычисляются по следующим формулам:

$$\beta^{(m)} = 2 / \varepsilon_m^p (m=3, \dots, M), \quad (22)$$

$$\sigma_a^{(M)} = \frac{\tilde{a}_M - \tilde{a}_{M-1}}{\varepsilon_M^p - \varepsilon_{M-1}^p} \cdot \frac{1}{\beta^{(M)}}, \quad (23)$$

$$\sigma_a^{(m)} = \frac{1}{\beta^{(m)}} \left[ \frac{\tilde{a}_m - \tilde{a}_{m-1}}{\varepsilon_m^p - \varepsilon_{m-1}^p} - \frac{\tilde{a}_{m+1} - \tilde{a}_m}{\varepsilon_{m+1}^p - \varepsilon_m^p} \right], \quad (24)$$

$(m = M - 1, \dots, 3; \tilde{a}_2 = 0; \varepsilon_2^p = 0).$

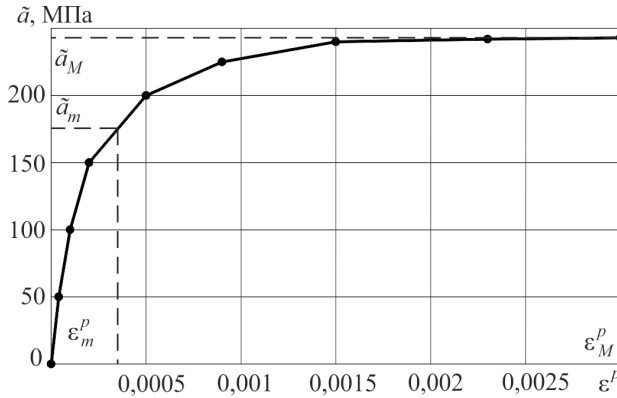


Рис. 5. Поведение микронапряжений третьего типа

Модули вышагивания определяются по результатам одноосных испытаний при жестком несимметричном циклическом нагружении. Полученная экспериментальная зависимость между средним напряжением цикла  $\sigma_m$  и числом циклов  $N$  строится в логарифмических координатах:

$$y = \lg(E_{ao} \varepsilon_m^p / \sigma_m - 1), \quad (25)$$

$$x = \lg(\varepsilon_m + 4\varepsilon_a^p N), \quad (26)$$

где  $\varepsilon_m^p$  – средняя пластическая деформация цикла;  $\varepsilon_a^p$  – амплитуда пластической деформации на цикле. Эта экспериментальная зависимость является линейной [27], что позволяет по углу  $\alpha$  наклона прямой и точки  $y_0$  пересечения прямой с осью ординат определить модули вышагивания по формулам

$$\lg K_E = y_0, n_E + 1 = \operatorname{tg} \alpha. \quad (27)$$

Получив параметры анизотропного упрочнения и модули вышагивания, можно теперь вычислить величину смещения (микронапряжений) как при одноосном растяжении, так и при циклическом нагружении. Далее, вычитая из напряжений полученные микронапряжения при соответствующих значениях накопленной пластической деформации, можно получить функцию изотропного упрочнения  $C_p(\varepsilon_{u*}^p)$ .

Энергия разрушения  $W_a$  определяется путем вычисления работы микронапряжений второго типа при циклических нагружениях до экспериментальных значений числа циклов до разрушения (см. рис. 3).

Параметр нелинейности процесса накопления повреждений определяется подбором до совпадения расчетных и экспериментальных результатов при двухблочном циклическом нагружении.

Энергия разрушения при вышагивании  $W_b$  определяется также подбором при сопоставлении расчетных и экспериментальных результатов при несимметричном мягком циклическом нагружении.

Ниже приводятся материальные функции для нержавеющей стали SS304, полученные по результатам экспериментальных исследований [25, 26, 32].

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3,$$

$$E_{ao} = 5000 \text{ МПа}, \quad \beta = 344, \quad \sigma_a = 120 \text{ МПа},$$

$$\beta^{(3)} = 50000, \quad \sigma_a^{(3)} = 8,3 \text{ МПа}, \quad \beta^{(4)} = 20000, \quad \sigma_a^{(4)} = 16,7 \text{ МПа},$$

$$\beta^{(5)} = 10000, \quad \sigma_a^{(5)} = 33,3 \text{ МПа}, \quad \beta^{(6)} = 4000, \quad \sigma_a^{(6)} = 26,0 \text{ МПа},$$

$$\beta^{(7)} = 2222, \quad \sigma_a^{(7)} = 16,9 \text{ МПа}, \quad \beta^{(8)} = 1333, \quad \sigma_a^{(8)} = 16,9 \text{ МПа},$$

$$\beta^{(9)} = 870, \quad \sigma_a^{(9)} = 1,23 \text{ МПа}, \quad \beta^{(10)} = 666, \quad \sigma_a^{(10)} = 2,2 \text{ МПа},$$

$$K_E = 0,45, \quad n_E = -0,65, \quad C_p = 100 \text{ МПа},$$

$$W_a = 1110 \text{ Дж/см}^3, \quad n_\alpha = 1,5.$$

### 3. Пластичность при нестационарных и несимметричных режимах циклического нагружения

Результаты расчетов, проведенных на основе предложенного варианта теории пластичности, процессов нестационарного циклического нагружения нержавеющей стали SS304 в условиях одноосного растяжения-сжатия приведены на рис. 6–9. На этих рисунках сплошные кривые соответствуют расчету, а светлые кружки – эксперименту [25, 26]. Вначале рассматриваются жесткие циклические нагружения в условиях блочного изменения амплитуды деформации в случае симметричного нагружения (см. рис. 6), а также блочного изменения средней деформации цикла в случае несимметричного нагружения (см. рис. 7). На рис. 6, б и 7, б приведены расчетные циклические диаграммы, которые практически совпадают с экспериментальными [25, 26]. Приведение на рис. 6, б и 7, б экспериментальных циклических диаграмм даст практическое совпадение расчетных и экспериментальных кривых. Хорошее соответствие расчетных и экспериментальных результатов иллюстрирует рис. 6, а и 7, а, где приводится поведение амплитуд напряжений в процессе циклических нагружений.

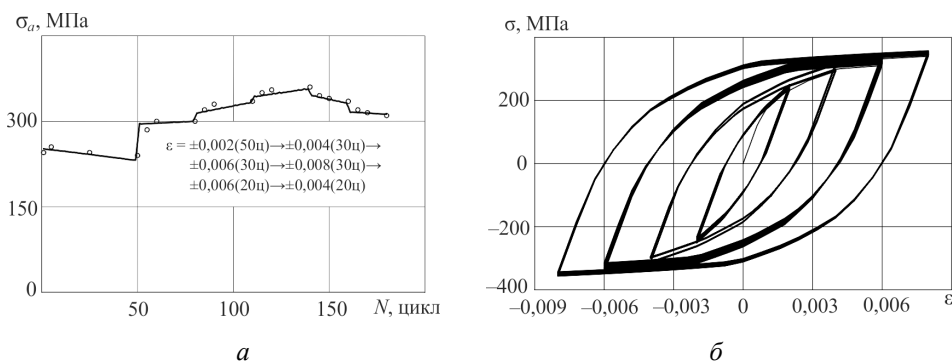


Рис. 6. Поведение амплитуды напряжения (а) и циклические диаграммы (б) при блочном изменении амплитуды деформации цикла

Далее рассматриваются мягкие циклические нагружения в условиях блочного изменения амплитуды напряжения при постоянном среднем напряжении цикла (см. рис. 8), а также блочного изменения среднего напряжения цикла при постоянной амплитуде напряжения (см. рис. 9). Рассмотренные режимы являются несимметричными, причем в процессе нагружения несимметричность как возрастает, так и убывает. На рис. 8, б и 9, б приведены расчетные циклические диа-



граммы, иллюстрирующие процесс вышагивания петли пластического гистерезиса (ratcheting). Расчетные циклические диаграммы соответствуют экспериментальным [25, 26].

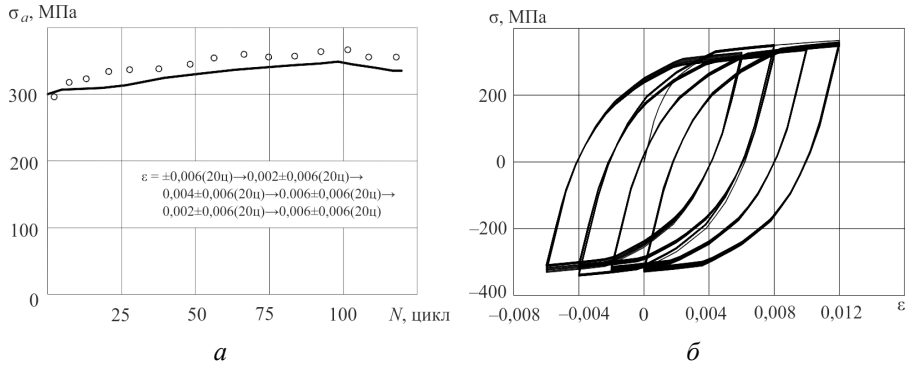


Рис. 7. Поведение амплитуды напряжения (а) и циклические диаграммы (б) при блочном изменении средней деформации цикла

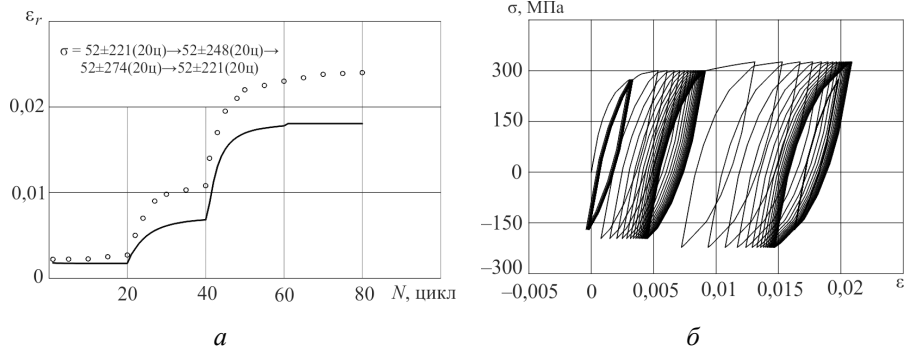


Рис. 8. Поведение средней деформации цикла (а) и циклические диаграммы (б) при блочном изменении амплитуды напряжения цикла

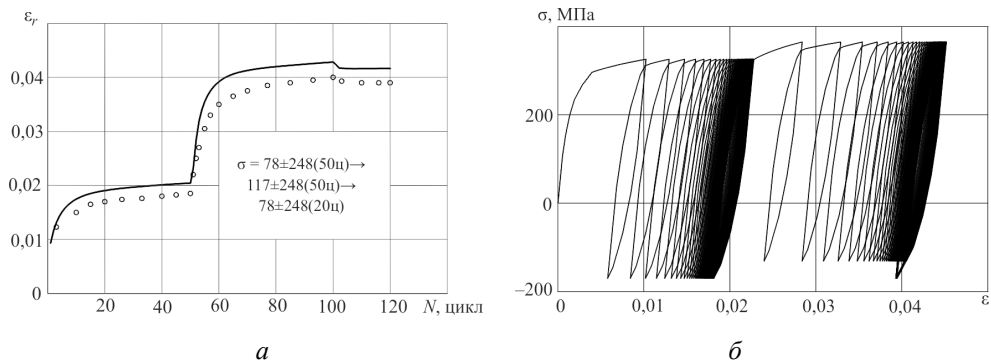


Рис. 9. Поведение средней деформации цикла (а) и циклические диаграммы (б) при блочном изменении среднего напряжения цикла

Увеличение отличия (до 20 %) расчетных и экспериментальных результатов при мягком нагружении (рис. 8, *a*) по сравнению с жестким объясняется большей чувствительностью поведения деформаций от погрешности задания напряжений в эксперименте при мягком нагружении, т.е. большим разбросом.

#### 4. Малоцикловая прочность при нестационарных режимах циклических нагружений

Расчетные исследования нелинейных процессов накопления повреждений и малоцикловой усталости нержавеющей стали SS304 проводятся при пропорциональном симметричном жестком циклическом нагружении как при постоянной амплитуде деформации, так и при блочном изменении амплитуды деформации. Нелинейный процесс накопления повреждений при различных размахах деформации одноблочного циклического нагружения приведен на рис. 10, *a*. Результаты расчетов показывают, что с уменьшением размаха деформации нелинейность процесса накопления повреждений возрастает, а с увеличением размаха деформации процесс накопления повреждений стремится к линейному. На рис. 10, *б* сплошной линией показана расчетная кривая малоцикловой усталости, а светлыми кружками – экспериментальные данные [32] при одноблочном циклическом нагружении.

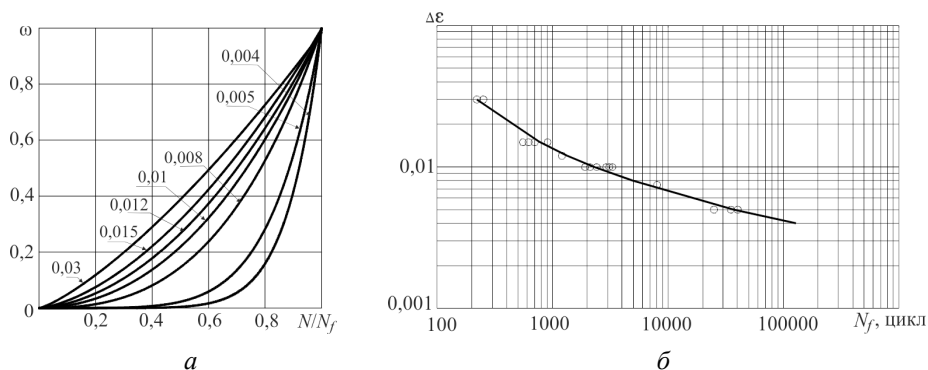


Рис. 10. Накопление повреждений (*a*) и кривая малоцикловой усталости стали SS304 (*б*) при различных размахах деформации одноблочного циклического нагружения

На рис. 11 представлены результаты исследований нелинейного суммирования повреждений при двухблочном изменении размаха деформации и различных уровнях предварительного циклирования на первом блоке. Изменения параметра повреждения  $\omega$  при переходе от

меньшего размаха к большему ( $0,005 \rightarrow 0,015$ ) показаны на рис. 11, *а*, при переходе от большого размаха к меньшему ( $0,015 \rightarrow 0,005$ ) – на рис. 11, *б*. Результаты расчетов показывают, что с увеличением размаха деформации суммарная долговечность растет, а при уменьшении – убывает.

Нарушения правила линейного суммирования повреждений при многоблочном изменении размаха деформации и различных уровнях предварительного циклирования на первом, двух первых и четырех первых блоках соответственно при двухблочном, трехблочном и пятиблочном изменении размаха деформации приведены на рис. 12. Результаты расчетов на этих рисунках изображены сплошными линиями, а результаты экспериментов [32] – темными кружками при возрастании размаха деформации ( $0,005 \rightarrow 0,015$ ;  $0,005 \rightarrow 0,01 \rightarrow 0,015$ ;  $0,005 \rightarrow 0,008 \rightarrow 0,01 \rightarrow 0,012 \rightarrow 0,015$ ) и светлыми кружками при убывании размаха деформации ( $0,015 \rightarrow 0,005$ ;  $0,015 \rightarrow 0,01 \rightarrow 0,005$ ;  $0,015 \rightarrow 0,012 \rightarrow 0,01 \rightarrow 0,008 \rightarrow 0,005$ ).

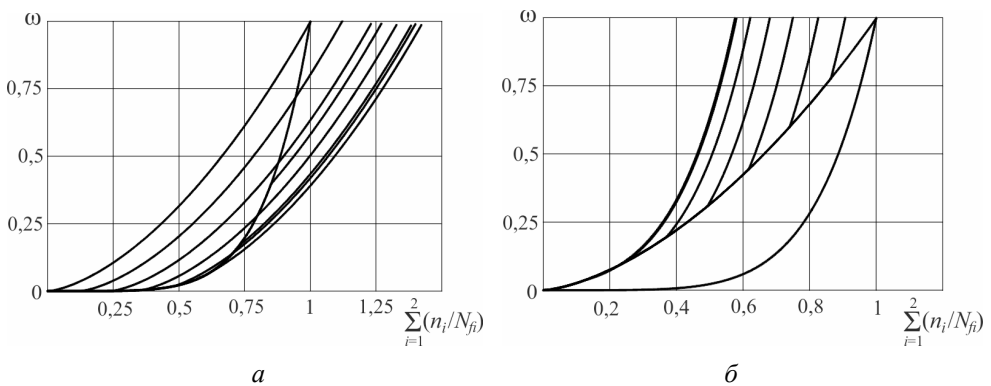


Рис. 11. Накопление повреждений от числа циклов при двухблочном циклическом нагружении: *а* – переход от меньшей амплитуды к большей; *б* – переход от большей амплитуды к меньшей

Наблюдается существенное отклонение от правила линейного суммирования повреждений при удовлетворительном соответствии результатов расчетов и экспериментов [32]. Следует также отметить, что при возрастании размаха деформации суммарная долговечность может увеличиться практически на 40 %, а при убывании размаха деформации снизиться практически на 40 % по сравнению с суммарной

долговечностью, предсказываемой согласно правилу линейного суммирования повреждений.

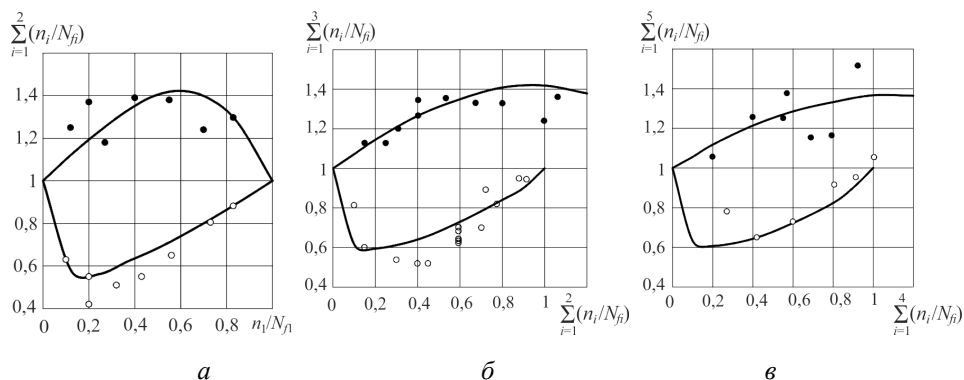


Рис. 12. Суммирование повреждений при двублочном (а), трехблочном (б) и пятиблочном (в) изменении амплитуды деформации

### Заключение

Адекватное описание процессов упругопластического деформирования и разрушения конструкционных сталей и сплавов при нестационарных и несимметричных циклических нагружениях является несомненным достоинством рассмотренного варианта теории пластичности. Причем базовый эксперимент и метод определения материальных функций, замыкающих теорию, является достаточно простыми и легко реализуемыми. Сравнение результатов расчетов и экспериментов говорит о надежном их соответствии. Следует также отметить важность следующих результатов, полученных при обработке и анализе расчетных и экспериментальных данных не только для стали SS304, но и для сталей 316, 1026, 1070, 12X18H9, 12X18H10T, 45 [2, 21, 27, 31]:

- смещение поверхности нагружения определяется смещениями (микронапряжениями) трех типов, для каждого из которых сформулированы эволюционные уравнения;

- работа микронапряжений второго типа является универсальной характеристикой разрушения материала при циклических нагружениях;

- при построении поверхности нагружения нет четкой границы раздела упругого и упругопластического состояний, а есть некоторый слой, где происходит снятие и образование микронапряжений третьего типа (малая петля гистерезиса возвращается в свое начало). Толщина этого слоя по деформации равна деформации, на которой имеет место

изменение микронапряжений третьего типа. О наличии такого слоя говорится в работе [33];

– поверхность нагружения может быть стянута в точку, и упругое состояние отнесено к микронапряжениям третьего типа. Это позволит сформулировать вариант теории упругопластических процессов при пропорциональных и непропорциональных (сложных) режимах циклических нагружений;

– число эволюционных уравнений для третьего типа микронапряжений может быть уменьшено до двух-трех, что приведет к погрешности в напряжениях не более 5 %. К тому же микронапряжения третьего типа не влияют на процесс накопления повреждений.

Работа выполнена при поддержке ОИВТ РАН.

### **Библиографический список**

1. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.
2. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: Физматлит, 2008. – 176 с.
3. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.
4. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
5. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation // *International Journal of Plasticity*. – 2002. – Vol. 18. – P. 873–894.
6. Kang G., Liu Y., Ding J., Gao Q. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model // *Int. J. of Plasticity*. – 2009. – Vol. 25. – P. 838–860.
7. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. // *Int. J. of Plasticity*. – 2009. doi:10.1016/j.ijplas.2009.08.005.
8. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // *Int. J. of Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.

9. Rahman S.M., Hassan T., Corona E. Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure // *Int. J. of Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1756–1791.

10. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting // *Int. J. of Plasticity*. – 2009. – Vol. 25. – P. 1560–1587.

11. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting // *Int. J. of Plasticity*. – 2010. – Vol. 26. – P. 711–730.

12. Dafalias Y.F., Feigenbaum H.P. Biaxial ratchetting with novel variations of kinematic hardening // *Int. J. of Plasticity*. – 2011. – Vol. 27. – P. 479–491.

13. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // *Int. J. of Plasticity*. – 2012. – Vol. 35. – P. 44–66.

14. Новожилов В.В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений // *ПММ*. – 1964. – Т. 28, вып. 3. – С. 393–400.

15. Chaboche J.-L., Dang-Van K., Cordier G. Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel // *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on SMiRT*. Div L. – Berlin, 1979. – Paper No. L. 11/3.

16. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // *Укр. матем. журн.* – 1954. – Т. 6, вып. 3. – С. 314–324.

17. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids // *ASME J. Appl. Mech.* – 1956. – Vol. 23. – P. 493–496.

18. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial bausinger effect // *CEGB Report No. RD/B/N/ 731*. – 1966.

19. Кадашевич Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности // *Исследования по упругости и пластичности*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. – Вып. 6. – С. 39–45.

20. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery. Part 1. Formulations and basic features for ratcheting behavior // *International Journal of Plasticity*. – 1993. – Vol. 9. – P. 375–390.

21. Бондарь В.С., Бурчаков С.В., Даншин В.В. Математическое моделирование процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов при циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. Вып. 72. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2010. – С. 18–27.

22. Новожилов В.В., Рыбакина О.Г. О перспективах построения критерия прочности при сложном нагружении // Прочность при малом числе нагружения. – М.: Наука, 1969. – С. 71–80.

23. Романов А.Н. Энергетические критерии разрушения при малоцикловом нагружении // Проблемы прочности. – 1974. – № 1. – С. 3–10.

24. Бондарь В.С., Горохов В.Б., Санников В.М. Исследование малоцикловой прочности оболочек вращения при сложном теплосиловом нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Механика деформируемых систем: всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т. – 1979. – Вып. 12. – С. 120–126.

25. Guozheng Kang, Qing Gao, Lixun Cai, Yafang Sun. Experimental study on uniaxial and nonproportionally multiaxial ratcheting of SS304 stainless steel at room and high temperatures // Nuclear Engineering and Design. – 2002. – Vol. 216. – P. 13–26.

26. Guozheng Kang, Qing Gao, Xianjie Yang. Uniaxial cyclic ratcheting and plastic flow properties of SS304 stainless steel at room and elevated temperatures // Mechanics of Materials. – 2002. – Vol. 34. – P. 145–159.

27. Бондарь В.С. Некоторые новые результаты исследования пластичности материалов при сложном нагружении // Упругость и неупругость. – М: ЛЕНАНД, 2006. – С. 94–109.

28. Гусенков А.П. Прочность при изотермическом и неизотермическом малоцикловом нагружении. – М.: Наука, 1979. – 295 с.

29. Соотношения модели поврежденной среды для материалов, подвергающихся терморadiационным воздействиям / С.А. Капустин, В.А. Горохов, О.Ю. Виленский, В.Б. Кайдалов, А.А. Руин // Проблемы прочности и пластичности. – 2012. – Вып. 74. – С. 5–15.

30. Волков И.А., Казаков Д.А., Коротких Ю.Г. Экспериментально-теоретические определения параметров уравнений механики поврежденной среды при усталости и ползучести // Вестник Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2012. – № 2. – С. 50–78.

31. Бондарь В.С., Данишин В.В., Семенов П.В. Нелинейные процессы накопления повреждений при нестационарных циклических нагрузениях // Проблемы прочности и пластичности. – 2012. – Вып. 75. – Ч. 2 – С. 96–104.

32. Бернанд-Конноли, Бью Куок, Бирон. Усталость коррозионно-стойкой стали 304 при испытаниях в условиях многоступенчатой контролируемой деформации // Теор. основы инж. расчетов. – 1983. – № 3. – С. 47–53.

33. Васин Р.А. Экспериментально-теоретическое исследование определяющих соотношений в теории упругопластических процессов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 387 с.

### References

1. Bondar V.S. Neuprugost'. Varianty teorii [Inelasticity. Variants of the theory]. Moscow: Fizmatlit, 2004. 144 p.

2. Bondar V.S., Danshin V.V. Plastichnost'. Proporcional'nye i neproporcional'nye nagruzhenija [Plasticity. Proportional and disproportionate loading]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 176 p.

3. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013. 194 p.

4. Volkov I.A., Korotkih Ju.G. Uravnenija sostojanija vjaskouprugoplasticheskikh sred s povrezhdenijami [The equation of state viscous elastoplastic media with injuries]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 424 p.

5. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation. *International Journal of Plasticity*, 2002, vol. 18, pp. 873-894.

6. Kang G., Liu Y., Ding J., Gao Q. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 838-860.

7. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. *Int. J. of Plasticity*, 2009. doi:10.1016/j.ijplas.2009.08.005.

8. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1642-1692.

9. Rahman S.M., Hassan T., Corona E. Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1756-1791.



10. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 1560-1587.

11. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting. *Int. J. of Plasticity*, 2010, vol. 26, pp. 711-730.

12. Dafalias Y.F., Feigenbaum H.P. Biaxial ratchetting with novel variations of kinematic hardening. *Int. J. of Plasticity*, 2011, vol. 27, pp. 479-491.

13. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions. *Int. J. of Plasticity*, 2012, vol. 35, pp. 44-66.

14. Novozhilov V.V. O sloznom nagruzhении i perspektivah fenomenologicheskogo podhoda k issledovaniju mikronaprjazhenij [About complex loading and prospects of the phenomenological approach to the study of microstresses]. *PMM*, 1964, vol. 28 (3), pp. 393-400.

15. Chaboche J.L., Dang-Van K., Cordier G. Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on SMiRT*. Div L, Berlin, 1979, paper no. L. 11/3.

16. Ishlinskij A.Ju. Obshhaja teorija plastichnosti s linejnym uprochneniem [General theory of plasticity with linear hardening]. *Ukrainian mathematical journal*, 1954, vol. 6 (3), pp. 314-324

17. Prager W. The theory of plasticity: A. Survey of Recent Achievements. *Proc. Inst. Mech. Engrs*. London, 1955, 169.41.

18. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial bausinger effect, *CEGB Report No. RD/B/N/ 731*, 1966.

19. Kadashevich Ju.I. O razlichnyh tenzorno-linejnyh sootnoshenijah v teorii plastichnosti [About the different tensor-linear correlations in the theory of plasticity]. *Issledovanija po uprugosti i plastichnosti*. Leningradskiy gosudarstvennyy universitet, 1967, vol. 6, pp. 39-45.

20. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity*, 1993, vol. 9, pp. 375-390.

21. Bondar V.S., Burchakov S.V., Danshin V.V. Matematicheskoe modelirovanie processov uprugoplasticheskogo deformirovanija i razrushenija materialov pri ciklicheskih nagruzhenijah [Mathematical modeling of the elastic-plastic deformation and fracture of materials under cyclic load-

ing]. *Mezhvuzovskij sbornik «Problemy prochnosti i plastichnosti»*, Nizhegorodskiy gosudarstvennyi universitet, 2010, vol. 72, pp. 18-27.

22. Novozhilov V.V., Rybakina O.G. O perspektivah postroenija kriterija prochnosti pri slozhnom nagruzenii [About the prospects of building the strength criterion under complex loading]. *Prochnost' pri malom chisle nagruzenija*. Moscow: Nauka, 1969, pp. 71-80.

23. Romanov A.N. Jenergeticheskie kriterii razrushenija pri malociklovom nagruzenii [Energy criteria destruction at low-cycle loading]. *Problemy prochnosti*, 1974, no. 1, pp. 3-10.

24. Bondar V.S., Gorohov V.B., Sannikov V.M. Issledovanie malociklovoj prochnosti obolochek vrashhenija pri slozhnom teplosilovom nagruzenii [Study of low-cycle strength of shells of revolution with complicated thermal loading]. *Vsesojuznyi mezhvuzovskiy sbornik «Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Mehanika deformiruemih sistem»*. Gorkovskiy universitet, 1979, vol. 12, pp. 120-126.

25. Guozheng Kang, Qing Gao, Lixun Cai, Yafang Sun. Experimental study on uniaxial and nonproportionally multiaxial ratcheting of SS304 stainless steel at room and high temperatures. *Nuclear Engineering and Design*, 2002, vol. 216, pp. 13-26.

26. Guozheng Kang, Qing Gao, Xianjie Yang. Uniaxial cyclic ratcheting and plastic flow properties of SS304 stainless steel at room and elevated temperatures. *Mechanics of Materials*, 2002, vol. 34, pp. 145-159.

27. Bondar V.S. Nekotorye novye rezul'taty issledovanija plastichnosti materialov pri slozhnom nagruzenii [Some new results plastic materials under complex loading]. *Uprugost' i neuprugost'*. Moscow: LENAND, 2006, pp. 94-109.

28. Gusenkov A.P. Prochnost' pri izotermicheskom i neizotermicheskom malociklovom nagruzenii [Strength in isothermal and non-isothermal low-cycle loading]. Moscow: Nauka, 1979, 295 p.

29. Kapustin S.A., Gorohov V.A., Vilenskij O.Ju., Kajdalov V.B., Ruin A.A. Sootnoshenija modeli povrezhdennoj sredy dlja materialov, podvergajushhihsja termoradiacionnym vozdeystvijam [The model may be damaged environment for the materials under thermoradiation effects]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2012, iss. 74, pp. 5-15.

30. Volkov I.A., Kazakov D.A., Korotkih Ju.G. Jeksperimental'no-teoreticheskie opredelenija parametrov uravnenij mehaniki povrezhdennoj sredy pri ustalosti i polzuchesti [Theoretical and experimental determination

of the parameters of the equations of mechanics of damaged environment with fatigue and creep]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2012, no. 2, pp. 50-78.

31. Bondar V.S., Danshin V.V., Semenov P.V. Nelinejnye processy nakoplenija povrezhdenij pri nestacionarnyh ciklicheskih nagruzhenijah [Nonlinear processes of damage accumulation in unsteady cyclic loadings]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2012, iss. 75, part 2, pp. 96-104.

32. Bernard-Konnoli, B'ju Kuok, Biron. Uсталost' korrozionnostojkoj stali 304 pri ispytaniyah v uslovijah mnogostupenchatoj kontroliruemoj deformacii [Fatigue stainless steel 304 during tests in the conditions of multi-controlled deformation]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov*, 1983, no. 3, pp. 47-53.

33. Vasin R.A. Jeksperimental'no-teoreticheskoe issledovanie opredel'jajushhih sootnoshenij v teorii uprugoplasticheskikh processov [Experimental and theoretical study of relations in the theory of elasto-plastic processes]. Thesis of doctors degree dissertation. Moscovskiy gosudarstvennyi universitet, 1987. 387 p.

### **Об авторах**

**Бондарь Валентин Степанович** (Москва, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Московского государственного машиностроительного университета (МАМИ) (107023, г. Москва, ул. Б.Семеновская, д. 38, e-mail: bondar@mami.ru).

**Даншин Владимир Васильевич** (Москва, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Теоретическая механика» Московского государственного машиностроительного университета (МАМИ) (107023, г. Москва, ул. Б.Семеновская, д. 38, e-mail: tm@mami.ru).

**Макаров Дмитрий Алексеевич** (Москва, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Информационные системы и дистанционные технологии» Московского государственного машиностроительного университета (МАМИ) (107023, г. Москва, ул. Б.Семеновская, д. 38, e-mail: makarovda@yandex.ru).

### **About the authors**

**Valentin S. Bondar** (Moscow, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of Science of RF, Head of Department of Theoretical Mechanics, Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI) (38, B.Semenovskaya st., 107023, Moscow, Russian Federation, e-mail: bondar@mami.ru).

**Vladimir V. Danshin** (Moscow, Russian Federation) – Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, Ass. Professor, Professor of Department of Theoretical Mechanics, Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI) (38, B.Semenovskaya st., 107023, Moscow, Russian Federation, e-mail: tm@mami.ru)

**Dmitry A. Makarov** (Moscow, Russian Federation) – Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, Ass. Professor, Department of Informational Systems and Distance Technology, Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI) (38, B.Semenovskaya st., 107023, Moscow, Russian Federation, e-mail: makarovda@yandex.ru).

Получено 14.04.2014

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Бондарь В.С., Данишин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагрузениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 125–152.

Please cite this article in English as:

Bondar V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Mathematical modelling of deformation and damage accumulation under cyclic loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No. 2. P. 125-152.