

DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.05

УДК 539.3

**В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев, В.И. Гульятев**

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

**О ПОСТРОЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ  
СТАЛИ 45 И ПРОВЕРКЕ ПОСТУЛАТА ИЗОТРОПИИ  
НА ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ  
ПРИ МНОГОКРАТНЫХ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ  
НАГРУЖЕНИЯХ**

Приведены результаты экспериментальных исследований при многократных знакопеременных нагружениях трубчатых стальных образцов при растяжении-сжатии и кручении. Эксперименты реализовывались на автоматизированном испытательном комплексе на сложное нагружение СН-ЭВМ имени А.А. Ильюшина в векторном пространстве деформаций (жесткое нагружение). По экспериментальным данным дана оценка эффекта Баушингера и величины вторичных пределов текучести при различных допусках на остаточную деформацию. Приведено влияние допуска на остаточную деформацию, радиус и положение центра сферической поверхности текучести в пространстве напряжений, используемой в теориях пластического течения. С увеличением допуска на остаточную деформацию параметр, характеризующий эффект Баушингера и радиус поверхности текучести, увеличиваются, а смещение ее центра уменьшается. С ростом длины дуги пластического деформирования параметр, характеризующий эффект Баушингера, уменьшается и стремится к некоторому стационарному значению. Установлено, что радиус поверхности текучести временно уменьшается, а затем увеличивается с ростом длины дуги пластического деформирования. Некоторые математические модели теории течения связывают это уменьшение радиуса поверхности текучести не с изменением внутренней структуры материала на мезоуровне и ориентацией микронапряжений, а с упругим разупрочнением начально-изотропного тела, ошибочно полагая при этом скорость деформирования отрицательной. Для реализованных типов экспериментальных траекторий многократного нагружения-разгрузки с изломами на 180 градусов проверка постулата изотропии А.А. Ильюшина показала, что по скалярным и векторным свойствам он выполняется достаточно хорошо.

**Ключевые слова:** пластичность, упругость, знакопеременное нагружение, эффект Баушингера, поверхность текучести, процессы деформирования, постулат изотропии

**V.G. Zubchaninov, A.A. Alekseev, V.I. Gulytyaev**

Tver State Technical University, Tver, Russian Federation

**ABOUT DRAWING OF THE YIELD SURFACE FOR STEEL 45  
AND VERIFICATION OF THE POSTULATE OF ISOTROPY  
ON STRAIGHT-LINE PATHS DURING REPEATED  
SIGN-VARIABLE LOADINGS**

In article are presented results of experimental studies at repeated sign-variable loadings of a thin-walled tubular specimen at stretching compression and torsion. The experiments were implemented on an automated computational and experimental installation for complex loading SN-EVM named A.A. Ilyushin in the vector space of deformation (rigid loading). According to experimental data evaluated the Bauschinger effect and magnitude of secondary yield strength at various admissions on residual deformation. Given the influence of the admission on residual deformation on radius function and position of the center of spherical yield surface in stress space, used in the plastic-flow theory. With increase in the admission at residual deformation the parameter characterizing Bauschinger effect and the radius function of the yield surface increases, and the displacement of its center decreases. With increasing length of the arc of plastic deformation parameter characterizing the Bauschinger effect decreases and tends to a stationary value. It is established that the radius of spherical yield surface makes temporary decrease and then increase with increasing length of the arc of the plastic deformation. Some mathematical models of the plastic-flow theory attributed this decrease in the radius of the yield surface not with change of internal structure of a material at meso-level and orientation of microtension, and with an elastic softening initially isotropic body, mistakenly believing in this strain rate negative. For the realized types of experimental path of repeated sign-variable loadings with breaks on 180 degrees verification of the postulate of isotropy by A.A. Ilyushin showed that on scalar and vector properties it is carried very well.

**Keywords:** plasticity, elasticity, sign-variable loading, Bauschinger effect, the yield surface, the deformation processes, the postulate of isotropy.

### **Введение**

Построение поверхности текучести в теории течения имеет функциональное значение для ее практических приложений. Начальное положение поверхности текучести в девиаторном пространстве напряжений соответствует сфере Мизеса. В процессе нагружения она изотропно расширяется и одновременно изменяет свою форму. На практике при построении различных математических моделей теории течения зачастую ее приближенно считают расширяющейся сферой, что нередко приводит к хорошим результатам. Вопрос о достоверности такого предположения вызвал необходимость ряда экспериментальных исследований для различных конструкционных материалов по установлению зависимости радиуса гипотетической сферической поверхности текучести от длины дуги траектории пластического деформирования. Первые систематические экспериментальные исследования бы-

ли проведены Г.Б. Тальповым, Р.А. Арутюняном, Ю.Г. Коротких [1–3]. Для различных конструкционных материалов установлено, что при переходе материала из упругого состояния в пластическое при простых лучевых нагружениях радиус гипотетической поверхности может либо сразу возрасти, либо сначала временно уменьшаться с последующим возрастанием. Причина этого кроется в структурном изменении материалов и развитии деформационной анизотропии в процессе пластического деформирования. Экспериментальное разрешение этой проблемы необходимо для обоснованного построения математических моделей пластического деформирования.

### 1. Основные положения

В теории процессов упругопластического деформирования тензоры напряжений и деформаций представляют [4–6] в виде суммы шаровых тензоров и тензоров-девиаторов:

$$\mathbf{T}_\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S_{ij}^*), \quad \mathbf{T}_\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + \Theta(\Theta_{ij}^*), \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_{ij}\Theta_{ij}}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

– модули шаровых тензоров (среднее напряжение и деформация) и тензоров девиаторов соответственно;

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \quad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}, \quad \Theta_{ij}^* = \frac{\Theta_{ij}}{\Theta}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

– компоненты девиаторов и направляющих тензоров напряжений и деформаций соответственно.

В случае простого пропорционального нагружения направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают, то есть  $(S_{ij}^*) = (\Theta_{ij}^*)$ , и для начально-изотропных материалов с учетом упругости объемной деформации связь между тензорами в физическом пространстве имеет вид

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\Theta}\Theta_{ij} = 2G_p\Theta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где  $K$  – модуль объемной упругости;  $G_p$  – пластический модуль сдвига. В качестве закона упрочнения материалов для любого сложного напряженно-деформированного состояния принимается универсальная единая диаграмма деформирования Роша и Эйхингера  $\sigma = \Phi(\varepsilon)$ .

При сложном нагружении направляющие тензоры напряжений и деформаций, а также их скоростей не равны между собой, то есть  $(S_{ij}^*) \neq (\varepsilon_{ij}^*)$ ,  $(\dot{S}_{ij}^*) \neq (\dot{\varepsilon}_{ij}^*)$ , и тензорам напряжений и деформаций в линейном шестимерном евклидовом пространстве  $E_6$  ставятся в соответствие векторы напряжений и деформаций

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^0 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}, & \bar{\mathbf{S}}^0 = S_0 \hat{\mathbf{i}}_0, & \bar{\boldsymbol{\sigma}} = S_k \hat{\mathbf{i}}_k, \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 + \bar{\boldsymbol{\Theta}}, & \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \varepsilon_0 \hat{\mathbf{i}}_0, & \bar{\boldsymbol{\Theta}} = \Theta_k \hat{\mathbf{i}}_k, \end{cases} \quad (k=1,2,\dots,5), \quad (5)$$

где  $\bar{\mathbf{S}}^0$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$  – векторы напряжений и деформаций в одномерном подпространстве объемного растяжения и сжатия с гидростатической осью, направление которой характеризуется единичным вектором  $\hat{\mathbf{i}}_0$ ;  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$  – векторы напряжений и деформаций формоизменения в пятимерном девиаторном подпространстве  $E_5$ ;  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}$  – фиксированный координатный базис А.А. Ильюшина к которому отнесено  $E_5$  [4–6],

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, & S_2 = \sqrt{2}\left(S_{22} + \frac{1}{2}S_{11}\right), \\ S_3 = \sqrt{2}S_{12}, & S_4 = \sqrt{2}S_{23}, & S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \varepsilon_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, & \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon_{11}, & \varepsilon_2 = \sqrt{2}\left(\varepsilon_{22} + \frac{1}{2}\varepsilon_{11}\right), \\ \varepsilon_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{12}, & \varepsilon_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{23}, & \varepsilon_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{13} \end{cases} \quad (6)$$

– компоненты (координаты) векторов напряжений и деформаций соответственно.

Модули векторов в пятимерном подпространстве  $E_5$  равны модулям тензоров-девиаторов напряжений и деформаций соответственно

$$\sigma = \sqrt{S_k S_k} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_k \varepsilon_k} = \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}, \quad (k=1,2,\dots,5), \quad (i, j=1,2,3). \quad (7)$$

Определяющие соотношения теории процессов для плоских траекторий имеют вид [6]

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{ds} = M_1 \frac{d\mathfrak{E}_k}{ds} + \left( \frac{d\bar{\sigma}}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \frac{S_k}{\bar{\sigma}}, & (k=1, 2, 3), \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\bar{\sigma}} \sin \vartheta_1, \end{cases} \quad (8)$$

где  $s$  – длина дуги траектории деформирования;  $\vartheta_1$  – угол сближения вектора напряжений  $\bar{\sigma}$  с касательной к траектории деформирования;  $\kappa_1$  – кривизна траектории деформирования;  $M_1, \frac{d\bar{\sigma}}{ds}$  – функционалы пластичности.

В теории течения В. Прагера [6, 7–9] принимают  $M_1 = 2G$ , и деформации в  $E_5$  разлагают на упругие  $\bar{\mathfrak{E}}^e$  и пластические  $\bar{\mathfrak{E}}^p$  части, а напряжения на активные напряжения  $\bar{\sigma}^0$  и добавочные остаточные микронапряжения  $\bar{\mathfrak{a}}$ :

$$d\bar{\mathfrak{E}} = d\bar{\mathfrak{E}}^e + d\bar{\mathfrak{E}}^p = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + d\bar{\mathfrak{E}}^p, \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^0 + \bar{\mathfrak{a}}, \quad (9)$$

где  $G$  – упругий модуль сдвига материала. Определяющие соотношения имеют вид

$$\begin{cases} d\bar{\mathfrak{E}} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + d\lambda \mathbf{grad} f, & \text{если } d\bar{\sigma} \cdot \mathbf{grad} f > 0, \\ d\bar{\mathfrak{E}} = d\bar{\mathfrak{E}}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, & \text{если } d\bar{\sigma} \cdot \mathbf{grad} f < 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $d\lambda = ds^p$  – приращение дуги  $s^p$  траектории пластического деформирования;  $f(\bar{\sigma}, \bar{\mathfrak{E}}^p)$  – функция нагружения, описывающая в  $E_5$  гипотетическую поверхность текучести Прагера, которая разделяет области активного пластического деформирования и упругой разгрузки. При упругой разгрузке поверхность текучести остается неизменной.

Все математические модели теории течения, основывающиеся на понятии поверхности текучести, отличаются ее формой. Обычно на практике ее считают сферой, которая может изменять свои размеры

и местоположение при неизменной форме (трансляционно-изотропное упрочнение):

$$2f = (\bar{\sigma} - \bar{a}) \cdot (\bar{\sigma} - \bar{a}) - C_p^2(s^p) = 0, \quad (11)$$

где  $C_p(s^p) = \sigma^0$  – скалярная функция изотропного упрочнения, зависящая от длины дуги траектории пластического деформирования  $s^p$  и равная радиусу поверхности текучести. При  $s^p = 0$  радиус гипотетической начальной поверхности текучести  $\sigma^0 = \sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$ , где  $\sigma_T$  – начальный предел текучести при простом нагружении, определяемый по техническому допуску на остаточную деформацию. За такой допуск при растяжении в теории пластичности, как правило, принимают  $\varepsilon_*^p = 0,2\% = 2 \cdot 10^{-3}$  ( $\Theta_*^p = 0,245\%$ ). При данном допуске на остаточную деформацию на основании постулата изотропии начальная поверхность текучести в девиаторном подпространстве  $E_5$  для начально изотропных тел соответствует сфере Мизеса. Установлено, что при меньших допусках на остаточную деформацию очертание сферы Мизеса может искажаться и терять свою форму [8]. На девиаторной плоскости окружность Мизеса и вписанный в нее шестиугольник Сен-Венана приобретают тройную симметрию [10]. Однако вследствие развития деформационной анизотропии в процессе нагружения поверхность текучести может вытягиваться в направлении развития процесса [6, 7].

В качестве закона упрочнения при сложном нагружении по траекториям малой и средней кривизны используется закон Одквиста-Ильюшина

$$\sigma = \Phi(s) \quad (12)$$

с параметром прослеживания процесса  $s \geq \Theta$ . Использование диаграммы (12) позволяет учесть эффект Баушингера, реализуемый при простых знакопеременных разгрузениях.

В данной работе рассматривается эффект Баушингера при простых знакопеременных разгрузениях-догружениях, которые периодически повторяются через специально подобранные равноотстоящие точки диаграммы (12). В каждой точке излома траектории  $K$  начала разгрузки при значении нового предела текучести  $\sigma_K^T$  эффект Баушингера оценивался безразмерным параметром [1, 11, 12]

$$\beta = \left| \sigma_M^T \right| / \sigma_K^T \quad (13)$$

при соответствующей величине дуги траектории  $s^P$  пластического деформирования. Здесь  $\sigma_M^T$  – вторичный предел текучести при разгрузке из точки  $K$  при «протыкании» поверхности текучести в точке  $M$  по диаметральному направлению, который определялся по допуску на остаточную деформацию  $\varepsilon_*^P$ . В этом случае радиус текущей изменяющейся сферической поверхности текучести

$$\sigma^0 = C_p(s^P) = \frac{1}{2}(\sigma_K^T - \sigma_M^T), \quad (14)$$

а смещение ее центра относительно начала координат

$$a = \sigma_K^T - C_p = \frac{1}{2}(\sigma_K^T + \sigma_M^T). \quad (15)$$

## **2. Экспериментальные исследования**

Экспериментальные исследования проводились в опытах при знакопеременном нагружении-разгрузении на автоматизированном испытательном комплексе на сложное нагружение СН-ЭВМ имени А.А. Ильюшина в лаборатории механических испытаний кафедры «Соппротивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета. Опыты реализовывались на цилиндрических тонкостенных образцах из стали 45 в состоянии поставки с площадкой текучести, которые имели стенки толщиной  $h=1$  мм, радиус срединной поверхности поперечного сечения  $R=15,5$  мм и длину рабочей части  $l=110$  мм. В испытании по программе № 1 образец подвергался многократному знакопеременному нагружению через равные приращения по растяжению  $\Delta\varepsilon_1=0,5\%$  (рис. 1), с последующим знакопеременным нагружением на  $|\Delta\varepsilon_1| \approx 0,75\%$  при сжатии [13]. В аналогичном испытании по программе № 2 образец подвергался многократному нагружению при кручении с приращениями  $\Delta\varepsilon_3=0,5\%$  (рис. 2) и последующим знакопеременным нагружением на  $|\Delta\varepsilon_3| \approx 0,75\%$ . В среднем опыты в режиме непрерывного деформирования образцов с постоянной скоростью

$\dot{\epsilon} = 10^{-6} \text{ с}^{-1}$  продолжались в течение 8–9 часов. В испытании на кручение всю запланированную траекторию осуществить не удалось, поскольку образец несколько ранее потерял устойчивость.

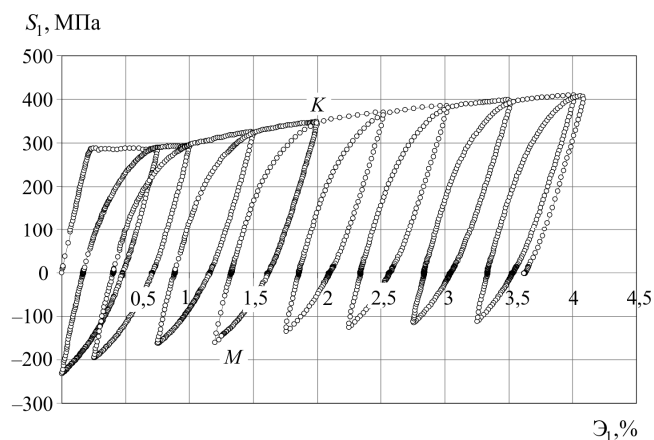


Рис. 1. Программа № 1. Локальная диаграмма знакопеременного нагружения при растяжении-сжатии  $S_1 - \mathcal{E}_1$

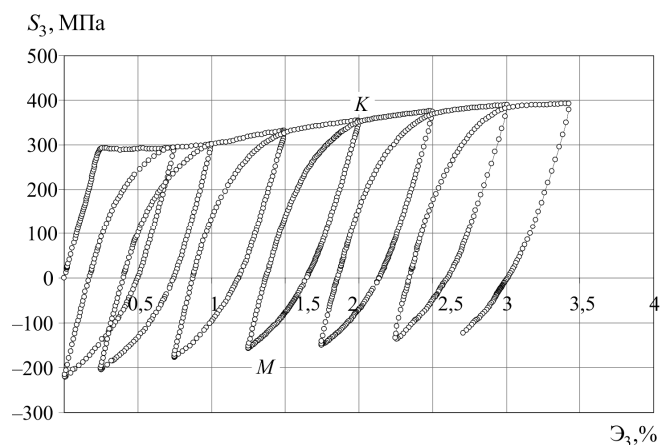


Рис. 2. Программа № 2. Локальная диаграмма знакопеременного нагружения при кручении  $S_3 - \mathcal{E}_3$

На рис. 3 приведены полученные на основе обработки экспериментальных данных осредненные зависимости параметра  $\beta$ , характеризующего эффект Баушингера, от длины дуги траектории пластического деформирования  $s^p$ , на рис. 4 – изменение радиуса  $\sigma^0$  гипотетической сферической поверхности текучести, а на рис. 5 – смещение



центра гипотетической сферической поверхности текучести. На этих рисунках затушеванные экспериментальные точки соответствуют опыту при растяжении-сжатии, белые – при кручении. Представленные на рис. 3–5 зависимости построены при четырех различных допусках на остаточную деформацию при определении вторичных пределов текучести при растяжении  $\varepsilon_*^p = (0,2; 0,15; 0,01; 0,05)\%$ , что в подпространстве  $E_5$  соответственно составляет  $\vartheta_*^p = (0,245; 0,18325; 0,1225; 0,06125)\%$ . При кручении данный допуск  $\gamma_*^p$  на остаточную сдвиговую деформацию при зависимости  $\vartheta_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{12} = \gamma/\sqrt{2}$ , где  $\gamma = 2\varepsilon_{12}$ , равен  $\sqrt{2}\vartheta_*^p$  и составлял соответственно 0,346; 0,259; 0,173; 0,087 %.

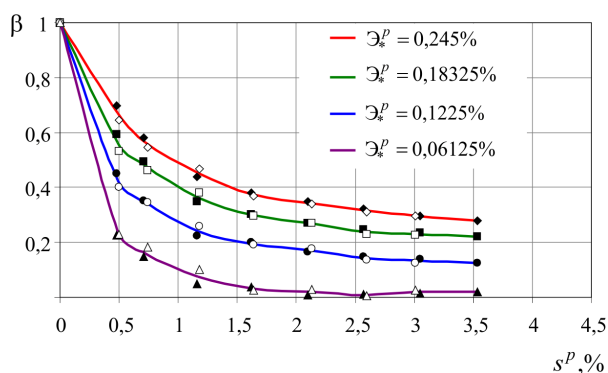


Рис. 3. Изменение коэффициента  $\beta$  от  $s^p$ , характеризующего эффект Баушингера

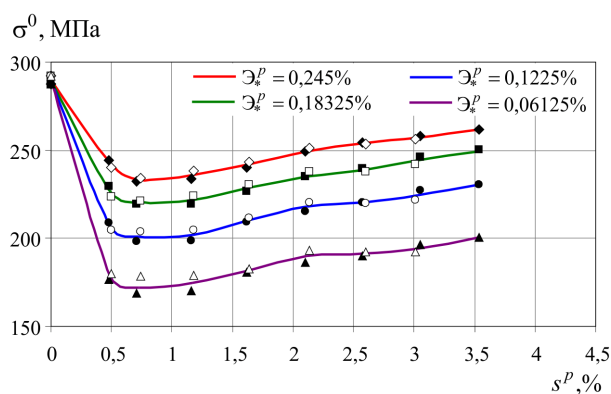


Рис. 4. Изменение радиуса гипотетической поверхности текучести

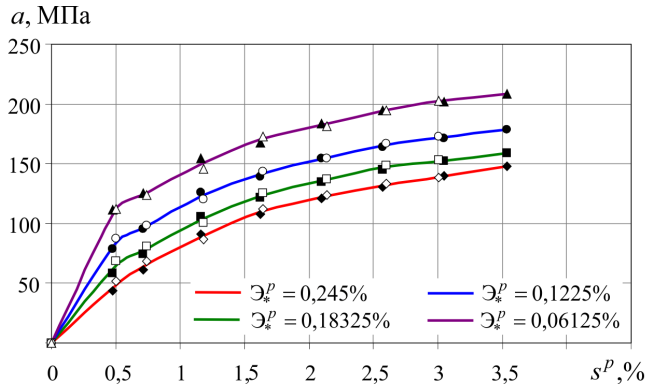


Рис. 5. Смещение центра гипотетической поверхности текучести

Из полученных диаграмм видно, что с ростом допуска на остаточную деформацию радиус поверхности текучести  $\sigma^0$  увеличивается, а смещение ее центра  $a$  уменьшается. Максимальное отклонение для рассмотренных крайних допусков на остаточную деформацию  $\epsilon_*^P = 0,2\%$  и  $\epsilon_*^P = 0,05\%$  для радиуса  $\sigma^0$  гипотетической поверхности текучести составляет примерно 45 % (см. рис. 4), а для смещения ее центра – примерно 55 % (см. рис. 5). При максимально достигнутых уровнях пластической деформации  $s^P$  в эксперименте значения параметра  $a$  для всех рассмотренных допусков на остаточную деформацию не превышали значения начальных пределов текучести  $\sigma^T$ . Таким образом, центры текущих поверхностей находились внутри начальной поверхности текучести. При этом чем меньше допуск на остаточную деформацию, тем существенней влияние смещения центра поверхности текучести. Если взять отношение

$$\frac{a}{r} = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad (16)$$

которое напрямую зависит только от параметра  $\beta$ , то при максимально достигнутых уровнях пластической деформации  $s^P$  при допуске  $\epsilon_*^P = 0,2\%$  оно составляет 0,55, а при допуске  $\epsilon_*^P = 0,05\%$  равно 0,98.

Проведенные экспериментальные исследования по многозвенным траекториям при знакопеременном нагружении-разгрузении позволяют проверить постулат изотропии А.А. Ильюшина [5, 14, 15], ко-

торый проверялся многими авторами по различным программам деформирования на разных материалах [16–22]. Траектория деформирования по программе № 2 может быть получена путем вращения траектории по программе № 1 на угол 90 градусов в плоскости  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ . Для проверки выполнения постулата изотропии для обеих траекторий построены совмещенные глобальные диаграммы деформирования  $\sigma - \mathcal{E}$  (рис. 6), на которых видно что экспериментальные диаграммы обеих траекторий с достаточной степенью точности совпадают между собой.

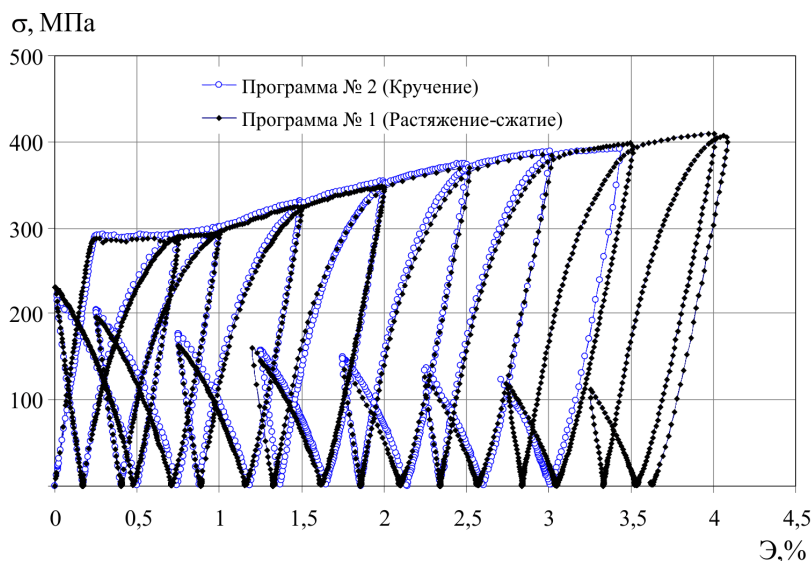


Рис. 6. Программы № 1 и 2. Глобальные диаграммы  $\sigma - \mathcal{E}$

### Заключение

По результатам проведенных экспериментальных исследований и их обработки, а также исследований на других материалах [23, 24] можно сделать следующие выводы.

1. Эффект Баушингера для стали 45 сопровождается уменьшением по модулю вторичного предела текучести  $\sigma_M^T$  и параметра  $\beta$  на начальном локальном участке процесса деформирования после излома с ростом длины дуги  $s^P$ . Параметр  $\beta$  при различных допусках на остаточную деформацию стремится к некоторому стационарному значению при  $s^P > (3...4)\%$ .

2. С ростом допуска на остаточную деформацию  $\varepsilon_*^p$  параметр  $\beta$  увеличивается и для общепринятого допуска  $\varepsilon_*^p = 0,2\%$  ( $\varepsilon_*^p = 0,245\%$ ) составляет примерно 0,3 при достигнутом уровне  $s^p$ .

3. Радиус гипотетической поверхности текучести  $\sigma^0 = C_p(s^p)$  с ростом  $s^p$  испытывает временное понижение типа «нырка» и с ростом допуска на остаточную деформацию до  $\varepsilon_*^p = 0,2\%$  приближается по своей форме к сфере. При этом отклонение радиуса при крайних значениях допуска на остаточную деформацию достигает 45 %.

4. Временное уменьшение  $\sigma^0 = C_p(s^p)$  связано с изменением внутренней структуры материала на мезоуровне, изменением ориентации микронапряжений с ростом деформаций, но не с его разгрузкой. В каждый момент нагружения по внутренней структуре – это уже другой материал с иными механическими характеристиками [25].

5. Отклонения параметра смещения центра предельной поверхности  $a(s^p)$  для рассмотренных различных допусков на остаточную деформацию при определении пределов текучести достигают 55 %.

6. В некоторых математических моделях теории течения уменьшение радиуса гипотетической сферической поверхности текучести  $\sigma^0 = C_p(s^p)$  не только при простом, но и сложном нагружении связывают не с изменением структуры материала на мезоуровне и ориентацией микронапряжений, а с упругим разупрочнением начально-изотропного тела, ошибочно полагая при этом скорость деформирования  $\dot{s}^p < 0$ , что невозможно, так как  $s$  и  $\dot{s}$  всегда положительны.

7. Для реализованных типов траекторий многократного нагружения-разгрузки с изломами на 180 градусов постулат изотропии по скалярным свойствам выполняется достаточно хорошо. Что касается векторных свойств, то они выполняются в рамках точности теории простых процессов.

### Библиографический список

1. Талыпов Г.Б. Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. – Л.: Изд-во ленингр. ун-та, 1968. – 135 с.

2. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004. – 252 с.

3. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.

4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

5. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 273 с.

6. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.

7. Зубчанинов В.Г. О соотношениях между напряжениями и деформациями в теории пластичности при сложном нагружении // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. ННГУ. – 2011. – № 73. – С. 120–131.

8. Новожилов В.В. Вопросы механики сплошных сред. – Л.: Судостроение, 1989. – 397 с.

9. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2.: Математические основы теории разрушения / под ред. Г. Либовица. – М.: Мир, 1975. – С. 336–520.

10. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.

11. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 264 с.

12. Экспериментальное исследование упругопластического поведения стали при простом и сложном циклическом деформировании / А.С. Вавакин, В.В. Викторов, М. Сливовский, Л.П. Степанов. – М., 1986. – 175 с. Деп. в ВИНТИ, № 2607-В86.

13. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультияев В.И. Исследование эффекта Баушингера и границы текучести при упругопластическом деформировании металлов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 94–105.

14. Ильюшин А.А. Вопросы общей теории пластичности // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 3. – С. 399–411.

15. Ильюшин А.А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 3–29.

16. Ленский В.С. Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении // Известия АН СССР. ОТН. – 1960. – № 5. – С. 93–100.

17. Ленский В.С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58–82.

18. Васин Р.А., Никиточкин А.Н., Огибалов П.М. О проверке постулата изотропии при переменной скорости деформирования // Механика полимеров. – 1975. – № 2. – С. 224–227. DOI: 10.1007/BF00854720

19. Шевченко Ю.Н., Тормахов Н.Н. Постулат изотропии для конечных деформаций // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 17–27. DOI: 10.1007/BF02682057

20. Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. Исследование закономерностей термовязкопластического деформирования твердого тела при неизотермических сложных процессах нагружения. Ч. 1 // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, № 3. – С. 3–34. DOI: 10.1023/A:1011331929237

21. Зубчанинов В.Г. Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 1. – С. 27–37. DOI: 10.3103/S0025654411010043

22. Щербо А.Г., Завистовский В.Э. Экспериментальная проверка постулата изотропии // Вестник Полоцкого государственного университета. Фундаментальные науки. – 2008. – № 9. – С. 147–153.

23. Об экспериментальном исследовании эффекта Баушингера и поверхности текучести стали У8 / В.Г. Зубчанинов, В.И. Гультяев, А.А. Алексеев, В.Н. Ведерников // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2013. – № 2 (16). – С. 55–62.

24. Зубчанинов В.Г. Алексеев А.А. К вопросу об исследовании эффекта Баушингера и построении поверхности текучести // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2012. – № 4(14). – С. 40–45.

25. Голенков В.А., Малинин В.Г., Малинина Н.А. Структурно-аналитическая мезомеханика и ее приложения. – М.: Машиностроение, 2009. – 634 с.

## References

1. Talypov G.B. Plastichnost' i prochnost' stali pri slozhnom nagruzhenii [Plasticity and strength of steel under complex loading]. Leningradskii universitet, 1968. 135 p.

2. Arutiunian R.A. Problema deformatsionnogo stareniiia i dlitel'nogo razrusheniia v mekhanike materialov [Problem of deformation aging and long destruction in mechanics of materials]. Sankt-Peterburgskii universitet, 2004. 252 p.

3. Volkov I.A., Korotkikh Iu.G. Uravneniia sostoianiia viazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniiami [Equation of state viscoelastoplastic environments with damages]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 424 p.

4. Ilyushin A.A. Mekhanika sploshnoy sredy [Continuum Mechanics]. Moscovskii gosudarstvennyi universitet, 1990. 310 p.

5. Ilyushin A.A. Plastichnost. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii [Plasticity. Bases of the General Mathematical Theory]. Moscow: Akademiia nauk USSR, 1963. 273 p.

6. Zubchaninov V.G. Mekhanika protsessov plasticheskikh sred [Mechanics of processes in plastic environments]. Moscow: Fizmatlit, 2010. 352 p.

7. Zubchaninov V.G. O sootnosheniyakh mezhdru napryazheniyami i deformatsiyami v teorii plastichnosti pri slozhnom nagruzhenii [About relations between stress and strain in the plasticity theory at complex loading]. *Problemy prochnosti i plastichnosti: mezhvuzovskiy sbornik Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2011, no. 73, pp. 120-131.

8. Novozhilov V.V. Voprosy mekhaniki sploshnykh sred [Questions of continuum mechanics]. Leningrad: Sudostroyeniye, 1989. 397 p.

9. Paul B. Makroskopicheskiye kriterii plasticheskogo techeniya i khrupkogo razrusheniya [Macroscopic criteria for plastic flow and brittle fracture]. *Razrusheniye. Vol. 2: Matematicheskiye osnovy teorii razrusheniya*. Ed. H. Liebowitz. Moscow: Mir, 1975, pp. 336-520.

10. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti [The mathematical theory of plasticity]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p.

11. Moskvitin V.V. Plastichnost' pri peremennykh nagruzheniyakh [Plasticity under alternating loadings]. Moscovskii gosudarstvennyi universitet, 1965. 264 p.

12. Vavakin A.S., Viktorov V.V., Slivovskii M., Stepanov L.P. Eksperimental'noe issledovanie uprugoplasticheskogo povedeniia stali pri prostom i slozhnom tsiklicheskom deformirovanii [Experimental study of

elastic-plastic behavior of steel under simple and complex cyclic deformation]. Moscow, 1986. 175 p.

13. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gulytyaev V.I. Issledovanie efekta Baushingera i granitsy tekuchesti pri uprugoplasticheskom deformirovani metallov [Experimental study of Baushinger effect and yield surface at elastoplastic deformation of metals]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 1, pp. 94-105.

14. Ilyushin A.A. Voprosy obshchei teorii plastichnosti [Questions of the general theory of plasticity]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 1960, vol. 24, no. 3, pp. 399-411.

15. Ilyushin A.A. Ob osnovakh obshchei matematicheskoi teorii plastichnosti [About bases of the general mathematical theory plasticity]. *Voprosy teorii plastichnosti*. Moscow: Akademiia nauk USSR, 1961, pp. 3-29.

16. Lenskii V.S. Nekotorye novye dannye o plastichnosti metallov pri slozhnom nagruzhении [Some new data on the plasticity of metals under complex loading]. *Izv. Akademii nauk USSR. OTN, Mechanics and Mechanical Engineering*, 1960, no. 5, pp. 93-100.

17. Lenskii V.S. Eksperimental'naiia proverka osnovnykh postulatov obshchei teorii uprugoplasticheskikh deformatsii [Experimental verification of the fundamental postulates of the general theory of elastoplastic deformations]. *Voprosy teorii plastichnosti*. Moscow: Akademiia nauk USSR, 1961, pp. 58-82.

18. Vasin R.A., Nikitovich A.N., Ogibalov P.M. O proverke postulata izotropii pri peremennom skorosti deformirovaniya [Verification of the postulate of isotropy during variable-rate deformation]. *Polymer Mechanics*, 1975, vol. 11, no. 2. pp. 192-194. DOI: 10.1007/BF00854720

19. Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N. Postulat isotropii dlya konechnykh deformatsii [Isotropy postulate for finite deformations]. *International Applied Mechanics*, 1999, vol. 35, no. 1, pp. 13-23. DOI: 10.1007/BF02682057

20. Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G. Issledovanie zakonomernostei termovyazkoplasticheskogo deformirovaniia tverdogo tela pri neizotermicheskikh slozhnykh protsessakh nagruzheniia [Studying the laws of the thermoviscoplastic deformation of a solid under nonisothermal complex loading]. P. 1. *International Applied Mechanics*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 287-316. DOI: 10.1023/A:1011331929237



21. Zubchaninov V.G. Postulat isotropii i zakon slozhnoi razgruzki sploshnykh sred [Isotropy postulate and the law of complex unloading of continua]. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 1, pp. 21-29. DOI: 10.3103/S0025654411010043

22. Shcherbo A.G., Zavistovskii V.E. Eksperimental'naia proverka postulata izotropii [Experimental verification of the postulate of isotropy]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Fundamentalnye nauki*, 2008, no. 9, pp. 147-153.

23. Zubchaninov V.G., Gulyaev V.I., Alekseev A.A., Vedernikov V.N. Ob eksperimentalnom issledovanii efekta Baushingera i poverkhnosti tekuchesti stali U8 [About the experimental study of Baushinger effect and the yield surface on carbon steel]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Mekhanika predelnogo sostoyaniya*, 2013, no. 2 (16), pp. 55-62.

24. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A. K voprosu ob issledovanii efekta Baushingera i postroenii poverkhnosti tekuchesti [About the problem of research Baushinger effect and drawing the yield surface]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Mekhanika predelnogo sostoyaniya*, 2012, no. 4 (14), pp. 40-45.

25. Golenkov V.A., Malinin V.G., Malinina N.A. Strukturno-analiticheskaiya mezomekhanika i ee prilozheniia [Structural-analytical mesomechanics and its applications]. Moscow: Mashinostroenie, 2009. 634 p.

### **Об авторах**

**Зубчанинов Владимир Георгиевич** (Тверь, Россия) – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета (170026, г. Тверь, Наб. А. Никитина, 22, e-mail: vgz@rambler.ru).

**Алексеев Андрей Алексеевич** (Тверь, Россия) – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета (170026, г. Тверь, Наб. А. Никитина, 22, e-mail: alexeew@bk.ru).

**Гультияев Вадим Иванович** (Тверь, Россия) – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой строительства и энергетики Тверского государственного технического университета (170026, г. Тверь, Наб. А. Никитина, 22, e-mail: vig0@mail.ru).

#### **About the authors**

**Vladimir G. Zubchaninov** (Tver, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of the Resistance of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University (22, Nab. A. Nikitina, 170026, Tver, Russian Federation, e-mail: vgz@rambler.ru).

**Andrey A. Alekseev** (Tver, Russian Federation) – Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Department of the Resistance of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University (22, Nab. A. Nikitina, 170026, Tver, Russian Federation, e-mail: alexeev@bk.ru)

**Vadim I. Gulytyaev** (Tver, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Ass. Professor, Head of the Department of the Building and Energy, Tver State Technical University (22, Nab. A. Nikitina, 170026, Tver, Russian Federation, e-mail: vig0@mail.ru)

Получено 12.06.2014

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультияев В.И. О построении поверхности текучести стали 45 и проверке постулата изотропии на прямолинейных траекториях при многократных знакопеременных нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 3. – С. 71–88. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.05

Please cite this article in English as:

Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gulytyaev V.I. About drawing of the yield surface for steel 45 and verification of the postulate of isotropy on straight-line paths during repeated sign-variable loadings. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No. 3. Pp. 71-88. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.05